PAUL-ANDRÉ MEYER

Travaux de H. Rost en théorie du balayage

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 5 (1971), p. 237-250

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1971__5__237_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1969/70

TRAVAUX DE H.ROST EN THEORIE DU BALAYAGE

par P.A.Meyer

ROST a étudié la généralisation, pour un processus de Markov X à espace d'états quelconque, d'un problème résolu par SKOROKHOD dans le cas du mouvement brownien. Etant données deux mesures bornées λ et μ, à quelle condition existe t'il un temps d'arrêt T tel que la répartition de X_T pour la mesure P^{λ} soit égale à μ ? Cet exposé ne concerne que la première partie du remarquable travail de ROST, celle qui traite du cas où le temps est discret . Pour la seconde partie, il vaut sans doute mieux attendre la publication des résultats annoncés par ROST en Mai 1970 à Oberwolfach, et qui donnent à la théorie sa forme définitive.

Dans le cas discret, le travail de ROST se présente comme l'étude d'un certain procédé de construction de mesures, introduit par CHACÒN et ORNSTEIN en théorie ergodique, puis utilisé à nouveau par ORNSTEIN, MOKOBODZKI, METIVIER... C'est le "schéma de remplissage" ci-dessous.

§ 1 . LE SCHEMA DE REMPLISSAGE . LE PREMIER PROBLEME

Nous nous donnons un espace mesurable $(E,\underline{\underline{E}})$, muni d'un noyau sous-markovien P. Le mot mesure signifie ci-dessous mesure bornée sur $(E,\underline{\underline{E}})$, et le mot fonction signifie fonction $\underline{\underline{E}}$-mesurable réelle. Nous travaillerons sur un vrai noyau, non un pseudo-noyau . Néanmoins, les résultats obtenus s'appliqueront aux situations que l'on rencontre en théorie ergodique : consulter à ce sujet le paragraphe 3.

Une fonction f est excessive (resp. défective) , si elle est ≥ 0, et si $Pf \leq f$ (resp. $Pf \geq f$).

Soient λ et μ deux mesures positives. Nous définissons le schéma de remplissage comme le procédé qui associe à (λ,μ) la double suite (λ_n,μ_n) suivante :

$$\lambda_0=(\lambda-\mu)^+ , \qquad \mu_0=(\lambda-\mu)^-$$
$$\lambda_1=(\lambda_0 P-\mu_0)^+ , \qquad \mu_1=(\lambda_0 P-\mu_0)^-$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\lambda_{n+1}=(\lambda_n P-\mu_n)^+ , \qquad \mu_{n+1}=(\lambda_n P-\mu_n)^-$$

Ou encore, si nous posons $\eta_0=\lambda-\mu$, $\eta_{n+1}=\eta_n^+P-\eta_n^-$, on a $\lambda_n=\eta_n^+$, et $\mu_n=\eta_n^-$.

La construction a la signification intuitive suivante : μ est un trou. A l'instant 0, un camion verse une masse de terre λ, dont $\lambda\wedge\mu$ tombe dans le trou. La masse de terre non utilisée est λ_0, et le trou restant est μ_0. On jette en l'air la terre restante, elle retombe suivant la répartition λ_0P, dont $\lambda_0P\wedge\mu_0$ tombe dans le trou ; il reste la masse de terre λ_1, et le trou μ_1 ; on jette λ_1 en l'air... etc.

Les deux problèmes résolus par ROST sont les suivants

1) A quelle condition le trou est il entièrement rempli ?
2) A quelle condition la terre est elle entièrement utilisée ?

Nous allons commencer par le problème 1 .

PROPRIETES ELEMENTAIRES

LEMME 1.- a) $\lambda_{n+1}-\mu_{n+1}=\lambda_nP-\mu_n$; λ_{n+1} et μ_{n+1} sont étrangères.

b) $\mu_{n+1}\leqq\mu_n$, $\lambda_{n+1}\leqq\lambda_nP$.

c) Si f est excessive, $<\lambda_n,f>$ est fonction décroissante de n.

DEMONSTRATION.- Nous prouvons seulement c : $<\lambda_{n+1},f>\ \leqq\ <\lambda_nP,f> = <\lambda_n, Pf>\ \leqq\ <\lambda_n,f>$.

DEFINITION.- $\mu_\infty=\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n$.

Nous définissons d'autre part le préordre du balayage sur l'ensemble des mesures bornées :

DEFINITION. Soient α et β deux mesures bornées (non nécessairement $\geqq 0$). On dit que α majore β au sens du balayage (notation : $\beta\dashv\alpha$) si l'on a $\beta(f)\leqq\alpha(f)$ pour toute fonction excessive bornée f.

Par exemple, si λ est une mesure positive, on a $\lambda P\dashv\lambda$. De la relation $\lambda_{n+1}-\mu_{n+1}=\lambda_nP-\mu_n$ on déduit alors que, dans le schéma de remplissage.

$$\eta_{n+1}=\lambda_{n+1}-\mu_{n+1}\dashv\lambda_n-\mu_n=\eta_n$$

Voici le premier résultat important de ROST. Nous en donnons une version légèrement améliorée, mais la démonstration est celle de ROST.

