PAUL-ANDRÉ MEYER

Les résultats récents de Burkholder, Davis et Gundy

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 6 (1972), p. 151-158
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1972__6__151_0>

Séminaire de Probabilités
1970/71

LES RÉSULTATS RÉCENTS DE BURKHOLDER, DAVIS ET GUNDY

par P.A.Meyer

1. NOTATIONS, ENONCE DES DEUX THEOREMES PRINCIPAUX

$(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ désigne un espace probabilisé , muni d'une famille croissante $(\underline{\underline{F}}_n)$ de tribus. Martingales et temps d'arrêt seront relatifs à cette famille. Nous désignerons en général les processus par une lettre majuscule $X=(X_n)$, et nous utiliserons la même lettre minuscule pour les différences

$$x_0=X_0 \quad , \quad x_n=X_n-X_{n-1}$$

Nous poserons alors : $X_n^* = \sup_{m\leqq n} |X_m|$, $X^* = \sup_m |X_m|$, $x_n^* = \sup_{m\leqq n} |x_m|$, $x^* = \sup_m |x_m|$,

$$Q_n(X) = (\sum_{m\leqq n} x_m^2)^{1/2} \quad , \quad Q(X)= (\sum_m x_m^2)^{1/2}$$

Φ est une fonction convexe croissante sur $\mathbb{R}_+$, telle que $\Phi(0)=0$; nous supposerons de manière essentielle que Φ satisfait à la condition de "croissance modérée" $\Phi(2t)\leqq \Lambda\Phi(t)$.

GUNDY , DAVIS et BURKHOLDER ont démontré, entre autres, les résultats suivants :

THEOREME 1. Soit (B_n) un processus croissant, non nécessairement adapté à la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$. Posons

$$a_0=0 \ , \quad a_n=E[b_n|\underline{\underline{F}}_{n-1}] \quad , \quad A_n= \sum_{m\leqq n} a_m$$

On a alors $E[\Phi\circ A_\infty] \leqq \Theta E[\Phi\circ B_\infty]$, où la constante Θ ne dépend que du coefficient de croissance Λ .

THEOREME 2. Soit X une martingale. Alors

$$\Theta E[\Phi\circ Q(X)] \leqq E[\Phi\circ X^*] \leqq \Theta' E[\Phi\circ Q(X)]$$

où Θ et Θ' ne dépendent que de Λ.

Ce sont des résultats extraordinaires. Malheureusement, l'article GDB n'est pas d'un abord spécialement aisé . En effet, on y établit des résultats beaucoup plus généraux que le théorème 2, de sorte qu'en plus de leurs difficultés propres, les démonstrations y sont recouvertes d'une épaisse couche d'axiomatique. C'est d'ailleurs là la seule justification de cet exposé : ayant vu ce qui se passe dans le cas particulier le plus intéressant, le lecteur aura certainement beaucoup moins de mal à comprendre les articles [1] et [2], qui méritent de toute façon une lecture approfondie.

2. QUELQUES REMARQUES D'ORDRE ANALYTIQUE

a) Notons ϕ la dérivée à droite de la fonction convexe Φ ; c'est une fonction croissante et continue à droite, et on a

$$(1)\qquad \phi(2t) \leqq \frac{1}{2t}\int_{2t}^{4t}\phi(s)ds \leqq \frac{1}{2t}\Phi(4t) \leqq \frac{\Lambda^2}{2t}\Phi(t) = \frac{\Lambda^2}{2}\,\frac{1}{t}\int_0^t \phi(s)ds \leqq \frac{\Lambda^2}{2}\phi(t)$$

On en déduit aussitôt que pour tout a on a une majoration de la forme $\phi(at) \leqq m(a)\phi(t)$.

Il faut noter aussi que Φ est suradditive

$$(2)\qquad \Phi(x+y) = \int_0^x\phi(s)ds+\int_x^{x+y}\phi(s)ds \geqq \int_0^x + \int_0^y = \Phi(x)+\Phi(y)$$

Tandis qu'on a inversement

$$(3)\qquad \Phi(x+y) \leqq \Lambda\Phi\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqq \Lambda\,\frac{\Phi(x)+\Phi(y)}{2}$$

b) Les lemmes suivants sont tout simples. On les démontrera en appendice. On note h un nombre >1 .

