CATHERINE DOLÉANS-DADE
PAUL-ANDRÉ MEYER

Intégrales stochastiques par rapport aux martingales locales

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 4 (1970), p. 77-107
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1970__4__77_0>

INTÉGRALES STOCHASTIQUES PAR RAPPORT AUX MARTINGALES LOCALES

par

C. DOLÉANS-DADE et P.A. MEYER

Nous généralisons la théorie des intégrales stochastiques, telle qu'elle est traitée dans [1] et [2], dans deux directions. D'une part, nous permettons à la famille de tribus fondamentale d'avoir des temps de discontinuité ; d'autre part, nous adoptons une nouvelle définition des semimartingales, qui donne lieu à une formule de changement de variables plus simple et plus générale que celle de [2]. Cette formule constitue le résultat essentiel du travail. Pour le reste, nous avons essayé de donner des démonstrations à peu près complètes, pour éviter de renvoyer constamment le lecteur à [1], mais il s'agit vraiment de généralisations immédiates des résultats classiques sur les intégrales stochastiques. Nous avons laissé de côté l'extension du " théorème de projection " de KUNITA-WATANABE, qui est un peu plus délicate, et qui a été faite par J.LAZARO.

NOTATIONS

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un espace probabilisé complet, muni d'une famille $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ de sous-tribus de $\mathcal{F}$, croissante et continue à droite. Nous supposons que $\mathcal{F}_0$ contient tous les ensembles négligeables de $\mathcal{F}$.

Un processus stochastique $X=(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une famille de variables aléatoires réelles sur Ω ; il est adapté à la famille $(\mathcal{F}_t)$ si X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable pour tout t. Un processus stochastique adapté X sera dit prévisible, si la fonction $(t,\omega) \mapsto X_t(\omega)$ est mesurable par rapport à la tribu sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$, engendrée par les processus adaptés dont les trajectoires sont continues à gauche.

Un temps d'arrêt T est dit prévisible, s'il existe une suite croissante (R_n) de temps d'arrêt qui converge vers T p.s., telle que pour tout n on ait p.s. $R_n<T$ sur $\{T>0\}$. Un temps d'arrêt T est totalement inaccessible, s'il n'est pas p.s. infini et si, pour toute suite croissante (R_n) de temps d'arrêt majorés par T , on a

$$P\{\,\omega : \lim S_n(\omega)=T(\omega)<+\infty,\ S_n(\omega)<T(\omega)\ \forall\ n\in\underset{\sim}{N}\} = 0 \ .$$

Un temps d'arrêt T est accessible si, pour tout temps d'arrêt S totalement inaccessible, on a

$$\underset{\sim}{P}\,\{T = S<+\infty\} = 0 \ .$$

Deux processus X et Y sont dits indistinguables si, pour presque tout $\omega\in\Omega$, on a $X_t(\omega)=Y_t(\omega)$ pour tout t .

§ 1. MARTINGALES BORNEES DANS L^2

La théorie des intégrales stochastiques exposée ici diffère très peu de [1] ; l'hypothèse d'absence de temps de discontinuité pour la famille $(\widehat{\mathcal{F}}_t)$ étant peu importante, si l'on se limite à l'intégration des processus prévisibles.

1. On dit qu'un processus adapté M est une martingale bornée dans L^p $(1\leq p<+\infty)$, si les trajectoires de M sont continues à droite et pourvues de limites à gauche, si M est une martingale et si $\sup_t E[|M_t|^p] <+\infty$ (si $p>1$ et $M^* = \sup_t |M_t|$, on a alors $\underset{\sim}{E}[(M^*)^p]<+\infty$, [4] chap VI n° 2). Nous désignerons par $\mathfrak{M}^2$ l'espace des martingales bornées dans L^2 , telles que $M_0 = 0$ (avec identification de deux martingales indistinguables). Nous munirons $\mathfrak{M}^2$ du produit scalaire

$$(M,N) \longmapsto \underset{\sim}{E}[M_\infty N_\infty] \quad (M,N\in \mathfrak{M}^2) \ .$$

Le sous-espace de $\mathfrak{M}^2$ formé des martingales à trajectoires continues (à une identification près) sera désigné par $\mathfrak{M}^2_c$.

THÉORÈME 1.

$\mathfrak{M}^2$ est un espace de Hilbert et $\mathfrak{M}^2_c$ est fermé dans $\mathfrak{M}^2$.

Ce théorème se déduit aisément du lemme suivant.

LEMME 1.

Soit (M^n) une suite de martingales bornées dans L^2 , telle que $\sum_n \underset{\sim}{E}[(M^n_\infty - M^{n+1}_\infty)^2] < +\infty$; il existe alors une martingale M bornée dans L^2 , telle que pour presque tout ω , $M^n_t(\omega)$ converge uniformément en t vers $M_t(\omega)$.

Démonstration

On a, d'après une inégalité classique due à Doob ([4],chap VI n°2),

$$\underset{\sim}{E}[\sup_{t\geq 0} (M^n_t - M^{n+1}_t)^2] \leq 4\, \underset{\sim}{E}[(M^n_\infty - M^{n+1}_\infty)^2] \ ;$$

ce qui entraîne que, pour presque tout ω , les suites $(M^n_t(\omega))$ sont uniformément convergentes. Il suffit alors de poser

$$M_t(\omega) = \lim_n M^n_t(\omega) \quad \text{si les suites } (M^n_t(\omega)) \text{ convergent uniformément}$$

$$M_t(\omega) = 0 \qquad \text{ailleurs,}$$

pour obtenir une martingale bornée dans L^2, **vers laquelle converge la suite (M^n).**

2. - PROCESSUS CROISSANT NATUREL ASSOCIÉ À UNE MARTINGALE BORNÉE DANS L^2 .

Un processus adapté $A=(A_t)$ est un processus croissant, si ses trajectoires sont des fonctions croissantes, continues à droite, nulles pour $t=0$. Il est dit intégrable si $\underset{\sim}{E}[A_\infty] < +\infty$. Il est dit naturel (*) **s'il est intégrable et si, pour toute martingale Y continue à droite et bornée,**

$$\underset{\sim}{E}\left[\int_0^\infty Y_s \, dA_s\right] = \underset{\sim}{E}\left[\int_0^\infty Y_{s-} \, dA_s\right] .$$

On identifiera deux processus croissants indisinguables.

(*) On peut montrer qu'un processus croissant intégrable est naturel si et seulement s'il est prévisible . Les mots seront considérés comme synonymes dans la suite.

THÉORÈME 2.

Soit $M \in \mathfrak{M}^2$; il existe un processus croissant **intégrable naturel** unique tel que le processus $(M_t^2 - A_t)$ soit une martingale.

Ce théorème est démontré dans [4] , chap. VIII n^{os} 23 et 25 . Nous poserons $A = \langle M,M \rangle$. La propriété caractéristique de ce processus croissant naturel s'écrit, si $s \leq t$.

$$\underset{\sim}{E}[M_t^2 - M_s^2 \,|\, \mathcal{F}_s] = \underset{\sim}{E}[(M_t - M_s)^2 | \mathcal{F}_s] = \underset{\sim}{E}[\langle M,M \rangle_t - \langle M,M \rangle_s \,|\, \mathcal{F}_s] \; ,$$

où l'on peut d'ailleurs remplacer s,t par deux temps d'arrêt S,T tels que $S \leq T$ (appliquer le théorème d'arrêt de Doob à la martingale $(M_t^2 - A_t)$) . Si M et N sont deux éléments de M^2 on posera

$$\langle M,N \rangle = \tfrac{1}{2}(\langle M+N,M+N \rangle - \langle M,M \rangle - \langle N,N \rangle) \; ;$$

Le processus $\langle M,N \rangle$ est alors caractérisé par les propriétés suivantes :

(i) $\langle M,N \rangle$ est différence de deux processus croissants naturels.

(ii) $\langle M,N \rangle - MN$ est une martingale.

Le processus $\langle M,N \rangle$ vérifie évidemment ces propriétés ; pour voir que $\langle M,N \rangle$ est le seul processus vérifiant (i) et (ii) il suffit d'utiliser la démonstration de [4] chap VII T. 21 .

Deux martingales M et N appartenant à $\mathfrak{M}^2$ seront dites orthogonales si $\langle M,N \rangle = 0$; ce qui équivaut à dire que le processus $(M_t N_t)$ est une martingale.

