RENZO CAIROLI

# Une inégalité pour martingales à indices multiples et ses applications

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 4 (1970), p. 1-27
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1970__4__1_0>

Séminaire de Probabilités
Université de Strasbourg

1968/69

# UNE INEGALITE POUR MARTINGALES A INDICES MULTIPLES ET SES APPLICATIONS

par

R. Cairoli

## 1. INTRODUCTION

On s'intéresse à la classe des martingales à indices multiples relatives à une famille de tribus du type produit. Après avoir étendu une inégalité maximale de Doob bien connue ([1] p. 317; [2] p. 121) aux martingales de cette classe, on démontre la convergence presque sûre de celles pour lesquelles le second membre de l'inégalité est fini. En adaptant la construction faite par Jessen, Marcinkiewicz et Zygmund dans la démonstration du lemme F de [3], on montre que cette condition ne peut pas être affaiblie. On applique ensuite l'inégalité à l'étude du comportement des fonctions multi-harmoniques (définition probabiliste) sur les trajectoires du produit cartésien des processus de Markov par rapport auxquels elles sont définies. Grâce à un résultat de Brelot et Doob [4], on déduit un théorème classique sur le comportement des fonctions multi-harmoniques à la frontière distinguée.

## 2. NOTATIONS

Tout au long du travail m est un entier $\geq 2$ fixé et j parcourt les entiers de 1 à m. Pour chaque j, $(\Omega_j, \mathcal{F}_j, P_j)$ est un espace de probabilité. On pose $\Omega = \prod_j \Omega_j$, $\mathcal{F} = \bigotimes_j \mathcal{F}_j$, $P = \bigotimes_j P_j$. L'espérance par rapport à P sera désignée par E.

Les processus que l'on va considérer sont (sauf mention du contraire) réels, définis dans $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et admettent comme ensemble des indices un ensemble de points à m coordonnées dont chacune des coordonnées parcourt une partie dénombrable de $\overline{R}$. Cet ensemble sera muni de la relation d'ordre: $(r_1, \ldots, r_m) \leqq (r'_1, \ldots, r'_m)$ si $r_1 \leqq r'_1, \ldots, r_m \leqq r'_m$.

On désignera par $\mathcal{M}$ la classe des martingales

$$(X_{r_1, \ldots, r_m}, \mathcal{F}^1_{r_1} \otimes \ldots \otimes \mathcal{F}^m_{r_m})$$

relatives à une famille croissante de tribus-produit contenues dans $\mathcal{F}$.

## 3. INEGALITES MAXIMALES

L'inégalité maximale usuelle des martingales à indices totalement ordonnés n'est en général pas valable pour les martingales de la classe $\mathcal{M}$. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer l'exemple simple suivant: $m = 2$; $r_1 = 1,2$; $r_2 = 1,2$; $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$ sont deux copies de l'intervalle $[o, 1]$ muni de la tribu et de la mesure de Lebesgue; $\mathcal{F}^1_1 = \mathcal{F}^2_1 = \{\emptyset, [o, 1]\}$; $\mathcal{F}^1_2 = \{\emptyset, [o, 1/3[, [1/3, 1], [o,1]\}$; $\mathcal{F}^2_2 = \{\emptyset, [o, 1/2[, [1/2, 1], [o, 1]\}$; $X_{1,1} = 1/2$; $X_{1,2} = 1$ sur $[o, 1] \times [o, 1/2[$, $= o$ ailleurs; $X_{2,1} = 3/2$ sur $[o, 1/3[ \times [o, 1]$, $= o$ ailleurs; $X_{2,2} = 3$ sur $[o, 1/3[ \times [o, 1/2[$, $= o$ ailleurs. On vérifie aussitôt que $(X_{r_1,r_2}, \mathcal{F}^1_{r_1} \otimes \mathcal{F}^2_{r_2}, P_1 \otimes P_2)$ est une martingale. D'autre part, F désignant l'ensemble $\{\sup_{r_1,r_2} X_{r_1,r_2} \geqq 1\}$, on a:

$$(P_1 \otimes P_2)(F) = 2/3 \nleq \int_F X_{2,2}\, dP_1 \otimes dP_2 = \int X_{2,2}\, dP_1 \otimes dP_2 = 1/2.$$

Par contre, l'extension suivante des inégalités de Doob est valable pour les processus de $\mathcal{M}$:

<u>Théorème 1</u>. Si $(X_{r_1,\ldots,r_m})$ appartient à $\mathcal{M}$, alors on a, pour tout $\lambda \geq o$ et tout $p > 1$:

$$\lambda P\{\sup_{r_1,\ldots,r_m} |X_{r_1,\ldots,r_m}| \geq \lambda\} \leq$$

$$\leq A_m \sup_{r_1,\ldots,r_m} E\{|X_{r_1,\ldots,r_m}|(\log^+|X_{r_1,\ldots,r_m}|)^{m-1}\} + B_m,$$

$$E\{\sup_{r_1,\ldots,r_m} |X_{r_1,\ldots,r_m}|^p\} \leq A_{p,m} \sup_{r_1,\ldots,r_m} E\{|X_{r_1,\ldots,r_m}|^p\},$$

où $A_m$, $A_{p,m}$ et $B_m$ sont des constantes universelles.

Remarquons que les inégalités de ce théorème sont vérifiées aussi par les sousmartingales positives relatives à une famille croissante de tribus-produit. On démontre la première pour cette classe de processus. La démonstration sera effectuée par récurrence sur m. Pour le cas $m = 2$, soit $(X_{r_1,r_2}, \mathcal{F}^1_{r_1} \otimes \mathcal{F}^2_{r_2})$ une sousmartingale positive. On vérifie facilement que, pour chaque $r_2$ fixé, $(X_{r_1,r_2}, \mathcal{F}^1_{r_1} \otimes \mathcal{F}_2)$ est une sousmartingale (indexée par $r_1$). Il s'ensuit que $(\sup_{r_2} X_{r_1,r_2}, \mathcal{F}^1_{r_1} \otimes \mathcal{F}_2)$ en est également une. D'après l'inégalité de Doob, on a donc, pour chaque $\lambda \geq o$:

$$\lambda P\{\sup_{r_1,r_2} X_{r_1,r_2} \geq \lambda\} \leq \sup_{r_1} E\{\sup_{r_2} X_{r_1,r_2}\}.$$

Or, $r_1$ étant fixé, $(X_{r_1,r_2})$ est une sousmartingale positive (indexée par $r_2$). En vertu d'une autre inégalité de Doob ([1] p. 317), on a donc, A étant une constante universelle:

$$E\{\sup_{r_2} X_{r_1,r_2}\} \leq A \sup_{r_2} E\{X_{r_1,r_2} \log^+ X_{r_1,r_2}\} + A.$$

Par conséquent:

$$\lambda P\{\sup_{r_1,r_2} X_{r_1,r_2} \geqq \lambda\} \leqq A \sup_{r_1,r_2} E\{X_{r_1,r_2} \log^+ X_{r_1,r_2}\} + A.$$

Supposons maintenant que l'inégalité soit vraie pour $m = k \geqq 2$ et considérons la sousmartingale positive $(X_{r_1,\ldots,r_{k+1}}, \mathcal{F}^1_{r_1} \otimes \ldots \otimes \mathcal{F}^{k+1}_{r_{k+1}})$. Si on fixe $r_{k+1}$ et on pose $\tilde{\mathcal{F}}^k_{r_k} = \mathcal{F}^k_{r_k} \otimes \mathcal{F}_{k+1}$, $\tilde{\Omega}_k = \Omega_k \times \Omega_{k+1}$, $\tilde{\mathcal{F}}_k = \mathcal{F}_k \otimes \mathcal{F}_{k+1}$ et $\tilde{P}_k = P_k \otimes P_{k+1}$, alors

$$(X_{r_1,\ldots,r_k,r_{k+1}}, \mathcal{F}^1_{r_1} \otimes \ldots \otimes \mathcal{F}^{k-1}_{r_{k-1}} \otimes \tilde{\mathcal{F}}^k_{r_k})$$

est une sousmartingale positive (indexée par $(r_1,\ldots,r_k)$) relative à une famille de tribus-produit, définie dans $(\Omega_1 \times \ldots \times \Omega_{k-1} \times \tilde{\Omega}_k, \mathcal{F}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{F}_{k-1} \otimes \tilde{\mathcal{F}}_k, P_1 \otimes \ldots \otimes P_{k-1} \otimes \tilde{P}_k)$. Puisque la famille de tribus ne dépend pas de $r_{k+1}$, $(\sup_{r_{k+1}} X_{r_1,\ldots,r_k,r_{k+1}}, \mathcal{F}^1_{r_1} \otimes \ldots \otimes \mathcal{F}^{k-1}_{r_{k-1}} \otimes \tilde{\mathcal{F}}^k_{r_k})$ est aussi une sousmartingale positive. Par hypothèse de récurrence on a donc, $\lambda$ étant $\geqq o$:

$$\lambda P\{\sup_{r_1,\ldots,r_k,r_{k+1}} X_{r_1,\ldots,r_{k+1}} \geqq \lambda\} \leqq$$

$$\leqq A_k \sup_{r_1,\ldots,r_k} E\{\sup_{r_{k+1}} X_{r_1,\ldots,r_{k+1}} \left[\log^+(\sup_{r_{k+1}} X_{r_1,\ldots,r_{k+1}}\right]^{k-1}\} + B_k \leqq$$

$$\leqq A_k \sup_{r_1,\ldots,r_k} E\{\sup_{r_{k+1}} (X_{r_1,\ldots,r_{k+1}} \left[\log^+ X_{r_1,\ldots,r_{k+1}}\right]^{k-1})\} + B_k.$$