LEMME 1. Soit $\psi(n)$ une fonction positive définie sur Z, telle que $\sum_{-\infty}^{0}\psi(n) < \infty$. Soit $U=\{n : \psi(n)< h\psi(n+1)\}$. Alors

$$(4)\qquad \sum_{-\infty}^{+\infty}\psi(n) \leqq \frac{h}{h-1}\sum_{U}\psi(n+1)$$

LEMME 1'. Soit $\psi(t)$ une fonction positive localement bornée sur $\mathbb{R}$, telle que $\int_{-\infty}^{0}\psi(s)ds < \infty$. Soit $U=\{t : \psi(t)<h\psi(t+1)\}$. Alors

$$(5)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\psi(s)ds \leqq \frac{h}{h-1}\int_U \psi(s+1)ds$$

c) Le calcul suivant sera essentiel pour la démonstration du théorème 2. Soit Y une variable aléatoire positive. Nous avons

$$E[\Phi\circ Y] = E\left[\int_0^Y\phi(s)ds\right] = \int_0^\infty \phi(s)P\{Y>s\}ds$$

Mais en réalité <u>nous n'aurons pas besoin de connaître</u> $P\{Y>s\}$ <u>pour toutes les valeurs de s</u> pour majorer le premier membre. Soit h un nombre >1. Posons $a=h^2m(h)$ [la fonction m est définie à la ligne 9], et soit B l'ensemble légèrement bizarre

$$(6)\qquad B=\{\, s : P\{Y\geqq s\} \leqq aP\{Y\geqq hs\}\,\}$$

Alors

(7) $$E[\Phi\circ Y] \leqq \frac{a}{h-1} \int_B \phi(s)P\{Y>s\}\, ds$$

DEMONSTRATION. On applique le lemme 1' . Dans l'intégrale donnant $E[\Phi\circ Y]$ faisons le changement de variable $s=h^t$; cette intégrale s'écrit alors $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)dt$, avec $\psi(t)= \log(h)\phi(h^t)h^tP\{Y>h^t\}$. Le lemme 1' nous donne alors $E[\Phi\circ Y]\leqq \frac{h}{h-1}\int_U \psi(t+1)dt \leqq \frac{h^2m(h)}{h-1}\int_U\psi(t)dt$, et lorsque t appartient à U h^t appartient à B.

3. DEMONSTRATION DU THEOREME 1

La démonstration qu'en donnent BGD ne repose pas sur les idées précédentes, mais sur le lemme 1 et un procédé de " discrétisation". Le lecteur qui préfère garder le fil des idées fera donc bien de passer directement au n°4.

Nous désignons par Θ, dans toute cette démonstration, une quantité qui varie de place en place, mais ne dépend que de Λ. Nous écrivons A au lieu de A_∞ . Nous partons de

$$E[\Phi\circ A] = \int_0^\infty \phi(s)P\{A>s\}\, ds = \sum_j \int_{2^j}^{2^{j+1}} \dots \leqq \sum_j P\{A>2^j\}\int_{2^j}^{2^{j+1}}\phi(s)ds$$

(8) $$= \sum_j P\{A>2^j\}(\Phi(2^{j+1})-\Phi(2^j)) \leqq (\Lambda-1)\sum_j P\{A>2^j\}\Phi(2^j)$$

Désignons cette somme par S, et son terme général par $\psi(j)$. La suradditivité de Φ entraîne aussitôt que

(9) $$\Phi(t)+\Phi(\tfrac{t}{2})+\Phi(\tfrac{t}{4})\dots \leqq \Phi(2t)$$

de sorte que le lemme 1 s'applique à ψ . D'après le lemme 1, nous pouvons remplacer S par $2\sum_{j\in U}\psi(j+1) \leqq \Theta\sum_{j\in U}P\{A>2^{j+1}\}\Phi(2^j)$.

Nous considérons maintenant les ensembles $K_j=\{A>2^j\}$, et $H_j=\{A>2^{j+1}, a^*< 2^{j-1}\}$. Le fait que $j\in U$ signifie que

(10) $\Phi(2^j)P\{A>2^j\} \leqq 2\Phi(2^{j+1})P\{A>2^{j+1}\}$ et par conséquent $P(K_{j+1})\geqq\Theta P(K_j)$

Nous coupons maintenant la somme en deux morceaux : le premier est formé des $j\in U_1$, i.e. les $j\in U$ pour lesquels