THEOREME 1 . Soit θ une mesure positive. Les relations $\mu-\lambda\dashv\theta$ et $\mu_\infty\dashv\theta$ sont équivalentes. En particulier si $\theta=0$, il vient que

$$\mu_\infty=0 \iff \mu\dashv\lambda \quad .$$

DEMONSTRATION. Nous venons de voir que $\eta_{n+1} \dashv \eta_n$. Ainsi, si f est excessive bornée

$$\limsup_n < -\mu_n, f > \leqq \limsup_n < \lambda_n - \mu_n, f > \leqq < \lambda - \mu, f >$$

Autrement dit, on a $-\mu_\infty \dashv \lambda - \mu$, ou $\mu - \lambda \dashv \mu_\infty$. En particulier la relation $\mu_\infty \dashv \theta$ entraîne $\mu - \lambda \dashv \theta$.

Il reste à voir la réciproque si θ est positive. Nous aurons besoin pour cela de quelques notations de théorie du potentiel. Soient A un ensemble , A' son complémentaire, J_A et $J_{A'}$ les noyaux de multiplication par I_A et $I_{A'}$, et P' le noyau sousmarkovien $J_{A'}P$. Nous notons ${}^{A'}G$ le noyau potentiel $I+P'+P'^2+\dots$. Alors le noyau de réduction sur A est $H_A = {}^{A'}GJ_A$. Nous posons $e_A = H_A 1$ (potentiel d'équilibre de A).

LEMME 2. <u>Si</u> $\lambda_n(A)=0$ <u>pour tout</u> n, <u>alors</u> $< \lambda_n, e_A > \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

DEMONSTRATION. Comme $\lambda_{k+1} \leqq \lambda_k P$, et λ_k est portée par A', on a $\lambda_{k+1} \leqq \lambda_k J_{A'}P = \lambda_k P'$, donc pour tout n $\lambda_n \leqq \lambda P'^n$. Ainsi

$$< \lambda_n, e_A > = < \lambda_n, {}^{A'}GJ_A 1 > \leqq < \lambda P'^n, {}^{A'}GJ_A 1 >$$

Mais $P'^n\, {}^{A'}GJ_A 1$ tend vers 0 en décroissant lorsque $n\to\infty$.

LEMME 3. <u>Si</u> θ <u>est une mesure positive</u>, <u>et si</u> $\mu - \lambda \dashv \theta$, <u>alors</u> $\mu_n - \lambda_n \dashv \theta$ <u>pour tout</u> n .

DEMONSTRATION. Il suffit de raisonner pour n=1. Soit A un ensemble portant μ_0, tel que $\lambda_0(A)=0$. Soit f une fonction excessive bornée, et soit

$$g = f.I_A + Pf.I_{A'}$$

On a $Pf \leqq g \leqq f$, donc $Pg \leqq Pf \leqq g$, et g est excessive. Nous avons donc $< \mu_0 - \lambda_0, g >$ $\leqq < \theta, g > \leqq < \theta, f >$ puisque θ est positive, ce qui s'écrit aussi

$$< \mu_0, f > - < \lambda_0, Pf > \leqq < \theta, f >$$

et enfin $\mu_1 - \lambda_1 = \mu_0 - \lambda_0 P \dashv \theta$.

Démontrons alors que la relation $\mu - \lambda \dashv \theta$ entraîne $\mu_\infty \dashv \theta$. D'après le lemme 3, nous avons $\mu_n - \lambda_n \dashv \theta$ pour tout n. Soient f une fonction excessive bornée, A un ensemble portant μ_∞ , tel que $\lambda_n(A)=0$ pour tout n (noter que $\mu_\infty \leqq \mu_n$ est étrangère à λ_n pour tout n). Le lemme 2 entraîne $\lim_n < \lambda_n, H_A f > = 0$. Mais d'autre part

$$< \mu_n, H_A f > - < \lambda_n, H_A f > \leqq < \theta, H_A f > \leqq < \theta, f >$$

d'où à la limite $< \mu_\infty, f > = < \mu_\infty, H_A f > \leqq < \theta, f >$, l'inégalité désirée.

La dernière phrase de l'énoncé est évidente : $\mu_\infty \dashv 0$ entraîne en effet $< \mu_\infty, 1 > = 0$, donc $\mu_\infty = 0$.

COMMENTAIRE

Rappelons que dans l'interprétation intuitive du schéma de remplissage λ représente un " tas de terre", μ un " trou " , μ_∞ représente le " trou résiduel" , et $\mu' = \mu - \mu_\infty$ la " partie du trou remplissable à l'aide de λ". Noter le résultat suivant :

LEMME 4. <u>Soient</u> (λ'_n, μ'_n) <u>les mesures obtenues en appliquant le schéma de remplissage à</u> (λ, μ') ; <u>alors</u> $\lambda'_n = \lambda_n$, $\mu'_n = \mu_n - \mu_\infty$.

DEMONSTRATION. Il suffira de prouver que $\lambda'_1 = \lambda_1$, $\mu'_1 = \mu_1 - \mu_\infty$ (les autres étapes n'étant que l'itération de la première). Or on a $\lambda'_0 = (\lambda_0 - \mu_0 + \mu_\infty)^+ = \lambda_0$, $\mu'_0 = \mu_0 - \mu_\infty$, car $\mu_\infty \leqq \mu_0$ est étrangère à λ_0. Donc $\lambda'_1 - \mu'_1 = \lambda'_0 P - \mu'_0 = \lambda_0 P - \mu'_0 = \lambda_0 P - \mu_0 + \mu_\infty = \lambda_1 - (\mu_1 - \mu_\infty)$, d'où en séparant parties positives et négatives $\lambda'_1 = \lambda_1$, $\mu'_1 = \mu_1 - \mu_\infty$, car $\mu_\infty \leqq \mu_1$ est étrangère à λ_1.

