PAUL-ANDRÉ MEYER

La mesure de H. Föllmer en théorie des surmartingales

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 6 (1972), p. 118-129
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1972__6__118_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1970/71

LA MESURE DE H.FÖLLMER EN THÉORIE DES SURMARTINGALES

exposé de P.A.Meyer

On présente ici le théorème principal de l'article de H.FÖLLMER " The exit measure of a supermartingale", à paraître dans le Z. für Wahrscheinlichkeitstheorie"(1). Il s'agit d'une construction de théorie des martingales qui correspond exactement à celle des u-processus en théorie des processus de Markov. L'emploi des u-processus s'étant montré extrêmement fécond, on peut espérer que la mesure de FÖLLMER deviendra, elle aussi, un outil important.

La démonstration donnée ci-dessous s'inspire très étroitement de celle de FÖLLMER. On a simplement remplacé les décompositions multiplicatives de surmartingales par des décompositions additives, ce qui permet de ramener toute la construction au cas plus simple des martingales locales.

Cet exposé a été présenté aux " Journées probabilistes de Strasbourg" en Mars 1971.

I. INTRODUCTION

Considérons sur un espace probabilisé $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$, muni à l'accoutumée d'une famille de tribus $(\underline{\underline{F}}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, une surmartingale positive H de la classe (D). On conviendra de poser $H_\infty = 0$, et la limite usuelle sera notée $H_{\infty-}$ au lieu de H_∞ . Considérons la décomposition de RIESZ H=P+M de H en un potentiel de la classe (D) et une martin-

---

(1) Il est paru dans le premier fascicule de 1972 (t.21, p.154-166).

gale uniformément intégrable, et soit B le processus croissant prévisible engendrant P. Posons

$$A_t = B_t \text{ pour } t<\infty$$
$$A_\infty = B_{\infty-} + H_{\infty-}$$

Nous avons alors

$$H_t = E[A_\infty - A_t \mid \underline{\underline{F}}_t]$$

formule tout à fait analogue à celle qui définit d'habitude le " potentiel engendré par le processus croissant A", mais cette fois H n'est pas un potentiel, et A présente un saut à l'infini.

Nous adoptons maintenant le point de vue de C.DOLEANS-DADE [2] : au lieu de nous intéresser au processus croissant (A_t), nous nous intéressons à la mesure sur $(\overline{\mathbb{R}}_+\times\Omega\ ,\ \underline{\underline{B}}(\overline{\mathbb{R}}_+)\times\underline{\underline{F}}\ )$ ainsi définie : si Z est un processus mesurable positif ou borné (indexé par $[0,\infty]$)

$$\mu(Z) = E[\int_0^\infty Z_s dA_s] = E[\int_0^\infty Z_s\, dB_s + Z_\infty H_{\infty-}]$$

Cette mesure est caractérisée par les propriétés suivantes

1) elle est bornée et ne charge pas $\{0\}\times\Omega$

2) elle ne charge pas les ensembles P-évanescents

3) elle commute avec la projection prévisible (si Z est un processus mesurable, Z^p sa projection prévisible , complétée à l'infini par $Z^p_\infty = E[Z_\infty \mid \underline{\underline{F}}_{\infty-}]$, on a $\mu(Z)=\mu(Z^p)$)

4) pour tout temps d'arrêt T, la mesure de l'intervalle stochastique $]\!]T,\infty]\!]$ est $E[H_T\ ,\ T<\infty]$ (que nous écrirons simplement $E[H_T]$ dans la suite, puisque $H_\infty=0$).

Le théorème de C. DOLEANS-DADE ne peut être amélioré : s'il existe une mesure μ possédant ces quatre propriétés, H appartient nécessairement à la classe (D). Pour généraliser ce résultat à des surmartingales qui ne sont pas de la classe (D), il faut donc abandonner l'une d'elles au moins : ce sera (2), et on ne pourra plus alors construire la mesure sur n'importe quel espace Ω.

UN EXEMPLE. Nous allons maintenant fixer les notations qui nous serviront dans toute la suite, et nous en servir pour donner un exemple instructif.