3.- INTÉGRALES STOCHASTIQUES DES PROCESSUS PRÉVISIBLES.

DÉFINITION

Si le processus A est égal à la différence de deux processus croissants , nous désignerons par $L^1(A)$, l'ensemble des processus prévisibles C

tels que $\underset{\sim}{E}[\int_0^\infty |C_s|\ |dA_s|] < +\infty$.

Si $C \in L^1(A)$, on peut définir le processus adapté $Y_t = \int_0^t C_s dA_s$ comme une intégrale de Stieljes sur chaque trajectoire ω . Nous étudierons au § 2 quelques propriétés de ce processus Y .

Si M est une martingale, la fonction $t \mapsto M_t(\omega)$ n'est pas **souvent** à variation finie sur tout intervalle $[0,s]$, et l'on ne peut pas parler de l'intégrale $\int_0^s C_t(\omega)\, dM_t(\omega)$. On peut pourtant, dans certains cas, définir une intégrale de C par rapport à la martingale M . **Nous suivons la présentation maintenant classique de KUNITA et WATANABE**

DÉFINITION.

Soit $M \in \mathcal{M}^2$, on désigne par $L^2(M)$ l'ensemble des processus prévisibles C tels que $\underset{\sim}{E}[\int_0^\infty C_s^2\, d<M,M>_s] < +\infty$; on munira $L^2(M)$ de la semi-norme :

$$C \longmapsto \sqrt{\underset{\sim}{E}[\int_0^\infty C_s^2\, d<M,M>_s]} \ .$$

THÉORÈME 3.

1) Soit $M \in \mathcal{M}^2$, et soit $C \in L^2(M)$; **on a alors** $C \in L^1(<M,N>)$ pour tout $N \in \mathcal{M}^2$ **, et il existe un élément** et un seul de $\mathcal{M}^2$, noté $C.M$, tel que l'on ait pour tout $N \in \mathcal{M}^2$

$$<C.M,N>_t = \int_0^t C_s d<M,N>_s \qquad \text{p.s.}$$

2) Pour presque tout ω , on a $\Delta(C.M)_s = C_s \Delta M_s$(1) , pour tout s . Si M est à trajectoires continues, **il en est de même de** $C.M$.

Notation

On dira que $C.M$ est l'intégrale stochastique du processus C par rapport à la martingale M **, et on écrira** $(C.M)_t = \int_0^t C_s dM_s$.

(1) Si X est un processus à trajectoires continues à droite et pourvues de limites à gauche, $\Delta X_s = X_s - X_{s-}$ désigne le saut de X à l'instant s .

Démonstration

a) unicité : si L et L' sont deux éléments de $\mathfrak{M}^2$ tels que $< L,N >_t = < L',N >_t = \int_0^t C_s \, d < M,N >_s$ pour tout s et tout $N \in \mathfrak{M}^2$, on a $< L-L',L-L' > = 0$. Le processus $(L-L')^2$ est alors une martingale positive, nulle à l'instant zéro, et

b) existence : soit $\mathcal{E}$ le sous-espace de $L^2(M)$ formé des processus C de la forme

$$C_s = \sum_{i \in \mathbb{N}} H_i \, I_{]t_i,t_{i+1}]}(s) \ ,$$

où (t_i) est une subdivision dyadique de la droite réelle, et où H_i est $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurable et bornée pour tout i . Nous poserons, si $k(s)$ est le dernier indice i tel que $t_i < s$

$$(C.M)_s = H_0(M_{t_1} - M_{t_0}) + H_1(M_{t_2} - M_{t_1}) + \ldots + H_{k(s)}(M_s - M_{k(s)}) \ .$$

Il est facile de vérifier que C et $C.M$ satisfont aux propriétés suivantes

$$\text{(i)} \quad \mathbb{E}[\int_0^\infty |C_s| \; |d<M,N>_s|] \le (\mathbb{E}[\int_0^\infty C_s^2 \, d<M,M>_s])^{\frac{1}{2}} \; (\mathbb{E}[<N,N>_\infty])^{\frac{1}{2}},$$

pour tout $N \in \mathfrak{M}^2$.

(ii) $C.M \in \mathfrak{M}^2$, et $< C.M,N>_t = \int_0^t C_s \, d<M,N>_s$ p.s., pour tout $N \in \mathfrak{M}^2$.,

(iii) $\Delta(C.M)_s = C_s \Delta M_s$ pour tout s , et presque tout ω .

L'application $C \mapsto C.M$ est une application linéaire continue de $\mathcal{E}$ dans $\mathfrak{M}^2$; deux éléments C et C' de $L^2(M)$, non séparés par la seminorme de $L^2(M)$ ont même image dans cette application (conséquence de (ii)) . L'application $C \mapsto C.M$ se prolonge donc en une application linéaire continue de $L^2(M)$ dans $\mathfrak{M}^2$, vérifiant les propriétés (i) et (ii) . La propriété (iii) est alors une conséquence du Lemme 1 .

4.- DÉCOMPOSITION D'UNE MARTINGALE DE $\mathcal{M}^2$.

Nous redonnons ici, de manière schématique, la décomposition des martingales de carré intégrable faite dans [4] chap. VIII n^{os} 28 à 32 . Au lieu de travailler avec des temps d'arrêt accessibles comme en 29 et 30, nous utiliserons des temps d'arrêt prévisibles. Le théorème T. 29 est d'ailleurs faux si T n'est pas prévisible.

DÉFINITION

Soit X un processus adapté à trajectoires continues à droite, pourvues de limites à gauche ; nous dirons qu'une suite de temps d'arrêt $(T_n)_{n\in \mathbb{N}}$ épuise les sauts de X , si pour tout temps d'arrêt T , la relation

$$\mathbb{P}(T = T_n < +\infty) = 0 \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}$$

entraîne

$$X_T = X_{T-} \quad \text{p.s.}$$

Cette définition n'impose pas au processus X de sauter effectivement à tous les instants T_n . Ceci nous permettra de ne travailler qu'avec des temps d'arrêt **soit prévisibles, soit totalement inaccessibles.**

LEMME 2.

Soit X un processus adapté à trajectoires continues à droite et pourvues de limites à gauche ; il existe une suite (T_n) de temps d'arrêt, épuisant les sauts de X et tels que

1) $\mathbb{P}(T_n = T_m < +\infty) = 0 \qquad$ si $n \neq m$

2) T_n soit, ou prévisible, ou totalement inaccessible.

Démonstration

Soit (R_n) une suite de temps d'arrêt épuisant les sauts de X (une telle suite est construite dans [4] chap VIII. 20) ; nous décomposons chaque temps d'arrêt R_n en sa partie accessible S'_n et sa partie totalement inaccessible S_n ([4] chap. VII 42 et 44). Chaque graphe $[S'_n]$(2) est contenu dans une réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt prévisibles (c'est le "résultat élémentaire" de [5]) . Il existe donc une suite (T'_n) de temps d'arrêt, épuisant les sauts de X , et telle que T'_n soit, <u>ou bien</u> prévisible, <u>ou bien</u> totalement inaccessible. On peut rendre les graphes des T'_n disjoints en posant

$$T_0=T'_0 \quad , \; T_n = \begin{cases} T'_n & \text{si } \; T_n \neq T_i \quad \text{pour} \quad i<n \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

La suite (T_n) répond bien à la question.

Nous considérons maintenant une martingale $M \in \mathcal{M}^2$, et une suite (T_n) de temps d'arrêt épuisant les sauts de M et satisfaisant aux conditions du lemme 2 . Le lecteur trouvera les démonstrations de ce qui suit dans [4] chap. VIII n^{os} 28-30-31-32 et démonstration de 29 . Nous poserons, pour chaque temps d'arrêt T_n :

$$A_t^n = \Delta M_{T_n} \, I_{\{t \geq T_n\}} \; ;$$

il existe alors un processus croissant, naturel, unique $\tilde{A}_t^n$ tel que $\overset{c}{A}{}_t^n = A_t^n - \tilde{A}_t^n$ soit une martingale bornée dans L^2 . Le processus $\tilde{A}_t^n$ est nul si T_n est prévisible, il est à trajectoires continues si T_n est totalement inaccessible. La martingale $\overset{c}{A}{}^n$ est orthogonale à toute martingale de $\mathcal{M}^2$ n'ayant pas de discontinuité commune avec $\overset{c}{A}{}^n$; en particulier les martingales $\overset{c}{A}{}^n$ sont deux à deux orthogonales. La série $\sum_n \overset{c}{A}{}_\infty^n$ converge en moyenne quadratique(3) .

