PAUL-ANDRÉ MEYER

Le retournement du temps, d'après Chung et Walsh

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 5 (1971), p. 213-236
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1971__5__213_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1969/70

LE RETOURNEMENT DU TEMPS, D'APRES CHUNG ET WALSH

par P.A. Meyer

CHUNG et WALSH ont publié récemment un article (*) qui fait faire de très grands progrès à la théorie du retournement des processus markoviens. Nous exposons ici leurs résultats, avec des méthodes un peu différentes, et en nous bornant au cas des processus fortement markoviens.

1. FORME GROSSIERE DU THEOREME DE RETOURNEMENT

Nous nous donnons sur un espace d'états E, homéomorphe à un sous-espace borélien d'un espace métrique compact, un semi-groupe sous-markovien (P_t) qui satisfait aux 'hypothèses droites" : il admet une réalisation continue à droite, fortement markovienne, telle que les fonctions p-excessives ($p\geqq 0$) soient presque-boréliennes et p.s. continues à droite sur les trajectoires. Nous construisons la réalisation continue à droite canonique de ce semi-groupe, à valeurs dans $E\cup\{\partial\}$: Ω, $\underline{\underline{F}}^{\circ}$, X_t .... ζ . Nous désignerons par $(U_p)_{p>0}$ la résolvante, par U le noyau potentiel.

Nous choisirons une loi initiale λ, <u>qui restera fixée dans tout l'exposé</u> (les probabilités de transition des processus retournés dépendront de λ), et nous désignerons simplement par P la loi P^{λ}, par μ la mesure potentiel λU. Bien que cette mesure ne soit pas toujours σ-finie, aucune précaution spéciale n'est nécessaire pour lui appliquer le théorème de Fubini, car μ est somme d'une suite de mesures bornées.

Le processus retourné $(\hat{X}_t)_{t>0}$ est défini de la manière suivante :

$$\text{si } 0<t<\zeta(\omega)<\infty\ ,\ \hat{X}_t(\omega) = X_{\zeta-t}(\omega)$$

$$\text{si } t\geqq\zeta(\omega),\ \text{ou } \zeta(\omega)=\infty\ ,\ \hat{X}_t(\omega)=\partial$$

Ces formules définissent, contrairement à l'habitude, un processus <u>continu à gauche</u>. L'une des originalités du travail de CHUNG-WALSH consiste précisément à utiliser le retourné tel qu'il est, sans

(*) <u>To reverse a Markov process</u>. Acta Math. 123, 1970, 225-251.

régularisation, et à démontrer qu'il satisfait à une propriété de Markov " modérée" , qui est la forme naturelle de la propriété de Markov forte pour les processus markoviens continus à gauche. C'est une situation très satisfaisante : les probabilistes ont enfin deux mains !

Nous commencerons par établir toutes les propriétés des processus retournés sous l'hypothèse auxiliaire suivante, qui sera entièrement supprimée à la fin de l'exposé.

HYPOTHESE (A). 1) La durée de vie ζ est p.s. finie, quelle que soit la loi initiale sur E.

2) La fonction excessive 1 sur E s'écrit $\int_0^\infty \ell_s ds$, où les fonctions ℓ_s (s>0) sont universellement mesurables positives bornées sur E, l'application $\ell_.(x)$ est continue à droite sur $]0,\infty[$, et l'on a $P_t \ell_s = \ell_{s+t}$ pour s>0, t>0.

CHUNG et WALSH ne font pas l'hypothèse 1), et font l'hypothèse 2) pour la fonction excessive $\phi=P^{\bullet}\{\zeta<\infty\}$ sur E (qui est ici égale à 1). Les fonctions 1 et ℓ_t sont toutes prolongées par 0 au point ∂ . Nous avons

$$P_t 1 = U(\ell_t) \text{ pour tout } t>0$$

$$P^{\bullet}\{X_t=\partial\} = \int_0^t \ell_s(.)\, ds \qquad \text{sur } E$$

Noter que l'on a $<\mu, \ell_t> = <\lambda U, \ell_t> = <\lambda, U\ell_t> \leqq <\lambda, 1>$.

TEMPS DE RETOUR

La théorie de CHUNG et WALSH repose sur des identités, qu'ils établissent au moyen d'un " passage du discret au continu" assez laborieux. Nous allons les démontrer ici par une méthode directe plus simple, inspirée de la thèse de J.AZEMA (Ann. Inst. Fourier, 1970). Pour que la méthode prenne toute sa signification, il faut utiliser le langage des temps de retour.

Rappelons qu'on appelle temps de retour une variable aléatoire L sur $(\Omega,\underline{\underline{F}})$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, satisfaisant à l'identité

$$L\leqq\zeta \quad , \quad L\circ\theta_t = (L-t)^+ \text{ pour tout } t>0$$

Cette notion est due à NAGASAWA. Par exemple, ζ est un temps de retour. Si L est un temps de retour, la fonction

$$c_L = P^{\bullet}\{0<L<\infty\} \qquad \text{sur } E\cup\{\partial\}$$

est excessive. Par exemple, $c_\zeta = 1_E$ d'après l'hypothèse A,1). Notons quelques propriétés élémentaires des temps de retour :

a) Si L est un temps de retour, $L_t=(L-t)^+$ en est un aussi, et on a $c_{L_t} = P_t c_L$.

b) Notons $\underline{\underline{G}}_L$ l'ensemble des $A \in \underline{\underline{F}}$ possédant la propriété suivante

$$\text{pour tout } u \geq 0, \text{ on a } \theta_u^{-1}(A) \cap \{L>u\} = A \cap \{L>u\}$$

Alors $\underline{\underline{G}}_L$ est une tribu, X_L est $\underline{\underline{G}}_L$-mesurable, et pour tout $A \in \underline{\underline{G}}_L$ la variable aléatoire L^A définie par

$$L^A = L \text{ sur } A \ , \ L^A = 0 \text{ sur } A^c$$

est un temps de retour.

Dans les énoncés des lemmes qui suivent, nous adoptons les notations suivantes :

- L est un temps de retour. On suppose que c_L est un potentiel de fonction $U\ell$; $L_s=(L-s)^+$; $\underline{\underline{G}}_s = \underline{\underline{G}}_{L_s}$. C'est une famille de tribus croissante et continue à droite.
- Plongeons E dans un espace métrique compact $\overline{E}$,(*) et désignons par (f'_n) une suite dense dans la boule unité de $\underline{\underline{C}}(\overline{E})$, par (f_n) la suite des restrictions à E des f'_n, par g_{nm} les fonctions $mU_m f_n$ (m entier ≥ 1). Nous compactifions maintenant E relativement aux fonctions g_{nm} ; cela nous donne un espace métrique compact F. Quitte à jeter un sous-ensemble négligeable de Ω, nous pouvons supposer que les applications $g_{nm} \circ X_.(\omega)$ sont continues à droite et pourvues de limites à gauche. Le processus (X_t) <u>à valeurs dans F</u> est donc continu à droite et pourvu de limites à gauche.

LEMME 1.- 1) <u>On a pour toute fonction continue</u> f <u>sur</u> F

$$E^\bullet[\ f \circ X_{L-},\ 0<L<\infty\ ] = U(\ .\ ,\ f\ell)$$

(on a écrit f au lieu de $f|_E$ au second membre).

2) <u>On a pour tout</u> $t>0$ $X_{L-t} = X_{(L-t)-}$ <u>p.s.</u> .

DEMONSTRATION.- Considérons les deux processus croissants

$$A_t = \int_0^\infty \ell \circ X_s \, ds \quad , \quad B_t = I_{\{0<L\leq t\}}$$

(le second n'est pas adapté à la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$). On vérifie, grâce

(*) $\overline{E}$ sert seulement à bien choisir les f_n.

à l'identité des temps de retour, que

$$E^x[B_\infty - B_s | \underline{\underline{F}}_s] = P^x\{0<L\circ\theta_s<\infty | \underline{\underline{F}}_s] = c_L\circ X_s = E^x[A_\infty - A_s | \underline{\underline{F}}_s]$$

pour tout x. D'après le théorème (facile) VII.17 de (*), on a pour tout processus borné (h_s), adapté et continu à gauche

$$E^x[\int_0^\infty h_s \, dA_s] = E^x[\int_0^\infty h_s \, dB_s]$$

Nous obtenons 1) en prenant $h_s = f\circ X_{s-}$.