- E sera un espace d'états LCD (ou polonais, ou même seulement lusinien métrisable) ; ∂ un point adjoint à E .
- Ω sera l'ensemble des applications continues à droite de $\mathbb{R}_+$ dans $E\cup\{\partial\}$, admettant une durée de vie ζ .
- X_t désignera la coordonnée d'indice t sur Ω (on peut convenir que $X_\infty=\partial$) ; la tribu engendrée (sans complétion !) par les X_t est notée $\underline{\underline{F}}^\circ$; celle qui est engendrée par les X_t , $t\leqq s$, est notée $\underline{\underline{F}}^\circ_s$.
- On pose sur $\overline{\Omega} = \overline{\mathbb{R}}_+\times\Omega$, muni de $\overline{\underline{\underline{F}}} = \underline{\underline{B}}(\overline{\mathbb{R}}_+)\times\underline{\underline{F}}^\circ$,

$$\overline{X}_t(\overline{\omega}) = \overline{X}_t(s,\omega) = X_t(\omega) \quad \text{si } t<s$$
$$= \partial \quad \text{si } t\geqq s$$

- Nous définissons la tribu $\overline{\underline{\underline{F}}}_t$ sur $\overline{\Omega}$ de la manière suivante : une v.a. Z est $\overline{\underline{\underline{F}}}_t$ mesurable sur $\overline{\Omega}$ si et seulement si elle est $\overline{\underline{\underline{F}}}$ -mesurable, et s'il existe une v.a. z $\underline{\underline{F}}^\circ_t$-mesurable sur Ω telle que

$$Z(s,\omega) = z(\omega) \text{ pour } s>t$$

Par exemple, $\overline{X}_t$ est $\overline{\underline{\underline{F}}}_t$-mesurable (la v.a. z correspondante est X_t).

LEMME. <u>Soit</u> $\mathcal{P}$ <u>la tribu sur</u> $\overline{\Omega}$ <u>engendrée par les processus adaptés à la famille</u> ($\underline{\underline{F}}^\circ_t$), <u>continus à gauche</u>, <u>et arrêtés à l'instant</u> ζ . <u>Alors</u> $\mathcal{P}$ <u>est aussi la tribu engendrée sur</u> $\overline{\Omega}$ <u>par les v.a</u>. $\overline{X}_t$.

DEMONSTRATION. Le processus $\overline{X}_t$ sur Ω est ainsi défini :

$$(\overline{X}_t)_s(\omega) = \overline{X}_t(s,\omega) = X_t(\omega) \ (t<s) \text{ ou } \partial \ (s\leqq t) \ .$$

Il est arrêté à tout instant $t'>t$, donc à l'instant ζ sur l'ensemble $\{t<\zeta\}$; si $\zeta(\omega)\leqq t$, on a identiquement $\overline{X}_t(s,\omega)=\partial$, et le processus est encore arrêté à l'instant $\zeta(\omega)$. Il est d'autre part adapté et continu à gauche, donc $\mathcal{P}$-mesurable.

Inversement, on sait que la tribu des processus adaptés continus à gauche est engendrée par les ensembles $]t,\infty]\times A$ ($A\in\underline{\underline{F}}^\circ_{t-}$), donc aussi par les processus de la forme

$$Y_s = f_1\circ X_{t_1}\ldots f_n\circ X_{t_n} \quad \text{si } s>t \quad (t_1,\ldots,t_n<t) \text{ , } =0 \text{ si } s\leqq t$$

Soit Z le processus arrêté de Y à l'instant ζ ; on vérifie immédiatement que

$$Z_s = f_1 \circ X_{t_1} \ldots f_n \circ X_{t_n} I_E \circ X_t \text{ si } s>t \text{ , } =0 \text{ si } s \leqq t$$

Mais ce processus n'est autre que $f_1 \circ \overline{X}_{t_1} \ldots f_n \circ \overline{X}_{t_n} I_E \circ \overline{X}_t$: il est donc bien mesurable par rapport à la tribu engendrée par les processus $\overline{X}_s$, et le lemme est établi.

Ces notations nous serviront plus loin, et voici l'exemple. Soit (P_t) un semi-groupe sousmarkovien sur E, rendu markovien au moyen du point ∂, et satisfaisant aux hypothèses droites. Soit aussi u une fonction excessive sur E pour ce semi-groupe, prolongée par 0 au point ∂. Nous supposerons pour simplifier que u est <u>bornée</u>. Soit enfin λ une loi sur E ; nous prendrons $P=P^\lambda$, la loi pour laquelle le processus (X_t) est markovien , admet (P_t) pour semi-groupe de transition et λ comme loi initiale. La surmartingale $H_t = u \circ X_t$ appartient à la classe (D), et il lui correspond donc une mesure μ sur la tribu $\mathcal{P}$.

PROPOSITION. <u>Lorsque</u> $\overline{\Omega}$ <u>est muni de la loi</u> μ, <u>le processus</u> $(\overline{X}_t)$ <u>est markovien</u>, <u>admet</u> $(P_t^{(u)})$ (" u-path semigroup") <u>comme semi-groupe de transition</u>, <u>et</u> $u.\lambda$ <u>comme loi initiale</u>.