---

(2) Si T est un temps d'arrêt, son graphe $[T]$ est le sous-ensemble de $\Omega \times \mathbb{R}_+$:
$[T] = \{(\omega, T(\omega)), T(\omega) < +\infty\}$.

(3) Mais la série $\Sigma|A_\infty^n| = \sum_n |\Delta M_{T_n}|$ ne converge pas ; par contre, nous verrons au paragraphe suivant, que la série $\sum_n (\Delta M_{T_n})^2$ converge dans L^1 .

Posons, au sens de la convergence dans L^2 :

$Y_\infty = \Sigma A_\infty^{C_n}$ la sommation étant étendue aux indices n tels que T_n soit prévisible ,

et

$Z_\infty = \Sigma A_\infty^{C_n}$ la sommation étant étendue aux indices n tels que T_n soit totalement inaccessible ;

et désignons par Y_t (resp Z_t) une version à trajectoires continues à droite de la martingale $E[Y_\infty | \mathcal{F}_t]$ (resp $E[Z_\infty | \mathcal{F}_t]$) . Nous désignons par X la martingale

$$X_t = M_t - Y_t - Z_t$$

Avec ces notations , les rappels qui précèdent nous donnent le théorème :

THÉORÈME 4.

La décomposition $M=X+Y+Z$ **possède les propriétés suivantes :**

1) Y (resp Z) est une martingale de $\mathcal{M}^2$ orthogonale à toute martingale bornée dans L^2 , qui n'a pas de discontinuités communes avec elle .

2) Z n'a que des sauts totalement inaccessibles, Y n'a que des sauts accessibles.

3) La martingale X est bornée dans L^2 , et à trajectoires continues.

De plus il n'existe qu'une seule décomposition $M=X+Y+Z$ ayant ces **propriétés.**

Notations **: au lieu de $M=X+Y+Z$, nous utiliserons dans la suite les notations suivantes :** $M^c = X$: partie continue de la martingale M .

$M^d = Y+Z$: somme compensée des sauts de M .

$M^{dq} = Z$: somme compensée des sauts totalement inaccessibles de M , (M^{dq} est quasi-continue à gauche, [4] chap VIII,24).

$M^{dp} = Y$: somme compensée des sauts prévisibles.

On dira q'une martingale $M \in \mathcal{M}^2$ est une <u>somme compensée de sauts</u>, si sa partie continue M^c est nulle , ce qui équivaut à dire que M est orthogonale à toute martingale $N \in \mathcal{M}^2_c$.

5.- SECOND PROCESSUS CROISSANT ASSOCIÉ À UNE MARTINGALE M DE $\mathcal{M}^2$.

Dans ce paragraphe, nous écrirons ΔM_t^2 au lieu de $(\Delta M_t)^2$.

PROPOSITION 1.

1) *Soit* $M \in \mathcal{M}^2$, *on a si* $r<t$

$$\underset{\sim}{E}\Big[\sum_{r<s\le t} \Delta M_s^2 \mid \mathcal{F}_s\Big] \le \underset{\sim}{E}[M_t^2 - M_r^2 \mid \mathcal{F}_r]$$

2) *Si* $M (\in \mathcal{M}^2)$ *est une martingale somme compensée de sauts* ($M^c = 0$) *nous désignons par* $[M,M]$ *le processus croissant*

$$[M,M]_t = \sum_{s\le t} \Delta M_s^2$$

Le processus $M^2 - [M,M]$ *est alors une martingale.*

Démonstration

1) Désignons par $(t_i^n)_{0\le i\le k_n}$ la $n^{\text{ème}}$ subdivision dyadique de $[r,t]$. On a

$$\underset{\sim}{E}\Big[\sum_{i=0}^{k_n-1} (M_{t_{i+1}^n} - M_{t_i^n})^2 \mid \mathcal{F}_r\Big] = \underset{\sim}{E}[M_t^2 - M_r^2 \mid \mathcal{F}_r] ,$$

et d'autre part

$$\sum_{r<s\le t} \Delta M_s^2 \le \liminf_n \sum_{i=0}^{k_n-1} (M_{t_{i+1}^n} - M_{t_i^n})^2 ;$$

Il suffit alors d'utiliser le lemme de Fatou.

2) Si M est une somme compensée de sauts, le processus $[M,M]$ est un processus croissant intégrable. Considérons les martingales $\overset{c}{A}{}^n$ construites à partir de M comme au n° 4. Pour tout t , le processus $[M,M]_t$ est la somme dans L^1 de la série $\Sigma(\Delta M_{T_n})^2\, I_{\{t\ge T_n\}}$, et le processus M_t^2 est la

somme dans L^1 de la série $(\Sigma \overset{c}{A}{}^n_t)^2$. Chaque terme produit $\overset{c}{A}{}^n_t \overset{c}{A}{}^m_t$ est une martingale, si n est différent de m ; pour montrer que M-[M,M] est une martingale, il suffit donc de montrer que, pour tout n , le processus $(\overset{c}{A}{}^n)^2 - (\Delta M_{T_n})^2 I_{\{t \geq T_n\}}$ est une martingale. Si T_n est totalement inaccessible, ceci est le résultat obtenu dans [4] chap. VIII, remarque suivant T. 31 ; si T_n est prévisible le processus $(\overset{c}{A}{}^n)^2 - (\Delta M_{T_n})^2 I_{\{t \geq T_n\}}$ est identiquement nul.

Nous considérons maintenant une martingale $M \in \mathfrak{M}^2$, et la décomposition $M = M^c + M^d$ en sa partie continue M^c et sa partie somme compensée de sauts M^d .

DÉFINITION

Nous désignerons par [M,M] le processus croissant défini par

$$[M,M]_t = \langle M^c, M^c \rangle + \sum_{s \leq t} \Delta M_s^2$$

Nous poserons, si M et N sont deux éléments de $\mathfrak{M}^2$,

$$[M,N] = \tfrac{1}{2} ([M+N,M+N] - [M,M] - [N,N])$$

on a

$$[M,N]_t = \langle M^c, N^c \rangle + \sum_{s \leq t} \Delta M_s \, \Delta N_s$$

THÉORÈME 5.

1) Le processus $M^2 - [M,M]$ est une martingale (donc $\langle M,M \rangle - [M,M]$ est aussi une martingale.)

2) On a $[M,N] = 0$, si et seulement si M et N n'ont pas de discontinuités communes et si M^c et N^c sont orthogonales.

Démonstration.

La première partie du théorème est une conséquence de la proposition 1 ; la seconde partie résulte de la définition de [M,N] .

Nous allons voir maintenant que l'on aurait pu définir les intégrales stochastiques à l'aide du processus $[M,M]$.

THÉORÈME 6.

1) Soit $M \in \mathfrak{M}^2$, l'espace $L^2(M)$ (défini au n° 3) coïncide avec l'espace des processus prévisibles C tels que

$$\underset{\sim}{E}\left[\int_0^\infty C_s^2 \, d[M,M]_s\right] < +\infty$$

2) Si $C \in L^2(M)$, l'intégrale stochastique $C.M$ définie au théorème 3 , est l'unique élément de $\mathfrak{M}^2$ tel que

$$[C.M,N]_t = \int_0^t C_s \, d[M,N]_s \text{ p.s. } \forall N \in \mathfrak{M}^2 , \forall t .$$

Démonstration

1) $[M,M] - \langle M,M \rangle$ est une martingale, on a donc ([3] n° 310).

$$\underset{\sim}{E}\left[\int_0^\infty C_s^2 \, d\langle M,M\rangle_s\right] = \underset{\sim}{E}\left[\int_0^\infty C_s^2 \, d[M,M]_s\right]$$ pour tout processus prévisible C, **ce qui donne la première partie de l'énoncé.**

2) unicité : si L et L' sont deux éléments de $\mathfrak{M}^2$ tels que $[L,N]_t = [L',N]_t = \int_0^t C_s \, d[M,N]_s$, pour tout $N \in \mathfrak{M}^2$ et tout t , on a en particulier $[L-L',L-L'] = 0$; et $(L-L')^2$ est une martingale positive d'espérance nulle, par suite $L=L'$.