D'autre part, $r_1\ldots,r_k$ étant fixés, $(X_{r_1,\ldots,r_{k+1}})$ est une sousmartingale positive (indexée par $r_{k+1}$); $(X_{r_1,\ldots,r_{k+1}} \left[\log^+ X_{r_1,\ldots,r_{k+1}}\right]^{k-1})$ donc aussi, puisque $t[\log^+ t]^{k-1}$ est une fonction convexe croissante de $t \geqq o$. D'après l'inégalité de Doob citée antérieurement, on a donc:

$$E\{\sup_{r_{k+1}} (X_{r_1,\ldots,r_{k+1}} \left[\log^+ X_{r_1,\ldots,r_{k+1}}\right]^{k-1})\} \leqq$$

$$\leq A \sup_{r_{k+1}} E\{X_{r_1,\ldots,r_{k+1}}[\log^+ X_{r_1,\ldots,r_{k+1}}]^{k-1}\log^+(X_{r_1,\ldots,r_{k+1}}[\log^+ X_{r_1,\ldots,r_{k+1}}]^{k-1})\} + A \leq$$

$$\leq A\, k \sup_{r_{k+1}} E\{X_{r_1,\ldots,r_{k+1}}[\log^+ X_{r_1,\ldots,r_{k+1}}]^{k}\} + A,$$

cette dernière majoration étant une conséquence de l'inégalité

$$t\,[\log^+ t]^{k-1}\log^+(t[\log^+ t]^{k-1}) \leq kt[\log^+ t]^{k},$$

vraie pour tout $t \geq o$ et tout entier $k \geq 1$. En rapprochant cette relation à la précédente, on voit que l'on a:

$$\lambda P\{\sup_{r_1,\ldots,r_{k+1}} X_{r_1,\ldots,r_{k+1}} \geq \lambda\} \leq$$

$$\leq A_{k+1} \sup_{r_1,\ldots,r_{k+1}} E\{X_{r_1,\ldots,r_{k+1}}[\log^+ X_{r_1,\ldots,r_{k+1}}]^{k}\} + B_{k+1},$$

où $A_{k+1} = A_k A\, k$ et $B_{k+1} = A_k A + B_k$.

## 4. UN THEOREME DE CONVERGENCE

Dans ce paragraphe l'ensemble des indices est l'ensemble des points $(n_1,\ldots,n_m)$ à coordonnées entières et positives.

On démontre, au moyen des inégalités maximales, la convergence presque sûre des martingales de la classe $\mathcal{M}$, quand $n_1\to\infty$, ... , $n_m\to\infty$. Cependant, on impose comme condition que le second membre de la première [resp. seconde] inégalité du théorème 1 soit fini. On sait que cela entraîne en particulier l'existence d'une variable aléatoire $X \in L_1$ [resp. $L_p$], appelée variable terminale, telle que $X_{n_1,\ldots,n_m} = E\{X|\mathcal{F}^1_{n_1}\otimes\ldots\otimes\mathcal{F}^m_{n_m}\}$ p.s. pour tout $(n_1,\ldots,n_m)$ et que $X_{n_1,\ldots,n_m}$ converge vers $X$ en moyenne [resp. en moyenne d'ordre p] quand $n_1\to\infty$, ... . $n_m\to\infty$. Il est clair que la condition la plus faible est celle qui exige que le second membre de la première des inégalités soit fini. Pour la convergence presque sûre cette condition ne peut pas être affaiblie, au sens précis énoncé dans le théorème suivant:

<u>Théorème 2</u>. Si pour la martingale $(X_{n_1,\dots,n_m}) \in \mathcal{M}$ on a

$$\sup_{n_1,\dots,n_m} E\{|X_{n_1,\dots,n_m}|(\log^+|X_{n_1,\dots,n_m}|)^{m-1}\} < \infty$$

(donc, en particulier, si $\sup_{n_1,\dots,n_m} E\{|X_{n_1,\dots,n_m}|^p\} < \infty$ pour un $p > 1$), alors la limite

$$\lim_{n_1\to\infty,\dots,n_m\to\infty} X_{n_1,\dots,n_m}$$

existe (et est finie) p.s..

En outre, quelle que soit la fonction $\phi(t)$, $t \geq o$, positive et croissante, telle que $\phi(t) = o(t \log^{m-1} t)$ pour $t \to \infty$, il existe une martingale uniformément intégrable $(X_{n_1,\dots,n_m}, \mathcal{F}^1_{n_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{F}^m_{n_m})$ définie dans l'espace $[o, 1]^m$, muni de la mesure de Lebesgue, telle que l'on ait, $X$ désignant sa variable terminale,

$$E\{\phi(|X|)\} < \infty \quad \text{et} \quad \liminf_{n_1\to\infty,\dots,n_m\to\infty} X_{n_1,\dots,n_m} < \limsup_{n_1\to\infty,\dots,n_m\to\infty} X_{n_1,\dots,n_m}$$

sur un ensemble de mesure positive.

Remarques:

1. La seconde partie du théorème établit en particulier que, si $\phi$ est en plus convexe, il existe une martingale $(X_{n_1,\dots,n_m}) \in \mathcal{M}$ telle que

$$\sup_{n_1,\dots,n_m} E\{\phi(|X_{n_1,\dots,n_m}|)\} < \infty$$

et qui ne converge pas presque sûrement quand $n_1 \to \infty, \ldots, n_m \to \infty$.

2. Quant à leur expression, les résultats des théorèmes 1 et 2 sont analogues à ceux de Jessen, Marcinkiewicz et Zygmund en théorie de la dérivation des intégrales multiples ([3], [5]). C'est d'ailleurs en adaptant la construction de l'exemple dans la démonstration du lemme F de [3] que l'on montrera la seconde partie du théorème 2.

3. Les théorèmes 1 et 2 gardent leur validité si l'on remplace la classe $\mathcal{M}$ par la classe $\mathcal{M}_o$ définie de manière suivante (pour le théorème 2 $(n_1,\ldots,n_m)$ remplace $(r_1,\ldots,r_m)$) : $(X_{r_1,\ldots,r_m})$ appartient à $\mathcal{M}_o$ si, pour $(P_1 \otimes \ldots \otimes P_{j-1} \otimes P_{j+1} \otimes \ldots \otimes P_m)$-presque tout $(\omega_1,\ldots,\omega_{j-1},\omega_{j+1},\ldots,\omega_m) \in \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_{j-1} \times \Omega_{j+1} \times \ldots \times \Omega_m$, les coordonnées $r_1,\ldots,r_{j-1},r_{j+1},\ldots,r_m$ étant fixées, $(X_{r_1,\ldots,r_m})$ en tant que famille de fonctions de $\omega_j \in \Omega_j$ indexée par $r_j$ est une martingale dans $(\Omega_j, \mathcal{F}_j, P_j)$ relativement à une famille croissante de sous-tribus de $\mathcal{F}_j$ pouvant dépendre de $\omega_1,\ldots,\omega_{j-1}, \omega_{j+1},\ldots,\omega_m$ mais non de $r_1,\ldots,r_{j-1},r_{j+1},\ldots,r_m$.

Un processus de la classe $\mathcal{M}_o$ dont chaque variable est intégrable est une martingale (non nécessairement relative à une famille de tribus-produit). Une martingale de la classe $\mathcal{M}$ dont chaque tribu $\mathcal{F}^j_{r_j}$ est séparable appartient à $\mathcal{M}_o$.