DEMONSTRATION. Soient s,t tels que s<t ; une fonction mesurable bornée f sur E ; une fonction $\underline{\underline{F}}_s$-mesurable bornée Z sur $\overline{\Omega}$. Nous savons que $\overline{X}_s$ est $\underline{\underline{F}}_s$-mesurable. Avons nous

$$\mu(f \circ \overline{X}_t . Z) = \mu(P_{t-s}^{(u)} f \circ \overline{X}_s . Z) \quad ?$$

Décomposons $u = E^\bullet[A_\infty] + E^\bullet[u_\infty]$, où A est une fonctionnelle additive et $u_\infty = \underline{\lim}_{t \to \infty} \; u \circ X_t$. Le premier membre vaut par définition de la mesure μ

$$E^\lambda[\int_0^\infty f \circ \overline{X}_t(r,\omega) Z(r,\omega) dA_r(\omega) + f \circ \overline{X}_t(\infty,\omega) Z(\infty,\omega) u_\infty(\omega)]$$

Introduisons la v.a. $\underline{\underline{F}}_s$-mesurable z telle que $Z(r,\omega)=z(\omega)$ pour r>s. Comme f est nulle au point ∂, la première intégrale est étendue de t à $+\infty$, on peut partout remplacer Z par z, et cela vaut

$$E^\lambda[f \circ X_t . z (A_\infty - A_t + u_\infty)] = E^\lambda[f \circ X_t . z . u \circ X_t]$$
$$= E^\lambda[u \circ X_s . z . P_{t-s}^{(u)}(X_s, f)]$$

On remonte les calculs, et la proposition s'en déduit.

Si l'on remarque que $\mathcal{P}$ est engendrée par les variables aléatoires $\overline{X}_t$, on voit que cette proposition détermine entièrement μ sur $\mathcal{P}$. Connaissant P^λ, on en déduit par projection μ sur $\underline{\underline{F}}$. Il n'y a pas de raison pour que μ détermine la loi P^λ elle même. On peut cependant montrer que μ détermine la loi de la surmartingale (H_t) dont elle provient. Ce n'est pas très intéressant, et nous ne le ferons pas.

II. LE THEOREME DE FÖLLMER

Nous abandonnons complètement les processus de Markov. Nous munissons $(\Omega,\underline{\underline{F}}^o)$ d'une loi P quelconque, nous complétons, nous adjoignons à toutes les tribus $\underline{\underline{F}}^o_t$ les ensembles P-négligeables, et nous rendons la famille continue à droite. Nous obtenons ainsi la famille que nous noterons $\underline{\underline{F}}_t$. $\underline{\underline{F}}$ est la P-complétée de $\underline{\underline{F}}^o$

Nous désignons par (H_t) une surmartingale positive continue à droite sur $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$, relativement à la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$. <u>Nous supposons que</u> $H_t=0$ <u>pour</u> $t\geqq\zeta$ (et nous convenons encore que $H_\infty=0$). Bien entendu, on ne suppose plus qu'elle appartient à la classe (D) !

Soit Z un processus mesurable ($\underline{\underline{B}}(\overline{\mathbb{R}}_+)\times\underline{\underline{F}}^o$-mesurable, il n'y a pas de complétion ici), et soit Z^p sa projection prévisible, relativement à la loi P. On a $Z^p_\zeta=E[Z_\zeta|\underline{\underline{F}}_{\zeta-}]$ p.s. ; mais un instant de réflexion montre que $\underline{\underline{F}}_{\zeta-}=\underline{\underline{F}}$, de sorte que $Z^p_\zeta=Z_\zeta$ p.s. . Comme nous allons travailler sur des mesures qui ne seront pas absolument continues par rapport à P, nous définirons la "projection prévisible arrêtée" de Z comme le processus qui vaut

- Z^p_t (n'importe quelle version) pour $t<\zeta$
- Z_ζ (<u>identiquement</u>) pour $t\geqq\zeta$.

Pour ne pas alourdir la notation, nous noterons à nouveau Z^p ce processus. Ces conventions étant posées, voici le théorème de FÖLLMER

THEOREME. <u>Il existe une mesure bornée</u> μ <u>unique sur</u> $(\overline{\Omega},\overline{\underline{\underline{F}}})$ <u>telle que</u>
1) μ <u>ne charge ni</u> $\{0\}\times\Omega$, ni $]\!]\zeta,\infty]\!]$
2) $\mu I_{[\![0,\zeta[\![}$ <u>ne charge pas les ensembles</u> P-<u>évanescents</u>
3) μ <u>commute avec la projection prévisible arrêtée définie plus haut</u> : <u>si</u> Z <u>est</u> $\overline{\underline{\underline{F}}}$-<u>mesurable positif</u>, $\mu(Z)=\mu(Z^p)$.
4) <u>Si</u> T <u>est un temps d'arrêt de la famille</u> $(\underline{\underline{F}}^o_{t+})$, <u>on a</u>

$$\mu(]\!]T,\infty]\!]) = E(H_T) \quad (=E[H_T I_{\{T<\infty\}}]=E[H_T I_{\{T<\zeta\}}])$$

Le point important est 4), qui détermine μ sur $\mathcal{P}$. Le fait de remonter par projection aux processus mesurables ne semble pas particulièrement intéressant. On le donne surtout pour avoir un résultat tout à fait analogue à celui de C.DOLEANS-DADE. L'unicité est immédiate.