Soit maintenant C un élément de $L^2(M)$ et soit $M=M^c+ M^d$, la décomposition de M en sa partie continue, et sa partie somme compensée de sauts. La martingale $C.M^c$ est continue, et la martingale $C.M^d$ est une somme compensée de sauts (en effet $\langle C.M^d,N\rangle_t = \int_0^t C_s \, d\langle M^d,N\rangle_s = 0$ pour tout $N \in \mathfrak{M}^2_c$). Si $N \in \mathfrak{M}^2$ on a donc **(tous les termes ayant un sens du fait que C.M est de carré intégrable)**

$$[C.M,N]_t = \langle C.M^c,N^c\rangle_t + \sum_{s\leq t} \Delta(C.M)_s \, \Delta N_s$$

$$[C.M,N]_t = \int_0^t C_s \, d\langle M^c,N^c\rangle_s + \sum_{s\leq t} C_s \, \Delta M_s \, \Delta N_s$$

$$= \int_0^t C_s \, d[M,N]_s .$$

Remarque :

Nous savions que, si $M \in \mathcal{M}^2_c$ et si $C \in L^2(M)$, alors $C.M \in \mathcal{M}^2_c$. Nous venons de démontrer que, si M est une somme compensée de sauts, et si $C \in L^2(M)$, la martingale $C.M$ est une somme compensée de sauts.

§ 2. PROCESSUS À VARIATION BORNÉE

Nous désignons par $\mathcal{V}^+$ l'ensemble des processus croissants, finis, à trajectoires continues à droite, nuls à l'instant zéro ; et par $\mathcal{V}$ l'espace $\mathcal{V}^+ - \mathcal{V}^+$ des processus dont les trajectoires sont des fonctions à variation bornée sur tout intervalle fini, **continues à droite, nulles à l'instant 0.**

Si $V \in \mathcal{V}$, on peut définir l'intégrale $\int_0^t C_s \, dV_s$ pour tous les processus C tels que les intégrales de Stieljes $\int_0^t C_s(\omega) \, dV_s(\omega)$ aient un sens. Le processus $(\int_0^t C_s \, dV_s)$ est alors un élément de $\mathcal{V}$.

Nous considérons **également** le sous-ensemble $\mathcal{A}^+$ de $\mathcal{V}^+$, formé des processus croissants intégrables, et nous désignons par $\mathcal{A}$ **l'espace** $\mathcal{A}^+ - \mathcal{A}^+$ ($\mathcal{A}$ est l'espace des processus à variation intégrable). Si $V \in \mathcal{A}$, $L^1(V)$ sera l'espace des processus prévisibles C tels que $E[\int_0^\infty |C_s| \, |dV_s|] < +\infty$.

PROPOSITION 2.

Si $V \in \mathcal{A}$ est une martingale et si $C \in L^1(V)$, le processus $(\int_0^t C_s \, dV_s)$ est une martingale.

Démonstration.

Considérons l'espace $\mathcal{M}^1$ des martingales bornées dans L^1 , muni de la **semi-norme** $M \longmapsto \sup_t E[|M_t|]$;

soit $\mathcal{E}$ le sous-espace de $L^1(V)$ formé des processus C de la forme

$$C_s = \sum_{i \in \underset{\sim}{N}} H_i \, I_{]t_i, t_{i+1}]}(s) ,$$

où (t_i) est une subdivision dyadique de la droite réelle, et où H_i est $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurable et bornée pour tout i. Le processus $\Phi(c) = \int_0^t C_s \, dV_s$ (intégrale de Stieljes) est un élément de $\mathfrak{M}^1$, et l'on a

$$\underset{\sim}{E}[|\int_0^t C_s \, dV_s|] \leq \underset{\sim}{E}[\int_0^\infty |C_s| \, |dV_s|]$$

L'application linéaire continue, $C \mapsto \Phi(C)$ de $\mathcal{E}$ dans $\mathfrak{M}^1$ se prolonge donc en une application linéaire continue de $L^1(V)$ dans $\mathfrak{M}^1$ (remarquer que si C et C' sont deux éléments de $\mathcal{E}$ non séparés par la semi-norme sur $L^1(V)$, $\Phi(C)$ et $\Phi(C')$ sont indistinguables) ; et l'on a

$$\underset{\sim}{E}[|\Phi(C)_t|] \leq \underset{\sim}{E}[|\Phi(C)_\infty|] \leq \underset{\sim}{E}[\int_0^\infty |C_s| \, |dV_s|] \qquad \forall C \in L^1(V) .$$

L'égalité $\Phi(C)_t = \int_0^t C_s \, dV_s$ p.s., vraie sur $\mathcal{E}$, s'étend donc, par passage à la limite, à tout $C \in L^1(V)$. Les deux processus continus à droite, $\Phi(C)$ et $(\int_0^t C_s \, dV_s)$ sont indistinguables et $(\int_0^t C_s \, dV_s)$ est, pour tout $C \in L^1(V)$ une martingale bornée dans L^1.

<u>Remarque</u>

Pour que le processus $(\int_0^t C_s \, dV_s)$ soit une martingale, il suffit d'avoir $\underset{\sim}{E}[\int_0^t |C_s| \, |dV_s|] < +\infty$, pour tout t.

La proposition suivante fait le lien entre les intégrales stochastiques définies au § 1, et les intégrales de Stieljes.

<u>PROPOSITION 3.</u>

<u>Si</u> $M \in \mathfrak{M}^2 \cap \mathcal{A}^2$, <u>et si</u> $C \in L^2(M) \cap L^1(M)$ (4), <u>l'intégrale</u> $(C.M)_t$ <u>(prise au sens des intégrales stochastiques par rapport à la martingale</u> M) <u>est p.s. égale à l'intégrale de Stieljes ordinaire</u> $\int_0^t C_s \, dM_s$.

(4) **Rappelons que $L^2(M)$ est l'espace des processus prévisibles C tels que** $\underset{\sim}{E}[\int_0^\infty C_s^2 \, d\langle M,M\rangle_s] < +\infty$, et $L^1(M)$ l'espace des processus prévisibles C tels que $\underset{\sim}{E}[\int_0^\infty |C_s| \, |dM_s|] < +\infty$.

Démonstration

Soit $\mathcal{H}$ l'espace des processus prévisibles $C \in L^1(M) \cap L^2(M)$ tels que l'on ait

(1) $\qquad (C.M)_t = \int_0^t C_s \, dM_s$ p.s. pour tout t .

Il est évident que $\mathcal{H}$ contient l'espace vectoriel $\mathcal{E}$ considéré dans la proposition 2 ; $\mathcal{E}$ contient les constantes, et est stable par l'opération $\wedge$. Considérons une suite croissante (C^n) , uniformément bornée d'éléments de $\mathcal{H}$, et soit C leur limite. Les processus C^n tendent vers C pour les topologies de $L^2(M)$ et de $L^1(M)$; les processus $C^n.M$ (resp. $(\int_0^t C_s^n \, dM_s)$) tendent donc vers $C.M$ (resp. $(\int_0^t C_s \, dM_s)$) pour la topologie de $\mathfrak{M}^2$ (resp. $\mathfrak{M}^1$) , et C appartient à $\mathcal{H}$. L'espace $\mathcal{H}$ contient donc tous les processus prévisibles bornés ([4] chap I n° 20 et remarque). Maintenant si $C \in L^2(M) \cap L^1(M)$, nous posons

$$C_s^n = \begin{cases} C_s & \text{si } |C_s| \leq n, \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

Les processus C^n sont dans $\mathcal{H}$, et l'on montre, comme précédemment, que leur limite C est aussi dans $\mathcal{H}$.

Remarque

Si $M \in \mathfrak{M}^2 \cap \mathcal{V}$, la somme $\sum_{s \leq t} |\Delta M_s|$ est finie pour tout t fini ; et la martingale M^d , somme compensée des sauts de M , est donc aussi dans $\mathfrak{M}^2 \cap \mathcal{V}$. La partie continue de M , $M^c = M - M^d$ est alors la différence de deux processus croissants continus (donc naturels), et la martingale M^c est identiquement nulle ([4] chap. VII n° 21) . Toute martingale appartenant à $\mathfrak{M}^2 \cap \mathcal{V}$ est donc une somme compensée de sauts.