Passons à la démonstration du théorème 2 en supposant d'abord que $\sup_{n_1,\ldots,n_m} E\{|X_{n_1,\ldots,n_m}|^p\}$ soit fini pour un $p > 1$ et désignons par $X$ la variable terminale de la martingale. Choisissons une suite d'indices $(n_1^k, \ldots, n_m^k)$ telle que $n_1^k \longrightarrow \infty, \ldots, n_m^k \longrightarrow \infty$, quand $k \to \infty$, et que

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^p \, E\{|X - X_{n_1^k,\ldots,n_m^k}|^p\} < \infty.$$

Considérons, pour k fixé, la martingale

$$(X_{n_1,\dots,n_m} - X_{n_1^k,\dots,n_m^k},\ \mathcal{F}^1_{n_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{F}^m_{n_m})$$

indexée par $(n_1,\dots,n_m) \geq (n_1^k,\dots,n_m^k)$. D'après le théorème 1 on a:

$$E\{\sup_{n_1 \geq n_1^k,\dots,n_m \geq n_m^k} |X_{n_1,\dots,n_m} - X_{n_1^k,\dots,n_m^k}|^p\} \leq$$

$$\leq A_{p,m} \sup_{n_1 \geq n_1^k,\dots,n_m \geq n_m^k} E\{|X_{n_1,\dots,n_m} - X_{n_1^k,\dots,n_m^k}|^p\} \leq$$

$$\leq A_{p,m}\, E\{|X - X_{n_1^k,\dots,n_m^k}|^p\},$$

où, dans la dernière majoration (en réalité égalité), on utilise la relation

$$X_{n_1,\dots,n_m} - X_{n_1^k,\dots,n_m^k} = E\{X - X_{n_1^k,\dots,n_m^k} \mid \mathcal{F}^1_{n_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{F}^m_{n_m}\} \quad \text{p.s.}$$

On en déduit:

$$\sum_{k=1}^{\infty} P\{\sup_{n_1 \geq n_1^k,\dots,n_m \geq n_m^k} |X_{n_1,\dots,n_m} - X_{n_1^k,\dots,n_m^k}| > 1/k\} \leq$$

$$\leq A_{p,m} \sum_{k=1}^{\infty} k^p\, E\{|X - X_{n_1^k,\dots,n_m^k}|^p\} < \infty,$$

ce qui entraîne:

$$P\Big(\limsup_{k \to \infty} \{\sup_{n_1 \geq n_1^k,\dots,n_m \geq n_m^k} |X_{n_1,\dots,n_m} - X_{n_1^k,\dots,n_m^k}| > 1/k\Big) = 0$$

et donc la convergence presque sûre de $X_{n_1,\dots,n_m}$ quand $n_1 \to \infty$, .. , $n_m \to \infty$.

Supposons maintenant que

$$\sup_{n_1,\dots,n_m} E\{|X_{n_1,\dots n_m}|(\log^+|X_{n_1,\dots,n_m}|)^{m-1}\} < \infty$$

et désignons encore par X la variable terminale de la martingale. On peut se borner au cas où la variable X est positive (si elle ne l'est pas, on la décompose en une partie positive et une partie négative et on traite séparément les deux cas). Posons

$$X^{(\alpha)}_{n_1,\ldots,n_m} = E\{X^{(\alpha)} \mid \mathcal{F}^1_{n_1} \otimes \ldots \otimes \mathcal{F}^m_{n_m}\},$$

où $X^{(\alpha)}$ désigne la variable $X \wedge \alpha$ et $\alpha$ une constante. D'après le théorème 1 on a, pour tout $\lambda > o$:

$$P\{\sup_{n_1,\ldots,n_m}(X_{n_1,\ldots,n_m} - X^{(\alpha)}_{n_1,\ldots,n_m}) > \lambda\} \leq$$

$$\leq \frac{A_m}{\lambda} \sup_{n_1,\ldots,n_m} E\{(X_{n_1,\ldots,n_m} - X^{(\alpha)}_{n_1,\ldots,n_m})[\log^+(X_{n_1,\ldots,n_m} - X^{(\alpha)}_{n_1,\ldots,n_m})]^{m-1}\} + \frac{B_m}{\lambda} \leq$$

$$\leq \frac{A_m}{\lambda} E\{(X - X^{(\alpha)})[\log^+(X - X^{(\alpha)})]^{m-1}\} + \frac{B_m}{\lambda}.$$

Or, $\varepsilon > o$ étant donné, considérons une suite $\varepsilon_k \downarrow o$ et définissons une suite $\alpha_k \uparrow \infty$ telle que l'on ait

$$P\{\sup_{n_1,\ldots,n_m}(X_{n_1,\ldots,n_m} - X^{(\alpha_k)}_{n_1,\ldots,n_m}) > \varepsilon_k\} \leq \varepsilon/2^k.$$

Cela est possible grâce à l'inégalité précédente, car

$$P\{\sup_{n_1,\ldots,n_m}(X_{n_1,\ldots,n_m} - X^{(\alpha)}_{n_1,\ldots,n_m}) > \varepsilon_k\} =$$

$$= P\{\sup_{n_1,\ldots,n_m} c(X_{n_1,\ldots,n_m} - X^{(\alpha)}_{n_1,\ldots,n_m}) > c\varepsilon_k\} \leq$$

$$\leq \frac{A_m}{c\varepsilon_k} E\{c(X - X^{(\alpha)})[\log^+(c(X - X^{(\alpha)}))]^{m-1}\} + \frac{B_m}{c\varepsilon_k}$$

que majore $\varepsilon/2^k$ si c et $\alpha$ sont choisis assez grands. Désignons par $F_k$ l'ensemble $\{\sup_{n_1,\ldots,n_m}(X_{n_1,\ldots,n_m} - X^{(\alpha_k)}_{n_1,\ldots,n_m}) > \varepsilon_k\}$ et par F la réunion des $F_k$. Sur le complémentaire de F on a, pour tout k:

$$\sup_{n_1,\dots,n_m} (X_{n_1,\dots,n_m} - X^{(\alpha_k)}_{n_1,\dots,n_m}) \leq \varepsilon_k,$$

donc

$$\lim_{\alpha\to\infty} X^{(\alpha)}_{n_1,\dots,n_m} = X_{n_1,\dots,n_m}$$

uniformément en $(n_1,\dots,n_m)$. Mais d'après la première partie de la démonstration, pour chaque $\alpha$ $X^{(\alpha)}_{n_1,\dots,n_m}$ converge p.s. quand $n_1 \to \infty,\dots,$ $n_m \to \infty$. Il en est donc de même de $X_{n_1,\dots,n_m}$ sur le complémentaire de F et la démonstration de la première partie du théorème est achevée, puisque $P(F) \leq \varepsilon$ et $\varepsilon$ est arbitraire.

Pour démontrer la seconde partie, on suit le procédé utilisé par Jessen, Marcinkiewicz et Zygmund dans la démonstration du théorème 8 de [3].

Afin de simplifier l'exposition, on se limite au cas m = 2. Les deux espaces de base $\Omega_1$ et $\Omega_2$ sont chacun une copie de l'intervalle $[o, 1]$ muni de la tribu et de la mesure de Lebesgue; $\Omega$ est donc le carré unité $[o, 1] \times [o, 1]$ et P la mesure de Lebesgue dans $\Omega$.

Si X est une variable intégrable dans $\Omega$, on désigne par $X_{n_1,n_2}$ l'espérance conditionnelle $E\{X \mid \mathcal{F}^1_{n_1} \otimes \mathcal{F}^2_{n_2}\}$, où $\mathcal{F}^1_{n_1}$ et $\mathcal{F}^2_{n_2}$ sont les tribus engendrées respectivement par les partitions $\{[o, 1/2^{n_1}[, \dots, [(2^{n_1}-1)/2^{n_1}, 1]\}$ et $\{[o, 1/2^{n_2}[, \dots, [(2^{n_2}-1)/2^{n_2}, 1]\}$.

Si $\phi$ est une fonction positive de $t \geq o$, on désigne par $L_\phi$ la classe des variables X (définies dans $\Omega$ ) pour lesquelles $E\{\phi(|X|)\}$ est fini.

On note en outre $A_n$ la partie ouverte du plan limitée par les deux droites verticales d'abscisse o et $2^n$, par l'axe horizontal et par le graphe de la fonction f définie de la manière suivante: $f(t) = 2^n$ si

$t \in [o, 1]$, $f(t) = 2^{n-k}$ si $t \in ]2^{k-1}, 2^k]$, où $k = 1, 2, \ldots, n$.

Voici d'abord deux lemmes:

<u>Lemme 1</u>. Soit $\phi$ une fonction positive de $t \geq o$, croissante, constante sur chacun des intervalles $[o, 1]$, $]1, 2]$, ... , $]2^{n-1}, 2^n]$, ... et telle que $\liminf_{t \to \infty} \phi(t)/t > o$. Si, pour chaque $X \in L_\phi$, $X_{n_1,n_2}$ converge p.s. quand $n_1 \to \infty$, $n_2 \to \infty$, alors il existe une constante C telle que l'on ait

$$P(A_n) \leq C\ \phi(2^n),$$

pour tout entier positif n.