Autrement dit, on a $\mu'_\infty = 0$, et μ' possède les propriétés

$$\mu' \leqq \mu \qquad , \qquad \mu' \dashv \lambda$$

Il existe bien d'autres moyens de " verser la terre dans le trou". Par exemple, nous pouvons partager λ en $\lambda^1 + \lambda^2$, μ en $\mu^1 + \mu^2$, et appliquer le schéma de remplissage aux deux couples, ce qui donne deux mesures μ'^1, μ'^2 satisfaisant à $\mu'^1 + \mu'^2 \leqq \mu$, $\lambda \vdash \mu'^1 + \mu'^2$. Peut on affirmer qu'en un certain sens μ' est " meilleure" que $\mu'^1 + \mu'^2$? C'est ce qu'indique le théorème 1. On a en effet en posant $\theta = \mu - \mu'^1 - \mu'^2$

$$\theta \geqq 0 \qquad , \qquad \mu - \lambda \dashv \theta$$

donc $\mu_\infty \dashv \theta$, ou $\mu'^1 + \mu'^2 \dashv \mu'$, ce qui entraîne en particulier que par le second procédé la masse de terre qui est entrée dans le trou est au plus égale à celle de μ'. Le schéma de remplissage est donc en un certain sens optimal.

APPLICATIONS DU THEOREME 1

THEOREME 2. <u>Soient</u> λ <u>et</u> μ <u>deux mesures positives bornées telles que</u> $\mu \dashv \lambda$. <u>Il existe une suite</u> $(d_n)_{n \geqq 0}$ <u>de fonctions à valeurs dans</u> $[0,1]$ <u>telles que</u>

$$\mu = \lambda.(1-d_0) + (\lambda d_0)P.(1-d_1) + ((\lambda d_0)P.d_1)P.(1-d_2) + \\ + (((\lambda d_0)P.d_1)P.d_2).(1-d_3) + \ldots .$$

DEMONSTRATION. Nous écrivons que $\mu_\infty = 0$, ce qui équivaut à

$$\mu = (\mu-\mu_0)+(\mu_0-\mu_1)+(\mu_1-\mu_2)+ \dots$$

(somme de mesures positives). Compte tenu des relations $\lambda_{n+1}-\mu_{n+1} = \lambda_n P-\mu_n$, et de la définition de λ_0 et μ_0, cela s'écrit

$$\mu = (\lambda-\lambda_0) + (\lambda_0 P-\lambda_1) + (\lambda_1 P-\lambda_2) + \dots$$

Désignons maintenant par d_0 la densité λ_0/λ , par d_1 la densité $\lambda_1/\lambda_0 P$, etc. Le premier terme de la somme s'écrit $\lambda.(1-d_0)$, le second, $\lambda_0 P.(1-d_1) = (\lambda d_0)P.(1-d_1)$, etc .

Nous allons interpréter le théorème 2 en termes de probabilités. Construisons la réalisation canonique du processus de Markov admettant P comme noyau de transition

$$W,\ Y_n\ ,\ \underline{\underline{G}}_n\ ,\quad \text{etc}$$

où $W= (E\cup\{\partial\})^{\mathbb{N}}$, les Y_n sont les applications coordonnées, $\underline{\underline{G}}$ est la tribu produit, $\underline{\underline{G}}_n$ la tribu engendrée par les Y_k, $k\leq n$; P^λ_W est l'unique loi sur W pour laquelle le processus (Y_n) est markovien, admet P comme noyau de transition et λ comme mesure initiale.

Nous formons maintenant l'espace $W\times\mathbb{R}_+ = \Omega$, nous posons $\underline{\underline{G}}\times\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)=\underline{\underline{F}}$, $\underline{\underline{G}}_n\times\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)= \underline{\underline{F}}_n$, $X_n(w,t)=Y_n(w)$, $Z(w,t)=t$, $P^\lambda=P^\lambda_W \otimes \gamma$, où la loi γ sur $\mathbb{R}_+$ est exponentielle de paramètre 1. Le processus (X_n) sur Ω est markovien par rapport à la famille $(\underline{\underline{F}}_n)$, admet P comme noyau de transition et λ comme mesure initiale.

THEOREME 3. <u>Si</u> $\mu\dashv\lambda$, <u>il existe un temps d'arrêt</u> τ <u>de la famille</u> $(\underline{\underline{F}}_n)$ <u>tel que la loi de</u> X_τ <u>sur</u> E (<u>avec la convention usuelle</u> $X_\infty = \partial\notin E$) <u>soit égale à</u> μ <u>lorsque</u> Ω <u>est muni de</u> P^λ, <u>et que l'on ait</u>

$$E^\lambda[\ f\circ X_\tau\ ,\ \tau\leq k\ ] = <\mu-\mu_k, f> \quad \underline{\text{pour tout}}\ k\ .$$

DEMONSTRATION. Posons $c_k= -\log d_k$

$$A_n= c_0\circ X_0+ \dots + c_n\circ X_n$$

$$\tau = \inf\ \{\ n : A_n > Z\ \}$$

Nous avons alors, si f est positive

$$E^\lambda[\ f\circ X_\tau\ ,\ \tau=n\ ] = E^\lambda[\ f\circ X_n\ ,\ A_{n-1}\leq Z<A_n] = E^\lambda[f\circ X_n(e^{-A_{n-1}}-e^{-A_n})]$$

$$=E^\lambda[d_0\circ X_0.d_1\circ X_1\dots d_{n-1}\circ X_{n-1}.f\circ X_n.(1-d_n\circ X_n)]$$

$$= <((\lambda d_0)P.\ \dots d_{n-1})P.(1-d_n),\ f>$$

En sommant sur n de 0 à k, et en rapprochant du théorème 2, on obtient

$$E^{\lambda}[f\circ X_{\tau},\ \tau\leqq k\ ] = <\mu-\mu_k, f>$$

Le reste de l'énoncé est évident.

