SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

RENZO CAIROLI

Étude probabiliste d'un problème de Dirichlet

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 3 (1969), p. 34-92
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1969__3__34_0>

BATTELLE INSTITUTE
Advanced Studies Center
GENEVE

ETUDE PROBABILISTE D'UN PROBLEME DE DIRICHLET

par

R. Cairoli*)

1. INTRODUCTION

Dans son excellente thèse [1], J.B. Walsh a abordé, d'un point de vue probabiliste, l'étude d'un problème de Dirichlet pour fonctions multi-surharmoniques. Nous allons reprendre ici ses idées essentielles et ses méthodes afin de montrer comment formuler et traiter un problème analogue dans le cadre d'une axiomatique convenable. Les principaux résultats sont dus à J.B. Walsh et leur transposition, le plus souvent, ne présente de difficultés supplémentaires que d'ordre technique.

2. PROCESSUS CONTINUS

Soient E un espace localement compact, non compact et à base dénombrable, $E_\delta = E \cup \{\delta\}$ son compactifié d'Alexandrov.

On dit qu'une trajectoire (application de $[o, \infty[$ dans E_δ) est <u>continue et absorbée par δ</u> si l'ensemble des points où sa valeur est δ est de la forme $[a, \infty[$, avec $a \in [o, \infty]$, et si elle est continue en tout point de $[o, a[$.

*) Subventionné par le Fonds national suisse de la recherche scientifique

On dit qu'un processus stochastique, admettant $[0, \infty[$ comme ensemble des temps (ce qu'on ne précisera plus par la suite) et à valeurs dans E_δ est <u>continu</u> si toutes ses trajectoires sont continues et absorbées par δ.

On désigne par Ω le sous-ensemble de $(E_\delta)^{[0, \infty[}$ formé des trajectoires continues et absorbées par δ, par X_t la restriction à Ω de l'application coordonnée t, par $\mathcal{F}_t$ la tribu dans Ω engendrée par les variables X_s d'indice $s \leqq t$ et par $\mathcal{F}$ la tribu engendrée par la réunion des $\mathcal{F}_t$.

Un processus continu induit une probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{F})$: on appelle $(\Omega, \mathcal{F}, X_t, P)$ le processus canonique induit. Ainsi, la donnée d'un processus continu équivaut à celle d'une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$. Dans ce qui suit, on aura essentiellement à faire à des processus canoniques. Par abus de langage, on les désignera, en même temps que la probabilité qui les caractérise, par le symbole P.

Pour tout $\omega \in \Omega$, $X_\infty(\omega)$ sera, par convention, égal à δ. Si A est un sous-ensemble de E, on dénotera par σ_A le temps de sortie de (X_t) de A : $\sigma_A(\omega) = \inf\{t : t \in [0, \infty], X_t(\omega) \in E_\delta - A\}$. Lorsque A est un ouvert, σ_A est un temps d'arrêt relativement à $(\mathcal{F}_t)$. En effet, $\{\sigma_A > t\} = \bigcup_{A'} \bigcap_r \{X_r \in A'\}$, où r parcourt t et les rationnels positifs inférieurs à t et A' une suite croissante d'ouverts d'adhérence contenue dans A formant un recouvrement de A, donc $\{\sigma_A \leqq t\} \in \mathcal{F}_t$. On écrira X_t^A, plutôt que $X_{t\wedge\sigma_A}$, pour désigner la variable $\omega \longmapsto X_{t\wedge\sigma_A(\omega)}(\omega)$.

3. REPARTITIONS DE SORTIE ET FONCTIONS SURHARMONIQUES

On désigne par $\mathcal{U}$ l'ensemble des ouverts non vides de E relativement compacts dans E et par $\mathcal{G}$ une base de la topologie de E telle que $\mathcal{G} \subset \mathcal{U}$.

Pour tout $x \in E$, on note $\mathcal{U}(x)$ et $\mathcal{G}(x)$ respectivement les ensembles $\{U: x \in U \in \mathcal{U}\}$ et $\{G: x \in G \in \mathcal{G}\}$.

Si A est un sous-ensemble de E, on désigne par $\bar{A}$ et par ∂A respectivement l'adhérence et la frontière de A dans E.