Supposons que le lemme soit faux et montrons qu'il existe un $X \in L_\phi$ pour lequel la suite des $X_{n_1,n_2}$ n'est pas p.s. convergente. A cet effet, choisissons une suite de nombres $C_i > o$ telle que $\sum_{i=1}^{\infty} 1/C_i < \phi(a)$, où a est un point tel que $\phi(a) > o$. Pour chaque i, il existe par hypothèse un entier n(i) tel que $P(A_{n(i)}) > C_i\ \phi(2^{n(i)})$. Fixons i et considérons la partition de $\Omega$ en $2^{2n}$ carrés de même grandeur, n étant suffisamment grand pour que $2^{n-1} > i$. Désignons par $A_i^1, A_i^2, \ldots, A_i^{2^n}$ les ensembles homothétiques de $A_{n(i)}$, dans le rapport $1/2^{n+n(i)}$, contenus dans chacun de ces carrés. Considérons ensuite la partition de $\Omega$ en $2^{2(n+n(i))}$ carrés de même grandeur et désignons par $A_i^{2^n+1}, A_i^{2^n+2}, \ldots$ les ensembles homothétiques de $A_{n(i)}$, dans le rapport $1/2^{n+2n(i)}$, contenus dans les carrés de cette deuxième partition qui sont disjoints de $A_i^1, \ldots, A_i^{2^n}$. En procédant de cette manière indéfiniment (c'est-à-dire en partageant $\Omega$ en $2^{2(n+2n(i))}$ carrés de même grandeur et en considérant les ensembles homothétiques de $A_{n(i)}$, dans le rapport $1/2^{n+3n(i)}$, disjoints des $A_i^k$ déjà définis, ainsi de suite) on détermine une suite $A_i^1, A_i^2, \ldots$ dont les termes sont homothétiques de $A_{n(i)}$, deux à deux disjoints, de diamètre $< 1/i$ et dont la réunion est $\Omega$ (à un ensemble de mesure nulle près). Soit $\Omega_i^k$ l'image de $\Omega$ par l'application homothétique qui fait correspondre $A_i^k$ à $A_{n(i)}$. Alors

$$P(A_i^k) > C_i\, \phi(2^{n(i)})P(\Omega_i^k),$$

puisque $P(A_{n(i)}) > C_i\, \phi(2^{n(i)}) = C_i\, \phi(2^{n(i)})P(\Omega)$. Cela étant, posons (i est toujours fixé) $X_i = a2^{n(i)}$ sur $\bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_i^k$, $= o$ ailleurs et $X = \sup_i X_i$. Compte tenu de l'inégalité précédente on a:

$$E\{\phi(X)\} \leq \sum_{i=1}^{\infty} E\{\phi(X_i)\} \leq \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\phi(2^{n(i)})P(\Omega_i^k) < \sum_{i=1}^{\infty} 1/C_i < \phi(a),$$

ce qui montre, en particulier, que X appartient à $L_\phi$. D'autre part, pour chaque i presque tout point $\omega \in \Omega$ est élément d'un ensemble $A_i^k$, donc d'un ensemble $F_i(\omega)$, atome d'une tribu $\mathcal{F}^1_{n_1} \otimes \mathcal{F}^2_{n_2}$, de diamètre $< 1/i$, contenant $\Omega_i^k$ et tel que $2^{n(i)}P(\Omega_i^k) = P(F_i(\omega))$. Pour presque tout $\omega$ et tout i, on a donc la relation suivante:

$$\frac{1}{P(F_i(\omega))}\int_{F_i(\omega)} X\, dP \geq \frac{1}{P(F_i(\omega))}\int_{\Omega_i^k} a2^{n(i)} dP = a2^{n(i)}\frac{P(\Omega_i^k)}{P(F_i(\omega))} = a.$$

Or, il est clair que si $X_{n_1,n_2}(\omega)$ converge pour presque tout $\omega$, quand $n_1 \to \infty$, $n_2 \to \infty$, le premier membre de cette relation converge aussi pour presque tout $\omega$ quand $i \to \infty$ et les deux limites coïncident p.s. . D'autre part, de $\liminf_{t\to\infty} \phi(t)/t > o$ on déduit que $L_\phi \subset L_1$ (*) donc que $X_{n_1,n_2}$ converge en moyenne vers X. On en conclut que si $X_{n_1,n_2}$ converge p.s., alors on a $X \geq a$ p.s., donc $\phi(X) \geq \phi(a)$ p.s. et par conséquent $E\{\phi(X)\} \geq \phi(a)$, en contradiction avec le calcul précédent qui donnait $E\{\phi(X)\} < \phi(a)$. Il doit donc exister au moins un X dans $L_\phi$ pour lequel la martingale de terme

(*) $L_1$ désigne la classe des variables aléatoires intégrables.

général $X_{n_1,n_2}$ n'est pas p.s. convergente, ce qui achève la démonstration du lemme 1.

<u>Lemme 2</u>. Soit $\phi$ une fonction positive de $t \geq o$, croissante et telle que $\liminf_{t\to\infty} \phi(t)/t > o$. Si, pour chaque $X \in L_\phi$, $X_{n_1,n_2}$ converge p.s. quand $n_1 \to \infty$, $n_2 \to \infty$, alors il existe une constante C telle que l'on ait

$$2^n \log 2^n \leq C\,\phi(2^n),$$

pour tout entier positif n.

Posons $\phi^*(t) = \phi(1)$ pour tout $t \in [o, 1]$ et $\phi^*(t) = \phi(2^n)$ pour tout $t \in ]2^{n-1}, 2^n]$, n parcourant les entiers positifs. La fonction $\phi^*$ ainsi définie majore $\phi$ et on a $\phi^*(2^n) = \phi(2^n)$ pour tout n. En outre $\phi^*$ possède les propriétés de la donnée du lemme 1. Si donc pour chaque $X \in L_\phi$ $X_{n_1,n_2}$ converge p.s. quand $n_1 \to \infty$, $n_2 \to \infty$, alors puisque $L_{\phi^*} \subset L_\phi$, on a, en vertu de ce lemme et pour tout n:

$$2^{n-1} \log 2^{n-1} = \int_1^{2^{n-1}} \frac{2^{n-1}}{t}\,dt < P(A_n) \leq C\,\phi^*(2^n) = C\,\phi(2^n).$$

Mais cela implique

$$2^n \log 2^n \leq C\,\phi(2^n)$$

pour tout n, la constante C n'étant pas nécessairement identique à la précédente. Le lemme est donc démontré.

Passons maintenant à la démonstration de la seconde partie du théorème 2. Soit $\phi$ une fonction de $t \geq o$ satisfaisant aux conditions de l'énoncé. Posons $\phi^*(t) = \phi(t) + t$ pour tout $t \geq o$. La fonction $\phi^*$ ainsi définie est positive, croissante et majore $\phi$. En outre $\liminf_{t\to\infty} \phi^*(t)/t > o$, donc

$\phi^*$ possède les propriétés de la donnée du lemme 2. D'autre part,

$$\phi^*(t)/t \log t = \phi(t)/t \log t + 1/\log t \longrightarrow o,$$

quand $t \to \infty$, donc il n'existe aucune constante C telle que l'on ait

$$2^n \log 2^n \leq C\ \phi^*(2^n)$$

pour tout n. D'après le lemme 2, il existe par conséquent une variable $X \in L_{\phi^*}$ pour laquelle la martingale associée de terme général $X_{n_1,n_2}$ n'est pas p.s. convergente. Il ne reste alors à remarquer que $L_{\phi^*} = L_\phi \cap L_1$.

## 5. COMPORTEMENT D'UNE CLASSE DE FONCTIONS MULTI-HARMONIQUES SUR LES TRAJECTOIRES D'UN PRODUIT CARTESIEN DE PROCESSUS

On se place maintenant dans les hypothèses de Kunita et Watanabe. On considère, plus précisément, m espaces localement compacts, non compacts et à base dénombrable $S^1, \ldots , S^m$, m processus de Hunt transients $X_1 = (\Omega_1, (X_t^1)_{t\geq o}, (\mathcal{F}_t^1)_{t\geq o}, \zeta_1, (P_{x_1})_{x_1 \in S^1}), \ldots , X_m = (\Omega_m, (X_t^m)_{t\geq o}, (\mathcal{F}_t^m)_{t\geq o}, \zeta_m, (P_{x_m})_{x_m \in S^m})$ à valeurs respectivement dans $S^1, \ldots , S^m$ et vérifiant l'hypothèse (B) de Kunita et Watanabe ([6] p. 498; [7] p. 49) (2).

On désigne par $P_A(x_j,dy_j)$ la répartition de sortie de $X_j$ de l'ensemble borélien $A \subset S^j$:

---

(2) Il suffirait de prendre des processus standards vérifiant (B), à condition de compactifier $S^1, \ldots , S^m$ selon Meyer ([7] chapitre IV) et de relativiser le problème par rapport à une fonction de la forme $h_1 \ldots h_m$, où $h_j$ est harmonique dans $S^j$, strictement positive et finie $\eta_j$ p.p., $\eta_j$ étant la mesure fondamentale de l'hypothèse (B) relative à $X_j$.

$$P_A(x_j,dy_j) = P_{x_j}\{X^j_{\sigma(A)} \in dy_j;\ \sigma(A) < \zeta_j\},$$

où $\sigma(A) = \inf\{t \geq o :\ X^j_t \in S^j - A\}$.