COMMENTAIRE. Le théorème 3 est un théorème du type de celui de SKOROKHOD sur le mouvement brownien. Noter que le temps d'arrêt τ n'est pas construit par une application du théorème de Zorn, mais qu'il est (explicitement et) canoniquement associé au couple (λ,μ).

Lorsqu'il n'existe pas de fonctions excessives non constantes, la relation $\mu\dashv\lambda$ se réduit à la relation $\mu(1)=\lambda(1)$, et perd tout intérêt. Dans le cas du mouvement brownien sur $\mathbb{R}$ (théorème de SKOROKHOD) ce sont les fonctions convexes positives, i.e. les fonctions défectives, qui s'introduisent naturellement. Il en est de même dans le travail de ROST.

PROPOSITION 1. Soient λ et μ deux mesures positives bornées telles que $\mu\dashv\lambda$, $\mu(1)=\lambda(1)$, et soit τ le temps d'arrêt qui leur est associé . Soit g une fonction défective μ-intégrable. Les propriétés suivantes sont alors équivalentes

1) $<\mu_k, g> \geqq <\lambda_k, g>$ pour tout k .

2) $<\lambda_k, g> \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$

3) Pour la mesure P^{λ}, la sousmartingale $(g\circ X_{\tau\wedge n})$ est uniformément intégrable.

DEMONSTRATION. 1) => 2) : en effet, comme $\mu\dashv\lambda$, on a $\lim_n \mu_n=0$; mais les μ_n sont majorées par μ, et g est μ-intégrable, donc $<\mu_n, g> \to 0$ (théorème de Lebesgue) et a fortiori $<\lambda_n, g> \to 0$ d'après 1).

2) => 3): la relation $\mu(1)=\lambda(1)$ signifie que τ est p.s. fini. 2) entraîne pour commencer que $<\lambda_k, g>$ est fini pour $k\geqq K$ assez grand. La loi de $X_{\tau\wedge k}$ sur E étant $\mu-\mu_k+\lambda_k$, et g étant μ-intégrable, l'espérance de $g\circ X_{\tau\wedge k}$ est finie pour $k\geqq K$. Mais cette espérance croît avec k, elle est donc finie pour tout k. La relation 2) s'écrit aussi $\lim_n <\mu-\mu_n+\lambda_n, g> = <\mu, g> < \infty$ (noter que $<\mu_n, g> \to <\mu_{\infty}, g> = 0$). Cela s'écrit $\lim_n E^{\lambda}[g\circ X_{\tau\wedge n}] = E^{\lambda}[g\circ X_{\tau}]$, et on sait bien que cela entraîne l'intégrabilité uniforme .

3)=> 1) : écrivons que $E^{\lambda}[g\circ X_{\tau\wedge n}] \leq E^{\lambda}[g\circ X_{\tau}]$ (théorème d'arrêt de Doob) ; cela s'écrit aussi $< \mu-\mu_n+\lambda_n, g > \leq < \mu, g > < \infty$, qui équivaut à 1) .

COROLLAIRE. *Soit $\underline{\underline{D}}$ l'ensemble des fonctions défectives μ-intégrables g qui satisfont aux conditions équivalentes de la proposition* 1. *Alors $\underline{\underline{D}}$ est un cône convexe ; toute fonction défective majorée par un élément de $\underline{\underline{D}}$ appartient à $\underline{\underline{D}}$. Enfin, soit (g_n) une suite croissante d'éléments de $\underline{\underline{D}}$, et soit* g *sa limite ; si* g *est* μ-*intégrable*, g *appartient à $\underline{\underline{D}}$* .

DEMONSTRATION. La première assertion est immédiate sur la propriété 3), ou 2), et la seconde sur la propriété 1).

La condition 1) est difficile à vérifier , car elle fait intervenir toutes les mesures λ_k et μ_k. Nous allons indiquer (toujours d'après ROST, mais en affaiblissant un peu son théorème) une condition plus maniable, qui est étroitement liée au théorème de SKOROKHOD.

PROPOSITION 2. *Supposons que* P1=1. *Soient* λ *et* μ *deux lois sur* E, $\underline{\underline{C}}$ *un cône convexe de fonctions défectives* μ-*intégrables, contenant la fonction* 1, *tel que toute fonction défective majorée par un élément de $\underline{\underline{C}}$ appartienne à $\underline{\underline{C}}$. On suppose que*

$$\mu(f) \geq \lambda(f) \text{ pour tout } f \in \underline{\underline{C}} \text{ .}$$

On a alors $\mu \dashv \lambda$, *et* $\underline{\underline{C}} \subset \underline{\underline{D}}$.

DEMONSTRATION. On a $\lambda(1)=\mu(1)=1$ par hypothèse. Si f est excessive bornée par 1, 1-f est défective puisque P1=1, et appartient à $\underline{\underline{C}}$; on en déduit $\mu(f) \leq \lambda(f)$, et donc $\mu \dashv \lambda$. Il reste à montrer que $< \mu_k, f > \geq < \lambda_k, f >$ pour tout k et tout $f \in \underline{\underline{C}}$: nous montrerons cela pour k=1, car en remplaçant (λ,μ) par (λ_1,μ_1) on aura le même résultat pour k=2, etc.

