PAUL-ANDRÉ MEYER

Temps d'arrêt algébriquement prévisibles

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 6 (1972), p. 159-163

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1972__6__159_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1970/71

TEMPS D'ARRÊT ALGÉBRIQUEMENT PRÉVISIBLES

exposé de P.A.Meyer

Depuis quelques années, la théorie des processus de Markov a eu besoin de résultats " algébriques" très simples sur les familles de tribus, les opérateurs de translation et de meurtre, les temps d'arrêt, etc. Par exemple, Courrège et Priouret ont donné une caractérisation simple des temps d'arrêt T et des tribus $\underline{\underline{F}}_T$ qui leur correspondent, au moyen de certaines relations d'équivalence naturelles sur les espaces de trajectoires. Nous allons ici faire la même chose pour les temps d'arrêt prévisibles et les tribus $\underline{\underline{F}}_{T-}$ correspondantes

Nous allons utiliser ci-dessous les propriétés des espaces de Blackwell. Rappelons qu'un espace mesurable $(E,\underline{\underline{E}})$ est dit de Blackwell si la tribu $\underline{\underline{E}}$ est séparable, et si pour toute variable aléatoire réelle X sur $(E,\underline{\underline{E}})$, l'image $X(E)$ est un ensemble souslinien dans $\mathbb{R}$. Cela revient à dire que si l'on passe au quotient par la relation d'équivalence dont les classes sont les atomes de $\underline{\underline{E}}$, l'espace devient isomorphe à un espace souslinien de $\mathbb{R}$, muni de sa tribu borélienne. Si $\underline{\underline{F}}$ est alors une sous-tribu séparable de $\underline{\underline{E}}$, et si elle a les mêmes atomes que $\underline{\underline{E}}$, elle est alors identique à $\underline{\underline{E}}$. Noter que toute tribu séparable contenue dans une tribu de Blackwell est elle même de Blackwell.

On pourrait peut être débarrasser cet exposé de l'utilisation des espaces de Blackwell - mais je n'ai pas cherché à le faire.

CARACTERISATION DE LA TRIBU $\underline{\underline{F}}_{T-}$

Notations $(\Omega,\underline{\underline{F}})$ est un espace de Blackwell ; $(X_t)_{t\geq 0}$ est un processus continu à droite à valeurs dans un espace E polonais (par exemple). On introduit la famille de tribus naturelle du processus.

$$\underline{\underline{F}}^o_t = \underline{\underline{T}}(X_s \ , \ s\leq t) \qquad ; \quad \underline{\underline{F}}^o = \underline{\underline{T}}(X_s \ , \ s\geq 0 \ )$$

Nous allons commencer par travailler sur des fonctions $\underline{\underline{F}}^o$-mesurables et des temps d'arrêt de la famille $(\underline{\underline{F}}^o_{t+})$. Puis nous affaiblirons ces hypothèses (et nous supprimerons la propriété de Blackwell de Ω, au moins en partie).

Si T est une fonction positive sur Ω , nous introduirons les relations d'équivalence R_T et R_{T+} que voici

$$(\omega \equiv \omega' \ (R_T)) \Leftrightarrow (\ T(\omega)=T(\omega') \text{ et } X_s(\omega)=X_s(\omega') \text{ pour } 0 \leq s \leq T(\omega))$$

$$(\omega \equiv \omega' (R_{T+})) \Leftrightarrow (\ T(\omega)=T(\omega') \text{ et il ex. } h>0 \ ; \ X_s(\omega)=X_s(\omega'),\ 0 \leq s < T+h)$$

A titre d'introduction, rappelons les résultats de Courrège et Priouret, que nous démontrerons sans utiliser les opérateurs d'arrêt, mais en nous servant des propriétés des espaces de Blackwell.