Si deux surmartingales H^1 et H^2 admettent des mesures de FÖLLMER μ^1 et μ^2, leur somme admet la mesure de FÖLLMER $\mu^1+\mu^2$. On va donc pouvoir procéder par décomposition additive.

UNE " DECOMPOSITION DE RIESZ" . Introduisons les temps d'arrêt

$$R_n = \inf \{ t : H_t > n \}$$

Le processus arrêté à R_n est majoré par la variable aléatoire intégrable $H_{R_n} \vee n$. Il appartient donc à la classe (D), et admet une décomposition de RIESZ que nous écrirons $H^n = P^n + M^n$. Soit B^n le processus croissant intégrable engendrant le potentiel P^n. On vérifie aussitôt que les processus croissants B^n s'induisent bien, et donc qu'il existe un processus croissant B tel que $B^n_t = B_{t \wedge R_n}$ pour tout n. Comme on a $E[B^n_\infty] \leqq E[H^n_0] = E[H_0]$, on voit que B est intégrable. Posons $P_t = E[B_\infty - B_t | \underline{\underline{F}}_t]$, et $M_t = H_t - P_t$. On a pour tout n

$$H_{t \wedge R_n} = E[B_{R_n} | \underline{\underline{F}}_t] - B_{t \wedge R_n} + M^n_t$$

On en déduit que M^n_t converge vers M_t, qui est donc une surmartingale positive. Ensuite on voit par différence que le processus $(M^n_t - M_t)$ arrêté à R_n est une martingale ; il en est alors de même de (M_t) arrêté à R_n. Autrement dit, (M_t) est une <u>martingale locale</u>. Le problème se trouve donc entièrement ramené à celui des martingales locales, puisque (P_t) est un potentiel de la classe (D) dont la mesure de FÖLLMER est déjà connue.

CAS D'UNE MARTINGALE LOCALE. Nous chercherons la mesure de FÖLLMER sous la forme d'une mesure portée par le graphe $[\zeta]$. Cette mesure est alors l'image par $\omega \mapsto (\zeta(\omega), \omega)$ d'une mesure bornée λ sur Ω. Quelles propriétés doit posséder λ ? 1),2),3) sont vides. 4) dit :

<u>pour tout temps d'arrêt T de la famille</u> $(\underline{\underline{F}}^o_{t+})$, <u>on a</u>

$$\lambda\{T<\zeta\} = \int H_T \, dP \left(= \int_{\{T<\infty\}} H_T \, dP = \int_{\{T<\zeta\}} H_T dP \right)$$

si $A \in \underline{\underline{F}}^o_{T+}$, on peut d'ailleurs appliquer cela à T_A , et en déduire

$$\lambda(A, T<\zeta) = \int_{A \cap \{T<\zeta\}} H_T \, dP.$$

Nous allons construire λ. Prenons des temps d'arrêt R_n <u>de la famille</u> $(\underline{\underline{F}}^o_{t+})$ tels que l'on ait P-p.s.

$$R_n = \inf \{ t : H_t > n \}$$

Puis posons $R'_n = R_1 \vee R_2 \ldots \vee R_n$, et enfin $T_n = R'_n \wedge n$. Nous obtenons ainsi une suite croissante de temps d'arrêt bornés de la famille $(\underline{\underline{F}}^o_{t+})$, tendant P-p.s. vers $+\infty$, et tels que le processus $(H_{t \wedge T_n})$ soit une martingale uniformément intégrable pour tout n. Nous poserons $T = \lim_n T_n$.

Nous introduisons l'opérateur d'arrêt $a_n = a_{T_n}$

$$X_s(a_n \omega) = X_{s \wedge T_n}(\omega)$$

Nous aurons besoin du lemme suivant, dû pour l'essentiel à COURREGE et PRIOURET [1].

LEMME. <u>Soit</u> S <u>un temps d'arrêt de la famille</u> $(\underline{\underline{F}}^o_{t+})$, <u>et soit</u> U <u>une variable aléatoire</u> $\underline{\underline{F}}^o_{S+}$<u>-mesurable. Alors</u>

$$t>S(\omega),\ X_s(\omega)=X_s(\omega')\ \underline{\text{pour}}\ s\leqq t \quad \Rightarrow\ U(\omega)=U(\omega')$$

(<u>et en particulier, en prenant</u> S=U, $S(\omega)=S(\omega')$) . <u>Si</u> T <u>est un temps d'arrêt</u>(*) $\geqq S$, <u>on a</u> $a_T \circ a_S = a_S \circ a_T = a_S$, <u>et</u> $U \circ a_T$ <u>est encore</u> $\underline{\underline{F}}^o_{S+}$<u>-mesurable</u>.