On désigne en outre par S l'espace-produit $S^1 \times \ldots \times S^m$.

On dit qu'une fonction numérique positive h dans S est multi-harmonique si elle est universellement mesurable et, quel que soit j, harmonique de $x_j$ pour toute valeur fixée de $x_1,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_m$ $(P_{K_j} h_j = h_j$ pour tout compact $K_j \subset S^j$, où $h_j$ désigne la fonction $h(x_1,\ldots,x_{j-1},\cdot,x_{j+1},\ldots,x_m))$.

Toute fonction multi-harmonique est multi-excessive ([6] p. 491; [8] p. 320) donc, en particulier, mesurable par rapport à la tribu borélienne de S.

Désignons par $H_p$, p étant > 1, la classe des fonctions multi-harmoniques h telles que

$$\lim_{n\to\infty} P_{K^n_1}\cdots P_{K^n_m}(h^p)(x_1,\ldots,x_m) < \infty \text{ pour tout } (x_1,\ldots,x_m) \in S,$$

par H celle des fonctions multi-harmoniques h telles que

$$\lim_{n\to\infty} P_{K^n_1}\cdots P_{K^n_m}(h[\log^+ h]^{m-1})(x_1,\ldots,x_m) < \infty \quad \text{pour tout } (x_1,\ldots,x_m)\in S,$$

et par D celle des fonctions multi-harmoniques, uniformément intégrables, pour tout $(x_1,\ldots,x_m) \in S$, par rapport à la famille de mesures $\{P_{K^n_1}(x_1,dy_1) \otimes \ldots \otimes P_{K^n_m}(x_m,dy_m)\}_{n=1,2,\ldots}$, où, dans les trois cas, $K^n_1 \times \ldots \times K^n_m$ parcourt une suite de compacts dont la réunion est S et dont chaque terme est un voisinage du précédent.

Les trois classes sont indépendantes du choix de la suite des compacts $K^n_1 \times \ldots \times K^n_m$, ce que l'on vérifie facilement pour les deux premières classes et en utilisant le même argument que dans [9] p. 60 pour la troisième.

On a en outre les inclusions suivantes:

$$H_p \subset H \subset D.$$

Munissons chaque $S^j$ d'une mesure de référence finie et désignons par $\kappa_j$ et $\overline{S}^j$ respectivement le noyau et le compactifié de Martin relatifs à cette mesure sur $S^j$ ( [6] p. 506 et suivantes). Désignons en outre par $\partial S^j_{min}$ (3) la partie minimale de la frontière de Martin $\partial S^j = \overline{S}^j - S^j$ (cf. [6], [7] et [10] ) et par $\mu_j$ la seule mesure finie sur $\partial S^j$ portée par $\partial S^j_{min}$ telle que l'on ait, pour tout $x_j \in S^j$:

$$1 = \int \kappa_j(x_j,\xi)\,\mu_j(d\xi).$$

Dans le compactifié de Martin $\overline{S}^j$, la limite à gauche $X^j_{\zeta_j-}$ de $X^j_t$ à l'instant $\zeta_j$ existe $P_{x_j}$-p.s. pour tout $x_j \in S^j$ et on a ( [6] proposition 12.11; [7] V théorème 9; [11] théorème 7.1):

$$P_{x_j}\{X^j_{\zeta_j-} \in d\xi\} = \kappa_j(x_j,\xi)\,\mu_j(d\xi).$$

Pour toute fonction mesurable positive f sur $\partial S$, on a donc

$$E_{x_1,\dots,x_m}\{f(X^1_{\zeta_1-},\dots,X^m_{\zeta_m-})\} = \int \kappa(x_1,\dots,x_m;\xi_1,\dots,\xi_m)f(\xi_1,\dots,\xi_m)\mu(d\xi_1\otimes\dots\otimes d\xi_m),$$

où $\partial S$ désigne l'ensemble $\partial S^1\times\dots\times\partial S^m$; $E_{x_1,\dots,x_m}$ l'espérance relative à $P_{x_1,\dots,x_m}$; $P_{x_1,\dots,x_m}$ la probabilité $P_{x_1}\otimes\dots\otimes P_{x_m}$; $\kappa(x_1,\dots,x_m;\xi_1,\dots,\xi_m)$ le noyau $\kappa_1(x_1,\xi_1)\dots\kappa_m(x_m,\xi_m)$ (4), et $\mu$ la mesure $\mu_1\otimes\dots\otimes\mu_m$.

On se servira de ces notations aussi par la suite, ainsi que des suivantes: $\partial S_{min}$ pour $\partial S^1_{min}\times\dots\times\partial S^m_{min}$; $P^{\xi_1,\dots,\xi_m}_{x_1,\dots,x_m}$ pour $P^{\xi_1}_{x_1}\otimes\dots\otimes P^{\xi_m}_{x_m}$, où

(3) Dans [8] cet ensemble a été désigné par $S^{j\prime}_u$.

(4) Conventions: $0\cdot\infty = 0$ et $\infty\cdot\infty = \infty$.

$P_{x_j}^{\xi_j}$ dénote la probabilité associée au $\xi_j$-processus issu de $x_j$ ([6] p. 517; [7] p. 16); $E_{x_1,\ldots,x_m}^{\xi_1,\ldots,\xi_m}$ pour l'espérance relative à $P_{x_1,\ldots,x_m}^{\xi_1,\ldots,\xi_m}$.

Théorème 3. Soit h une fonction de la classe D. Alors il existe une fonction positive $\phi$ (unique à une équivalence près modulo $\mu$), mesurable pour la mesure $\mu$ et élément de $L_1(\kappa(x_1,\ldots,x_m;\ \cdot\ )\mu)$ pour tout $(x_1,\ldots,x_m) \in S$, telle que l'on ait:

(1) $h = \int \kappa(\ \cdot\ ;\xi_1,\ldots,\xi_m)\phi(\xi_1,\ldots,\xi_m)\mu(d\xi_1 \otimes \ldots \otimes d\xi_m)$.

On a en outre, $P_{x_1,\ldots,x_m}$-p.s. pour tout $(x_1,\ldots,x_m) \in S$:

(2) $\lim_{n\to\infty} h(X^1_{\sigma_1^n},\ldots,X^m_{\sigma_m^n}) = \phi(X^1_{\zeta_1-},\ldots,X^m_{\zeta_m-})$, où $\sigma_1^n,\ldots,\sigma_m^n$ désignent les temps de sortie respectivement de $K_1^n,\ldots,K_m^n$.

Réciproquement, une telle fonction $\phi$ définit, au moyen de (1), une fonction h de la classe D et la relation (2) vaut pour cette fonction h et $\phi$.

Pour qu'une fonction h de la classe D appartienne à la classe H [resp. $H_p$], il faut et il suffit que la fonction $\phi$ qui lui est associée soit telle que $\phi[\log^+\phi]^{m-1} \in L_1(\kappa(x_1,\ldots,x_m;\ \cdot\ )\mu)$ [resp. $\phi \in L_p(\kappa(x_1,\ldots,x_m;\ \cdot\ )\mu)$] pour tout $(x_1,\ldots,x_m) \in S$.

Posons $[h](\omega_1,\ldots,\omega_m) = \limsup_{n\to\infty} h(X^1_{\sigma_1^n}(\omega_1),\ldots,X^m_{\sigma_m^n}(\omega_m))$. En suivant le procédé utilisé dans [10] pour la démonstration du lemme IV (2.3), on montre que pour chaque $(\xi_1,\ldots,\xi_m) \in \partial S_{min}$ la fonction $[h]$ ainsi définie est constante sauf éventuellement sur un ensemble négligeable pour la mesure $P_{x_1,\ldots,x_m}^{\xi_1,\ldots,\xi_m}$ pour tout $(x_1,\ldots,x_m) \in S_{\xi_1,\ldots,\xi_m}$, où $S_{\xi_1,\ldots,\xi_m}$ désigne l'ensemble $\{(x_1,\ldots,x_m) \in S:\ o < \kappa(x_1,\ldots,x_m;\xi_1,\ldots,\xi_m) < \infty\}$. Définissons

$\phi$ de la manière suivante: $\phi(\xi_1,\ldots,\xi_m)$ est la constante associée à [h] et à $(\xi_1,\ldots,\xi_m)$ si ce point appartient à $\partial S_{min}$ et $\phi(\xi_1,\ldots,\xi_m) = 0$ si $(\xi_1, \ldots,\xi_m)$ appartient à $\partial S - \partial S_{min}$. D'après [6] (12.5) ou [10] I (3.9) on a, pour tout $(x_1,\ldots,x_m) \in S$, F désignant l'ensemble $\{\lim_{n\to\infty} h(X^1_{\sigma^n_1},\ldots,X^m_{\sigma^n_m})$ existe $\}$:

$$P_{x_1,\ldots,x_m}(F) = \int_{\{(\xi_1,\ldots,\xi_m):\ (x_1,\ldots,x_m)\in S_{\xi_1,\ldots,\xi_m}\}} \kappa(x_1,\ldots,x_m;\ \xi_1,\ldots,\xi_m) P^{\xi_1,\ldots,\xi_m}_{x_1,\ldots,x_m}(F)\mu(d\xi_1\otimes\ldots\otimes d\xi_m).$$