On appelle fonction numérique une fonction à valeurs dans $[-\infty, \infty]$ et fonction positive une fonction numérique $\geqq 0$.

Par la suite, il sera souvent commode d'identifier une fonction numérique définie dans un sous-ensemble de E à son prolongement par la valeur zéro à E_δ. Si le cas demande cette identification, elle sera faite sans autre commentaire.

<u>Définition 1</u>. On dira qu'une famille $(\Pi_G)_{G \in \mathcal{G}}$ de noyaux sur E est une famille de <u>répartitions de sortie</u> (la justification de cette appellation apparaîtra au paragraphe 5) si

(a) pour chaque $G \in \mathcal{G}$, $x \in E$, $\Pi_G(x, E) = 1$;

(b) pour chaque $G \in \mathcal{G}$, la mesure $\Pi_G(x, \cdot)$ est portée par ∂G si $x \in G$ [(1)], elle est concentrée en x si $x \notin G$ [(2)].

---

(1) ∂G est alors nécessairement non vide.

(2) La propriété supplémentaire $\Pi_G \Pi_{G'} = \Pi_{G'}$, pour tout couple G, G' d'éléments de $\mathcal{G}$ tel que $G \subset G'$, ferait de $(\Pi_G)_{G \in \mathcal{G}}$ une famille de noyaux harmoniques telle qu'elle a été définie dans [2] (p. 8-04 et 8-37).

Pour chaque G, Π_G induit de manière naturelle un noyau sur chaque ouvert V de E contenant $\overline{G}$. Ce noyau sera noté par le même symbole. Ainsi, f étant une fonction numérique dans V, universellement mesurable et localement minorée, $\Pi_G f$ désignera la fonction obtenue en appliquant le noyau induit à f.

<u>Définition 2</u>. Soient (Π_G) [3] une famille de répartitions de sortie et V un ouvert de E. Une fonction numérique f, définie dans V, sera dite <u>surharmonique</u> dans V si

(a) $f(x) > -\infty$ pour tout $x \in V$;

(b) f est semi-continue inférieurement (s.c.i.);

(c) $\Pi_G f(x) \leqq f(x)$ pour tout $G \in \mathcal{G}$ tel que $\overline{G} \subset V$ et tout $x \in V$.

On dira que f est <u>sousharmonique</u> dans V si -f est surharmonique dans V. Une fonction qui est en même temps surharmonique et sousharmonique dans V sera dite <u>harmonique</u> dans V.

Il est clair que les fonctions surharmoniques dans V forment un cône convexe semi-réticulé inférieurement, qui contient les fonctions constantes et qui est stable par rapport aux passages à la limite croissants.

On dit qu'un noyau borné N sur E est fortement fellérien dans l'ouvert $V \subset E$, si la fonction Nf est continue dans V pour toute fonction borélienne bornée f dans E ([2], p. 8-12) [4].

---

(3) Le suffixe $G \in \mathcal{G}$ sera désormais omis.

(4) Nf est alors continue dans V pour toute fonction numérique f dans E, universellement mesurable et bornée ([2], p. 8-46).

Si Π_G est fortement fellérien dans G pour chaque G, on dira que (Π_G) est une famille fortement fellérienne de répartitions de sortie.

Si la famille (Π_G) est fortement fellérienne, on peut définir, de manière équivalente, les fonctions harmoniques dans V comme les fonctions numériques f dans V, universellement mesurables et localement bornées telles que $\Pi_G f(x) = f(x)$ pour tout $x \in V$ et tout $G \in \mathcal{G}$ avec $\overline{G} \subset V$.

<u>Proposition 1</u>. Supposons que (Π_G) soit fortement fellérienne. Soit f une fonction numérique dans un ouvert $V \subset E$, universellement mesurable et localement minorée. Pour que f soit surharmonique dans V, il faut alors et il suffit que

(a) $\Pi_G f(x) \leqq f(x)$ pour tout $G \in \mathcal{G}$ tel que $\overline{G} \subset V$ et tout $x \in V$;

(b) $\sup\{\Pi_G f(x) : G \in \mathcal{G}(x), \overline{G} \subset V\} = f(x)$ pour tout $x \in V$.