Soit A un ensemble portant μ_0, tel que $\lambda_0(A)=0$, et soit

$$g_n = f.I_A + I_{A^c} . (Pf\wedge(f+n))$$

g_n est défective, car $f \leq g_n \leq Pf$, donc $g_n \leq Pf \leq Pg_n$. Comme g_n est majorée par f+n, elle appartient à $\underline{\underline{C}}$. On a donc $\mu_0(g_n) \geq \lambda_0(g_n)$, ou $\mu_0(f) \geq < \lambda_0, Pf\wedge(f+n) >$, ou enfin $\mu_0(f) \geq < \lambda_0 P, f >$ $(n \to \infty)$. En particulier, f est λ_0P-intégrable. On conclut en remarquant que $\mu_1-\lambda_1 = \mu_0-\lambda_0 P$.

§ 2 . LE SECOND PROBLEME

Rappelons que le second problème consiste à trouver une condition nécessaire et suffisante pour que " toute la terre entre dans le trou", i.e. que l'on ait $\lim_n < \lambda_n, 1 > = 0$. ROST donne ici encore une condition nécessaire et suffisante simple

THEOREME 4.- <u>Soit</u> (λ_n, μ_n) <u>la suite associée à</u> (λ, μ) <u>par le schéma de remplissage. Les conditions suivantes sont équivalentes</u>

1) $\lim\limits_{n\to\infty} <\lambda_n, 1 > = 0$
2) $\lambda(f) \leqq \mu(f)$ <u>pour toute fonction</u> f <u>défective bornée</u>.

Pour abréger, la condition 2) sera notée $\lambda \dashv \mu$.

DEMONSTRATION. Si f est défective bornée, on a

$$< \lambda_{n+1} - \mu_{n+1}, f > = < \lambda_n P - \mu_n, f > \geqq < \lambda_n - \mu_n, f >$$

d'où $< \lambda_{n+1} - \mu_{n+1}, f > \geqq < \lambda - \mu, f >$; si $< \lambda_k, 1 > \to 0$, le premier membre a une lim inf négative, et on a $< \lambda - \mu, f > \leqq 0$, soit $\lambda \dashv \mu$.

Nous supposons maintenant que $\lambda \dashv \mu$, et nous établissons la réciproque.

Nous allons commencer par nous ramener à une situation plus simple. Notons $\underline{\underline{D}}$ le cône des fonctions défectives bornées, et e la fonction invariante $\lim_n P^n 1$. Toute fonction défective $f \leqq 1$ satisfait à $f \leqq \lim_n P^n f \leqq \lim_n P^n 1 = e$. Donc $\underline{\underline{D}} = \{0\}$ si et seulement si $e=0$.

Etudions d'abord le cas trivial où $e=0$. Dans ce cas, la relation $\lambda \dashv \mu$ est satisfaite par <u>tout</u> couple de mesures positives. On a d'autre part $\lim_n < \lambda_n, 1 > \leqq \lim_n < \lambda P^n, 1 > = < \lambda, e > = 0$. Le théorème est donc trivialement vrai : toute la terre tient dans le trou parce qu'en réalité elle est emportée par le vent !

Nous supposons désormais que $e \neq 0$. La fonction $1-e$ étant purement excessive, nous avons

$$\lim_n < \lambda_n, 1-e > \leqq \lim_n < \lambda P^n, 1-e > = 0$$

Il nous suffit donc de montrer que $\lim_n < \lambda_n, e > = 0$. Introduisons le nouvel espace $E' = \{e > 0\}$, les nouvelles mesures $\lambda' = e.\lambda$, $\mu' = e.\mu$, le nouveau noyau $P'(x,dy) = \frac{1}{e(x)} P(x,dy) e(y)$ sur E', pour lequel $I_{E'}$ est invariante. Construisons la suite (λ'_n, μ'_n) associée à (λ', μ') par le schéma de remplissage relatif à P' sur E'. On vérifie aussitôt que $\lambda'_n = e.\lambda_n$, $\mu'_n = e.\mu_n$. Si f' est défective bornée sur E', la fonction f égale à ef' sur E' et à 0 sur $E \setminus E'$ est défective sur E, et la relation $\lambda(f) \leqq \mu(f)$

nous donne $\lambda'(f')\leq\mu'(f')$. Enfin, la relation $\lim_n \lambda'_n(1) = 0$ équivaut à $\lim_n \lambda_n(e)=0$. Autrement dit, quitte à nous restreindre à E' et à changer de noyau, nous pouvons nous ramener au cas où la fonction 1 est invariante.

Nous supposons dans la suite que $P1=1$.

Le lemme suivant se démontre exactement comme le lemme 3 (dans le cas où $\theta=0$)

LEMME 5.- Si $\lambda\dashv\mu$, on a $\lambda_n \dashv \mu_n$ pour tout n .

Démontrons alors le théorème 4. Soit A un ensemble portant μ_∞ , et tel que $\lambda_n(A)=0$ pour tout n . Nous avons

$$< \lambda_n, 1 > = < \lambda_n, e_A > + < \lambda_n, 1-e_A > \leqq < \lambda_n, e_A > + < \mu_n, 1-e_A >$$

car $1-e_A \in \underline{\underline{D}}$, 1 étant invariante et e_A excessive. Comme A porte μ_∞ , et $e_A=1$ sur A, on ne change pas le dernier membre en remplaçant μ_n par $\mu_n-\mu_\infty$:

$$< \lambda_n, 1 > \leqq < \lambda_n, e_A > + < \mu_n-\mu_\infty , 1-e_A >$$

Mais $\lim_n < \lambda_n, e_A > = 0$ (lemme 2), et $\mu_n \downarrow \mu_\infty$. La démonstration est achevée.