Pour démontrer 2), nous remarquons que l'ensemble des (s,ω) tels que $X_s(\omega) \neq X_{s-}(\omega)$ est une réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt >0. Il suffit donc de montrer que pour tout temps d'arrêt $T>0$ on a $P^x\{T<\infty, L=T+t\}=0$ pour tout x. Posons $\varepsilon_x P_T = \delta$, et utilisons la propriété de Markov forte : cela s'écrit $P^\delta\{L=t\}=0$. Or on a $P^\delta\{u<L<\infty\} = < \delta, P_u c_L >$; comme c_L est un potentiel de fonction, cela dépend continûment de u, et la répartition de L n'a pas de masses ponctuelles à distance finie. Donc $P^\delta\{L=t\}=0$.

COROLLAIRE.- <u>Si</u> $P\{X_L \neq X_{L-}\}=0$, <u>on a pour toute f borélienne bornée sur</u> E

$$(1) \quad E[f\circ X_L, \ 0<L<\infty] = < f, \ell >_\mu$$

DEMONSTRATION.- Nous avons d'après la formule précédente, g_{nm} étant continue sur F

$$E[g_{nm}\circ X_{L-}, \ 0<L<\infty] = < \lambda, U(mU_m f_n . \ell) > = < mU_m f_n, \ell >_\mu$$

D'après l'hypothèse, le premier membre peut être remplacé par $E[mU_m f_n \circ X_L, \ 0<L<\infty]$. Faisons tendre dans les deux membres m vers $+\infty$, il vient (1) avec f_n au lieu de f. Comme la suite des f_n est suffisamment riche, on a le résultat par un argument de classes monotones.

L'existence d'un noyau satisfaisant à l'énoncé suivant sera prouvée plus loin.

LEMME 2.- <u>Soit</u> $\hat{P}_t$ <u>un noyau sousmarkovien sur</u> E <u>tel que</u>

$$< I_B, P_t I_A >_\mu = < \hat{P}_t I_B, I_A >_\mu$$

<u>quels que soient</u> A <u>et</u> B <u>boréliens dans</u> E, $A\subset\{c_L>0\}$. <u>On a alors pour tout</u> $s>0$

(*) P.A.Meyer, Probabilités et Potentiel, Hermann/Blaisdell, 1966

(1) $\quad P\{ X_{L-s-t} \in B \ , \ s+t<L<\infty \mid \underline{\underline{G}}_s \} = \hat{P}_t(X_{L-s},B) I_{\{s<L<\infty\}}$

DEMONSTRATION.- Posons $M=(L-s)^+$; c'est un temps de retour, on a $c_M = P_s U\ell = U(P_s \ell)$, et $X_M = X_{M-}$ p.s. . Tout revient à démontrer que

(2) $\quad P\{ X_{M-t} \in B, \ t<M<\infty \mid \underline{\underline{G}}_M \} = \hat{P}_t(X_M,B) I_{\{0<M<\infty\}}$

Nous allons prouver d'abord la forme sans conditionnement :

(3) $\quad P\{ X_{M-t} \in B \ , \ t<M<\infty \} = E[\hat{P}_t(X_M,B) I_{\{0<M<\infty\}}]$

Le second membre vaut, d'après le corollaire précédent, $< \hat{P}_t I_B, m_s >_\mu$, en posant $m_s = P_s \ell$. Le premier membre vaut d'autre part , d'après le corollaire appliqué à $(M-t)^+$, $< I_B, P_t m_s >_\mu$. La relation (3) découlera de l'énoncé si nous montrons que $m_s = 0$ μ-p.p. dans $D=\{c_L=0\}$, ce qui revient à $< \mu, m_s I_D > = 0$, ou $< \lambda, U(m_s I_D) > = 0$. Mais $U(m_s I_D) \leqq U(m_s) \leqq c_L$ est nulle dans D, donc partout d'après le principe de domination.

Nous avons utilisé uniquement les propriétés suivantes du temps de retour M : $X_M = X_{M-}$ p.s. ; c_M est un potentiel de fonction, et $c_M \leqq c_L$. Cela va nous permettre de passer de la formule (3) à la formule (2). En effet, prenons $H \in \underline{\underline{G}}_M$ et introduisons les temps de retour $N=M^H$, $N'=M^{(H^c)}$; **N possède les propriétés ci-dessus,** le fait que c_N soit un potentiel de fonction résultant de la relation $c_M = c_N + c_{N'}$, et d'un théorème de MOKOBODZKI suivant lequel toute fonction excessive majorée au sens fort par un potentiel de fonction en est un elle même (*). Nous avons donc d'après (3) appliquée à N

$$P\{ X_{M-t} \in B, \ t<M<\infty , \ H \} = E[\hat{P}_t(X_M,B), \ 0<M<\infty , \ H]$$

X_M étant $\underline{\underline{G}}_M$-mesurable, cela équivaut à (2).

REMARQUE.- Comme l'énoncé du lemme 2 ne fait pas intervenir L luimême, mais seulement L-s (s>0), le lemme 2 s'étend au cas où c_L, au lieu d'être un potentiel $U\ell$, est potentiel d'une " loi de sortie" $(\ell_s)_{s>0}$ (cf. hypothèse A,2)) .

(*) Je reconnais qu'il s'agit là d'un résultat difficile, mais si les gens prennent la peine de démontrer des résultats difficiles, c'est pour qu'on s'en serve ! [cf. l'appendice 1].

RETOURNEMENT DU TEMPS

Nous allons utiliser pour la première fois l'hypothèse auxiliaire(*) A,2) , suivant laquelle c_ζ est potentiel d'une " loi de sortie" $(\ell_s)_{s>0}$.

LEMME 3.- <u>Il existe une famille</u> $(\hat{P}_t)_{t>0}$ <u>de noyaux sousmarkoviens sur</u> E <u>satisfaisant à la condition suivante</u>

<u>pour tout</u> t, <u>tout borélien</u> B <u>de</u> E <u>et tout borélien</u> $A\subset\{c_\zeta > 0\}$, <u>on a</u>

$$< I_B, P_tI_A >_\mu = < \hat{P}_tI_B , I_A >_\mu \quad .$$

DEMONSTRATION.- Posons $h(x)=\int_0^\infty e^{-s}\ell_s\, ds$; comme (ℓ_s) est une loi de sortie, h est 1-excessive, majorée par $c_\zeta = \int_0^\infty \ell_s\, ds$, et on a $\{h=0\}=\{c_\zeta=0\}$. D'autre part, nous avons $< \mu, \ell_s > \leqq 1$ pour tout s, donc $< \mu,h > \leqq 1$.

Construisons une mesure Π_t sur E×E par la formule

$$\Pi_t(B\times A) = < I_B, P_t(I_Ah) >_\mu$$

La masse de Π_t vaut $< \mu, P_th > = < \mu P_t,h > \leqq <\mu,h> \leqq 1$.

Définissons une mesure K sur E par la formule

$$K(A) = < \mu, I_Ah >$$

La seconde projection de Π_t sur E est la mesure $A\mapsto < \mu,P_t(I_Ah) > = < \mu P_t, I_Ah > \leqq < \mu,I_Ah >$; elle est donc majorée par K. Nous pouvons donc désintégrer Π_t par rapport à K : il existe un noyau N_t (transformant les fonctions boréliennes sur E en fonctions boréliennes), sousmarkovien, tel que

$$\Pi_t(B\times A) = \int_A K(dx)N_t(x,B) \qquad (= < \mu, I_Ah.N_t(I_B) >)$$

Autrement dit, quels que soient B et A boréliens dans E

$$< I_B, P_t(I_Ah) >_\mu \quad = < N_t(I_B) , I_Ah >_\mu$$

Un raisonnement immédiat montre alors que si g et f sont boréliennes bornées, la seconde étant nulle hors de $\{h>0\}$, on a

$$< g,P_tf >_\mu = < N_tg,f >_\mu$$

Si on le désire, on peut noter que les mesures Π_t dépendent mesurablement du paramètre t : il est connu qu'on peut alors choisir des désintégrations

(*)Nous n'utilisons par A,1) pour l'instant.

qui dépendent mesurablement de t. Si l'on prend $\hat{P}_t = N_t$, avec ce choix, on obtient des noyaux qui satisfont à l'énoncé, et tels en outre que l'application $(t,x) \longmapsto \hat{P}_t(x,A)$ soit mesurable pour tout borélien A. Mais en fait de mesurabilité on verra mieux par la suite !

Le lemme 3 nous permet d'appliquer le lemme 2 à ζ, et nous obtenons le théorème principal de cette première partie :

THEOREME 1.- Posons $\hat{\underline{\underline{F}}}_s = \underline{\underline{G}}_{(\zeta-s)^+}$ (+) ; cette famille de tribus est croissante et continue à droite, le processus continu à gauche $(\hat{X}_s)_{s>0}$ est adapté à cette famille, et l'on a la propriété de Markov simple (*)

$$\text{si } B \subset E \text{ , } P\{\hat{X}_{s+t} \in B | \hat{\underline{\underline{F}}}_s\} = \hat{P}_t(\hat{X}_s, B)$$

Noter que les noyaux $\hat{P}_t$ n'ont pas été définis de manière unique, et qu'ils ne satisfont pas nécessairement à la propriété de semi-groupe. Il faut se rappeler aussi que le th.1 est établi sous l'hypothèse (A). Nous allons consacrer le paragraphe 2 à l'amélioration de la fonction de transition $(\hat{P}_t)$.