En effet, x étant un point dans V, ces deux conditions entraînent l'égalité $\sup\{\Pi_G f(y) : G \in \mathcal{G}(x), \overline{G} \subset V\} = f(y)$ pour tout $y \in V$. Comme chaque terme $\Pi_G f$ est s.c.i. au point x, il s'ensuit que f est s.c.i. au point x. La fonction f est donc surharmonique dans V. Réciproquement, cette propriété entraîne d'abord que f est limite d'une suite croissante (f_m) de fonctions continues finies dans V. Si donc (G_n) désigne une suite d'éléments de $\mathcal{G}(x)$ telle que $\overline{G}_n$ décroît vers $\{x\}$ et $\overline{G}_1 \subset V$, on a $f(x) \leqq \liminf_{n \to \infty} \Pi_{G_n} f(x)$ car, pour chaque m, $\lim_{n \to \infty} \Pi_{G_n} f_m(x) = f_m(x)$, en raison de la continuité de f_m. Grâce à (a), cette inégalité entraîne (b).

4. RECOLLEMENT ET TRANSLATION CONDITIONNELLE

Sur les processus continus que l'on rencontrera par la suite, des opérations de deux types seront souvent effectuées, l'une de recollement et l'autre de translation conditionnelle.

Recollement. Soient P un processus continu, σ un temps d'arrêt [5] et $(P_\omega)_{\omega \in \Omega}$ une famille de processus continus satisfaisant aux conditions suivantes, dites conditions de recollement relatives à P, σ:

(a) pour chaque $F \in \mathcal{F}$, l'application $\omega \longmapsto P_\omega(F)$ est mesurable pour P;

(b) $P_\omega\{X_0 = X_\sigma(\omega)\} = 1$ pour P-presque tout ω.

On exprimera souvent la condition (a) en disant que (P_ω) est mesurable pour P. En outre, on dira que (P_ω) est mesurable si l'application figurant dans cette condition est mesurable.

Pour chaque $t \in [0, \infty[$, $(\omega', \omega'') \in \Omega \times \Omega$, $M \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}$, on pose

$$\hat{X}_t(\omega', \omega'') = \begin{cases} X_t(\omega') & \text{si} \quad X_\sigma(\omega') \neq X_0(\omega'') \\ & \text{ou si} \quad X_\sigma(\omega') = X_0(\omega'') \quad \text{et} \quad t \leqq \sigma(\omega') \,; \\ X_{t-\sigma(\omega')}(\omega'') & \text{si} \quad X_\sigma(\omega') = X_0(\omega'') \quad \text{et} \quad t > \sigma(\omega') \,; \end{cases}$$

$$\hat{P}(M) = \int (\varepsilon_\omega \otimes P_\omega)(M)dP(\omega).$$

Le processus $(\Omega \times \Omega, \hat{X}_t, \hat{P})$ ainsi défini est manifestement continu. Le processus canonique $\hat{\hat{P}}$ qu'il induit sera appelé processus recollé de P et (P_ω) au temps σ. On le désignera parfois par la notation détaillée $\mathfrak{R}_\sigma(P, (P_\omega))$. Il jouit des propriétés suivantes:

---

[5] Relativement à $(\mathcal{F}_t)$, ce qu'on ne précisera plus par la suite.

(R.a) $\hat{\hat{P}}(F) = P(F)$ pour tout $F \in \mathcal{F}_\sigma$, ce qui revient à dire que les processus $(\Omega, X_{t\wedge\sigma}, \hat{\hat{P}})$ et $(\Omega, X_{t\wedge\sigma}, P)$ sont équivalents;

(R.b) $\hat{\hat{P}}(\theta_\sigma^{-1}F) = \int P_\omega(F)dP(\omega)$ pour tout $F \in \mathcal{F}$ (6);

(R.c) $\hat{\hat{P}}(H \cap \theta_\sigma^{-1}F) = \int_H P_\omega(F)dP(\omega)$, pour tout $H \in \mathcal{F}_\sigma$, $F \in \mathcal{F}$.