PROPOSITION 1. Soit T une fonction $\underline{\underline{F}}$ -mesurable positive. Alors T est un temps d'arrêt de la famille $(\underline{\underline{F}}_t^o)$ si et seulement si

(1) $(T(\omega) \leq t\ ,\ \omega \equiv \omega'\ (R_t)) \Rightarrow (T(\omega')=T(\omega))$

Un ensemble $A \in \underline{\underline{F}}$ appartient alors à $\underline{\underline{F}}_T^o$ si et seulement s'il est saturé pour (R_T). De même, T est un temps d'arrêt de la famille $(\underline{\underline{F}}_{t+}^o)$ si et seulement si

(2) $(T(\omega) < t\ ,\ \omega \equiv \omega' (R_t\ )) \Rightarrow (T(\omega)=T(\omega')\ )$

et A est $\underline{\underline{F}}_{T+}^o$-mesurable si et seulement s'il est saturé pour R_{T+} .

DEMONSTRATION. Tout élément de $\underline{\underline{F}}_t^o$ est saturé pour R_t . Inversement si $A \in \underline{\underline{F}}$ est saturé pour R_t , les tribus $\underline{\underline{F}}_t^o$ et $\underline{\underline{F}}_t^o \vee A$ sont séparables, ont les mêmes atomes, et la seconde contient la première. D'après le th. de Blackwell, elles sont égales et $A \in \underline{\underline{F}}_t^o$.

Si T est un temps d'arrêt de la famille $(\underline{\underline{F}}_t^o)$, on a $\{T \leq t\} \in \underline{\underline{F}}_t^o$, d'où (1). Réciproquement, (1) $\Rightarrow (\{T \leq t\} \in \underline{\underline{F}}_t^o\ )$. Si $A \in \underline{\underline{F}}_T^o$, $\omega \in A$, $\omega' \equiv \omega\ (R_T)$ on a en posant $t=T(\omega)$ $A \cap \{T=t\} \in \underline{\underline{F}}_t^o$, $\omega \in A \cap \{T=t\}$, $\omega' \equiv \omega(R_t)$, donc $\omega' \in A$ et A est R_T-saturé. Inversement, si A est R_T-saturé, $A \cap \{T \leq t\}$ est R_t-saturé et appartient à $\underline{\underline{F}}_t^o$ pour tout t , donc $A \in \underline{\underline{F}}_T^o$.

Pour (2), on exprime que T est un temps d'arrêt en écrivant que $\{T<t\}$ est R_t-saturé pour tout t. La fin est laissée au lecteur.

Nous introduisons maintenant la nouvelle relation d'équivalence R_{T-} :

$$(\omega \equiv \omega' \ (R_{T-})) \Leftrightarrow (T(\omega)=T(\omega'),\ X_0(\omega)=X_0(\omega') \text{ et } X_s(\omega)=X_s(\omega') \text{ pour } 0<s<T(\omega)\ )$$

et nous démontrons la proposition suivante :

PROPOSITION 2 . Soit T un temps d'arrêt de la famille $(\underline{\underline{F}}_{t+}^o)$, et soit $A \in \underline{\underline{F}}$. Alors

$$(A \in \underline{\underline{F}}_{T-}^o\ ) \Leftrightarrow (\ A \text{ est saturé pour } R_{T-}\ ) .$$

DEMONSTRATION. La tribu $\underline{\underline{F}}^o_{T-}$ est par définition engendrée par les ensembles de la forme $A\cap\{t<T\}$, $A\in\underline{\underline{F}}^o_t$; elle est donc séparable, et formée d'ensembles saturés pour R_{T-} . Si nous montrons que les classes d'équivalence pour R_{T-} sont des réunions d'atomes de $\underline{\underline{F}}^o_{T-}$, nous aurons gagné : soit alors en effet $A\in\underline{\underline{F}}$ saturé pour R_{T-} ; les tribus $\underline{\underline{F}}^o_{T-}$ et $\underline{\underline{F}}^o_{T-}\vee A$ auront mêmes atomes, et seront donc identiques.

Soient donc ω et ω' appartenant au même atome de $\underline{\underline{F}}^o_{T-}$. Comme T est $\underline{\underline{F}}^o_{T-}$-mesurable, nous avons $T(\omega)=T(\omega')$; de même $X_0(\omega)=X_0(\omega')$. Enfin, soit $s<T(\omega)$, et soit $X_s(\omega)=x$; l'ensemble $\{X_s=x\}\cap\{s<T\}$ appartient à $\underline{\underline{F}}^o_{T-}$ et contient ω, donc ω', et $X_s(\omega')=x$ aussi. On en déduit que $\omega\equiv\omega'(R_{T-})$.