§ 3. "GENERALISATION" DES RESULTATS PRECEDENTS (*)

Le travail de ROST est présenté sous les hypothèses habituelles de la théorie ergodique : $(E,\underline{\underline{E}},m)$ est un espace mesuré positif σ-fini, T est une contraction positive de $L^1(m)$, et le noyau que nous avons noté P est seulement un " pseudo-noyau", l'opérateur sur $L^\infty(m)$ adjoint de T. Dans une telle situation, les démonstrations probabilistes ne sont plus de vraies démonstrations, mais seulement des guides pour l'intuition , et il faut une ascèse pénible pour démontrer rigoureusement des résultats qui seraient évidents si l'on avait affaire à de vrais noyaux. Or il existe une méthode qui permet de se ramener, sans rien perdre, à une situation où il existe de vrais noyaux. Elle remonte pour l'essentiel à STONE, et elle a été exposée par DOOB dans un article récent. Pourtant, elle n'est pas suffisamment connue. La voici.

(*) La polémique contenue dans ce paragraphe ne concerne pas le travail de ROST: on a cherché à agacer les ergodiciens en général.

On commence par se ramener aux mesures bornées de la manière suivante : on prend une fonction $f\in L^1(m)$ strictement positive en tout point de E (il en existe puisque m est σ-finie), telle que $m(f)=1$, et on pose $m'=f.m$. Si $g\in L^1(m')$, on a $fg\in L^1(m)$, et on pose $T'(g) = \frac{1}{f}T(fg)$. On vérifie aussitôt que T' est une contraction positive de $L^1(m')$, et il est très facile de passer des propriétés ergodiques de T à celles de T', et vice-versa. Les espaces $L^\infty(m)$ et $L^\infty(m')$ sont identiques, et le "noyau" adjoint de T' sur $L^\infty(m')$ est encore égal à P. Quitte à changer de notation, <u>nous pouvons donc supposer que</u> m <u>est une loi de probabilité</u>.

Soit U le spectre de l'algèbre de Banach $L^\infty(m)$: c'est un espace compact horrible, et la transformation de Gelfand $f\mapsto\hat{f}$ est un isomorphisme de $L^\infty(m)$ sur $\underline{\underline{C}}(U)$. Nous munirons U de sa tribu de Baire $\underline{\underline{U}}$, engendrée par $\underline{\underline{C}}(U)$. On a $\hat{1}_E = 1_U$.

La forme linéaire m sur L^∞ se transporte en une forme linéaire $\hat{m}$ sur $\underline{\underline{C}}(U)$; $\hat{m}$ est positive, et on a $\hat{m}(1)=1$. Donc $\hat{m}$ est une loi de probabilité sur U. Il est très facile de vérifier, par le théorème des classes monotones, que tout élément de $L^\infty(\hat{m})$ est égal $\hat{m}$-p.p. à un élément de $\underline{\underline{C}}(U)$ (unique !).

Si nous transportons P sur $\underline{\underline{C}}(U)$ par l'isomorphisme précédent, nous obtenons une contraction positive de $\underline{\underline{C}}(U)$, c'est à dire un <u>noyau</u> $\hat{P}$ <u>sousmarkovien et fellérien</u> . Si K est un compact de Baire $\hat{m}$-négligeable, I_K est l'enveloppe inférieure d'une suite décroissante de fonctions continues $\hat{f}_n$, qui tendent vers 0 $\hat{m}$-p.p. ; mais alors $<\hat{m},\hat{f}_n> \to 0$. En revenant sur E, on voit que cela entraîne $<m,Pf_n> \to 0$, $<\hat{m},\hat{P}\hat{f}_n> \to 0$, et enfin $<\hat{m}\hat{P}, I_K> =0$. Il en résulte que $\hat{m}\hat{P}$ est absolument continue par rapport à $\hat{m}$, et $\hat{P}$ se prolonge en un opérateur sur $L^\infty(\hat{m})$. On peut voir cela de bien des manières, d'ailleurs.

L'application $f\mapsto\hat{f}$ de $L^\infty(m)$ dans $\underline{\underline{C}}(U)$ est aussi une isométrie pour les normes induites respectivement par $L^1(m)$, $L^1(\hat{m})$. Elle se prolonge donc en un isomorphisme de $L^1(m)$ sur $L^1(\hat{m})$, qui permet de transporter T en une contraction $\hat{T}$ de $L^1(\hat{m})$. On vérifie aussitôt que $\hat{T}$ et $\hat{P}$ sont adjoints.

Sur l'espace $(U,\underline{\underline{U}})$, on a un vrai noyau $\hat{P}$, et l'on peut faire de la théorie du potentiel, ou des démonstrations probabilistes rigoureuses. Dans de nombreux cas, le retour de l'espace U à l'espace E est immédiat, et les résultats obtenus pour de vrais noyaux donnent alors directement des résultats pour les pseudo-noyaux sur E. C'est le cas pour le travail de ROST.

§ 4. RELATIONS AVEC LA THEORIE ERGODIQUE

Le schéma de remplissage a été créé pour la théorie ergodique, afin de démontrer le lemme maximal de HOPF ci-dessous . Depuis lors, GARSIA a publié une démonstration beaucoup plus rapide du lemme de HOPF, ainsi qu'une démonstration assez simple du lemme de BRUNEL : ces deux preuves se passent du schéma de remplissage. Pourtant il me semble que l'emploi du schéma de remplissage et du langage probabiliste permettent de mieux comprendre ce qui se passe. Nous déduirons du lemme de BRUNEL un autre résultat remarquable du travail de ROST, qui relie l'ordre du balayage au théorème ergodique ponctuel.