2. AMELIORATION DE LA FONCTION DE TRANSITION

Le premier lemme dont nous aurons besoin étend l'un des résultats de CHUNG et WALSH à la théorie générale des processus. Sa démonstration n'ayant rien à voir avec les processus de Markov, nous la rejetons à l'appendice 2.

LEMME 4.- Soit (Y_t) un processus borné sur $(\Omega, \underline{\underline{F}})$, dont les trajectoires sont continues à gauche, et soit (Z_t) sa projection prévisible pour la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$; alors le processus (Z_t) est aussi continu à gauche.

Rappelons seulement que (Z_t) est l'unique processus, prévisible p.r.à la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$, tel que $Z_T = E[Y_T | \underline{\underline{F}}_{T-}]$ p.s. quel que soit le temps d'arrêt prévisible

---

(+) $s>0$. Noter que $\hat{\underline{\underline{F}}}_s$ ne contient pas tous les ensembles négligeables.

(*) Comme d'habitude, les noyaux $\hat{P}_t$ sur E sont rendus markoviens au moyen du point ∂ . On a au second membre $\hat{P}_t(\partial, B) = 0$.

Le lemme suivant tient lieu de la méthode des " limites essentielles" de CHUNG et WALSH. Nous dirons qu'un ensemble A est <u>λ-évanescent</u> si le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ l'ignore totalement. i.e. si $P\{\exists\ t \geq 0 : X_t \in A\} = 0$. Nous introduirons l'expression <u>λ-quasi-partout</u> pour signifier " sauf sur un ensemble λ-évanescent" (*).

LEMME 5.- <u>Soit</u> f <u>une fonction borélienne bornée qui possède la propriété suivante</u> :

<u>il existe un processus continu à droite</u> $(Z_t)_{t\geq 0}$ <u>tel que l'on ait</u> $P\{Z_t \neq f\circ X_t\}=0$ <u>pour presque tout</u> t (<u>au sens de Lebesgue</u>).

<u>Alors la limite</u> $\lim_n nU_n f = f^*$ <u>existe λ-q.p., la fonction</u> f^* <u>est finement continue λ-q.p., égale à</u> f <u>μ-p.p., et les processus</u> (Z_t) <u>et</u> $(f^*\circ X_t)$ <u>sont</u> P-<u>indistinguables</u>

DEMONSTRATION.- Le théorème de Fubini nous donne la propriété suivante : pour presque tout $\omega\in\Omega$, l'ensemble des t tels que $f\circ X_t(\omega)\neq Z_t(\omega)$ est négligeable au sens de Lebesgue. Soit alors T un temps d'arrêt de la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$. Nous avons évidemment

$$Z_T = \lim_n n\int_0^\infty Z_{T+s}e^{-ns}\,ds = \lim_n n\int_0^\infty f\circ X_{T+s}e^{-ns}\,ds$$

pour presque tout ω. Prenant des espérances conditionnelles par rapport à $\underline{\underline{F}}_T$, et appliquant un lemme bien connu, il vient que $nU_n f\circ X_T$ converge p.s. vers $E[Z_T|\underline{\underline{F}}_T]$. Comme T est arbitraire, le théorème de section des ensembles bien-mesurables entraîne que $nU_n f$ converge λ-q.p. lorsque $n\to\infty$; pour la commodité du raisonnement, nous définirons partout $f^* = \liminf_n nU_n f$. Ensuite, nous remarquons que Z_T est aussi égal à $\lim_n n\int_0^{1/n} f\circ X_{T+s}ds$, de sorte que Z_T est $\underline{\underline{F}}_T$-mesurable, et que $f^*\circ X_T = Z_T$ p.s. Le théorème de section des ensembles bien-mesurables entraîne alors que les processus $(f^*\circ X_t)$ et (Z_t) sont P-indistinguables, donc f^* est continue à droite sur les trajectoires du processus de loi initiale λ . Le lecteur vérifiera qu'alors f^* est finement continue λ-q.p.. Comme on a $f\circ X_t = f^*\circ X_t$ P-p.s. pour presque tout t, f et f^* sont égales μ-p.p..

(*) Cette expression prête un peu à confusion avec la notion d'ensemble polaire, et ne sera utilisée que dans cet exposé.

A l'aide de ces deux lemmes, nous allons démontrer (toujours sous l'hypothèse auxiliaire) le résultat fondamental du travail de CHUNG et DOOB. Nous en donnons une forme légèrement améliorée, où les noyaux de transition du processus retourné forment un vrai semi-groupe.

THEOREME 2.- <u>On peut choisir la fonction de transition</u> $(\hat{P}_t)_{t>0}$ <u>du processus retourné de façon que les propriétés suivantes soient satisfaites</u>:

1) <u>Les noyaux</u> $\hat{P}_t$ <u>forment un semi-groupe sousmarkovien</u>, <u>et transforment les fonctions boréliennes en fonctions boréliennes</u>.
2) <u>Pour toute fonction</u> f <u>continue bornée sur</u> E, <u>et tout</u> $x \in E$, <u>la fonction</u> $\hat{P}_{\cdot}f(x)$ <u>est continue à gauche sur</u> $]0,\infty[$
3) <u>Pour tout temps d'arrêt prévisible</u> $T>0$ <u>de la famille</u> $(\hat{\underline{\underline{F}}}_t)$, <u>toute variable aléatoire</u> $S>0$, $\hat{\underline{\underline{F}}}_{T-}$<u>-mesurable</u>, <u>on a</u>

$$E[f\circ\hat{X}_{T+S}I_{\{T+S<\infty\}}|\hat{\underline{\underline{F}}}_{T-}] = \hat{P}_S(\hat{X}_T,f)I_{\{T+S<\infty\}} \quad \underline{\text{p.s.}}$$

(" <u>propriété de Markov modérée</u>")

DEMONSTRATION.- Nous partons d'une fonction de transition quelconque $(\hat{P}_t)$, que nous allons modifier progressivement. Nous plongeons E comme sous-espace topologique dense (borélien) d'un espace métrique compact $\bar{E}$, dont nous nous débarrasserons seulement à la fin de la démonstration.

<u>1ère étape : t fixé</u>. Nous prenons $f \in \underline{\underline{C}}(\bar{E})$, nous prolongeons f par 0 au point ∂ comme d'habitude, et nous appliquons le lemme 4 au processus $\hat{Y}_s = f\circ\hat{X}_{s+t}$ $(s>0)$: sa projection prévisible $(\hat{Z}_s)$ sur la famille $(\hat{\underline{\underline{F}}}_s)$ - ou plus exactement sur la famille obtenue en adjoignant aux $\hat{\underline{\underline{F}}}_s$ tous les ensembles P-négligeables - est un processus continu à gauche. D'autre part on a pour tout s fixé, d'après le théorème 1

$$\hat{Z}_s = \hat{P}_t(\hat{X}_s,f) \quad \text{p.s.}$$

Appliquons le théorème de Fubini : il vient que pour presque tout ω on a $\hat{P}_t f\circ\hat{X}_s = \hat{Z}_s$ pour presque tout s (au sens de Lebesgue). Retournons maintenant le temps, en utilisant pour la première fois le fait que $\zeta<\infty$ (hypothèse auxiliaire). Le processus retourné de $(\hat{Z}_s)$ est un processus continu à droite $(Z_s)_{s\geq 0}$, et le processus retourné de $(\hat{P}_s f\circ\hat{X}_s)$ est $(\hat{P}_s f\circ X_s)$. Le lemme 5 s'applique, et il nous donne que la limite $(\hat{P}_s f)^*$ existe λ-q.p., est λ-q.p. finement continue, et continue à droite sur les trajectoires de $(X_t)_{t\geq 0}$.

Posons maintenant , pour $f\in\underline{\underline{C}}(\overline{E})$

$$\hat{\hat{P}}_t(x,f) = \lim_n nU_n\hat{P}_t f^x, \text{ si } \lim_n nU_n\hat{P}_t g^x \text{ existe pour tout } g\in\underline{\underline{C}}(\overline{E})$$
$$= 0 \text{ sinon}$$

Nous définissons ainsi une forme linéaire positive sur $\underline{\underline{C}}(\overline{E})$, donc une mesure sur $\overline{E}$; $\hat{\hat{P}}_t$ est un noyau sousmarkovien de E dans $\overline{E}$, qui transforme les fonctions boréliennes sur $\overline{E}$ en fonctions presque-boréliennes sur E (noter que $\underline{\underline{C}}(\overline{E})$ est séparable !). On a $\hat{\hat{P}}_t f = \lim_n nU_n\hat{P}_t f$ λ-q.p., donc pour $f\in\underline{\underline{C}}(\overline{E})$ $\hat{\hat{P}}_t f$ est encore λ-q.p. finement continue, continue à droite sur les trajectoires de $(X_s)_{s\geq 0}$, égale μ-p.p. à $\hat{P}_t f$.