CARACTERISATION DE LA TRIBU PREVISIBLE

Conservons les notations et hypothèses précédentes. Nous appellerons tribu prévisible et tribu bien-mesurable (sans référence à aucune mesure sur Ω) les tribus engendrées respectivement sur $\overline{\mathbb{R}}_+\times\Omega$ par les processus adaptés à la famille $(\underline{\underline{F}}^o_{t+})$ et continus à gauche, resp. à droite.

Posons $\overline{\Omega} = \overline{\mathbb{R}}_+\times\Omega$, $\overline{\underline{\underline{F}}} = \underline{\underline{B}}(\overline{\mathbb{R}}_+)\times\underline{\underline{F}}$. Notons Z la première projection. Posons aussi, ∂ désignant un point adjoint à E comme d'habitude

$$\begin{aligned}\overline{X}_t(r,\omega) &= X_t(\omega) \text{ si } r>t\\ &= \partial \text{ si } r\leq t\end{aligned}$$

Noter que chaque variable aléatoire $\overline{X}_t$ est un processus adapté continu à gauche sur Ω , et que le processus $(\overline{X}_t)$ sur $\overline{\Omega}$ est continu à droite. Nous introduirons, sur l'espace de Blackwell $(\overline{\Omega},\overline{\underline{\underline{F}}})$, la famille de tribus naturelle $\overline{\underline{\underline{F}}}^o$, $\overline{\underline{\underline{F}}}^o_t$ du processus $(\overline{X}_t)$. L'utilisation de ce processus est une jolie idée de H. Föllmer, à qui est emprunté le lemme suivant :

LEMME. Z est un temps d'arrêt de la famille $(\overline{\underline{\underline{F}}}^o_{t+})$, et la tribu prévisible $\underline{\underline{P}}$ est égale à $\overline{\underline{\underline{F}}}^o_{Z-}$.

DEMONSTRATION. $Z(r,\omega)=r = \inf \{ t \text{ rationnels} , \overline{X}_t(r,\omega)= \partial\}$. La tribu $\underline{\underline{P}}$ est engendrée par les ensembles $\{0\}\times A$ $(A\in\underline{\underline{F}}^o_0)$ et $]t,\infty]\times A$ $(A\in\underline{\underline{F}}^o_{t-})$. On peut remplacer A par $\{X_0\in B\}$ dans le premier cas, par $\{X_s\in B\}$ ($s<t$) dans le second, et l'ensemble s'écrit alors $\{\overline{X}_0\in B, Z=0\}$ ou $\{\overline{X}_s\in B,\ t<Z\}$. On retrouve ainsi exactement les générateurs de $\overline{\underline{\underline{F}}}^o_{Z-}$.

Nous appliquons maintenant la proposition 2 :

PROPOSITION 3. Soit (H_t) un processus $\underline{\underline{B}}(\bar{\mathbb{R}}_+)\times\underline{\underline{F}}$ -mesurable sur Ω. Pour qu'il soit prévisible, il faut et il suffit que

$$\forall r\in[0,\infty]\ \forall\omega\ \forall\omega'\ (\ H_s(\omega)=H_s(\omega')\ \text{pour } s<r) \Rightarrow (H_r(\omega)=H_r(\omega'))$$

DEMONSTRATION. Regarder la définition de $\bar{R}_{Z-}$.

Nous dirons maintenant qu'un temps d'arrêt T de la famille $(\underline{\underline{F}}^o_{t+})$ est algébriquement prévisible si

$$\forall\omega\ \forall\omega'\ (X_s(\omega)=X_s(\omega')\ \text{pour } s<T(\omega)) \Rightarrow (T(\omega)=T(\omega'))$$

Posons comme d'habitude $A_t=0$ pour $t<T$, $A_t=1$ si $t\geq T$; le processus (A_t) est l'indicatrice de l'intervalle stochastique $[T,\infty]$; celui-ci est prévisible si et seulement si le graphe $[T]$ de T est prévisible , car $]T,\infty]$ est toujours prévisible. Grâce à la proposition 3, on vérifie maintenant que T est algébriquement prévisible si et seulement si (A_t) est un processus prévisible. En effet