Notations

Désormais, si $M \in \mathfrak{M}^2$ et si $C \in L^2(M)$, nous noterons indifféremment par $(C.M)_t$ ou $\int_0^t C_s \, dM_s$ l'intégrale stochastique de C par rapport à M . De même si $V \in \mathcal{V}$, on notera $(C.V)_t$ ou $\int_0^t C_s \, dV_s$ l'intégrale de Stieljes prise sur chaque trajectoire .

§ 3. MARTINGALES LOCALES

1.- DÉFINITIONS

On appelle martingale locale un processus adapté continu à droite (M_t) possédant la propriété suivante : il existe une suite croissante de temps d'arrêt T_n , telle que $\lim_n T_n = +\infty$ p.s., et que pour tout n le processus arrêté $(M_{t \wedge T_n})$ soit une martingale uniformément intégrable. Nous désignerons par $\mathcal{L}$ l'ensemble des martingales locales (M_t) telles que $M_0=0$.

Nous dirons qu'un temps d'arrêt T réduit la martingale locale M si est une martingale uniformément intégrable.

Nous dirons qu'un processus (X_t) est une semimartingale , s'il admet une décomposition de la forme

$$X_t = X_0 + M_t + A_t$$

où X_0 est une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$-mesurable, où (M_t) appartient à $\mathcal{L}$ et (A_t) à $\mathcal{V}$. Cette définition ne diffère de celle qui figure dans [2] que par l'absence de toute restriction d'intégrabilité sur A, mais cette différence est importante(*). Bien entendu X_0 est uniquement déterminée, comme la valeur en 0 du processus X, mais la décomposition ci-dessus n'est pas unique en général.

Remarques

1) Tout processus à accroissements indépendants et stationnaires est une semimartingale. En effet, si l'on considère la représentation de LEVY d'un tel processus, le terme de translation fournit un élément de $\mathcal{V}$; la contribution de tous les processus de Poisson correspondant à la partie de la

---

(*) Les processus considérés dans le texte devraient en fait s'appeler semimartingales locales , le terme semimartingale étant réservé aux processus X admettant une décomposition $X_t=X_0+M_t+A_t$, où X_0 est $\mathcal{F}_0$-mesurable et intégrable, (M_t) est une vraie martingale nulle à l'instant 0, et (A_t) appartient à $\mathcal{A}$. Nous n'avons pas adopté dans ce travail cette terminologie plus précise, mais plus lourde : nous n'aurons affaire qu'aux semimartingales " locales ".

mesure de Lévy portée par $[-1,+1]$ fournit une martingale ; et la contribution du reste de la mesure de Lévy fournit à nouveau un élément de $\mathcal{V}$.

2) Toute surmartingale est une semimartingale ; plus précisément tout surmartingale (X_t) se décompose de manière unique en

$$X_t = M_t - A_t$$

où M est une martingale locale, et A un processus croissant naturel localement intégrable (il existe une suite $(T_n) \nearrow +\infty$ de temps d'arrêt, tels que les processus $A_{t \wedge T_n}$ soient intégrables) : on vérifie d'abord l'unicité d'une telle décomposition s'il en existe une ; puis on en démontre l'existence pour les surmartingales positives ([6]) . Le cas général s'en déduit en utilisant la décomposition de Riesz

$$X_t = \underset{\sim}{E}[X_n | \mathcal{F}_t] + (X_t - \underset{\sim}{E}[X_n | \mathcal{F}_t]) \quad \text{pour} \quad t \leq n .$$

2.- THÉORÈMES DE DÉCOMPOSITION.

Soit M une martingale locale à trajectoires continues, et soient T_n les temps d'arrêt définis par

$$T_n(\omega) = \inf\{t \; ; \; t \geq 0 \; |M_t| \geq n\} .$$

La suite (T_n) tend en croissant vers $+\infty$, et les martingales $(M_{t \wedge T_n})$ sont bornées par n ; l'étude des martingales locales continues se ramène donc facilement à celle des martingales bornées. Si la martingale locale M n'est plus à trajectoires continues, le processus M_t est borné par n sur l'intervalle stochastique $[0,T_n[$, mais on ne sait rien sur le saut ΔM_{T_n} à l'instant T_n . Les propositions suivantes vont permettre de ramener l'étude des martingales locales à celle des martingales bornées dans L^2 , et des processus à variation intégrable.

DÉFINITION

On dira qu'un temps d'arrêt fini R réduit fortement la martingale locale M si R réduit M et si la martingale $\underset{\sim}{E}[|M_R|\,|\mathcal{F}_t]$ est bornée sur l'intervalle stochastique $[0,R[$.

Si R réduit fortement la martingale locale M , tout temps d'arrêt $T \leq R$ réduit fortement M .

LEMME 3.

Si M est une martingale locale, il existe une suite croissante (R_n) de temps d'arrêt finis, **réduisant fortement la martingale locale M,** et **tels que** $\lim\limits_n R_n = +\infty$ **p.s.**

Démonstration

Nous commençons par choisir une suite croissante de temps d'arrêt **finis T_n, tendant vers $+\infty$ et** tels que les processus $(M_{t\wedge T_n})$ soient des martingales uniformément intégrables. Désignons par (J_t^n) une version continue à droite de la martingale $\underset{\sim}{E}[|M_{T_n}|\,|\mathcal{F}_t]$, et par S_n le temps d'arrêt

$$S_n = (\inf\{t\ ;\ J_t^n \geq p_n\}) \wedge T_n\ ,$$

où p_n est choisi assez grand pour que $\underset{\sim}{P}\{S_n < T_n - \frac{1}{n}\} \leq 2^{-n}$: d'après le lemme de Borel-Cantelli, S_n tend vers $+\infty$ p.s. **, et S_n réduit fortement M pour tout n.** Posons maintenant $R_n = \inf\limits_{k\geq n} S_k$, les temps d'arrêt finis R_n tendent en croissant vers $+\infty$ p.s., et ils réduisent fortement la martingale locale M .

PROPOSITION 4.

Soit $M \in \mathcal{L}$, et soit R un temps d'arrêt fini réduisant fortement M ; le processus arrêté $M_{t\wedge R}$ est alors la somme de deux processus H et V

arrêtés à l'instant R, **possédant les propriétés suivantes :**

- H est une martingale bornée dans tout L^p $(1 \leq p < +\infty)$.

- $V \in \mathfrak{M}^1 \cap \mathcal{A}$ (**autrement dit M est une martingale bornée dans L^1 et** $E[\int_0^\infty |dV_s|] < +\infty$) ; la martingale V se décompose elle-même en :

$$V_t = M_R\, I_{\{t \geq R\}} + B_t$$

où B est un processus naturel, appartenant à $\mathcal{A}$, et vérifiant $E[(\int_0^\infty |dB_s|)^p] < +\infty$ pour tout $p < +\infty$.

Démonstration.

Considérons la martingale positive $N_t^+ = E[M_R^+ | \mathcal{F}_t]$, et le processus $Y_t^+ = N_t^+ I_{\{t<R\}}$; Y^+ est une surmartingale positive bornée, et admet donc une décomposition de Doob $Y = U - D$, où D est un processus croissant naturel, et U une martingale. Y étant un processus borné, les processus D et U sont majorés par une variable aléatoire qui appartient à tout L^p $(p < +\infty)$ ([4] chap VII n° 59). Nous avons donc pour N_t^+ la décomposition $N_t^+ = H_t^+ + V_t^+$, où $H^+ = U$ est une martingale bornée dans tout L^p $(p < +\infty)$, et où la martingale $V_t^+ = N_R^+ I_{\{t \geq R\}} - D_t$ est un processus à variation intégrable. On construit de même les processus N^-, Y^-, H^- et V^- ; la proposition cherchée s'obtient par différence.

Voici maintenant l'analogue, pour les martingales locales, du théorème 4 .

THEOREME 7

Soit M une martingale locale nulle à l'instant 0 .

1) M peut s'écrire de manière unique sous la forme

$$M = M^c + M^d$$

où M^c et M^d sont des éléments de $\mathcal{L}$, M^c est à trajectoires continues, et la martingale locale M^d est orthogonale à toute martingale locale à trajectoires **continues** (**pour toute martingale locale N à trajectoires continues, le processus** $(M_t^d N_t)$ **appartient à** $\mathcal{L}$).

On dira que M^c est la partie continue de la martingale locale M, et que M^d est la somme compensée des sauts de M.