Les processus $(\hat{\hat{P}}_t f\circ X_s)$ et (Z_s) sont encore indistinguables ; en retournant le temps, il vient que $(\hat{\hat{P}}_t f\circ\hat{X}_s)$ et $(\hat{Z}_s)$ sont indistinguables. En revenant à la définition de $(\hat{Z}_s)$, cela signifie que pour tout temps d'arrêt prévisible $T > 0$ et tout $f\in\underline{\underline{C}}(\overline{E})$

$$E[\, f\circ\hat{X}_{T+t} I_{\{T<\infty\}} | \hat{\underline{\underline{F}}}_{T-}] = \hat{\hat{P}}_t(\hat{X}_T,f) I_{\{T<\infty\}} \quad \text{p.s.}$$

La fonction $\hat{\hat{P}}_t f$ étant presque-borélienne, il existe un ensemble borélien A_f λ-évanescent tel que $\hat{\hat{P}}_t f$ soit borélienne sur $(A_f)^c$. Comme $\underline{\underline{C}}(\overline{E})$ est séparable, il existe un ensemble borélien λ-évanescent A tel que $\hat{\hat{P}}_t f$ soit borélienne sur A^c pour tout $f\in\underline{\underline{C}}(\overline{E})$. Nous remplaçons alors $\hat{\hat{P}}_t(x,.)$ par 0 pour $x\in A$. Le noyau ainsi modifié est borélien, et possède toutes les propriétés précédentes. Nous le désignerons à nouveau par $\hat{P}_t$.

<u>2ème étape : dépendance en t</u> . Soit D l'ensemble des rationnels dyadiques >0, et soit H_f l'ensemble des $x\in E$ tels que l'application $t\longmapsto\hat{P}_t(x,f)$ sur D soit prolongeable en une application continue à gauche sur $]0,\infty[$ ($f\in\underline{\underline{C}}(\overline{E})$ comme ci-dessus). Nous montrerons en appendice que H_f^c est souslinien ; admettant ici ce résultat, prouvons que H_f^c est λ-évanescent. Il suffit (en vertu du th. de capacitabilité) de prouver que tout compact $K\subset H_f^c$ est λ-évanescent, ou encore - l'ensemble $\{(t,\omega) : \hat{X}_t(\omega)\in H_f^c\}$ étant prévisible pour la famille $(\hat{\underline{\underline{F}}}_t)$ - que l'on a $P\{\hat{X}_T\in H_f^c\} = 0$ pour tout temps d'arrêt prévisible $T>0$ de la famille $(\hat{\underline{\underline{F}}}_t)$. Or nous avons pour $t\in D$

$$\hat{P}_t(X_T,f) = E[f\circ\hat{X}_{T+t} \mid \hat{\underline{\underline{F}}}_{T-}] \quad \text{p.s.}$$

Appliquons maintenant le lemme 4 au processus $Y_t = f\circ\hat{X}_{T+t}$ et à la famille de tribus constante, égale à $\hat{\underline{\underline{F}}}_{T-}$. Il entraîne l'existence d'un processus $(\hat{Z}_t)_{t>0}$ continu à gauche tel que $\hat{P}_t(\hat{X}_T,f)=\hat{Z}_t$ p.s. pour chaque t. Donc on a bien $\hat{X}_T \in H_f$ p.s. .

Modifions alors les $\hat{P}_t$ de la manière suivante : tout d'abord, $\underline{\underline{C}}(\bar{E})$ étant séparable, il existe un ensemble fixe H^c, souslinien et λ-évanescent, qui contient tous les H_f^c . Or il est bien connu qu'un ensemble souslinien λ-évanescent est contenu dans un ensemble λ-évanescent presque-borélien, et même borélien (*). Désignons par L^c un tel borélien, et posons pour $t>0$, $f\in\underline{\underline{C}}(\bar{E})$

$$\hat{\hat{P}}_t(x,f) = \lim_{\substack{s\in D \\ s\to t-}} \hat{P}_s(x,f) \text{ si } x\in L$$
$$= 0 \text{ si } x\in L^c$$

Nous obtenons ainsi un nouveau noyau sousmarkovien de $\bar{E}$ dans E, qui transforme les fonctions boréliennes en fonctions boréliennes. On a pour $t\in D$, et pour tout temps d'arrêt prévisible T , $\hat{P}_t(\hat{X}_T,f)=\hat{\hat{P}}_t(\hat{X}_T,f)$ p.s., donc

(1) $\quad E[\, f\circ\hat{X}_{T+t}\,|\,\hat{\underline{\underline{F}}}_{T-}] = \hat{\hat{P}}_t(\hat{X}_T,f)$ p.s.

Mais alors, par continuité à gauche, nous avons le même résultat pour tout t. La fonction de transition $(\hat{\hat{P}}_t)$ est donc " aussi bonne" que $(\hat{P}_t)$, mais elle possède de plus la continuité à gauche vague sur $\bar{E}$.

Qu'y a t'on gagné ? Le lecteur vérifiera qu'on a maintenant la propriété de Markov modérée : si T est un temps d'arrêt prévisible >0, de la famille $(\hat{\underline{\underline{F}}}_t)$ et S>0 est $\hat{\underline{\underline{F}}}_{T-}$-mesurable,

$$E[f\circ\hat{X}_{T+S}I_{\{T+S<\infty\}}|\,\underline{\underline{F}}_{T-}\} = \hat{\hat{P}}_S(\hat{X}_T,f)I_{\{S+T<\infty\}}$$

<u>3ème étape. Elimination du compactifié</u>. Soit E^c le complémentaire de E dans $\bar{E}$: c'est un ensemble borélien. L'ensemble W des (t,x) tels que $\hat{\hat{P}}_t(x,E^c) > 0$ est donc borélien dans $]0,\infty[\times E$, et sa projection V sur E est souslinienne. Nous allons montrer que V est λ-évanescente ou encore, comme plus haut, que la répartition Θ de $\hat{X}_T$ néglige V quel que soit le temps d'arrêt prévisible T de la famille $(\hat{\underline{\underline{F}}}_t)$. Or s'il n'en était pas ainsi, il existerait une fonction borélienne s sur E, à valeurs dans $]0,\infty]$, telle que

$$(s(x),x)\in W \text{ pour tout } x \text{ tel que } s(x)<\infty$$
$$\Theta(\{x : s(x)<\infty\}) > 0$$

Posons alors $S=s\circ\hat{X}_T$, et appliquons la formule (1) ci-dessus [qui

(*) Voir dans ce volume l'exposé sur les travaux de SHIH.

s'étend aux fonctions boréliennes par classes monotones] à la fonction $f=I_{E^c}$; il vient

$$P\{\hat{X}_{T+S}\in E^c|\underline{\underline{F}}_{T-}\} = \hat{\hat{P}}_{s(\hat{X}_T)}(\hat{X}_T,f) = \int \hat{\hat{P}}_{s(x)}(x,f)\Theta(dx)$$

Le premier membre est nul puisque $(\hat{X}_u)_{u>0}$ est à valeurs dans E. Le dernier est >0, car $(s(x),x)\in W$, ce qui signifie précisément $\hat{\hat{P}}_{s(x)}(x,E^c)>0$. D'où la contradiction cherchée.

Nous enfermons maintenant V - comme nous l'avons fait plus haut - dans un ensemble borélien L λ-évanescent, et nous posons à nouveau

$$\begin{aligned}\hat{P}_t(x,.)&=\hat{\hat{P}}_t(x,.) \text{ si } x\in L^c\\ &= 0 \text{ si } x\in L\end{aligned}$$

L'application $t\mapsto\varepsilon_x\hat{P}_t$ sur $]0,\infty[$ est continue à gauche pour la topologie étroite sur $\overline{E}$, et toutes les mesures $\varepsilon_x\hat{P}_t$ sont portées par E : elle est alors continue pour la topologie étroite sur E [voir par exemple BOURBAKI, Intégr. chap.IX , §5, prop.8].