En effet, en vertu d'un théorème de Ph. Courrège et P. Priouret ([3], corollaire 1, p. 252), $\sigma(\hat{X}_\bullet(\omega', \omega'')) = \sigma(\omega')$. En outre, N désignant l'ensemble $\{(\omega', \omega''): X_\sigma(\omega') \neq X_o(\omega'')\}$, on a $\hat{P}(N) = o$, en raison de (b). A l'aide de ces deux résultats on va démontrer (R.c) qui, de manière évidente, entraîne (R.a) et (R.b). Il suffit de considérer des H de la forme $\{X_{t_1\wedge\sigma} \in B_1\} \cap \ldots \cap \{X_{t_n\wedge\sigma} \in B_n\}$ et des F de la forme $\{X_{t_1'} \in B_1'\} \cap \ldots \cap \{X_{t_m'} \in B_m'\}$, où $B_1, \ldots, B_n, B_1', \ldots, B_m'$ sont des sous-ensembles boréliens de E_δ et $o < t_1 < \ldots < t_n$, $o < t_1' < \ldots < t_m'$. Grâce au premier résultat auxiliaire, on vérifie alors sans peine que, pour tout $(\omega', \omega'') \notin N$, on a $\hat{X}_\bullet(\omega', \omega'') \in H \cap \theta_\sigma^{-1}F$ si et seulement si $(\omega', \omega'') \in H \times F$. Cela entraîne, en vertu du second résultat auxiliaire, $\hat{\hat{P}}(H \cap \theta_\sigma^{-1}F) = \hat{P}(H \times F) = \int_H P_\omega(F)dP(\omega)$ (7).

---

(6) (θ_t) dénote la famille des opérateurs de translation. On rappelle la convention $\theta_\infty(\omega) = \omega_\delta$, où ω_δ désigne la trajectoire de valeur constante égale à δ.

(7) Il convient de remarquer que les fonctions aléatoires $(X_{t\wedge\sigma})$ et $(X_{\sigma+t})$ ne sont en général pas conditionnellement indépendantes par rapport à $\hat{P}$, X_σ étant donnée. Pour qu'il en soit ainsi, il suffirait de remplacer, dans la définition de $\hat{P}$, ε_ω par P_ω^σ, $P_\bullet^\sigma$ désignant une version régulière de la probabilité conditionnelle $P\{\ |X_\sigma\}$ (voir note (8)). Le processus canonique induit par $\hat{P}$ modifié vérifie encore (R.a) — (R.c) et pourrait servir, aussi bien que l'autre, de définition de processus recollé.

Translation conditionnelle. Considérons à nouveau un processus continu P et un temps d'arrêt σ. Appelons $\mathcal{H}$ la tribu engendrée par X_σ et $\mathcal{H}^P$ la complétée de $\mathcal{H}$ pour la restriction de P à $\mathcal{H}$. Pour chaque ω, soit P_ω le processus canonique induit par $(\Omega, X_{\sigma+t}, P^\sigma_\omega)$, $P^\sigma_\bullet$ désignant une version régulière de la probabilité conditionnelle $P\{\ |\mathcal{H}\}$ (8). La famille $(P_\omega)_{\omega \in \Omega}$ ainsi définie sera notée $\mathfrak{T}_\sigma(P)$ et appelée processus translaté conditionnel de P relatif à σ. Cette famille jouit des propriétés suivantes:

(T.a) l'application $\omega \longmapsto P_\omega(F)$ est mesurable par rapport à $\mathcal{H}^P$, pour tout $F \in \mathcal{F}$;

(T.b) l'application $\omega \longmapsto P_\omega\{X_o = X_\sigma(\omega)\}$ est mesurable par rapport à $\mathcal{H}^P$ et sa valeur est 1 P-p.s.;

(T.c) $P(H \cap \theta_\sigma^{-1}F) = \int_H P_\omega(F)dP(\omega)$ pour tout $H \in \mathcal{H}$, $F \in \mathcal{F}$.