(11) $$P\{A>2^{j+1}\}=P(K_{j+1}) \leqq 2P\{A>2^{j+1}, a^*<2^{j-1}\}= P(H_j)$$

le second est formé des $j\in U$ pour lesquels cette condition n'a pas lieu. Comme K_{j+1} est contenu dans la réunion de H_j et de $\{a^*\geqq 2^{j-1}\}$, on a pour les indices j du second morceau

(12) $$P(K_{j+1}) \leqq 2P\{a^*\geqq 2^{j-1}\}$$

On majore les deux morceaux séparément, en commençant par le plus facile SECONDE SOMME. Elle est majorée par

(13) $\quad \Theta\sum_{j\in Z} \Phi(2^j)P\{a^*\geqq 2^{j-1}\} = \Theta\sum_{j\in Z} P\{2^j>a^*\geqq 2^{j-1}\}[\Phi(2^j)+\Phi(2^{j-1})+\ldots]$

D'après (9) cette somme est $\leqq \Phi(2^{j+1})\leqq\Theta\Phi(2^{j-1})$, et il reste la somme $\sum P\{2^j>a^*\geqq 2^{j-1}\}\Phi(2^{j-1}) \leqq E[\Phi\circ a^*]$. Nous majorons très grossièrement $\Phi\circ a^*$ par $\sum\Phi\circ a_n$, puis nous appliquons l'inégalité de JENSEN (convexité de Φ) pour obtenir le majorant $\sum E[\Phi\circ b_n]$, et enfin la suradditivité pour obtenir $E[\Phi\circ B_\infty]$. La seconde somme est convenablement majorée.

PREMIERE SOMME. $\sum_{j\in U_1} \Phi(2^{j+1})P\{A>2^{j+1}\} \leqq 2\sum_{j\in U_1} \Phi(2^{j+1})P(K_j)$. On peut remplacer $\Phi(2^{j+1})$ par $\Phi(2^j)$ si on le désire.

Introduisons les temps d'arrêt suivants :

S_j= inf { n : $A_n>2^j$ ou $a_{n+1}>2^{j-1}$ }

T_j= inf { n : $A_n>2^{j+1}$ou $a_{n+1}> 2^{j-1}$ }

On a $S_j\leqq T_j\leqq S_{j+1}$. Posons aussi

(14) $\quad A_{T_j}-A_{S_j} = A^j \quad , B_{T_j}-B_{S_j} = B^j$.

Sur K_j^c on a $A_\infty \leqq 2^j$, donc $S_j=T_j$ et A^j et $B^j = 0$.

Sur $H_j\subset K_j$ on a $A_\infty>2^{j+1}$, et $a^*<2^{j-1}$. La seconde condition de définition de S_j et T_j ne joue pas, S_j et T_j sont finis tous deux et différents, et on a $A_{S_j}\leqq 2^j+a^* \leqq 2^j+2^{j-1}$, $A_{T_j}\geqq 2^{j+1}$, donc $A^j\geqq 2^{j-1}$. On a d'autre part $E[B^j]=E[A^j] \geqq 2^{j-1}P(H_j)$.

Soit $\mathcal{K}$ la tribu $\{K_j,K_j^c\}$; comme $B^j=0$ sur K_j^c

(15) $\quad E[B^j|\mathcal{K}] = \dfrac{E[B^j]}{P[K_j]}I_{K_j} \geqq 2^{j-1} \dfrac{P(H_j)}{P(K_j)}I_{K_j}$

Nous utilisons maintenant le fait que $j\in U_1$: d'après (11), $P(H_j)\geqq \frac{1}{2}P(K_{j+1})$ d'après (10), $P(K_{j+1}) \geqq \Theta P(K_j)$. Mettant tout ensemble

(16) $\quad E[B^j|\mathcal{K}] \geqq \Theta 2^j I_{K_j}$

Appliquons Jensen, notons que $\Phi(\Theta x)$ peut être remplacé par $\Theta\Phi(x)$:

(17) $\quad E[\Phi\circ B^j|\mathcal{K}] \geqq \Theta\Phi(2^j)I_{K_j}$

On intègre et on somme sur U_1 . Au second membre on a la somme cherchée. Au premier membre, $E[\sum_{j\in U_1} \Phi\circ B^j] \leqq E[\Phi\circ B_\infty]$ par suradditivité. C'est fini.