<u>4ème étape. La propriété de semi-groupe</u>. Fixons d'abord t, et considérons l'ensemble W des $(s,x)\in]0,\infty[\times E$ tels que $\varepsilon_x\hat{P}_s\hat{P}_t \neq \varepsilon_x\hat{P}_{s+t}$, et sa projection V sur E. On vérifie aisément que W est borélien, donc V est sousslinien . Pour montrer que V est λ-évanescent , reprenons les notations de la démonstration précédente : T prévisible, Θ loi de $\hat{X}_T$, s telle que $(s(x),x)\in W$ sur $\{s<\infty\}$, $S=s\circ\hat{X}_T$, et écrivons la propriété de Markov modérée aux instants T,T+S : si f est restriction à E d'un élément de $\underline{\underline{C}}(\overline{E})$

$$E[f\circ\hat{X}_{T+S+t}\,|\underline{\underline{F}}_{T-}] = \hat{P}_{S+t}(\hat{X}_T,f\,)$$

(on a omis les $I_{\{T+S<\infty\}}$) . Le premier membre est aussi égal à $\hat{P}_S(\hat{X}_T,\hat{P}_tf)$, d'après la propriété de Markov modérée appliquée à la tribu intermédiaire $\underline{\underline{F}}_{(T+S)-}$. Comme $\underline{\underline{C}}(\overline{E})$ est séparable, nous en déduisons que pour Θ-presque tout x tel que $s(x)<\infty$ on a $\varepsilon_x\hat{P}_{s(x)+t}=\varepsilon_x\hat{P}_{s(x)}\hat{P}_t$, ce qui n'est compatible avec la définition de s que si $s=+\infty$ Θ-p.p..

Il existe donc un ensemble sousslinien λ-évanescent V tel que pour $x\in V^c$ on ait identiquement $\varepsilon_x\hat{P}_.\hat{P}_t = \varepsilon_x\hat{P}_{.+t}$ (t fixé). Quitte à agrandir V, on peut supposer cela pour tout t rationnel. Mais alors on a cela pour tout t, par continuité à gauche (utiliser à nouveau la séparabilité de $\underline{\underline{C}}(\overline{E})$. Quitte à agrandir à nouveau un peu V, nous pouvons supposer V borélien λ-évanescent.

Construisons par récurrence des ensembles V_n de la manière suivante

$V_0=V$

$V'_{n+1} = \{ x : x\epsilon V_n$ ou il existe $s>0$ tel que $\varepsilon_x\hat{P}_s$ charge $V_n\}$

Le lecteur vérifiera que V'_{n+1} est souslinien λ-évanescent (la démonstration commence à être familière). On prend alors pour V_{n+1} un ensemble borélien λ-évanescent contenant V'_{n+1}.

Pour finir, soit L la réunion des V_n : c'est un borélien λ-évanescent et si $x\notin L$, $\varepsilon_x\hat{P}_s$ néglige L pour tout s. Nous construisons alors la fonction de transition cherchée en remplaçant $\hat{P}_t(x,.)$ par 0 pour tout t si $x\epsilon L$.

QUELQUES PROPRIETES DE LA FONCTION DE TRANSITION AMELIOREE

Voici d'abord un résultat d'unicité :

PROPOSITION 1.- Soient $(\hat{P}_t)$ et $(\hat{P}'_t)$ deux fonctions de transition satisfaisant à l'énoncé du th.2. Alors on a $\varepsilon_x\hat{P}_t=\varepsilon_x\hat{P}'_t$ λ-q.p. .

DEMONSTRATION.- En vertu de la continuité à gauche, il suffit de montrer que l'ensemble borélien $\{ x : \varepsilon_x\hat{P}_t\neq\varepsilon_x\hat{P}'_t \}$ est λ-évanescent quel que soit $t>0$. Cela résulte aussitôt du théorème de section des ensembles prévisibles et de la propriété de Markov modérée.

PROPOSITION 2.- Soit f une fonction continue bornée sur E. Alors $\hat{P}_t f$ est égale λ-q.p. à une fonction finement continue (et le processus $(\hat{P}_t f\circ\hat{X}_s)$ est p.s. continu à gauche pour $s>0$, le processus $(\hat{P}_t f\circ X_s)$ p.s. continu à droite pour $s\geqq 0$).

DEMONSTRATION.- Le processus $(\hat{P}_t f\circ\hat{X}_s)_{s>0}$ est la projection prévisible du processus continu à gauche $(f\circ\hat{X}_{s+t})_{s>0}$; il est continu à gauche d'après le lemme 4. Par retournement, le processus $(\hat{P}_t f\circ X_s)_{s\geqq 0}$ est continu à droite. On conclut par le lemme 5.

PROPOSITION 3.- Soit g une fonction borélienne bornée, et soit $\hat{U}_p g = \int_0^\infty e^{-ps}\hat{P}_s g\, ds$ ($p>0$) . Alors $\hat{U}_p g$ est égale λ-q.p. à une fonction finement continue.

DEMONSTRATION.- Posons $f=\hat{U}_p g$, $\hat{A}_t=\int_0^t e^{-ps} g\circ\hat{X}_s\, ds$; nous avons pour tout temps d'arrêt prévisible T de la famille $(\hat{\underline{\underline{F}}}_t)$

$$E[\hat{A}_\infty \,|\hat{\underline{\underline{F}}}_{T-}] = \hat{A}_T + e^{-pT} f\circ\hat{X}_T$$

Le second membre est la projection prévisible du processus constant A_∞. Le lemme 4 entraîne que le processus $(\hat{A}_s+e^{-ps}f\circ\hat{X}_s)_{s>0}$ est continu à gauche. On retranche $(\hat{A}_s)$ qui est continu, on retourne le temps, et on conclut comme plus haut.

La proposition suivante résout (toujours sous l'hypothèse (A)) le problème du retournement à un temps de retour quelconque .

PROPOSITION 4.- <u>Soit un temps de retour</u> L $(\leq\zeta)$; $T=\zeta-L$ <u>est alors un temps d'arrêt de la famille</u> $(\hat{\underline{\underline{F}}}_t)$, <u>et le processus</u> $(\hat{X}_{T+t})_{t>0}$ <u>obtenu par retournement à l'instant</u> L <u>est markovien continu à gauche par rapport à la famille</u> $(\hat{\underline{\underline{F}}}_{(T+t)-})_{t>0}$, <u>et admet</u> $(\hat{P}_t)$ <u>comme semi-groupe de transition</u>.

DEMONSTRATION.- Compte tenu de la propriété de Markov modérée, tout revient à montrer que T est un temps d'arrêt (car T+t est alors un temps d'arrêt prévisible). Autrement dit, que $\{\zeta - L \leq t\}\in\hat{\underline{\underline{F}}}_t$ pour tout t, ou encore que pour tout t et tout u

$$\{(\zeta-L)\circ\Theta_u \leq t\}\cap\{\zeta>t+u\} = \{\zeta-L\leq t\}\cap\{\zeta>t+u\}$$

C'est évident.

REMARQUE.- Nous n'avons étudié ici que le processus retourné, qui admet $(\hat{P}_t)$ comme semi-groupe de transition. Mais que peut on dire des <u>réalisations</u> du semi-groupe $(\hat{P}_t)$?

Soit W l'ensemble de toutes les applications de D (l'ensemble des rationnels dyadiques >0 dans $E\cup\{\partial\}$, admettant une durée de vie. Notons $\hat{Y}_t$ la coordonnée d'indice t ($t\in D$) , et munissons W de la tribu engendrée par les $\hat{Y}_t$. Pour toute loi ρ sur E, nous pouvons munir W de l'unique loi $\hat{P}^\rho$ pour laquelle le processus $(\hat{Y}_t)$ est markovien, admet $(\hat{P}_t)$ comme semi-groupe de transition et $(\rho\hat{P}_t)_{t\in D}$ comme loi d'entrée. Nous pouvons aussi transporter sur W la loi P du processus $(\hat{X}_t)_{t\in D}$.

Soit W_0 l'ensemble des $w\in W$ prolongeables en une application continue à gauche de $]0,\infty[$ dans $E\cup\{\partial\}$. Nous montrerons à l'appendice 2 que W_0^c est souslinien dans l'espace polonais W. Il en résulte (voir aussi la fin de l'appendice 2) que l'ensemble des x tels que $\hat{P}^x(W_0^c)>0$ est souslinien : notons le L . Pour montrer que L est λ-évanescent, il suffit de montrer que tout compact contenu dans L est λ-évanescent, ou encore que si T est un temps d'arrêt prévisible >0, Θ la répartition de $\hat{X}_T$, Θ ne charge pas L. Cela revient à dire que le processus $(\hat{Y}_t)$, pour $\hat{P}^\Theta$, admet un prolongement continu à gauche de D à $]0,\infty[$, ce qui est évident, car ce processus a même loi que le processus $(\hat{X}_{T+t})_{t\in D}$ qui admet un tel prolongement.