On a, en effet, $P_\omega(F) = P^\sigma_\omega(\theta_\sigma^{-1}F)$ pour tout ω et tout $F \in \mathcal{F}$. (T.a) et (T.c) sont donc évidentes. En outre, quel que soit ω, $P_\omega\{X_o = X_\sigma(\omega)\} = P^\sigma_\omega(H^\omega)$, où H désigne l'ensemble $\{(\omega, \omega'): X_\sigma(\omega) = X_\sigma(\omega')\}$. Or, il est facile de voir que, si M est un élément de la tribu $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$, $P^\sigma_\omega(M^\omega)$, en tant que fonction de ω, est mesurable par rapport à $\mathcal{H}^P$ et $P^\sigma_\omega(M^\omega) = I_M(\omega, \omega)$ P-p.s.. Cela entraîne (T.b), puisque H appartient à $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$.

---

(8) Pour chaque ω, P^σ_ω est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$; pour chaque $F \in \mathcal{F}$, l'application $\omega \longmapsto P^\sigma_\omega(F)$ est mesurable par rapport à $\mathcal{H}^P$; enfin, $\int_H P^\sigma_\omega(F)dP(\omega) = P(F \cap H)$, quels que soient $F \in \mathcal{F}$ et $H \in \mathcal{H}$ (voir l'appendice 1).

5. REALISATIONS, SYSTEMES STABLES ASSOCIES A UN OUVERT

Soit (Π_G) une famille de répartitions de sortie.

<u>Définition 3</u>. On dira qu'une famille de processus continus $(P_x^G)_{G \in \mathcal{G}(x),\, x \in E}$ est une <u>réalisation</u> de (Π_G) si,

(a) quel que soit $x \in E$, $P_x^G\{X_o = x\} = 1$ pour tout $G \in \mathcal{G}(x)$;

(b) $x \longmapsto P_x^G(F)$ est une fonction borélienne dans G, pour tout $G \in \mathcal{G}$, $F \in \mathcal{F}$;

(c) quel que soit $x \in E$, $P_x^G\{X_{\sigma_G} \in B\} = \Pi_G(x, B)$ pour tout borélien $B \subset E$ et tout $G \in \mathcal{G}(x)$.

On exprime la condition (a), pour un processus continu, en disant que le processus part de x. La condition (c) signifie que $\Pi_G(x,\cdot)$ est la répartition du processus P_x^G au sortir de G.

Dorénavant, on supposera que (Π_G) vérifie la condition suivante:

(E) pour chaque $G \in \mathcal{G}$, les mesures appartenant à la famille $\{\Pi_G(x,\cdot) : x \in G\}$ sont équivalentes [(9)].

Alors un ensemble de la tribu engendrée par X_{σ_G}, négligeable pour l'une quelconque des mesures appartenant à la famille $\{P_x^G : x \in G\}$, est négligeable pour toutes.

Soient donc (P_x^G) [(10)] une réalisation de (Π_G) et U un élément de $\mathcal{U}$. Désignons par $\underline{\underline{T}}(x)$, x étant un point dans U, l'ensemble des

---

(9) C'est en quelque sorte une hypothèse d'ellipticité (voir [4], paragraphe 5).

(10) Le suffixe $G \in \mathcal{G}(x)$, $x \in E$ sera désormais omis.

processus continus P partant de x tels que

(a) $P\{X_{\sigma_U} \in \partial U\} = 1$;

(b) P est localement équivalent à un processus P_x^G, cela signifiant qu'il existe $G \in \mathcal{G}(x)$, avec $\overline{G} \subset U$, tel que $P(F) = P_x^G(F)$ pour tout $F \in \mathcal{F}_{\sigma_G}$.

On appellera système de processus continus associé à U tout système $\underline{\underline{S}} = \left(\underline{\underline{S}}(x)\right)_{x \in U}$ formé d'ensembles $\underline{\underline{S}}(x) \subset \underline{\underline{T}}(x)$.