DEMONSTRATION. La fonction $UI_{\{S<t\}}$ est $\underline{\underline{F}}^o_t$-mesurable, ω et ω' ont mêmes coordonnées jusqu'à l'instant t, donc cette fonction prend même valeur sur ω et ω' (regarder les générateurs de $\underline{\underline{F}}^o_t$!). Prenant d'abord U=1, on voit que $I_{\{S<t\}}(\omega)=I_{\{S<t\}}(\omega')=1$. La relation précédente entraîne alors que $U(\omega)=U(\omega')$.

Ensuite, montrons que $T(a_S\omega) \geq S(\omega)$, ce qui entraînera aussitôt, comme $a_S(\omega)$ est arrêtée à l'instant $S(\omega)$, que $a_T \circ a_S = a_S$. Supposons qu'au contraire on ait $T(a_S\omega) < S(\omega)$, donc $S(a_S\omega) < S(\omega)$. Posons $\omega' = a_S\omega$, $t=S(\omega)$, il vient $S(\omega')=S(\omega)$ d'après le premier alinéa, ce qui est absurde. En ce qui concerne l'autre relation : nous avons $a_S(a_T\omega) = a_S(\omega)$ si $T(\omega)>S(\omega)$ d'après la première partie, car alors $S(a_T\omega)=S(\omega)<T(\omega)$. Si $S(\omega)=T(\omega)$, la relation $a_S(a_T\omega)=a_S(\omega)$ se réduit à l'identité $a_S \circ a_S = a_S$ qui vient d'être établie plus haut.

Enfin, nous écrirons

$$U \circ a_T = U \circ a_S\, I_{\{S=T\}} + U \circ a_T\, I_{\{S<T\}}$$

Les événements $\{S=T\}$, $\{S<T\}$ appartiennent à $\underline{\underline{F}}^o_{S+}$; $U \circ a_S$ est $\underline{\underline{F}}^o_{S+}$-mesurable (c'est vrai dès que U est $\underline{\underline{F}}^o$-mesurable) ; enfin, sur l'ensemble $\{S<T\}$ on a $U \circ a_T = U$ d'après le premier alinéa, et la démonstration est achevée.

Le lemme nous donne d'abord que $a_n \circ a_{n+1} = a_n$, ce qui signifie que l'on a un système projectif d'ensembles (où tous les Ω_n sont égaux à Ω)

$$\Omega_{n+1} \xrightarrow[a_n]{} \Omega_n \xrightarrow[a_{n-1}]{} \cdots\cdots \xrightarrow[a_1]{} \Omega_1$$

Si l'on pose d'autre part $\lambda_n = H_{T_n}.P$ sur Ω_n, le théorème d'arrêt des martingales nous donne que $a_n(\lambda_{n+1})=\lambda_n$.

(*) Egalement de la famille $(\underline{\underline{F}}^o_{t+})$

On peut considérer Ω comme plongé dans l'espace (polonais) de toutes les applications de l'ensemble des rationnels dans $E\cup\{\partial\}$. Avec cette identification, on peut montrer que Ω est <u>universellement mesurable</u> : voir p.ex. [3], p.235. De plus, la tribu $\underline{\underline{F}}^o$ est la tribu borélienne de Ω dans ce plongement. Il en résulte que toute mesure bornée sur $(\Omega,\underline{\underline{F}}^o)$ est intérieurement régulière. Définissons maintenant une mesure Λ_n sur $\Omega_n \times \Omega_{n-1} \ldots \times \Omega_1$, la mesure image de λ_n par l'application $\omega \longmapsto (\omega, a_{n-1}(\omega), \ldots, a_1(\omega))$. Les mesures Λ_n forment un système projectif sur le système projectif d'ensembles usuel en théorie de la mesure, et d'après le théorème de KOLMOGOROV que tout le monde connaît elles proviennent d'une mesure Λ sur $\prod_n \Omega_n$. Les applications a_i étant mesurables, on vérifie que Λ_n est portée par l'ensemble mesurable

$$H_n = \{(\omega_n, \omega_{n-1}, \ldots, \omega_1) \ : \ \omega_{n-1} = a_{n-1}(\omega_n) \ldots\ldots \ \omega_1 = a_1(\omega_2)\}$$

Il en résulte que $\varprojlim \Omega_n$ est mesurable dans $\prod_n \Omega_n$ et porte Λ. La restriction de Λ à cet ensemble est alors la mesure limite projective λ du système (λ_n) (*). Nous allons étudier cette mesure, et pour cela identifier l'ensemble $\varprojlim \Omega_n$.