Comme dans la démonstration du th.2, posons $L_0=L$, $L'_{n+1}=\{ x : x\in L_n$ ou il existe $s>0$ tel que $\varepsilon_x\hat{P}_s$ charge $L_n \}$, L_{n+1} = un borélien λ-évanescent contenant L'_{n+1} . Puis on remplace $\hat{P}_s(x,.)$ par 0 pour tout $s>0$ si x appartient à la réunion des L_n. Après cette modification, toutes les mesures $\hat{P}^x$ sont portées par W_0 . On peut alors poser $W=W_0$ pour simplifier les notations, et définir par continuité à gauche les variables aléatoires Y_t pour tout $t>0$.

Une opération analogue parmet d'aboutir au résultat suivant : pour $f\in\underline{\underline{C}}(\overline{E})$, p rationnel, le processus $(\hat{U}_p\circ\hat{Y}_{s-})_{s>0}$ est continu à gauche. On utilisera comme plus haut le fait que $\underline{\underline{C}}(\overline{E})$ est séparable ! Ici aussi, il faut modifier un peu le semi-groupe $(\hat{P}_t)$. Mais on y gagne que pour tout x la mesure $\hat{P}^x$ sur W satisfait à la propriété de Markov modérée. Il est difficile d'espérer mieux.

3. ELIMINATION DE L'HYPOTHESE AUXILIAIRE

Nous allons l'éliminer en deux étapes - qu'il est d'ailleurs naturel de distinguer.

LE CAS OÙ ζ EST P.S. FINIE

Nous considérons d'abord le cas où (P_t) est un semi-groupe sousmarkovien sur E, satisfaisant aux hypothèses droites, et à la seule condition

$$\lim_{t\to\infty} P_t1 = 0$$

qui exprime que la durée de vie ζ est p.s. finie quelle que soit la loi initiale. Montrons que <u>toute la théorie faite au paragraphe 2 s'applique à un tel semi-groupe</u>.

A cette fin, nous utilisons un argument extrêmement ingénieux de CHUNG et WALSH . Nous rendons le semi-groupe (P_t) markovien, non pas au moyen d'un seul point ∂ , mais de <u>deux</u> points ∂ et $\bar{\partial}$. Les trajectoires issues de $x\in E$ se promènent dans E suivant (P_t), puis sautent au point ∂ comme d'habitude, mais au lieu d'y être absorbées elles y restent un temps exponentiel de paramètre 1, et sautent alors en $\bar{\partial}$ où elles sont absorbées. On désigne par $(\bar{P}_t)$ le semi-groupe sur

$E\cup\{\partial\}\cup\{\bar\partial\}$ ainsi construit, par $\bar\Omega,\dots,\bar X_t$ sa réalisation continue à droite canonique, par ζ et $\bar\zeta$ les temps d'entrée dans $\{\partial\}$ et $\{\bar\partial\}$. Maintenant, si nous considérons $\bar\zeta$ comme la durée de vie, le semi-groupe $(\bar P_t)$ satisfait à l'hypothèse auxiliaire : il est d'abord clair que $\bar\zeta$ est p.s. finie. Pour vérifier l'autre hypothèse, posons

$$L_t(x)=P^x\{\zeta>t\}$$
$$\ell_t(x)= -\int_0^t e^{-(t-u)}dL_u(x)$$

On vérifie aisément que (ℓ_s) est une loi de sortie, et que l'on a

$$\int_t^\infty \ell_s ds = L_t - \int_0^t e^{-(t-u)}dL_u = P^\cdot\{\bar\zeta > t\}$$

Tous les résultats du paragraphe 2 s'appliquent au processus obtenu en retournant $(\bar X_t)$ à l'instant $\bar\zeta$. Comme ζ est un temps de retour, le processus obtenu en retournant $(\bar X_t)$ à ζ est markovien, satisfait à la propriété de Markov modérée, etc. Or ce processus est identique en loi au processus $(\hat X_t)$. Pour avoir un vrai semi-groupe sur E, il convient de plus de s'assurer que les noyaux $\hat{\bar P}_t$ fournis par le retournement à l'instant $\bar\zeta$ possèdent la propriété suivante

si $x\neq\partial$, les mesures $\hat{\bar P}_s(x,.)$ ne chargent pas $\{\partial\}$

Nous laisserons au lecteur le soin de vérifier, par un procédé maintenant bien connu, que l'on peut effectivement trouver un semi-groupe $(\hat{\bar P}_t)$ possédant cette propriété.

Nous pouvons alors construire $(\hat P_t)$ par restriction à E de $(\hat{\bar P}_t)$. Il reste quelques détails à écrire pour vérifier que le processus $(\hat X_t)$ lui même (et non plus la version que nous venons de construire) satisfait au théorème 2 et aux propositions qui le suivent. Ce serait facile et ennuyeux, et nous ne le ferons pas.

PASSAGE AU CAS GENERAL

Nous désignons maintenant par (P_t) un semi-groupe qui satisfait seulement aux hypothèses droites.

Nous commencerons par rappeler un résultat établi dans un autre travail (*) : soit L un temps de retour sur Ω, et soit h la fonction excessive

(*) P.A.MEYER, R.T.SMYTHE, J.L.WALSH. Birth and Death of Markov processes. Proceedings 6th Berkeley Symposium, 1970.

$P^{\bullet}\{L>0\}$. Définissons un semi-groupe (Q_t) par la formule

$$\begin{aligned} Q_t(x,dy) &= \frac{1}{h(x)} P_t(x,dy)h(y) \text{ si } h(x)\neq 0 \\ &= e^{-t}\varepsilon_x(dy) \text{ si } h(x)=0 \end{aligned}$$

Nous rendons ce semi-groupe markovien au moyen du point ∂. Définissons d'autre part un processus (X'_t) par la formule

$$\begin{aligned} X'_t(\omega) &= X_t(\omega) \text{ si } t<L(\omega) \\ &= \partial \text{ si } t\geqq L(\omega) \end{aligned}$$

Il est facile de voir que le semi-groupe (Q_t) satisfait aux hypothèses droites (c'est une modification triviale du " h-path semigroup" de DOOB) et on a le résultat suivant lorsque Ω est muni de P^{λ}

PROPOSITION 5.- <u>Le processus</u> (X'_t) <u>est markovien, admet</u> (Q_t) <u>comme semi-groupe de transition et</u> $h.\lambda+ \langle 1-h,\lambda\rangle\varepsilon_{\partial}$ <u>comme loi initiale</u>.

Voici la démonstration pour la commodité de la lecture . Considérons des instants $s_1<s_2\ldots<s_n=s<t$, et des fonctions $f_1,\ldots,f_n,g$ nulles au point ∂. Nous allons montrer que

$$E^{\bullet}[f_1\circ X'_{s_1}\ldots f_n\circ X'_s\, g\circ X'_t] = E^{\bullet}[f_1\circ X'_{s_1}\ldots f_n\circ X'_s . Q_{t-s}(X'_s,g)]$$

Posons $\phi=f_1\circ X_{s_1}\ldots f_n\circ X_s$. Cela s'écrit aussi

$$E^{\bullet}[\phi . g\circ X_t . I_{\{t<L\}}] = E^{\bullet}[\phi . Q_{t-s}(X_s,g) . I_{\{s<L\}}]$$

Calculons le premier membre. L'événement $\{t<L\}$ est égal à $\{L\circ\theta_t>0\}$:

$$\begin{aligned} E^{\bullet}[\phi . g\circ\theta_t . I_{\{t<L\}}] &= E^{\bullet}[\phi . g\circ X_t . P^{X_t}\{L>0\}] = E^{\bullet}[\phi . (gh)\circ X_t] \\ &= E^{\bullet}[\phi . P_{t-s}(X_s,gh)] = E^{\bullet}[\phi . I_{\{h>0\}}\circ X_s . P_{t-s}(X_s,gh)] \end{aligned}$$

(On a appliqué en premier lieu la propriété de Markov, et à la fin le fait que $P_{t-s}(gh)$ est nulle sur $\{h=0\}$, h étant excessive).
Calculons de même le second membre

$$\begin{aligned} E^{\bullet}[\phi . Q_{t-s}(X_s,g) . I_{\{s<L\}}] &= E^{\bullet}[\phi . Q_{t-s}(X_s,g) . h\circ X_s] = \\ &= E^{\bullet}[\phi . P_{t-s}(X_s,gh) . I_{\{h>0\}}\circ X_s]. \end{aligned}$$

La démonstration de la prop.5 est achevée.