4. LE THEOREME 2 : MARTINGALE A SAUTS BORNES

Ce cas renferme l'essentiel de la démonstration. Nous nous donnons deux nombres $a>0$, $h>1$, une martingale X telle que

(18) $$x^* \leqq d$$

et nous posons $V(X)=Q(X)\vee X^*$, $V_n(X)=Q_n(X)\vee X_n^*$. La majoration essentielle est le lemme suivant :

LEMME 2. Il existe des constantes Θ (dépendant seulement de Λ,a,h) telles que l'on ait

(19) $$P\{V(X)>t\} \leqq \begin{array}{l} \Theta P\{\Theta X^*>t\} + \Theta P\{\Theta x^*>t\} \\ \Theta P\{Q(X)>t\} + \Theta P\{\Theta x^*>t\} \end{array}$$

pour tous les $t \geqq d$ tels que

(20) $$P\{V(X)>t\} \leqq aP\{V(X)>ht\}$$

DEMONSTRATION. Nous démontrerons la première ligne, par exemple. Introduisons la constante $c=\frac{h-1}{2}$ et remarquons que l'ensemble $\{V(X)>ht\}$ est contenu dans la réunion de $\{V(X)>ht \ , \ x^* \leqq ct\}$ et de $\{x^*>ct\}$. On a donc l'une des deux inégalités

$$P\{V(X)>ht\} \leqq 2P\{x^*>ct\}$$

$$P\{V(X)>ht\} \leqq 2P\{V(X)>ht \ , \ x^* \leqq ct\}$$

Pour les t de la première classe , (19) est déjà toute démontrée. Les seuls t dont nous allons nous occuper sont donc les t de la seconde classe satisfaisant à (20), t pour lesquels on a l'inégalité

(21) $$P\{V(X)>t\} \leqq 2aP\{V(X)>ht \ , \ x^* \leqq ct\} \qquad (\text{ et } t \geqq d)$$

et on va montrer que pour ceux là

(22) $$P\{V(X)>t\} \leqq \Theta P\{\Theta X^*>t\}$$

Comment va t'on faire ? DGB utilisent l'ingénieux petit lemme suivant, dont la démonstration est en appendice.

LEMME 3. Soient H un ensemble, u une fonction positive. Les inégalités $\int_H u \geqq 2\ell P(H)$, $\int_H u^2 \leqq m^2 P(H)$ entraînent $P\{u>\ell\} \geqq \frac{\ell^2}{4m^2}P(H)$.

Posons

(23) $$S= \inf \{ n : V_n(X) > t \}$$

$$T= \inf \{ n : V_n(X) > ht\}$$

Nous introduisons les deux martingales X^T et X^S arrêtées à S et T, et la martingale $Y=X^T-X^S$. L'ensemble H du lemme sera $\{S<\infty\}=\{V(X)>t\}$, et la fonction u du lemme sera Y^{*2} .

Sur l'ensemble de droite de (21), , nous avons $T<\infty$ et

$$ht \leqq V_T(X) = V(X^T) = V(X^S+Y) \leqq V(X^S)+V(Y) \leqq t+ct+V(Y)$$

d'où par différence $V(Y) \geqq ht-t-ct = ct$. Sur l'ensemble de droite de (21) nous avons donc $V(Y) \geqq ct$, et cela entraîne, pour les t "intéressants" qui satisfont à (21)

(24) $$P\{V(X)>t\} \leqq 2aP\{V(Y) \geqq ct\}$$

Nous obtenons la première inégalité du lemme 3 en écrivant que Y^* et $Q(Y)$ ont des normes comparables dans L^2 (inégalité de DOOB). Comme $Y^*=0$ sur $\{S=\infty\}$,

(25) $$\int_{\{S<\infty\}} Y^{*2} = \int Y^{*2} \geqq 2\theta E[V(Y)^2] \geqq 2\theta(ct)^2 P\{V(Y) \geqq ct\}$$

$$\geqq 2\theta(ct)^2 P\{V(X)>t\} = 2\theta(ct)^2 P\{S<\infty\} \qquad (\ell=\theta(ct)^2)$$

Pour avoir la seconde inégalité, nous remarquons que pour $n<T$ on a $V_n(X) \leqq ht$, donc $X_n^* \leqq ht$, et <u>comme</u> $t \geqq d$ (l'hypothèse est utilisée pour la première fois) on a $X_n^* \leqq (h+1)t$ pour $n \leqq T$. On a naturellement le même résultat pour $n \leqq S$, et par différence $Y^* \leqq 2(h+1)t$. Par conséquent