2) Pour presque tout $\omega \in \Omega$, la somme $\sum_{s \leq t} \Delta M_s^2(\omega)$ **est finie pour tout t fini.**

Démonstration

a) unicité de la décomposition : supposons que M puisse s'écrire

$$M = M_1 + N_1 = M_2 + N_2 \quad ,$$

où M_1, M_2, N_1, $N_2 \in \mathcal{L}$, M_1 et M_2 sont à trajectoires continues, et N_1 et N_2 sont orthogonales à toute martingale locale continue. La martingale locale $N_2 - N_1 = M_1 - M_2$ est continue, et orthogonale à elle-même ; $(N_2 - N_1)^2$ est donc une martingale locale, positive, nulle à l'instant zéro, et $N_2 = N_1$.

b) existence de la décomposition ; il suffit de montrer l'existence localement (l'unicité démontrée ci-dessus permettant de recoller). Considérons un temps d'arrêt R, qui réduit fortement la martingale locale M ; nous avons, en conservant les notations de la proposition 4,

$$M_{t \wedge R} = H_t + V_t = H_t^c + H_t^d + V_t$$

($H \in \mathfrak{M}^2$, et l'on peut donc appliquer le théorème 4). La martingale $M_{t \wedge R}^c = H_t^c$ est à trajectoires continues ; montrons que la martingale $M_{t \wedge R}^d = H_t^d + V_t$ est orthogonale à toute martingale locale N à trajectoires continues ; nous pouvons supposer que N est une martingale bornée (sinon il suffit d'arrêter aux temps d'arrêt $T_n = \inf\{t \; ; \; |N_t| \geq n\}$).

Le processus $(N_t\ H_t^d)$ est une martingale, et d'autre part on a , puisque N est une martingale continue bornée, et que $V \in \mathfrak{M}^1 \cap \mathcal{A}$:

$$\underset{\sim}{E}[N_t V_t - N_s V_s | \mathcal{F}_s] = E[\int_{]s,t]} N_u\ dV_u | \mathcal{F}_s] = 0 \qquad \forall\ s \leq t\ ,$$

([3] n°s309 et 310) .

2) Pour montrer que pour presque tout ω , les sommes $\sum_{s\leq t} \Delta M_s^2(\omega)$ sont finies, il suffit de montrer que pour tout temps d'arrêt R réduisant fortement M , les sommes $\sum_{s\leq R} \Delta M_s^2(\omega)$ sont p.s. finies. Avec les notations précédentes, on a

$$\sum_{s\leq R} \Delta M_s^2(\omega) \leq 2(\sum_{s\leq R} \Delta H_s^2(\omega) + \sum_{s\leq R} \Delta V_s^2(\omega)) .$$

Le premier terme du second membre est p.s. fini (proposition 1) ; quand au second, il est p.s. fini puisque $\sum_{s\leq R} |\Delta V_s| < +\infty$, **V appartenant à $\mathcal{A}$.**

Remarque

On peut aussi, comme au théorème 4 , décomposer la martingale locale M^d , de manière unique, en la somme d'une martingale locale M^{dq} , somme compensée des sauts totalement inaccessibles, et d'une martingale locale M^{dp} , somme compensée des sauts prévisibles : les martingales H admettent une telle décomposition ; pour les processus V , il faut pour les décomposer, reprendre la démonstration de la proposition 4 , en distinguant entre les parties accessibles et totalement inaccessibles des temps d'arrêt R .

3.- PROCESSUS CROISSANT ASSOCIÉ À M .

Si $M \in \mathcal{L}$ est à trajectoires continues, on peut facilement définir par recollement le processus $< M,M >$. Par contre pour une martingale locale $M \in \mathcal{L}$ quelconque, le processus $< M,M >$ n'a plus de sens, et il faut utiliser le processus $[M,M]$ défini ci-dessous.

DÉFINITION

Soit $M \in \mathcal{L}$, et soit $M=M^c+M^d$ sa décomposition en partie continue et somme compensée de sauts. On désignera par $[M,M]$ le processus croissant

$$[M,M]_t = \langle M^c,M^c \rangle_t + \sum_{s \leq t} \Delta M_s^2(\omega) \quad .$$

Et l'on posera si **M et N appartiennent à $\mathcal{L}$**

$$[M,N] = \tfrac{1}{2}([M+N,M+N] - [M,M] - [N,N]) \text{ .}$$

Nous montrerons à la fin de cet article que si M et N sont dans $\mathcal{L}$, le processus $MN - [M,N]$ est une martingale locale.

4.- INTÉGRALES STOCHASTIQUES

DÉFINITION

Nous dirons qu'un processus prévisible (C_t) est localement borné, s'il existe une suite croissante (S_n) de temps d'arrêt, telle que $\lim_n S_n = +\infty$ p.s. ,et que les processus $(H_{t \wedge S_n} I_{\{S_n > 0\}})$ soient bornés.

Considérons une semimartingale X admettant la décomposition

$$X_t = X_0+M_t+A_t \qquad (M \in \mathcal{L}, \quad A \in \mathcal{V})$$

et un processus (C_t) prévisible et localement borné. On peut choisir une suite de temps d'arrêt finis R_n **possédant les propriétés suivantes :**

1) $\lim_n R_n = +\infty$ p.s.

2) chaque R_n réduit fortement M. Soit $M_{t \wedge R_n} = H_t^n + V_t^n$ la décomposition associée ($H^n \in \mathcal{M}^2$, $V^n \in \mathcal{M}^1 \cap \mathcal{A}$ **; cf. la proposition 4).**

3) pour tout n , le processus $C_{t \wedge R_n} I_{\{R_n > 0\}}$ est borné .

On sait alors définir l'intégrale stochastique $C.H^n$, ainsi que les deux intégrales de Stieljes $C.V^n$ et $C.A$. Nous poserons

$$(C.X)_{t\wedge R_n} = (C.H^n)_t + (C.V^n)_t + (C.A)_{t\wedge R_n}$$

D'après la proposition 3 , nous savons que ce processus ne dépend pas de la décomposition

$$X_{t\wedge R_n} = X_0 + H^n_t + V^n_t + A_{t\wedge R_n}$$

choisie. On peut donc parler de l'intégrale stochastique $C.X$ que l'on aussi $(C.X)_t = \int_0^t C_s \, dX_s$.

PROPOSITION 5.

Si $M\in\mathcal{L}$, et si C est un processus prévisible localement borné, $C.M$ est une martingale locale. C'est la seule martingale locale, nulle à l'instant zéro, telle que $[C.M,N] = C.[M,N]$ pour tout $N\in\mathcal{L}$.

Démonstration

a) unicité : si L et L' sont deux martingales locales, vérifiant $[L,N] = [L',N] = C.[M,N]$ pour tout $N\in\mathcal{L}$, on a $[L-L',L-L']=0$. Et ceci entraîne, d'après la définition du crochet $[L-L',L-L']$, que $L=L'$.

b) Montrons maintenant que $C.M$ est une martingale locale et que $[C.M,N] = C.[M,N]$. Nous reprenons la construction de $C.M$ donnée précédemment ; si nous arrêtons tous les processus à l'instant R_n (R_n réduit fortement M , et le processus $C_{t\wedge R_n}$ est borné sur $\{R_n>0\}$) , nous avons

$$(C.M)_{t\wedge R_n} = (C.H^n)_t + (C.V^n)_t \quad ;$$

$C.H^n$ est une martingale de carré intégrable et $C.V^n$ est une martingale bornée dans L^1 . Le processus $C.M$ est donc une martingale locale. Soit N une martingale locale ; nous supposons que la suite (R_n) , choisie précédemment , réduit fortement les martingales M et N . Les décompositions associées aux (R_n) seront encore notées

$$M_{t\wedge R_n} = H^n_t + V^n_t$$

$$N_{t\wedge R_n} = H'^n_t + V'^n_t$$

où H^n , $H'^n \in \mathcal{M}^2$ et $V^n, V'^n \in \mathcal{M}^1 \cap \mathcal{A}$. On a , puisque $C.V^n \in \mathcal{A}$

$$[C.M,N]_{t\wedge R_n} = [C.H^n,H'^n]_t + [C.H^n,V'^n]_t + [C.V^n,N]_t$$

$$= (C[H^n,H'^n])_t + \sum_{s\leq t} C_s \,\Delta H^n_s \,\Delta V'^n_s + \sum_{s\leq t} C_s \,\Delta V^n_s \,\Delta N_s$$

$$= \int_0^{t\wedge R_n} C_s d[M,N]_s$$

c.q.f.d.