Or, le membre de gauche est égal à 1, puisque $h(X^1_{\sigma^n_1},\ldots,X^m_{\sigma^n_m})$ est le terme général d'une martingale positive et, d'autre part, on a

$$1 = \int \kappa(x_1,\ldots,x_m;\xi_1,\ldots,\xi_m)\mu(d\xi_1\otimes\ldots\otimes d\xi_m),$$

pour tout $(x_1,\ldots,x_m) \in S$, puisque $\mu$ est la mesure représentative de la constante 1. En rapprochant les deux relations, on voit que, quel que soit $(x_1,\ldots,x_m) \in S$, pour $\mu$-presque tout point $(\xi_1,\ldots,\xi_m) \in \partial S_{min}$ on a:

$$(x_1,\ldots,x_m) \in S_{\xi_1,\ldots,\xi_m}, \qquad P^{\xi_1,\ldots,\xi_m}_{x_1,\ldots,x_m}(F) = 1$$

et donc, par définition de $\phi$ et puisque $(X^1_{\zeta_1-},\ldots,X^m_{\zeta_m-}) = (\xi_1,\ldots,\xi_m)$ $P^{\xi_1,\ldots,\xi_m}_{x_1,\ldots,x_m}$-p.s.,

$$P^{\xi_1,\ldots,\xi_m}_{x_1,\ldots,x_m}\{\lim_{n\to\infty} h(X^1_{\sigma^n_1},\ldots,X^m_{\sigma^n_m}) = \phi(X^1_{\zeta_1-},\ldots,X^m_{\zeta_m-})\} = 1.$$

En intégrant par rapport à $\kappa(x_1,\ldots,x_m;\ \cdot\ )\mu$, on obtient, pour tout $(x_1, \ldots,x_m) \in S$,

$$P_{x_1,\ldots,x_m}\{\lim_{n\to\infty} h(X^1_{\sigma^n_1},\ldots,X^m_{\sigma^n_m}) = \phi(X^1_{\zeta_1-},\ldots,X^m_{\zeta_m-})\} = 1,$$

et, en remarquant alors que les fonctions $h(X^1_{\sigma^n_1},\ldots,X^m_{\sigma^n_m})$ sont uniformément intégrables par rapport à $P_{x_1,\dots,x_m}$, ce qui est une conséquence de la condition définissant la classe H, on en déduit:

$$h(x_1,\dots,x_m) = \lim_{n\to\infty} E_{x_1,\dots,x_m}\{h(X^1_{\sigma^n_1},\dots,X^m_{\sigma^n_m})\} =$$

$$= E_{x_1,\dots,x_m}\{\lim_{n\to\infty} h(X^1_{\sigma^n_1},\dots,X^m_{\sigma^n_m})\} = E_{x_1,\dots,x_m}\{\phi(X^1_{\zeta_1-},\dots,X^m_{\zeta_m-})\} =$$

$$= \int \kappa(x_1,\dots,x_m;\xi_1,\dots,\xi_m)\phi(\xi_1,\dots,\xi_m)\mu(d\xi_1\otimes\dots\otimes d\xi_m),$$

ce qui prouve la première partie du théorème.

L'unicité résulte aussitôt de la réciproque dont voici la démonstration: soit $\phi$ positive, mesurable pour la mesure $\mu$ et élément de $L_1\big(\kappa(x_1,\dots,x_m;\ \cdot\ )\mu\big)$ pour tout $(x_1,\dots,x_m) \in S$ et soit h donnée par la formule (1). Appelons $h_a$ la fonction définie par la même formule avec $\phi_a = \phi\wedge a$ à la place de $\phi$, a désignant une constante positive. D'après le théorème 4 dans [8], $\phi_a$ est univoquement déterminée (à une équivalence près modulo $\mu$) par $h_a$. Or, il est clair que $h_a$ appartient à D et la partie du théorème déjà établie montre que l'on a, $P_{x_1,\dots,x_m}$-p.s. pour tout $(x_1,\dots,x_m)$ dans S:

$$\lim_{n\to\infty} h_a(X^1_{\sigma^n_1},\dots,X^m_{\sigma^n_m}) = \phi_a(X^1_{\zeta_1-},\dots,X^m_{\zeta_m-}).$$

En outre, d'après l'inégalité des martingales de Doob on a, b étant une constante $<a$ et $\lambda \geq 0$:

$$\lambda P_{x_1,\dots,x_m}\{\sup_n (h_a - h_b)(X^1_{\sigma^n_1},\dots,X^m_{\sigma^n_m}) \geq \lambda\} \leq$$

$$\leq \sup_n E_{x_1,\dots,x_m}\{(h_a - h_b)(X^1_{\sigma^n_1},\dots,X^m_{\sigma^n_m})\} =$$

$$= \int \kappa(x_1,\dots,x_m;\xi_1,\dots,\xi_m)(\phi_a - \phi_b)(\xi_1,\dots,\xi_m)\mu(d\xi_1\otimes\dots\otimes d\xi_m).$$

Cela entraîne que, quel que soit $(x_1,\dots,x_m) \in S$, $P_{x_1,\dots,x_m}$-p.s. $h_a(X^1_{\sigma^n_1}, \dots, X^m_{\sigma^n_m})$ converge vers $h(X^1_{\sigma^n_1},\dots,X^m_{\sigma^n_m})$ uniformément en n quand $a \to \infty$ et donc que $h(X^1_{\sigma^n_1},\dots,X^m_{\sigma^n_m})$ converge $P_{x_1,\dots,x_m}$-p.s. vers $\phi(X^1_{\zeta_1 -},\dots,X^m_{\zeta_m -})$ quand $n \to \infty$. Il reste donc seulement à vérifier que h appartient à D. Or, il est évident que h est multi-harmonique et l'argument utilisé dans [9] pour démontrer le théorème 4.2 montre que h est uniformément intégrable par rapport à $\{P_{K^n_1}(x_1,dy_1) \otimes \dots \otimes P_{K^n_m}(x_m,dy_m)\}_{n=1,2,\dots}$, ce qui prouve que $h \in D$.

La dernière partie du théorème résulte des relations

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} P_{K^n_1}\cdots P_{K^n_m}(h[\log^+ h]^{m-1})(x_1,\dots,x_m) = \\
&= \lim_{n\to\infty} E_{x_1,\dots,x_m}\{h[\log^+ h]^{m-1}(X^1_{\sigma^n_1},\dots,X^m_{\sigma^n_m})\} = \\
&= E_{x_1,\dots,x_m}\{\phi[\log^+\phi]^{m-1}(X^1_{\zeta_1 -},\dots,X^m_{\zeta_m -})\} = \\
&= \int \kappa(x_1,\dots,x_m;\xi_1,\dots\xi_m)\phi[\log^+\phi]^{m-1}(\xi_1,\dots,\xi_m)\mu(d\xi_1\otimes\dots\otimes d\xi_m)
\end{aligned}$$

et de celles analogues que l'on obtient en remplaçant $h[\log^+ h]^{m-1}$ par $h^p$ et $\phi[\log^+\phi]^{m-1}$ par $\phi^p$. La démonstration est donc achevée.

On dira que h est continue à droite sur les trajectoires de $(X^1_{t_1},\dots X^m_{t_m})$ si, pour tout $(x_1,\dots,x_m) \in S$, on a $P_{x_1,\dots,x_m}$-p.s.,

$$\lim_{t'_1 \downarrow t_1,\dots,t'_m \downarrow t_m} h(X^1_{t'_1},\dots,X^m_{t'_m}) = h(X^1_{t_1},\dots,X^m_{t_m}),$$

quels que soient $t_1 < \zeta_1,\dots,t_m < \zeta_m$.

On dira que h admet des limites à gauche sur les mêmes trajectoires si, pour tout $(x_1,\dots,x_m) \in S$, $P_{x_1,\dots,x_m}$-p.s. la limite

$$\lim_{t'_1 \uparrow t_1,\dots,t'_m \uparrow t_m} h(X^1_{t'_1},\dots,X^m_{t'_m})$$

existe, quels que soient $t_1 < \zeta_1,\dots,t_m < \zeta_m$.