- supposons (A_t) prévisible ; soient ω et ω', $T(\omega)=r$, supposons $X_s(\omega)=X_s(\omega')$ pour $s<r$. D'après la prop.3 on a $A_r(\omega')=A_r(\omega)=1$, donc $T(\omega')\leq r$. Recommençons le raisonnement avec $r'=T(\omega')$, il vient $T(\omega)\leq r'$, donc $T(\omega)=T(\omega')$, et T est algébriquement prévisible.
- Inversement, supposons T algébriquement prévisible. Supposons $X_s(\omega)=X_s(\omega')$ pour $s<r$. Si $T(\omega)\leq r$ on a $T(\omega)=T(\omega')$, donc $A_r(\omega)=A_r(\omega')$ De même si $T(\omega')\leq r$. Enfin, si $T(\omega)>r$, $T(\omega')>r$ on a $A_r(\omega)=A_r(\omega')=0$.

On a donc prouvé,

PROPOSITION 4. T algébriquement prévisible $\Leftrightarrow [T]$ prévisible.

SUPPRESSION DES HYPOTHESES AUXILIAIRES

Considérons maintenant un espace probabilisé $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ complet, qui soit la complétion d'un espace de Blackwell $(\Omega,\underline{\underline{G}})$. C'est une situation assez fréquente : par exemple, prenons pour Ω l'ensemble de toutes les applications continues à droite de $\mathbb{R}_+$ dans E, X_t les coordonnées , $\underline{\underline{F}}^o$ la tribu qu'elles engendrent, P une loi quelconque sur $(\Omega,\underline{\underline{F}}^o)$, et $\underline{\underline{F}}$ la complétée . On sait que P est portée par un sous-ensemble $\underline{\underline{F}}^o$-mesurable et lusinien U de Ω. La tribu de Blackwell $\underline{\underline{G}}$ est alors engendrée par les sous-ensembles $\underline{\underline{F}}^o$-mesurables de U, et par U^c.

Soit (X_t) un processus sur $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$, indistinguable d'un processus continu à droite. Soit $\underline{\underline{F}}^X_t$ la tribu engendrée par les variables aléatoires X_s ($s\leq t$) et les ensembles P-négligeables.

THEOREME. Soit T un temps d'arrêt de la famille $(\underline{\underline{F}}^X_{t+})$; supposons que N soit un ensemble P-négligeable et que

$$\forall\omega\in N^c\ \forall\omega'\in N^c\ (X_s(\omega)=X_s(\omega')\ \text{pour}\ s<T(\omega)) \Rightarrow (T(\omega')=T(\omega))$$

Alors T est prévisible (dans la famille $(\underline{\underline{F}}^X_{t+})$).

DEMONSTRATION. Comme la prévisibilité ne dépend pas de ce qui se passe sur un ensemble négligeable, nous pouvons jeter un ensemble N de sorte que sur N^c

- la relation algébrique ci-dessus ait lieu identiquement
- les trajectoires $X_{\cdot}(\omega)$ soient continues à droite
- chaque X_t (t rationnel) soit égale à une fonction $\underline{\underline{G}}$-mesurable
- T soit égal à un temps d'arrêt de la famille $(\underline{\underline{F}}^o_{t+})$

Quitte à agrandir un peu N nous pouvons supposer aussi que $N\in\underline{\underline{G}}$. Si alors on se restreint à l'espace mesurable $(N^c,\underline{\underline{G}})$, toutes les hypothèses de la prop.4 sont satisfaites.

REMARQUE. Le théorème ci-dessus admet une réciproque : tout temps d'arrêt prévisible est égal P-p.s. à un temps d'arrêt T possédant les propriétés ci-dessus. Mais ce n'est pas intéressant, et nous ne le démontrerons pas.

UN EXEMPLE. Considérons un processus de Hunt, une fonction p-excessive f et posons

$$T(\omega) = \inf\ \{\ t\ :\ |\ f\circ X_{t-}(\omega)-(f\circ X_t)_-(\omega)\,|>a\}$$

alors T est algébriquement prévisible, donc prévisible. Bien entendu, on peut le démontrer par les méthodes usuelles de la théorie des processus.