(26) $$\int_{\{S<\infty\}} Y^{*4} \leqq (2(h+1)t)^4 P\{S<\infty\} \qquad (m=4(h+1)^2t^2)$$

Le lemme 3 nous donne alors $P\{Y^{*2} \geqq \theta c^2t^2\} \geqq \frac{\ell^2}{4m^2} P\{S<\infty\}$, ou en changeant de notation $P\{Y^* \geqq \theta t\} \geqq \theta P\{V(X)>t\}$. Mais on a évidemment $Y^* \leqq 2X^*$, de sorte que l'on a aussi

$$P\{X^* \geqq \theta t\} \geqq \theta P\{V(X)>t\}$$

c'est à dire (22) aux notations près. L'autre inégalité se prouverait de même , en prenant dans le lemme 3 $u=Q(Y)^2$ au lieu de Y^{*2} .

Nous n'appliquerons pas le lemme 2 directement, mais plutôt la petite extension que voici :

LEMME 4. <u>Soit</u> X <u>une martingale telle que l'on ait pour tout</u> n

(27) $$|x_n| \leqq w_n$$

<u>où</u> w_n <u>est une variable aléatoire positive</u> $\underline{\underline{F}}_{n-1}$-<u>mesurable</u>. <u>Alors on a</u>

(28) $$P\{V(X)>t\} \leqq \begin{matrix} \theta P\{\theta X^*>t\} + \theta P\{\theta w^*>t\} \\ \theta P\{\theta Q(X)>t\} + \theta P\{\theta w^*>t\} \end{matrix}$$

<u>pour tous les</u> t <u>tels que</u>

(29) $$P\{V(X)>t\} \leqq aP\{V(X)>ht\}$$

DEMONSTRATION. Suivant un raisonnement familier, nous partageons les t en deux classes. D'abord ceux pour lesquels on a

(30) $\quad P\{V(X)>t\} \leqq 2aP\{w^*>t\}$

Pour ceux ci, les inégalités (27) sont triviales. Les t intéressants sont donc ceux qui satisfont à (29) mais non à (30), et pour ceux là on a

(31) $\quad P\{V(X)>t\} \leqq 2aP\{V(X)>ht,\ w^*\leqq t\}$

Introduisons le temps d'arrêt

$$T=\inf\{n : w_{n+1}>t\}$$

et la martingale $Y=X^T$, dont les sauts sont bornés par t . Nous avons

(32) $\quad P\{V(Y)>t\} \leqq P\{V(X)>t\} \leqq 2aP\{V(X)>ht,\ w^*\leqq t\}$ (31)

$$=2aP\{V(X)>ht,\ T=\infty\} \leqq 2aP\{V(Y)\geqq ht\}$$

ainsi, t satisfait à (20) relativement à Y, avec seulement 2a au lieu de a. Le lemme 2 nous donne alors

(33) $\quad P\{V(Y)>t\} \leqq \theta P\{\theta Y^*>t\}+\ \theta P\{\theta y^*>t\}$ (de même pour l'autre inégalité)

Nous avons d'autre part $P\{V(X)>t\}\leqq P\{V(Y)>t\}+P\{T<\infty\} = P\{V(X)>t\}+P\{w^*>t\}$. D'où

(34) $\quad P\{V(X)>t\}\leqq \theta P\{\theta Y^*>t\}+\theta P\{\theta y^*>t\} + P\{w^*>t\}$

On majore Y^* par X^* , y^* par w^* , et c'est fini.

5. FIN DE LA DEMONSTRATION : DECOMPOSITION DE DAVIS

Nous prenons maintenant une martingale quelconque X . Nous posons $x^*_{-1}=0$ et

(35)
$$j_n= x_n I_{\{|x_n|\leqq 2x^*_{n-1}\}} \qquad j_0=0$$
$$k_n= x_n I_{\{|x_n|>2x^*_{n-1}\}} \qquad k_0=x_0$$

Nous posons $J_n=j_0+\dots+j_n$, $K_n=k_0+\dots k_n$; puis nous compensons ces deux processus :

(36)
$$\tilde{J}_n=E[j_1|\underline{\underline{F}}_0]+\dots E[j_n|\underline{\underline{F}}_{n-1}] ,\ \tilde{K}_n=E[k_1|\underline{\underline{F}}_0]+\dots+E[k_n|\underline{\underline{F}}_{n-1}]$$
$$Y_n=J_n-\tilde{J}_n \quad , \qquad Z_n=K_n-\tilde{K}_n$$