Théorème 4. Toute fonction h de la classe H (en particulier, toute fonction de la classe $H_p$) est continue à droite et admet des limites à gauche sur les trajectoires de $(X_{t_1},\dots,X_{t_m})$. En outre, $\phi$ étant la fonction associée à h dans le théorème 3, on a:

$$\lim_{t_1 \uparrow \zeta_1,\dots,t_m \uparrow \zeta_m} h(X^1_{t_1},\dots,X^m_{t_m}) = \phi(X^1_{\zeta_1 -},\dots,X^m_{\zeta_m -}),$$

$P_{x_1,\dots,x_m}$-p.s. pour tout $(x_1,\dots,x_m) \in S$.

La démonstration est analogue à celle de la première partie du théorème 2 et sera postposée aux remarques suivantes:

1. Pour les fonctions multiharmoniques bornées, la première partie du théorème est une conséquence immédiate du théorème dans [12].

2. On obtient des classes $H_p$, H et D légèrement plus grandes (et liées de manière plus naturelle à l'hypothèse (B)) en remplaçant "pour tout $(x_1,\dots,x_m) \in S$", dans les conditions qui les caractérisent, par "pour $\eta$-presque tout $(x_1,\dots,x_m) \in S$", $\eta$ dénotant la mesure produit des mesures fondamentales associées à chacun des processus $X_1,\dots,X_m$ par l'hypothèse (B). Le même changement dans le reste du paragraphe fournit alors des résultats relatifs à ces nouvelles classes. En outre, dans ce cas, la condition $\phi \in L_1(\mu)$ caractérise la classe $D \cap L_1(r)$, où r désigne la mesure produit des mesures de référence, et les conditions $\phi\,[\log^+\phi]^{m-1} \in L_1(\mu)$ et $\phi \in L_p(\mu)$ respectivement les sous-classes de H et $H_p$ des fonc-

tions multi-harmoniques h telles que

$$\lim_{n\to\infty} P_{K_1^n}\dots P_{K_m^n}(h[\log^+ h]^{m-1}) \in L_1(r) \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} P_{K_1^n}\dots P_{K_m^n}(h^p) \in L_1(r)$$

(rappelons qu'une fonction multi-harmonique ou, plus généralement, multi--excessive de $L_1(r)$ est finie $\eta$-p.p. ou, ce qui revient au même, localement intégrable par rapport à cette mesure).

3. Si pour chaque j $S^j$ est un demi-espace euclidien de dimension $\geq 2$ et $X_j$ un mouvement brownien dans $S^j$, grâce à un résultat de Brelot et Doob ([4] théorème 3) on déduit du théorème 4 que si h appartient à H (en particulier à $H_p$), alors en presque tout point $(\xi_1,\dots,\xi_m)$ (mesure de Lebesgue) du produit des frontières euclidiennes de $S^1,\dots,S^m$ la limite angulaire

$$\lim_{\substack{x_1 \to \xi_1,\dots,x_m \to \xi_m \\ x_1 \in C_{\xi_1} \quad x_m \in C_{\xi_m}}} h(x_1,\dots,x_m)$$

existe et est finie, quels que soient les domaines coniques $C_{\xi_1}$ dans $S^1$ de sommet $\xi_1$, ... , $C_{\xi_m}$ dans $S^m$ de sommet $\xi_m$. C'est un résultat classique bien connu ([13], [3], [5]).

La démonstration est analogue à celle du théorème 3 dans [4]:

La conclusion du théorème 4 entraîne que, pour $(x_1,\dots,x_m) \in S$ fixé,

$$\lim_{t_1 \uparrow \zeta_1,\dots,t_m \uparrow \zeta_m} h(X^1_{t_1},\dots,X^m_{t_m}) = \phi(X^1_{\zeta_1 -},\dots,X^m_{\zeta_m -}),$$

$P^{\xi_1,\dots,\xi_m}_{x_1,\dots,x_m}$-p.s. pour presque tout $(\xi_1,\dots,\xi_m)$ (mesure de Lebesgue) de $\partial S$. Soit $(\xi_1,\dots,\xi_m)$ un point pour lequel cette relation a lieu. Tout revient à démontrer que si $\ell$ est une valeur d'adhérence de h relative à $C_{\xi_1} \times \dots \times C_{\xi_m}$, alors $\ell$ est valeur d'adhérence de $h(X^1_{t_1}(\omega_1),\dots,X^m_{t_m}(\omega_m))$ quand

$t_1 \uparrow \zeta_1(\omega_1),\dots,t_m \uparrow \zeta_m(\omega_m)$, pour $P^{\xi_1,\dots,\xi_m}_{x_1,\dots,x_m}$-presque tout $(\omega_1,\dots,\omega_m)$. On suppose que $\ell$ est fini (on procède de manière analogue quand $\ell = \infty$). Il existe une suite $(y^n_1,\dots,y^n_m)$ de points dans $C_{\xi_1} \times \dots \times C_{\xi_m}$ convergeant vers $(\xi_1,\dots,\xi_m)$ telle que $h(y^n_1,\dots,y^n_m)$ converge vers $\ell$, quand $n \to \infty$. Il s'ensuit que, $\delta > o$ étant donné, on a $\ell - \delta \leq h(y^n_1,\dots,y^n_m) \leq \ell + \delta$ pour tout $n \geq q$. Or, soit $\alpha \in ]o, 1[$. Désignons par $d^n_j$ la distance de $y^n_j$ de $\partial S^j$ et par $B^n_j$ la boule dans $S^j$ de centre $y^n_j$ et de rayon $\alpha d^n_j$. En vertu de l'inégalité de Harnack on a, quel que soit $n \geq q$, pour tout $(y_1,\dots,y_m) \in B^n_1 \times \dots \times B^n_m$:

$$(\ell - \delta)/\theta(\alpha) \leq h(y_1,\dots,y_m) \leq (\ell + \delta)\theta(\alpha),$$

où $\theta(\alpha) \to 1$ quand $\alpha \to o$. Il résulte que, $\varepsilon > o$ étant donné, en choisissant $\delta < \varepsilon$ et $\alpha$ suffisamment petit on a:

$$\ell - \varepsilon \leq h(y_1,\dots,y_m) \leq \ell + \varepsilon,$$

pour tout $(y_1,\dots,y_m) \in \bigcup_{n\geq q}(B^n_1 \times \dots \times B^n_m)$. Il suffit donc de prouver que, en excluant au besoin un ensemble négligeable pour $P^{\xi_1,\dots,\xi_m}_{x_1,\dots,x_m}$, pour chaque $(\omega_1,\dots,\omega_m)$ $\left(X^1_{t_1}(\omega_1),\dots,X^m_{t_m}(\omega_m)\right)$ rencontre $\bigcup_{n\geq q}(B^n_1 \times \dots \times B^n_m)$ pour des valeurs de $t_1 < \zeta_1(\omega_1)$, ... , $t_m < \zeta_m(\omega_m)$ arbitrairement proches respectivement de $\zeta_1(\omega_1)$, ... , $\zeta_m(\omega_m)$, et cela pour chaque q. La preuve repose sur le résultat, établit à la fin de la démonstration du théorème 3 dans [4], selon lequel l'ensemble $\bigcup_i B^{n_i}_j$ n'est pas effilé en $\xi_j$, quelle que soit la suite $n_1 < n_2 < \dots$ . Cela entraîne que, à l'exclusion éventuellement d'un ensemble négligeable pour $P^{\xi_j}_{x_j}$, pour chaque $\omega_j$ $X^j_{t_j}(\omega_j)$ rencontre $\bigcup_i B^{n_i}_j$ pour des valeurs de $t_j < \zeta_j(\omega_j)$ arbitrairement proches de $\zeta_j(\omega_j)$. Si donc $\omega_1$ appartient au complémentaire d'un ensemble négligeable pour $P^{\xi_1}_{x_1}$, il existe une suite d'indices $t^1_1$, $t^2_1$, ... dans $]\zeta_1(\omega_1) - \delta$ , $\zeta_1(\omega_1)[$ et une suite d'entiers $\geq q$ $n_1 < n_2 < \dots$ telles que l'on ait

$X^1_{t^i_1}(\omega_1) \in B_1^{n_i}$ pour tout i. D'autre part, pour chaque $\omega_2$ choisi en dehors d'un ensemble négligeable pour $P^{\xi_2}_{x_2}$ (pouvant dépendre de $\omega_1$), il existe $t_2 \in \,]\zeta_2(\omega_2) - \delta, \zeta_2(\omega_2)[$ tel que $X^2_{t_2}(\omega_2) \in \bigcup_i B_2^{n_i}$. Il s'ensuit que $X^2_{t_2}(\omega_2) \in B_2^{n_i}$ pour un certain $n_i$, donc que $\left(X^1_{t^i_1}(\omega_1), X^2_{t_2}(\omega_2)\right) \in B_1^{n_i} \times B_2^{n_i} \subset \bigcup_{n \geq q}(B_1^n \times B_2^n)$, ce qui prouve la proposition pour m = 2. Par le même raisonnement on démontre que si elle est vraie pour m = k-1, elle est vraie aussi pour m = k. La démonstration est donc achevée.