Pour effectuer le retournement au temps ζ, nous introduisons le temps de retour fini

$$L=\zeta \text{ si } \zeta<\infty \ , \quad L=0 \text{ si } \zeta=\infty$$

Si nous construisons le processus (X'_t) tué à L comme ci-dessus, sa durée de vie est p.s. finie, et on peut lui appliquer la théorie du retournement. D'autre part les processus (X_t) et (X'_t) ont le même processus retourné.

Plus généralement, la proposition 5 permet de retourner les processus associés à (P_t) à <u>n'importe quel temps de retour L</u> : il suffit de tuer d'abord à L, de sorte que L devienne la durée de vie d'un nouveau processus, auquel s'applique la théorie du retournement à ζ. Mais il faut un peu d'effort (contrairement à ce qui se passait lorsque ζ était p.s. fini) pour vérifier que l'on peut trouver une fonction de transition commune à tous ces processus retournés. Indiquons brièvement comment on fait.(*) Tout d'abord on remarque que si l'on a deux temps de retour $L \leq L'$, et si l'on construit les fonctions de transition $(\hat{P}_t),(\hat{P}'_t)$ des processus retournés à L et L', alors l'ensemble des x tels que $\varepsilon_x\hat{P}_t \neq \varepsilon_x\hat{P}'_t$ pour un $t \in]0,\infty[$ est λ-évanescent : cela se démontre comme la proposition 4. Soit ensuite Λ l'enveloppe supérieure essentielle des temps de retour finis ; l'ensemble des temps de retour finis étant stable pour l'opération $\vee$, nous pouvons trouver une suite croissante (L_n) de temps de retour qui converge p.s. vers Λ. Un procédé déjà utilisé nous permet de choisir une fonction de transition satisfaisant au th.2, servant à tous les processus retournés aux L_n. Si L est un temps de retour quelconque, elle sert alors au processus retourné à $L \wedge L_n$, et finalement au processus retourné à L lorsque $n \to \infty$.

(*) Démonstration suggérée par R.T.Smythe

APPENDICE 1 : UN THEOREME DE MOKOBODZKI

Pour la commodité de la lecture, nous allons indiquer brièvement une démonstration du théorème suivant , qui est un cas particulier d'un théorème de MOKOBODZKI valable pour une résolvante quelconque. Cette démonstration nous a été communiquée par R.GETOOR.

THEOREME.- <u>Si</u> (P_t) <u>satisfait aux hypothèses droites</u>, <u>si la fonction excessive finie</u> g <u>est un potentiel de fonction</u> $g=U\gamma$, <u>et si</u> f <u>est une fonction excessive majorée au sens fort par</u> g, <u>alors</u> f <u>est aussi un potentiel de fonction</u>.

DEMONSTRATION.- Nous construisons les processus (X_t) associés à (P_t) (notations usuelles). g est le potentiel de la fonctionnelle additive

$$G_t(\omega) = \int_0^t \gamma \circ X_s(\omega)\, ds$$

f majorée par g est un potentiel de la classe (D), donc est le potentiel d'une fonctionnelle additive (F_t). Celle ci est majorée au sens fort par (G_t), donc est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$. Le théorème de dérivation de Lebesgue nous dit que pour ω donné la limite $\lim\limits_{h=1/n \to 0} \frac{F_{t+h}(\omega)-F_t(\omega)}{h}$ existe pour presque tout t, et que l'intégrale de cette limite de 0 à s est $F_s(\omega)$. Munissons Ω d' une loi P^λ, et appliquons le théorème de Fubini : pour presque tout t la limite $\lim \frac{1}{h}(F_{t+h}-F_t)$ existe P^λ-p.s. . Autrement dit, $\lim F_h/h$ existe $P^{\lambda P_s}$-p.s. pour presque tout s.

Posons $\phi = \liminf F_h/h$: c'est une v.a. $\underline{\underline{F}}_0$-mesurable, qui peut donc se mettre sous la forme $\phi \circ X_0$. Nous admettrons (ce n'est pas difficile à voir) que ϕ est presque-borélienne. Pour presque tout s on a $P^{\lambda P_s}$ - p.s. $F_h/h \to \phi \circ X_0$, ou encore P^λ-p.s. $(F_{s+h}-F_s)/h \to \phi \circ X_s$. Appliquant à nouveau Fubini on trouve que p.s. $(F_{s+h}-F_s)/h \to \phi \circ X_s$ p.p.. Le th. de Lebesgue donne alors

$$F_t = \int_0^t \phi \circ X_s\, ds \quad \text{p.s.}$$

qui est le résultat cherché : $f=U\phi$.

APPENDICE 2. RESULTATS DE THEORIE GENERALE DES PROCESSUS

Le résultat suivant est une forme plus complète du lemme 4. Il a été démontré indépendamment par J.F.MERTENS, dans un travail à paraître dans le Z. für W-theorie.(*) Nous convenons de poser $X_\infty=0$, de sorte que $E[X_T]$ est une abréviation de $E[X_T.I_{\{T<\infty\}}]$. Le lemme 4 proprement dit est donné plus loin sous forme de corollaire (évident).

PROPOSITION 6.- Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un processus réel borné, défini sur un espace probabilisé $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ muni d'une famille de tribus $(\underline{\underline{F}}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ satisfaisant aux conditions usuelles.

a) Supposons (X_t) bien-mesurable. Pour que (X_t) soit continu à droite(+) il faut et il suffit que la condition suivante soit satisfaite

Pour toute suite de temps d'arrêt $T_n \downarrow T$, on a $E[X_{T_n}]\to E[X_T]$.

Pour qu'il admette de plus des limites à gauche(+) il faut et il suffit que de plus

Pour toute suite croissante (T_n) de temps d'arrêt, uniformément bornée, $\lim_n E[X_{T_n}]$ existe .

b) Supposons (X_t) prévisible. Pour que (X_t) soit continu à gauche,(+) il faut et il suffit que la condition suivante soit satisfaite :

Pour toute suite de temps d'arrêt prévisibles $T_n \uparrow T$, uniformément bornée, on a $\lim_n E[X_{T_n}]= E[X_T]$.

DEMONSTRATION.- Les conditions de l'énoncé sont évidemment nécessaires. Montrons qu'elles sont suffisantes, en commençant par la première partie de a). Construisons par récurrence les temps d'arrêt suivants

$$T_0=0\ ,\quad T_{n+1}=\inf\ \{\ t>T_n\ :\ |X_t-X_{T_n}|\geqq\varepsilon\ \}$$

Poursuivons ensuite par récurrence transfinie : on passe de T_α à $T_{\alpha+1}$ comme ci-dessus, et si β est un ordinal limite, $T_\beta=\sup_{\alpha<\beta} T_\alpha$. Il est facile de voir que si l'on a pour tout α $T_{\alpha+1}>T_\alpha$ p.s. sur $\{T_\alpha<\infty\}$, il existe un ordinal γ tel que $T_\gamma=+\infty$ p.s. ; si cela a lieu pour tout $\varepsilon>0$, le processus est continu à droite. Ainsi, si (X_t) n'est pas continu à

(+) Comme d'habitude, nous identifions deux processus indistinguables.

(*) Il vient aussi d'être démontré, avec son corollaire, par M.RAO, On modification theorems, Preprint series, Aarhus University, Oct. 1970. RAO traite aussi le cas des processus à valeurs dans un esp. de Banach droite, nous pouvons trouver un temps d'arrêt T tel que $P\{T<\infty\}\neq 0$, et que

$$\limsup_{t\downarrow T} |X_t-X_T| \geqq \varepsilon \text{ sur } \{T<\infty\}$$

Il suffit de prendre un α tel que $P\{T_\alpha = T_{\alpha+1}<\infty\}>0$, et de poser $T=T_\alpha$ sur $\{T_\alpha=T_{\alpha+1}\}$, $T=\infty$ sinon . Nous pouvons maintenant supprimer le signe $|\ |$: l'un des deux événements suivants a une probabilité non nulle

$$\limsup_{t\downarrow T} X_t \geqq X_T+\varepsilon \qquad \liminf_{t\downarrow T} X_t \leqq X_T-\varepsilon$$

supposons que ce soit le premier. Quitte à diminuer $\{T<\infty\}$, nous pouvons supposer que l'inégalité a lieu pour tout ω tel que $T(\omega)<\infty$.