LEMME. $\varprojlim \Omega_n$ <u>s'identifie à l'ensemble</u> $\tilde{\Omega}$ <u>des</u> $\omega \in \Omega$ <u>tels que</u>

- <u>ou bien</u> $a_n(\omega)=\omega$ <u>pour</u> n <u>assez grand</u> ,
- <u>ou bien il existe une infinité de</u> $a_n(\omega)$ <u>distincts</u>, $T_n(\omega)<T(\omega)$ <u>pour tout</u> n, <u>et</u> $T(\omega)=\zeta(\omega)$.

<u>Avec cette identification, l'application canonique de</u> $\varprojlim \Omega_n$ <u>dans</u> Ω_n <u>est</u> a_n.

DEMONSTRATION. Pour être sérieux, nous allons écrire toute la démonstration, mais il est bien conseillé de ne pas la lire !

Un élément de $\varprojlim \Omega_n$ est par définition une suite $(\omega_n)_{n>0}$ d'éléments de Ω, telle que $\omega_1=a_1(\omega_2) \ldots \ \omega_n=a_n(\omega_{n+1}) \ldots$ Noter qu'on a aussi $\omega_1=a_1(\omega_k)$ pour tout $k>1$, $\omega_n=a_n(\omega_k)$ pour tout $k>n$.

Traitons d'abord le cas où $\omega_n=\omega_{n+1}$ pour $n \geqq N$. Posons $\omega_N=\omega$. On a pour tout i $\omega_i=a_i(\omega_{N+i})=a_i(\omega)$. La relation $\omega_N=\omega_{N+i}$ s'écrit alors $\omega = a_{N+i}(\omega)$ pour tout i.

Noter que ω est le seul élément de Ω possédant les propriétés que $a_i(\omega)=\omega_i$ pour tout i, et $a_n\omega=\omega$ pour n assez grand.

Passons ensuite au cas où il y a une infinité de ω_n distincts. Définissons par récurrence des entiers k_n :

(*) Nous avons établi l'existence d'une limite projective de mesures pour un système projectif (Ω_n, a_n) dont les applications ne sont pas continues. Cf. aussi PARTHASARATHY [4] et WEIL [5].

$k_1=1 \quad , \; k_{i+1}= \inf \{ n>k_i \; , \; \omega_n \neq \omega_{k_i} \}$

Pour abréger les notations, posons $\omega_i'=\omega_{k_i}$, $a_i'=a_{k_i-1}$, $T_i'=T_{k_i-1}$. On a par exemple $\omega_1=\omega_2 \ldots =\omega_{k_1-1}=a_{k_i-1}\omega_{k_i}$: cela s'écrit $\omega_1'=a_1'\omega_2'$, et on a en général $\omega_i'=a_i'(\omega_{i+1}')$, et les ω_i' sont tous distincts. Je dis que l'on a

$$T_1'(\omega_2') < T_2'(\omega_3') \ldots$$

En effet, notons $\bar{t}_1, \bar{t}_2, \ldots$ ces nombres. Nous avons par exemple

$$\omega_1'= a_{T_1'}(\omega_2') = a_{T_1'}(\omega_3')$$
$$\omega_2'= a_{T_2'}(\omega_3')$$

La relation $\omega_1' \neq \omega_2'$ entraîne donc $T_1'(\omega_3')<T_2'(\omega_3')$; le lemme de COURREGE et PRIOURET entraîne $T_1'(\omega_3')=T_1'(\omega_2')$, et la propriété est établie. Noter aussi que la condition $\omega_1' \neq \omega_2'$ entraîne $T_1'(\omega_2')<\zeta(\omega_2')$: on a plus généralement $T_i'(\omega_{i+1}')=\bar{t}_i<\zeta(\omega_{i+1}')$.

Notons ω l'unique élément de Ω qui coïncide avec ω_n' sur $[0,\bar{t}_n]$ et qui vaut ∂ pour $t \geqq \bar{t} = \lim_n \bar{t}_n$. Comme ω et ω_2' coïncident sur $[0,\bar{t}_2]$, et que $\bar{t}_2>T_1'(\omega_2')=\bar{t}_1$, le lemme de C-P entraîne que $T_1'(\omega)= T_1'(\omega_2')$, donc $\omega_1'=a_1'(\omega)$. Plus généralement, on a

$$\omega_i'= a_i'(\omega) \text{ pour tout } i \; , \text{ et } T_i'(\omega)=T_i'(\omega_{i+1}')$$

Comme $T_i'(\omega_{i+1}')<\zeta(\omega_{i+1}')$, ω_{i+1}' ne prend pas la valeur ∂ sur $[0,\bar{t}_i]$. Il en est de même de ω : ainsi $\zeta(\omega) > T_i'(\omega)$ pour tout i, et $T(\omega) \leqq \zeta(\omega)$. On a l'égalité par construction de ω.