Remarque

Voici un exemple utile de processus prévisible localement borné : soit (U_t) un processus dont les trajectoires sont continues à droite et pourvues de limites à gauche finies. Le processus prévisible (U_{t-}) est alors localement borné. En effet, si l'on pose $T_n = \inf\{t : |U_t| \geq n\}$, les d'arrêt T_n tendent en croissant vers $+\infty$, et l'on a $|U_{t-}| \leq n$ sur $[0,T_n]$, sauf sur l'ensemble $\{T_n=0\}$.

5.- FORMULE DE CHANGEMENT DE VARIABLES

Considérons une semimartingale X admettant la décomposition

$$X_t = X_0 + M_t + A_t$$

où X_0 est $\mathcal{F}_0$-mesurable, $M\in \mathcal{L}$, et $A\in \mathcal{V}$. **Nous savons que cette décomposition n'est pas unique . Cependant, si nous considérons une seconde décomposition,**

$$X = X_0 + M' + A'$$

$M-M'=A'-A$ est une martingale locale appartenant à $\mathcal{V}$, la partie continue $(M-M')^c$ de $M-M'$ est donc nulle (en arrêtant à un **temps** R , réduisant fortement $M-M'$, on se ramène au cas où $M-M' \in \mathcal{M}^2 \cap \mathcal{V}$, et c'est alors la remarque suivant la proposition 3). Les processus M^c et $< M^c,M^c >$ sont donc bien définis par la donnée de X. Nous écrirons

$$X^c = M^c$$
$$< X^c,X^c > = < M^c,M^c >.$$

On dit qu'un processus X, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, est une semimartingale, si ses composantes X^i **sont des semimartingales réelles.**

THEOREME 8.

Soit X une semimartingale à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ (on désigne par X^i les composantes de X) et soit F une fonction deux fois continument différentiable de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}$. (On note par D^i l'opérateur de dérivation par rapport à la ième coordonnée). On a alors pour tout t fini

$$F\circ X_t = F\circ X_0 + \int_0^t \sum_{i=1}^n D^iF\circ X_{s-}\, dX^i_s + \frac{1}{2}\int_0^t \sum_{\substack{i=1\\j=1}}^n D^iD^jF\circ X_{s-}\, d< X^{ic},X^{jc} >_s$$
$$+ \sum_{s\leq t} [F\circ X_s - F\circ X_{s-} - \sum_{i=1}^n D^iF\circ X_{s-}(X^i_s - X^i_{s-})] ;$$

où la somme $\sum_{s\leq t}(\quad)$ intervenant au second terme converge p.s. pour tout t. En particulier le processus $F\circ X_t$ est une semimartingale.

Démonstration.

Nous ferons la démonstration dans le cas $n=1$; elle s'étend, sans aucune difficulté, au cas de n quelconque. On supposera dans la suite que X_0 est borné; il suffit dans le cas contraire de travailler sur les ensembles

$$\{|X_0| \leq k\} \in \mathcal{F}_0 \quad .$$

1) le résultat cherché est connu lorsque $X=X_0+M+V$, où M est une martingale locale à trajectoires continues, et V un processus à trajectoires continues et appartenant à $\mathcal{V}$; c'est la démonstration de [2], p. 108, qui est valable même lorsqu'il y a des temps de discontinuité dans la famille $\mathcal{F}_t$. On sait même que l'on peut remplacer les bornes 0 et t par S et T, où S et T sont des temps d'arrêt et $S\leq T$.

2) Nous passons ensuite au cas où $X=X_0+M+V$, où M est à trajectoires continues, tandis que V a au plus n sauts sur $[0,t]$; on pose $T_0=0$, $T_{n+1}=t$, on désigne par $T_1,\dots,T_n$ les instants des n sauts $(T_0\leq T_1\leq\dots\leq T_n\leq T_{n+1})$. Nous appliquons la formule du changement de variables du cas 1) à la semi-martingale $M+V'$ ($V=V'+V''$, où V' et $V''\in\mathcal{V}$, V' est à trajectoires continues, V'' à trajectoires purement discontinues) (5), sur l'intervalle stochastique $[T_i,T_{i+1}[$; nous obtenons

$$F\circ X_{T_{i+1}-}-F\circ X_{T_i}=\int_{[T_i,T_{i+1}]}DF\circ X_{s-}(dM+dV')+\tfrac{1}{2}\int_{[T_i,T_{i+1}]}D^2F\circ X_{s-}\,d\langle M,M\rangle_s$$

En sommant sur les i, et en rajoutant les sauts on obtient :

$$F\circ X_t=F\circ X_0+\int_0^t DF\circ X_{s-}(dM+dV')+\tfrac{1}{2}\int_0^t D^2F\circ X_{s-}\,d\langle M,M\rangle_s+$$

$$+\sum_{i=1}^n\left(F\circ X_{T_i}-F\circ X_{T_{i-}}\right).$$

Transformons un peu le dernier terme :

$$\sum_{i=1}^n\left(F\circ X_{T_i}-F\circ X_{T_{i-}}\right)=\sum_{i=1}^n\left[F\circ X_{T_i}-F\circ X_{T_{i-}}-DF\circ X_{T_{i-}}(X_{T_i}-X_{T_{i-}})\right]+\int_0^t F\circ X_{s-}\,dV''_s,$$

et nous obtenons la formule de changement de variables.

---

(5) Si $V\in\mathcal{V}$, les sommes $\sum_{s\leq t}(V_s-V_{s-})$ sont p.s. absolument convergentes pour tout t fini ; on pose $V''_t=\sum_{s\leq t}(V_s-V_{s-})$, et $V'=V-V''$, V' est à trajectoires continues, et V'' à trajectoires purement discontinues.

3) Voici un autre cas particulier. Soit T un temps d'arrêt, et **soit X une** semimartingale arrêtée à l'instant T ; soit Y un second processus arrêté à l'instant T, tel que $X_s = Y_s$ pour tout $s<T$. On a alors

$$Y=X+A ,$$

où $A_t=(Y_T-X_T)I_{\{t\geq T\}}\in\mathcal{V}$; Y est donc aussi une semimartingale. La relation

$$F\circ Y_t = F\circ X_t + I_{\{t\geq T\}}(F\circ Y_T - F\circ X_T)$$

montre que X satisfait à la formule du changement de variables si et seulement si Y y satisfait.

4) Plaçons nous maintenant dans le cas général $X=X_0+M+V$, $M\in\mathcal{L}$, $V\in\mathcal{V}$, X_0 borné et $\mathcal{F}_0$-mesurable. Nous pouvons trouver des temps d'arrêt R, arbitrairement grands tels que les processus $E[|M_R|\ |\mathcal{F}_t]$ et $\int_0^t |dV_s|$ soient bornés par une constante K sur $[0,R[$, (pour le premier processus, il suffit que R réduise fortement M, pour le second c'est évident). Et il nous suffit de démontrer la formule de changement de variables pour les processus arrêtés à R. Nous conservons les notations M et V pour les processus arrêtés à l'instant R.

Soit $M''_t = M_t I_{\{t<R\}} + M_{R-}I_{\{t\geq R\}}$. Comme R réduit fortement la martingale locale M, M'' peut s'écrire

$$M''=H+B$$

où H est une martingale bornée dans tout $L^p(p<+\infty)$, et $B\in\mathfrak{M}^1\cap\mathcal{A}$. De même posons $V''_t = V_t I_{\{t<R\}} + V_{R-}I_{\{t\geq R\}}$, V'' est alors un processus à variation intégrable. Les processus $X=X_0+M+V$ et $X''=X_0+M''+V''$ sont tous deux arrêtés à l'instant R, et égaux sur $[0,R[$; il nous suffit d'après 3) de prouver le théorème pour X''. Or X'' n'est jamais que le processus de X rendu continu à l'instant R, il est donc borné ; de plus $X''=X_0+H+B+V''$,

où H est une martingale bornée dans tout $L^p(p<+\infty)$ et $B+V''\in\mathcal{A}_0^o$. Donc :

Il suffit de démontrer la formule du changement de variables pour les semimartingales $X=X_0+M+V$, où M est une martingale bornée dans L^2, où V est un processus à variation intégrable, et où la somme $X=X_0+M+V$ est bornée par une constante.