NOTATION. λ et μ sont deux mesures positives bornées, $\eta = \lambda-\mu$, m est une mesure positive bornée telle que

1) mP soit absolument continue par rapport à m
2) λ et μ soient absolument continues par rapport à m

Il existe de telles mesures : par exemple si $c\in]0,1[$, on peut prendre $m = \sum_0^\infty c^k(\lambda+\mu)P^k$. Nous <u>identifierons</u> l'espace $L^1(m)$ à l'espace $\underline{\underline{M}}_b(m)$ des mesures bornées absolument continues par rapport à m, en désignant par la même lettre une mesure de $\underline{\underline{M}}_b(m)$ et sa densité par rapport à m .

Nous notons (λ_k,μ_k) la suite déduite de (λ,μ) par le schéma de remplissage. La clef des applications du schéma de remplissage à la théorie ergodique est le lemme suivant :

LEMME 6. <u>On a pour tout</u> p

$$\sum_0^p \eta P^k \leq \sum_0^p \lambda_k \quad .$$

DEMONSTRATION. C'est évident pour p=0. Admettons le pour tout η et p=n-1. Nous avons alors d'après cette hypothèse de récurrence, en prenant $\eta' = \lambda_0 P-\mu_0$, de sorte que $\lambda'_k=\lambda_{k+1}$

$$\sum_0^{n-1} \eta' P^k = \sum_0^{n-1}(\lambda_0 P^{k+1}-\mu_0 P^k) \leq \sum_0^{n-1} \lambda'_k = \sum_1^n \lambda_k$$

Ajoutons l'inégalité $\lambda_0-\mu_0 P^n \leq \lambda_0$, nous obtenons l'inégalité cherchée.

Voici le lemme maximal de HOPF, exprimé dans le langage de cet exposé.

THEOREME 5. <u>Si</u> $A \subset \bigcup_k \{ \eta+\eta P+\ldots+\eta P^k > 0 \}$ <u>m-p.s., on a</u> $\mu.I_A \dashv \lambda$.

DEMONSTRATION. On se ramène au cas où $\lambda=\eta^+, \mu=\eta^-$. Posons $\mu'=\mu-\mu_\infty$. Nous savons que $\mu' \dashv \lambda$; si f est excessive bornée, nous avons

$$\int f\lambda \geqq \int f\mu' \geqq \int_{\{\mu_\infty=0\}} f\mu$$

et il suffit de démontrer que $A \subset \{\mu_\infty = 0\}$ m-p.s.. Mais d'après le lemme précédent on a $A \subset \{ \sum_0^\infty \lambda_k > 0 \}$ m-p.s., et μ_∞ est étrangère à $\sum \lambda_k$.

Nous allons maintenant déduire du lemme de HOPF le lemme de BRUNEL. Voici d'abord un résultat technique, dû à CHACÒN-ORNSTEIN.

LEMME 7. <u>On a pour tout</u> q

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\eta P^{n+q}}{m+mP+\ldots+mP^{n-1}} = 0 \quad \text{m-p.s.}$$

DEMONSTRATION. Il suffit de raisonner lorsque q=0 . Soit $\varepsilon>0$. Posons $\eta_0=\eta$, $\eta_1=\eta P-\varepsilon m$ ... $\eta_n=\eta P^n-\varepsilon(m+mP+\ldots+mP^{n-1})$, et $A_n=\{\eta_n>0\}$. Nous allons montrer que $\sum m(A_n)<\infty$, d'où $\limsup_n A_n=\emptyset$ m-p.s. (lemme de Borel-Cantelli), ce qui est le résultat cherché, ε étant arbitraire.

Nous avons $\eta_n=\eta_{n-1}P-\varepsilon m$, donc $\eta_n^+=\eta_n I_{A_n} \leqq \eta_n^+ P - \varepsilon I_{A_n}.m$, et $\varepsilon m(A_n) \leqq \langle \eta_{n-1}^+ P, 1\rangle - \langle \eta_n^+, 1\rangle \leqq \eta_{n-1}^+(1) - \eta_n^+(1)$

en sommant sur n, il vient bien

$$\varepsilon.\sum m(A_n) \leqq \eta_0^+(1) < \infty .$$

THEOREME 6. <u>Si</u> $A \subset \limsup_n \{ \sum_0^n \eta P^k > 0 \}$ <u>m-p.s., on a</u> $\mu H_A \dashv \lambda$.

DEMONSTRATION. Soit $D_A = \inf \{ n\geqq 0 : X_n \in A \}$, soit q un entier, et soit $T=D_A \wedge q$. Posons , $\varepsilon>0$ étant arbitrairement choisi

$$\lambda'=\lambda+\varepsilon m \quad , \quad \mu'=\mu P_T \quad , \quad \eta'=\lambda'-\mu' = \eta+\varepsilon m+(\mu-\mu P_T)$$

Soit f bornée. Nous avons $P_T P^k f = E^\cdot[f\circ X_{T+k}]$ et donc, si $n\geqq q$

$$\langle \sum_0^n (\mu-\mu P_T)P^k, f\rangle = E^\mu[\sum_0^n f\circ X_k - \sum_T^{T+n} f\circ X_k]$$
$$= E^\mu[\sum_0^{T-1} f\circ X_k - \sum_n^{T+n} f\circ X_k]$$