Soit alors $A=\{(t,\omega) : t>T(\omega),\ X_t(\omega)>X_T(\omega)+\varepsilon/2\}$; pour tout ω tel que $T(\omega)<\infty$, $T(\omega)$ est adhérent à $]T(\omega),\infty[\cap A(\omega)$, où $A(\omega)$ est la coupe de A. Appliquons le théorème de section à l'ensemble bien-mesurable $]T,T+\frac{1}{n}[\cap A$: nous voyons qu'il existe un temps d'arrêt T_n tel que

$$T<T_n<T+\frac{1}{n} \text{ sur } \{T<\infty\}\ ,\ T\leqq T_n \text{ partout}$$

$$X_{T_n}\geqq X_T+\varepsilon/2 \text{ sur } \{T_n<\infty\}$$

$$P\{T_n<\infty\} \geqq P\{T<\infty\} - 1/2^n$$

La suite (T_n) converge donc p.s. vers T. Nous pouvons la rendre décroissante (mais nous ne changerons pas les notations). Nous avons alors

$$T_n\downarrow T \quad , \quad \liminf_n E[X_{T_n}] \geqq E[X_T] + \frac{\varepsilon}{2} P\{T<\infty\}$$

en contradiction avec l'énoncé. La première partie de a) est établie.

Passons à la seconde partie de a) : si le processus continu à droite (X_t) n'admet pas de limites à gauche partout, il existe un entier k et deux nombres rationnels a,b , a<b, tels que l'événement

> le nombre des montées de $X_.(\omega)$ sur $[0,k]$, au dessus de l'intervalle $[a,b]$, est égal à $+\infty$

ait une probabilité positive. Nous pouvons alors construire par récurrence des temps d'arrêt T_n en posant

$T_0=0$

$T_{2n+1} = \inf\{ t\in[0,k] : t>T_{2n}\ ,\ X_t\leqq a\}$ ou k si cet ensemble est vide

$T_{2n+2} = \inf\{ t\in[0,k] : t>T_{2n+1}\ ,\ X_t\geqq b\}$ ou k si cet ensemble est vide

La suite des espérances $E[X_{T_n}]$ ne converge pas, ce qui contredit l' hypothèse a), deuxième partie.

Nous passons à b). Soit D l'ensemble des rationnels dyadiques ; posons pour tout $t>0$

$$\underline{X}_t = \liminf_{\substack{s\uparrow\uparrow t\\ s\in D}} X_s \qquad \overline{X}_t = \limsup_{\substack{s\uparrow\uparrow t\\ s\in D}} X_s$$

(la notation $s\uparrow\uparrow t$ signifie $s\to t$, $s<t$). Il est facile de voir que ces deux processus sont prévisibles, et il nous suffira de montrer que les ensembles $\{\exists t : \underline{X}_t<X_t\}$, $\{\exists t : \overline{X}_t>X_t\}$ **ont tous deux une probabilité nulle** . Cela entraîne en effet que l'on a p.s. $\underline{X}_t\geqq X_t\geqq\overline{X}_t$ pour tout t, d'où l'égalité pour tout t et la continuité à gauche.

Traitons le second ensemble. Tout revient à montrer que pour tout rationnel a, tout $\varepsilon>0$, l'événement

$$\{\exists\, t : \overline{X}_t>a+\varepsilon,\ X_t<a\}$$

a une probabilité nulle. Supposons le contraire. D'après le théorème de section des ensembles prévisibles, il existe un temps d'arrêt prévisible $T>0$ tel que

$$P\{T<\infty\}\neq 0 \quad ; \quad \overline{X}_T > a+\varepsilon,\ X_T<a \quad \text{sur } \{T<\infty\}$$

Soit (S_n) une suite de temps d'arrêt telle que $S_n\uparrow\uparrow T$ p.s.. En appliquant à nouveau le théorème de section, nous voyons qu'il existe des temps d'arrêt prévisibles R_n tels que

$$R_n\in]S_n,T[\,\cap D \text{ sur } \{R_n<\infty\}$$

$$X_{R_n}\geqq a+\varepsilon \text{ sur } \{R_n<\infty\}$$

$$P\{R_n<\infty\}\geqq P\{T<\infty\} - 1/2^n$$

La suite (T_n) s'obtient en numérotant les valeurs $R_n(\omega)$ par ordre de grandeur croissante. On peut montrer que les T_n sont encore des temps d'arrêt <u>prévisibles</u>, et on a $T_n\uparrow\uparrow T$ p.s., $X_{T_n}\geqq a+\varepsilon$ sur $\{T_n<\infty\}$. Pour obtenir une suite contredisant à l'hypothèse b), il suffit de tronquer T et les T_n à un entier k assez grand.

Rappelons maintenant qu'on peut associer, à tout processus mesurable borné (Y_t), ses <u>projections</u> (X_t) et (X'_t) sur la tribu bien-mesurable et la tribu prévisible respectivement :

(X_t) est le seul processus bien-mesurable satisfaisant à

$$X_T = E[Y_T|\underline{\underline{F}}_T] \text{ p.s. pour tout temps d'arrêt } T$$

(X'_t) est le seul processus prévisible satisfaisant à

$$X'_T = E[Y_T|\underline{\underline{F}}_{T-}] \text{ p.s. pour tout t.d'a. prévisible } T.$$

On a alors le résultat suivant (qui contient le lemme 4).

COROLLAIRE.- Si (Y_t) est borné continu à droite, sa projection bien-mesurable est continue à droite . De même, si (Y_t) est borné et continu à gauche, sa projection prévisible est continue à gauche.

Nous passons maintenant au résultat de mesurabilité nécessaire pour la 2e étape du th.2. Nous remplaçons la gauche par la droite !

PROPOSITION 7- Soit $(\Omega,\underline{\underline{F}})$ un espace mesurable, et soit D un ensemble dénombrable dense dans $\mathbb{R}$. Pour tout $t\in D$, soit X_t une variable aléatoire réelle sur $(\Omega,\underline{\underline{F}})$. Soit H l'ensemble des $\omega\in\Omega$ tels que l'application $X_.(\omega)$ sur D soit prolongeable en une application continue à droite sur $\mathbb{R}$; alors H^c est $\underline{\underline{F}}$-souslinien.

DEMONSTRATION.- Définissons deux processus (Y_t) et (Z_t) comme suit :

$$Y_t = \liminf_{\substack{s\in D,\ s\to t\\ s\geq t}} X_s \qquad\qquad Z_t = \limsup_{\substack{s\in D,\ s\to t\\ s\geq t}} X_s$$

Soit $A=\{(t,\omega) : Y_t(\omega)=Z_t(\omega)\}$; H^c est la projection de A^c sur Ω suivant $\mathbb{R}$, et il nous suffit donc de montrer que A appartient à la tribu produit de $\mathbb{R}\times\Omega$. Cela revient à prouver que (Y_t) et (Z_t) sont mesurables. Occupons nous du premier. Il suffit encore d'établir, pour tout $\varepsilon>0$, le caractère mesurable du processus

$$Y^\varepsilon_t = \inf_{\substack{s\in D\\ s\in[t,t+\varepsilon[}} X_s$$

Or l'ensemble $\{(t,\omega) : Y^\varepsilon_t<a\}$ est la réunion, pour $s\in D$, des ensembles mesurables $A_s =]s-\varepsilon,s]\times\{X_s<a\}$, d'où la proposition.

REMARQUE.- Il est connu que si l'on remplace " continu à droite" par " continu à droite et pourvu de limites à gauche", l'ensemble H appartient à $\underline{\underline{F}}$. Noter que H plus haut est universellement mesurable, mais n'est en général ni souslinien, ni borélien !

Il nous reste un dernier point à démontrer, en vue de prouver la dernière remarque du § 2. Soit W un espace polonais, et soit A un ensemble souslinien dans W. Soient $\underline{\underline{M}}^+(W)$, $\underline{\underline{M}}^+(A)$ les espaces des mesures positives bornées sur W et sur A, munis de leurs topologies étroites respectives : il est connu que $\underline{\underline{M}}^+(W)$ est polonais, $\underline{\underline{M}}^+(A)$ un espace souslinien (i.e. il existe une surjection continue d'un espace polonais P sur $\underline{\underline{M}}^+(A)$). D'autre part, $\underline{\underline{M}}^+(A)$ se plonge continûment dans $\underline{\underline{M}}^+(W)$, grâce à l'injection de A dans W, et peut donc être considéré comme un <u>sous-ensemble souslinien</u> de $\underline{\underline{M}}^+(W)$. L'ensemble $C_A = \{\mu \in \underline{\underline{M}}^+(W) : \mu(A)>0\}$ est alors la somme $\underline{\underline{M}}^+(W)+\underline{\underline{M}}^+(A)$, il est donc souslinien comme image continue de $\underline{\underline{M}}^+(W)\times\underline{\underline{M}}^+(A)$.

Soit N un noyau de $(E,\underline{\underline{B}}(E))$ dans $(W,\underline{\underline{B}}(W))$, où E est un espace polonais ; l'application $x \longmapsto \varepsilon_x N$ de E dans $\underline{\underline{M}}^+(W)$ est alors borélienne, l'image réciproque de C_A par cette application est souslinienne dans E, et c'est l'ensemble $\{ x \in E : N(x,A)>0 \}$, celui que nous cherchions à étudier.