On a $\omega_1'=a_{T_{k_1-1}}\omega$; en appliquant les a_p($1 \leqq p<k_1$) on trouve que $\omega_i=\omega_1=\omega_1'$ est égal à $a_i(\omega)$ pour $1 \leqq i<k_1$. On montre de même que $\omega_i=a_i(\omega)$ pour tout i. Enfin, on laisse au lecteur le soin de démontrer qu'il existe un seul $\omega \in \Omega$ possédant les propriétés indiquées dans l'énoncé.

Nous considérons désormais la mesure limite projective λ comme une mesure sur Ω portée par $\tilde{\Omega}$.

VERIFICATION DES PROPRIETES DE λ

Nous allons établir la propriété suivante : pour tout $A \in \underline{\underline{F}}^o_{T_n+}$, on a $\lambda(A) = \int_A H_{T_n} dP$.

Lorsque A appartient à $a_n^{-1}(\underline{\underline{F}}^o)$, on a $A=a_n^{-1}(A)$, et cette égalité signifie simplement que $a_n(\lambda)=\lambda_n$. Ensuite, lorsque A appartient simultanément à $\underline{\underline{F}}^o_{T_n+}$ et à $a_{n+p}^{-1}(\underline{\underline{F}}^o)$, on a d'après le théorème d'arrêt

$$\lambda(A) = \int_A H_{T_{n+p}} dP = \int_A H_{T_n} dP \quad .$$

Supposons enfin que A appartienne à $\underline{\underline{F}}^o_{T_n+}$: on a alors $a_{n+p}^{-1}(A) \in \underline{\underline{F}}^o_{T_n+} \cap a_{n+p}^{-1}(\underline{\underline{F}}^o)$ d'après la dernière partie du lemme de C-P. On peut donc lui appliquer ce qui précède. Ainsi

$$\lambda(a_{n+p}^{-1}(A)) = \int_{a_{n+p}^{-1}(A)} H_{T_n}\, dP$$

Nous faisons maintenant tendre p vers $+\infty$, et nous montrons que $I_A \circ a_{n+p}(\omega)=I_A(\omega)$ pour p assez grand, à la fois P-p.s. et λ-p.s. : cela permet aussitôt de conclure. Or ,

- pour presque tout ω , relativement à P, les $T_n(\omega)$ sont finis et tendent vers $+\infty$; cela entraîne $T_{n+p}(\omega)>T_n(\omega)$ pour p assez grand, et le lemme de C-P entraîne le résultat cherché ;

- la mesure λ est portée par $\tilde{\Omega}$, et on peut donc supposer que ω appartient à cet ensemble. Si $a_k\omega=\omega$ pour k assez grand, il n'y a rien à démontrer. Sinon, on a à nouveau $T_{n+p}(\omega)>T_n(\omega)$ pour p grand et on conclut comme ci-dessus.

Nous allons maintenant nous débarrasser de la suite (T_n), et établir la propriété fondamentale de λ (cela entraînera l'existence de la mesure de FÖLLMER) : <u>si</u> S <u>est un temps d'arrêt de la famille</u> $(\underline{\underline{F}}^o_{t+})$, on a $\lambda\{S<\zeta]=E[H_S]$. Noter que cela s'applique aussi à S_A, où $A \in \underline{\underline{F}}^o_{S+}$!

Nous remarquons que $\{S<T_n\}$ est $\underline{\underline{F}}^o_{T_n+}$ -mesurable et $\underline{\underline{F}}^o_{S+}$-mesurable. La formule précédente nous donne

$$\lambda\{S<T_n\} = \int_{\{S<T_n\}} H_{T_n}\, dP = \int_{\{S<T_n\}} E[H_{T_n} | \underline{\underline{F}}^o_{S+}]\, dP$$

$$= \int_{\{S<T_n\}} H_{S\wedge T_n}\, dP = \int_{\{S<T_n\}} H_S\, dP .$$

On a d'ailleurs le même résultat avec $\{S\leqq T_n\}$ ou $\{S=T_n\}$ au lieu de $\{S<T_n\}$. Appliquons d'abord ceci en prenant S=T, sur l'ensemble $\{S=T_n\}$; comme $T=+\infty$ P-p.s., $\int_{\{T=T_n\}} H_{T_n}\, dP = 0$, et on en déduit que $\lambda\{T=T_n\}=0$. Cela entraîne que la mesure λ est portée en fait par la seconde partie de $\tilde{\Omega}$, celle pour laquelle $T_n(\omega)<T(\omega) =\zeta(\omega)$ pour tout n. Mais alors $T_n \uparrow \zeta$ λ-p.s., et le passage à la limite lorsque $n\to\infty$ dans la formule ci-dessus donne

$$\lambda\{S<\zeta\} = \int_{\{S<\infty\}} H_S\, dP = E[H_S] .$$

Le théorème de FÖLLMER est établi.