X étant borné, nous pouvons supposer que F est deux fois continument différentiable à support compact.

5) La martingale M dans dans $\mathcal{M}^2$, elle admet donc (théorème 4) une décomposition de la forme

$$M = M^c + \sum_{i=1}^{\infty} \overset{c}{A}{}^i \qquad (\textbf{ série convergente dans } \mathcal{M}^2 \ )$$

où les martingales $\overset{c}{A}{}^i$ sont deux à deux orthogonales, et chaque $\overset{c}{A}{}^i$ n'a qu'un seul saut (prévisible, ou totalement inaccessible). Puisque $\Sigma\, E[(\overset{c}{A}{}^i_\infty)^2] < +\infty$, nous pouvons trouver des entiers k_n tels que les martingales

$$M^n = M^c + \sum_{i=1}^{k_n} \overset{c}{A}{}^i$$

vérifient $\sum_n \|M_\infty - M_\infty^n\|_2 < +\infty$. Les trajectoires de M^n convergent alors p.s. uniformément vers les trajectoires de M (lemme 1). Considérons maintenant le processus V ; nous pouvons trouver des processus V^n à variation intégrable, somme de V' (partie à trajectoire continue de V)[(6)], et de k sauts de V, tels que $E[\int_0^\infty |d(V_s-V_s^n)|] \xrightarrow[n]{} 0$; les trajectoires de V^n convergent alors p.s. uniformément vers celles de V et les trajectoires de la semimartingale, $X^n=X_0+M^n+V^n$, convergent p.s. uniformément vers celles de X.

---

(6) voir note (5).

D'après 2) ,la formule de changement de variables est valable pour X^n , et l'on a (**comme** $X_n^c = X^c$)

$$F\circ X_t^n = F\circ X_0 + \int_0^t F'\circ X_{s-}^n dX_s^n + \tfrac{1}{2}\int_0^t F''\circ X_{s-}^n d<X^c,X^c>$$

$$+ \sum_{s\leq t} [F\circ X_s^n - F\circ X_{s-}^n - F'\circ X_{s-}^n (X_s^n - X_{s-}^n)] .$$

Nous montrerons que chacun des termes a une limite, lorsque n tend vers l'infini , soit p.s., soit pour la convergence forte dans un L^p . En passant à des sous-suites, on aura donc une convergence p.s. pour chacun des termes.

Les trajectoires de $F\circ X_t^n$ tendent p.s. uniformément vers $F\circ X_t$, celles de $F\circ X_{t-}^n$ tendent donc p.s. vers celles de $F\circ X_{t-}$; le terme $\int_0^t F''\circ X_{s-}^n d<X^c,X^c>$ tend dans L^1 vers $\int_0^t F''\circ X_{s-} d<X^c,X^c>$, ($F''$ est uniformément bornée, $F''\circ X_{s-}^{''}$ tend p.s. vers $F''\circ X_{s-}^n$, donc on peut appliquer le théorème de Lebesgue).

Il existe une constante k telle que

$$|F\circ X_s^n - F\circ X_{s-}^n - F'\circ X_{s-}^n (X_{s-}^n X_{s-}^n)| \leq k(X_s^n - X_{s-}^n)^2 \leq k(X_s - X_{s-})^2 ;$$

la somme $\sum_{s\leq t} (X_s - X_{s-})^2$ est p.s. convergente (car les sommes $\sum_{s\leq t} \Delta M_s^2$, et $\sum_{s\leq t} |\Delta V_s|$ sont p.s. convergentes) ; les sommes

$$\sum_{s\leq t} [F\circ X_s^n - F\circ X_{s-}^n - F'\circ X_{s-}^n (X_s^n - X_{s-}^n)]$$

sont donc uniformément convergentes en n , et tendent p.s. vers

$$\sum_{s\leq t} [F\circ X_s - F\circ X_{s-} - F'\circ X_{s-} (X_s - X_{s-})]$$

Il reste à étudier la convergence de $\int_0^t F'\circ X_{s-}^n dX_s^n = \int_0^t F'\circ X_{s-}^n (dM_s^n + dV_s^n)$.

On a

$$\int_0^t F'\circ X_{s-}^n dM_s^n = \int_0^t F'\circ X_{s-} dM_s - \int_0^t (F'\circ X_{s-} - F'\circ X_{s-}^n) dM_s^n +$$

$$+ \int_0^t F'\circ X_{s-} (dM_s^n - dM_s) .$$

La fonction F' est uniformément bornée, les fonctions $F' \circ X^n_{s-}$ tendent p.s. vers $F' \circ X_{s-}$ et $\underset{\sim}{E}[<M-M^n,M-M^n>] = \underset{\sim}{E}[(M_\infty-M^n_\infty)^2]$ tend vers zéro. Les égalités

$$\underset{\sim}{E}[|\int_0^t (F' \circ X_{s-}-F' \circ X^n_{s-})dM^n_s|^2] = \underset{\sim}{E}[\int_0^t |F' \circ X_{s-}-F' \circ X^n_{s-}|^2 d<M^n,M^n>_s];$$

et

$$\underset{\sim}{E}[|\int_0^t F' \circ X_{s-} \, d(M^n_s-M_s)|^2] = \underset{\sim}{E}[\int_0^t (F' \circ X_{s-})^2 \, d<M^n-M,M^n-M>_s]$$

entraînent que $\int_0^t F' \circ X^n_{s-} \, dM^n_s$ **tend dans** L^2 vers $\int_0^t F' \circ X_{s-} \, dM_s$.

On montre de même que le terme $\int_0^t F' \circ X^n_{s-} \, dV^n_s$ tend dans L^1 vers $\int_0^t F' \circ X_{s-} \, dV_s$. Et le processus X vérifie bien la formule de changement de variables.

<u>Corollaires.</u>

1) <u>si</u> M <u>et</u> $N \in \mathcal{L}$, $MN - [M,N]$ <u>est une martingale locale et</u>

$$M_t N_t-[M,N]_t = \int_0^t M_{s-} \, dN_s + \int_0^t N_{s-} \, dM_s$$

(appliquer la formule de changement de variables à la fonction $F(x,y)=xy$ en prenant pour semimartingales $X=M$, $Y=N$)

2) <u>Formule d'intégration par parties</u> : <u>si</u> $V \in \mathcal{V}$ <u>et</u> $M \in \mathcal{L}$; <u>le processus</u> $(V_s M_s - \int_0^s M_t \, dV_t)$ <u>est une martingale locale égale à</u> $\int_0^s V_{t-} \, dM_t$. (prendre $F(x,y) = xy$, $X=M$ et $Y=V$) .

BIBLIOGRAPHIE

Pour les démonstrations des résultats cités dans ce travail, nous renvoyons aux publications antérieures du séminaire de Strasbourg :

[1] P.A. MEYER Intégrales stochastiques I. Séminaire de Probabilités I, Université de Strasbourg. Lecture Notes in Mathematics Vol. 39, Springer, Heidelberg 1967 .

[2] P.A. MEYER Intégrales stochastiques II. Séminaire de Probabilités I, Université de Strasbourg. Lecture Notes in Mathematics Vol. 39, Springer, Heidelberg 1967 .

[3] P.A. MEYER Guide détaillé de la théorie "générale" des processus. Séminaire de Probabilités II, Université de Strasbourg. Lecture Notes in Mathematics. Vol. 51 Springer, Heidelberg 1968 .

[4] P.A. MEYER Probabilités et Potentiel. Hermann, 1966 .

[5] P.A. MEYER Un résultat élémentaire sur les temps d'arrêt. Séminaire de Probabilités III. Université de Strasbourg. Lecture Notes in Mathematics. Vol. 88, Springer, Heildelberg 1969.

Les martingales locales et la décomposition des surmartingales positives sont introduites dans l'article fondamental

[6] K.ITO et S.WATANABE Transformation of Markov processes by additive functionals. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 15, 1965, p.13-30 .

Les résultats essentiels sur les intégrales stochastiques sont dus à K.ITO, M.MOTOO, H.KUNITA, S.WATANABE . Comme nous ne les citons pas directement dans ce travail, nous renvoyons le lecteur à la bibliographie de

[7] H. KUNITA et S.WATANABE . On square integrable martingales. Nagoya Math. J. 30, 1967, 209-245 .