4. Comme la limite du théorème 4 entraîne la limite angulaire, un résultat de Saks [14] montre que la seconde partie du théorème cesse d'être vraie pour les fonctions de la classe D. Les résultats de Jessen, Marcinkiwicz et Zygmund [3] montrent d'ailleurs que, pour la validité de cette seconde partie, la condition définissant la classe H est la meilleure possible au sens de la seconde partie du théorème 2. La première partie est vraie aussi pour toute fonction multi-harmonique h telle que

$$P_{K^n_1} \cdots P_{K^n_m}(h[\log^+ h]^{m-1})(x_1, \dots x_m) < \infty$$

pour tout $(x_1, \dots, x_m) \in S$ et tout n. On ne sait pas si elle est vraie pour toute fonction multi-harmonique.

5. Signalons qu'une étude probabiliste du problème de la convergence angulaire restreinte à la frontière distinguée du quotient de deux fonctions multi-harmoniques a été faite par Walsh dans sa thèse [15].

Voici pour terminer une esquisse de la démonstration du théorème 4:

Considérons la classe $\Phi$ des fonctions $\phi$ ($\phi$ désignera toujours une fonction positive dans $\partial S$ mesurable pour $\mu$ ) qui sont bornées et pour lesquelles les conclusions du théorème sont vraies si on prend comme h la fonction multi-harmonique associée à $\phi$ par la relation (1) du théorème 3. La classe $\Phi$ contient les fonctions du type produit dont le j-ème facteur est une fonction positive dans $\partial S^j$, bornée et mesurable pour $\mu_j$. En outre, si $\phi_1$, $\phi_2 \in \Phi$, alors $\lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2 \in \Phi$ $(\lambda_1, \lambda_2 \geq o)$ et $\phi_1 - \phi_2 \in \Phi$ à condition que $\phi_1 \geq \phi_2$. On va montrer que si $\phi_i$ appartient à $\Phi$ pour tout i et tend en croissant vers une fonction bornée $\phi$, alors $\phi$ appartient à $\Phi$. A cet effet, appelons $h_i$ et h les fonctions multi-harmoniques associées respectivement à $\phi_i$ et $\phi$. Pour chaque i, n,

$$\left(h_i(X^1_{t_1 \wedge \sigma^n_1}, \ldots, X^m_{t_m \wedge \sigma^n_m}),\ \mathcal{F}^1_{t_1 \wedge \sigma^n_1} \otimes \ldots \otimes \mathcal{F}^m_{t_m \wedge \sigma^n_m}\right)$$

est une martingale sur $(\Omega_1 \times \ldots \times \Omega_m, P_{x_1,\ldots,x_m})$, où $(x_1,\ldots,x_m)$ est un point quelconque de S. Puisque $h_i$ est par hypothèse continue à droite sur les trajectoires de $(X^1_{t_1},\ldots,X^m_{t_m})$, en vertu de la seconde inégalité du théorème 1, on peut écrire, p étant > 1, $\lambda > o$ et $i > k$ (cf. [16] théorème 10.1):

$$P_{x_1,\ldots,x_m}\{\sup_{t_1,\ldots,t_m}(h_i - h_k)(X^1_{t_1} \wedge \sigma^n_1, \ldots, X^m_{t_m} \wedge \sigma^n_m) > \lambda\} \leq$$

$$\leq (1/\lambda^p)\, E_{x_1,\ldots,x_m}\{\sup_{t_1,\ldots,t_m}(h_i - h_k)^p(X^1_{t_1} \wedge \sigma^n_1, \ldots, X^m_{t_m} \wedge \sigma^n_m)\} \leq$$

$$\leq (A_{p,m}/\lambda^p)\, E_{x_1,\ldots,x_m}\{(h_i - h_k)^p(X^1_{\sigma^n_1}, \ldots, X^m_{\sigma^n_m})\} \leq$$

$$\leq (A_{p,m}/\lambda^p)\, E_{x_1,\ldots,x_m}\{(\phi_i - \phi_k)^p(X^1_{\zeta_1-}, \ldots, X^m_{\zeta_m-})\},$$

cette dernière majoration étant justifiée par l'hypothése $\phi_i$, $\phi_k \in \Phi$ ou par le théorème 3. On en déduit que

$$P_{x_1,\ldots,x_m}\{\sup_{n,t_1,\ldots,t_m}(h_i - h_k)(X^1_{t_1} \wedge \sigma^n_1, \ldots, X^m_{t_m} \wedge \sigma^n_m) > \lambda\}$$

est majoré par

$$(A_{p,m}/\lambda^p) \int \kappa(x_1,\ldots,x_m;\xi_1,\ldots,\xi_m)(\phi_i - \phi_k)^p(\xi_1,\ldots,\xi_m)\mu(d\xi_1 \otimes \cdots \otimes d\xi_m)$$

qui tend vers o quand i, k $\to \infty$ et cela entraîne que $P_{x_1,\ldots,x_m}$-p.s. $h_i(X^1_{t_1},\ldots,X^m_{t_m})$ converge vers $h(X^1_{t_1},\ldots,X^m_{t_m})$ uniformément en $t_1 < \zeta_1$, ... , $t_m < \zeta_m$ quand $i \to \infty$, ce qui prouve que $\phi \in \Phi$ et donc que $\Phi$ contient toutes les fonctions $\phi$ bornées. Soit alors $\phi[\log^+\phi]^{m-1} \in L_1(\kappa(x_1,\ldots,x_m);\cdot)\mu)$ pour tout $(x_1,\ldots,x_m) \in S$. Posons $\phi_i = \phi \wedge i$ et appelons à nouveau $h_i$ et h les fonctions multi-harmoniques associées à $\phi_i$ et $\phi$. En procédant comme dans la démonstration du théorème 2, on prouve, au moyen de la première inégalité du théorème 1, que $P_{x_1,\ldots,x_m}$-p.s. $h_i(X^1_{r_1},\ldots,X^m_{r_m})$ converge vers $h(X^1_{r_1},\ldots,X^m_{r_m})$ uniformément en $r_1 < \zeta_1$, ... , $r_m < \zeta_m$ quand $i \to \infty$, où $r_1$, $r_2$, ... , $r_m$ sont des rationnels $\geqq$ o. Les conclusions du théorème sont donc vraies pour h, puisqu'elles sont vraies pour chaque $h_i$, d'après ce qu'on vient de démontrer. Il ne reste plus qu'à remarquer que, d'après le théorème 3, chaque $h \in H$ est associé à un $\phi$ tel que $\phi[\log^+\phi]^{m-1} \in L_1(\kappa(x_1,\ldots,x_m;\ \cdot\ )\mu)$ pour tout $(x_1,\ldots,x_m) \in S$.

## BIBLIOGRAPHIE


[1] J. L. Doob, Stochastic processes, J. Wiley, New York, 1953.

[2] P. A. Meyer, Probabilités et potentiel, Hermann, Paris, 1966.

[3] B. Jessen, J. Marcinkiewicz et A. Zygmund, Note on the differentiability of multiple integrals, Fund. Math., 25, 1935, p. 217-234.

[4] M. Brelot et J. L. Doob, Limites angulaires et limites fines, Ann. Inst. Fourier, 13, 1963, p. 395-415.

[5] A. Zygmund, Trigonometric Series, Cambridge University Press, 1959.

[6] H. Kunita et T. Watanabe, Markov processes and Martin boundaries I, Illinois J. Math., 9, 1965, p. 485-526.

[7] P. A. Meyer, Processus de Markov: la frontière de Martin, Lecture Notes in Math., 77, Springer Verlag, Berlin, 1968.

[8] R. Cairoli, Une représentation intégrale pour fonctions séparément excessives, Ann. Inst. Fourier, 18, 1968, p. 317-338.

[9] J. L. Doob, Probability methods applied to the first boundary value problem, Proc. third Berkeley Symp., vol. 2, 1956, p. 49-80.

[10] H. Föllmer, Feine Toplogie am Martinrand eines Standardprozesses, Thèse, Université de Erlangen-Nürnberg, 1968.

[11] J. L. Doob, Conditional Brownian motion and the boundary limits of harmonic functions, Bull. Soc. math. France, 85, 1957, p.431-458.

[12] R. Cairoli, Sur une classe de fonctions séparément excessives, Comptes rendus, 267, série A, 1968, p. 412-414.

[13] A. Zygmund, On the differentiability of multiple integrals, Fund. Math., 23, 1934, p. 143-149.

[14] S. Saks, Remark on the differentiability of the Lebesgue indefinite integral, Fund. Math., 22, 1934, p. 257-261.

[15] J. B. Walsh, Probability and a Dirichlet problem for multiply superharmonic functions, Thèse, Illinois University, 1966.

[16] J. L. Doob, Some classical function theory theorems and their moder versions, Ann. Inst. Fourier, 15, 1965, p. 113-136.

R. Cairoli

Ecole Polytechnique Fédérale
Lausanne ( Suisse ).