Si f est nulle hors de A, la somme de 0 à T-1 est nulle, et on a

$$|<\sum_0^n (\mu-\mu P_T)P^k, f>| \leqq E^\mu[\sum_n^{T+n} |f|\circ X_k] \leqq <(\mu+..+\mu P^q)P^n, |f|>$$

puisque $T\leqq q$. Autrement dit, si $n\geqq q$, la mesure $|I_A.\sum_0^n(\mu-\mu P_T)P^k|$ est majorée par $(\mu+\mu P+..\mu P^q)P^n$. D'après le lemme 7, cette mesure est négligeable devant $m+mP+...+mP^{n-1}$ lorsque $n\to\infty$. Par conséquent, on a m-p.s.

$$I_A.\sum_0^n (\varepsilon m+\mu-\mu P_T)P^n \geqq 0 \quad \text{pour n assez grand .}$$

Compte tenu de l'hypothèse $A\subset \limsup_n\{\sum_0^n \eta P^k>0\}$, il vient

$$A \subset \bigcup_n \{ \sum_0^n \eta' P^k>0 \}$$

et le lemme de HOPF entraîne $\mu' I_A \dashv \lambda'=\lambda+\varepsilon m$. En faisant tendre ε vers 0, il vient $I_A.\mu' = I_A.\mu P_T \dashv \lambda$. En faisant tendre q vers $+\infty$ il vient $\mu H_A\dashv\lambda$.

Il est bien connu que le lemme de BRUNEL entraîne très facilement le théorème ergodique ponctuel de CHACON-ORNSTEIN : posons

$$D_k(\lambda,\mu) = \frac{\lambda+\lambda P+...+\lambda P^k}{\mu+\mu P+...+\mu P^k}$$

en convenant que 0/0=0 . Alors $D_k(\lambda,\mu)$ converge m-p.s. vers une limite finie $D(\lambda,\mu)$. ROST a établi le théorème suivant (un peu amélioré ici)

THEOREME 7. <u>Soit</u> $A\subset E$. <u>On a</u> $D(\mu,\lambda)\leqq 1$ m-<u>p.p. sur</u> A <u>si et seulement si</u> $\mu H_A\dashv\lambda$. <u>En particulier, on a</u> $D(\mu,\lambda)\leqq 1$ m-<u>p.p. si et seulement si</u> $\mu\dashv\lambda$.

DEMONSTRATION. Supposons que l'on ait $D(\mu,\lambda)\leqq 1$ sur A. Alors A est contenu m-p.s. dans l'ensemble

$$\limsup_n \{ \sum_0^n (\varepsilon m+\lambda-\mu)P^k > 0 \} \qquad (\varepsilon>0)$$

d'après le lemme de BRUNEL, cela entraîne $\mu H_A\dashv \lambda+\varepsilon m$, puis $\dashv\lambda$.

Inversement, supposons que $\mu H_A\dashv \lambda$, et soit $B=A\cap\{D(\mu,\lambda)>a\}$, où a est un nombre >1 . B est contenu m-p.s. dans l'ensemble

$$\limsup_n \{ \sum_0^n (\varepsilon m+\mu-a\lambda)P^k > 0 \}$$

D'après le lemme de BRUNEL, on a $a\lambda H_B\dashv \mu+\varepsilon m$, puis $a\lambda H_B\dashv \mu$. Appliquons H_B , il vient $a\lambda H_B = a\lambda H_B H_B \dashv \mu H_B = (\mu H_A)H_B \dashv \lambda H_B$. Comme a>1, on a $\lambda H_B=0$. Alors $\mu H_B\dashv\lambda H_B =0$. Comme $\{H_B 1>0\} = \bigcup_k \{(I+P+..P^k)I_B>0\}$, on a $D(\mu,\lambda)=0$ m-p.s. sur B, ce qui n'est compatible avec la définition de B que si B est m-négligeable. On conclut en faisant tendre a vers 1.

BIBLIOGRAPHIE

L'article de ROST exposé ici n'est pas encore paru. Son titre est Markoff-Ketten bei sich füllenden Löchern im Zustandsraum. Il a été exposé par ROST à Oberwolfach en Mars 1970 .

L'idée essentielle de la démonstration du lemme de BRUNEL qui figure ici est due à AKCOGLU , An ergodic lemma, Proc. Amer. Math. Soc. 16, 1965, 388-392. La démonstration a été simplifiée ensuite par GARSIA, More about the maximal ergodic lemma of Brunel, Proc. Natl. Acad. of Sc., 1967, p.21-24. Le schéma de remplissage a entièrement disparu de la démonstration de GARSIA. C'est aussi GARSIA qui a remarqué que les deux lemmes maximaux sont en réalité des inégalités de balayage.

L'idée de réduire les contractions de L^1 au cas de vrais noyaux (opérant sur les mesures) fait partie du folklore, mais il semble que les ergodiciens la considèrent comme artificielle, et répugnent à s'en servir. Il est vrai que les pseudo-noyaux permettent d'écrire de plus gros articles. DOOB a utilisé cette méthode de manière frappante, pour réduire un théorème de ROTA sur les opérateurs à un résultat probabiliste simple. Cf son article A ratio operator limit theorem , Z. für W-theorie, 1, 1963, p.288-294.

Le schéma de remplissage intervient encore d'une autre manière en théorie du potentiel : voir le lemme 2 de l'article de MOKOBODZKI , Densité relative de deux potentiels comparables, Séminaire de Probabilités 4, Université de Strasbourg, Lecture Notes in M. vol.124, p.173. On peut aussi consulter, dans ce volume, deux petits résultats de théorie du potentiel.