Nous conclurons en indiquant l'un des résultats complémentaires de FÖLLMER : le lecteur en trouvera beaucoup d'autres dans le travail de FÖLLMER, car celui-ci interprète au moyen de la mesure μ (ou λ dans le cas des martingales locales) presque toutes les propriétés de la surmartingale positive (H_t).

Nous dirons qu'un temps d'arrêt S de la famille $(\underline{\underline{F}}^{o}_{t+})$ <u>réduit</u> la martingale locale (H_t) si la surmartingale arrêtée $(H_{t\wedge S})$ est une martingale uniformément intégrable. Lorsque S est P-p.s. fini, il n'est pas difficile de voir que cela équivaut à la condition $E[H_S]=E[H_0]$. Mais $E[H_0]=\lambda\{0<\zeta\}$, $E[H_S]=\lambda\{S<\zeta\}$. Ainsi

<u>Un temps d'arrêt</u> P-<u>p.s. fini</u> S <u>réduit</u> (H_t) <u>si et seulement si</u> $S<\zeta$ λ-<u>p.s</u>.

Nous appliquons d'abord cela à S=n : dire que tout n réduit (H_t) signifie que (H_t) est une <u>martingale</u>, et nous obtenons

<u>La martingale locale</u> (H_t) <u>est une vraie martingale si et seulement si</u> $\zeta=\infty$ λ-<u>p.s.</u> (ou encore, si la mesure de FÖLLMER μ est portée par $\{\infty\}\times\Omega$).

D'autre part, on a le résultat suivant : <u>la martingale locale</u> (H_t) <u>est une martingale uniformément intégrable si et seulement si</u> λ <u>est absolument continue par rapport à</u> P.

- Si (H_t) est une martingale uniformément intégrable, on a $\lambda= H_{\infty-}.P$, cette mesure satisfaisant à la propriété caractéristique de λ.

- Inversement, supposons que λ soit absolument continue. D'abord les temps d'arrêt T_n considérés plus haut tendent P-p.s. vers $+\infty$; cela a donc lieu aussi λ-p.s.. Mais nous avons vu plus haut qu'ils tendent λ-p.s. vers ζ : donc $\zeta=\infty$ λ-p.s., et (H_t) est une martingale. Ensuite, soit $H^* = \sup_t H_t$, quantité finie P-p.s.. Soit $\varepsilon>0$. Choisissons h assez petit pour que $P(A)<h \Rightarrow \lambda(A)<\varepsilon$, puis c assez grand pour que $P\{H^*>c\}\leqq h$. On a alors

$$\int_{\{H_t>c\}} H_t dP = \lambda\{H_t>c\}\leqq \lambda\{H^*>c\} \leqq \varepsilon$$

donc les v.a. H_t sont bien uniformément intégrables.

REMARQUE. Soit S un temps d'arrêt de la famille $(\underline{\underline{F}}^{o}_{t+})$, fini (identiquement). Si (H_t) est une martingale, on a $\zeta=\infty$ λ-p.s., donc $\lambda\{S<\zeta\}=\lambda(\Omega)$, et S réduit (H_t). Ainsi S réduit <u>toute</u> martingale pour <u>toute</u> loi P. Cela suggère la conjecture suivante : <u>tout temps d'arrêt fini de la famille</u> $(\underline{\underline{F}}^{o}_{t+})$ <u>est borné</u>.

BIBLIOGRAPHIE

[1]. COURREGE (Ph.) et PRIOURET (P.). Temps d'arrêt d'une fonction aléatoire... Publ. ISUP, 14, 1965, p.245-274.

[2]. DOLEANS-DADE (C.). Existence du processus croissant naturel associé à une surmartingale de la classe (D). Z. für W., 9, 1968, p. 309-314.

[3]. MEYER(P.A.). Le retournement du temps d'après CHUNG et WALSH. Séminaire de Probabilités de Strasbourg V. Lecture Notes in M. vol.191, Springer 1971.

[4]. PARTHASARATHY (K.R.). Probability measures on metric spaces. Academic Press 1967.

[5]. WEIL (M.). Quasi-processus. Séminaire de Probabilités de Strasbourg IV. Lecture Notes in M. vol.124 , Springer 1970.