On a X=Y+Z, ces deux processus sont des martingales. Cette décomposition a été introduite par DAVIS dans [3]. Quelles sont ses propriétés ? Tout d'abord, sur l'ensemble où $|x_n|>2x^*_{n-1}$ on a $|x_n|+2x^*_{n-1}\leqq 2|x_n|=2x^*_n$, donc $|x_n| \leqq 2(x^*_n-x^*_{n-1})$. En sommant

(37) $\quad \sum|k_n| \leqq 2x^*$

Tandis que l'on a $|j_n|\leqq x^*_{n-1}$ et $|\tilde{j}_n|\leqq x^*_{n-1}$, donc $|y_n|\leqq 2x^*_{n-1}$.

Nous avons $Q(Z) \leq \sum(|k_n|+|\tilde{k}_n|)$, et le même résultat pour Z^*. Donc

$$E[\Phi\circ V(Z)] \leq E[\Phi(\sum|k_n|+\sum|\tilde{k}_n|)] \leq \Theta E[\Phi(\sum|k_n|)+\Phi(\sum|\tilde{k}_n|)]$$

Nous appliquons le théorème 1 : $E[\Phi(\sum|\tilde{k}_n|)] \leq \Theta E[\Phi(\sum|k_n|]$, et nous avons enfin

$$(38) \qquad E[\Phi\circ V(Z)] \leq \Theta E[\Phi\circ x^*] \leq \begin{array}{l} \Theta E[\Phi\circ Q(X)] \\ \Theta E[\Phi\circ X^*] \end{array}$$

Nous appliquons à Y le lemme 4 et le calcul du n°2, c). Il vient

$$(39) \qquad E[\Phi\circ V(Y)] \leq \begin{array}{l} \Theta E[\Phi\circ Y^*] + \Theta E[\Phi\circ x^*] \\ \Theta E[\Phi\circ Q(Y)] + \Theta E[\Phi\circ x^*] \end{array}$$

(38) permet, par différence, de majorer $E[\Phi\circ Y^*]$ en fonction de $E[\Phi\circ X^*]$ et $E[\Phi\circ Q(Y)]$ en fonction de $E[\Phi\circ Q(X)]$. On regroupe enfin (38) et (39) et la démonstration est achevée.

BIBLIOGRAPHIE

[1]. D.L.BURKHOLDER et R.F.GUNDY . Extrapolation and interpolation of quasi-linear operators on martingales. Acta.Math., 124, 1970, 249-30

[2]. D.L. BURKHOLDER, B.J.DAVIS et R.F.GUNDY. Integral inequalities for convex functions of operators on martingales. Proc. 6-th Berkeley Symposium (à paraître).

[3]. B.J.DAVIS. On the integrability of the martingale square function. Israel J.Math. 8, 1970, 187-190.

APPENDICE : DEMONSTRATION DES PETITS LEMMES

Les lemmes 1 et 1' se démontrent de la même manière. Démontrons par exemple 1'. On commence par le cas où $\int\psi(t)dt<\infty$ et on écrit

$$\int\psi(s)ds = \int\psi(s+1)ds = \int_U\psi(s+1)ds + \int_{U^c}\psi(s+1)ds \leq \int_U\psi(s+1)ds + \int_{U^c}\frac{\psi(s)}{h}ds$$

$$\leq \int_U\psi(s+1)ds + \frac{1}{h}\int\psi(s)ds$$ et le résultat par différence. On traite le cas général en appliquant ce résultat à $\psi I_{]-\infty,x]}$ et en faisant ensuite tendre x vers $+\infty$.

Pour le lemme 3 : on se ramène aussitôt au cas où $H=\Omega$. Puis on écrit $2\ell = \int u = \int_0^\infty P\{u>t\}dt \leq \int_0^\ell dt + \int_0^{r\ell} P\{u>\ell\} + \int_{r\ell}^\infty P\{u>t\}dt$ ($r\geq 1$). Dans le dernier terme on majore $P\{u>t\}$ par m^2/t^2 et il vient

$$2\ell \leq \ell + r\ell P\{u>\ell\} + m^2/r\ell$$

On a $m^2 \geq 4\ell^2$ (Jensen). On prend $r=2m^2/\ell^2$ et on a l'inégalité cherchée.