<u>Définition 4</u>. On dira que le système $\underline{\underline{S}}$ est stable pour les opérations de recollement et de translation conditionnelle ou, plus succinctement, <u>stable</u> si

(a) quels que soient $x \in U$, $G \in \mathcal{G}(x)$ tel que $\overline{G} \subset U$ et la famille (P_ω) mesurable pour P_x^G et telle que $P_\omega \in \underline{\underline{S}}\left(X_{\sigma_G}(\omega)\right)$ pour P_x^G-presque tout ω (11), on a $\mathfrak{R}_{\sigma_G}\left(P_x^G, (P_\omega)\right) \in \underline{\underline{S}}(x)$;

(b) quels que soient $x \in U$ et $P \in \underline{\underline{S}}(x)$, P étant localement équivalent à P_x^G, on a $\mathfrak{R}_{\sigma_G}\left(P_y^G, \mathfrak{T}_{\sigma_G}(P)\right) \in \underline{\underline{S}}(y)$ pour tout $y \in G$.

L'on remarquera que le processus recollé figurant dans (a) appartient en tout cas à $\underline{\underline{T}}(x)$. Cela résulte immédiatement de (R.a), (R.b) et de la relation $\sigma_U = \sigma_G + \sigma_U(\theta_{\sigma_G})$.

L'on remarquera aussi que l'opération de recollement effectuée dans (b) a un sens et fournit un processus de $\underline{\underline{T}}(y)$. En effet, d'après (T.a), si P_ω dénote l'élément général de $\mathfrak{T}_{\sigma_G}(P)$ et $\mathcal{H}$ la tribu engendrée par X_{σ_G}, l'application $\omega \longmapsto P_\omega(F)$ est mesurable par rapport

(11) (P_ω) satisfait donc aux conditions de recollement relatives à P_x^G, σ_G.

à $\mathcal{H}^P$, donc, en vertu de l'équivalence locale de P et P_x^G et de l'hypothèse (E), par rapport à $\mathcal{H}^{P_y^G}$. Grâce au même raisonnement, on déduit de (T.b) que $P_\omega\{X_o = X_{\sigma_G}(\omega)\} = 1$ pour P_y^G-presque tout ω. $\mathfrak{T}_{\sigma_G}(P)$ satisfait donc aux conditions de recollement relatives à P_y^G, σ_G, ce qui prouve la première assertion. Pour démontrer la seconde, on note d'abord que le processus récollé P_r qui y figure est localement équivalent à P_y^G, d'après (R.a), et en outre, que (T.c) et la relation $\sigma_U = \sigma_G + \sigma_U(\theta_{\sigma_G})$ entraînent l'égalité $P_\omega\{X_{\sigma_U} \in \partial U\} = 1$ pour P-presque tout ω, donc, en raison de (T.a), de l'équivalence locale et de l'hypothèse (E), pour P_y^G-presque tout ω. D'où, compte tenu de (R.b), $P_r\{X_{\sigma_U} \in \partial U\} = 1$.

Soit A un sous-ensemble borélien de ∂U. On désigne par $\underline{\underline{S}}(x, A)$ l'ensemble des processus $P \in \underline{\underline{S}}(x)$ tels que $P\{X_{\sigma_U} \in A\} = 1$ et par $\underline{\underline{S}}(A)$ le système $(\underline{\underline{S}}(x, A))_{x \in U}$.

<u>Proposition 2</u>. Si le système $\underline{\underline{S}}$ est stable, il en est de même de $\underline{\underline{S}}(A)$.

Pour démontrer cette proposition, il n'y a qu'à utiliser les raisonnements précédents faisant intervenir ∂U, en remplaçant toutefois ∂U par A.

<u>Définition 5</u>. On dira que $A \subset \partial U$ est une <u>frontière admissible</u> pour $\underline{\underline{S}}$ si A est fermé et si, pour chaque $x \in U$, l'ensemble $\underline{\underline{S}}(x, A)$ n'est pas vide.

Il convient de remarquer que $\underline{\underline{T}} = (\underline{\underline{T}}(x))_{x \in U}$ est un système stable et que, si U est par exemple connexe par arcs, tout point de ∂U qui est l'extrémité d'un arc situé dans U est une frontière admissible pour $\underline{\underline{T}}$. Ce système n'a toutefois aucun intérêt pour les objectifs qu'on s'est assignés.

6. SOLUTION GENERALISEE ASSOCIEE A UNE DONNEE-FRONTIERE

Soient (Π_G) une famille de répartitions de sortie, fortement fellérienne et vérifiant (E) et (P_x^G) une réalisation de (Π_G).

Soient en outre U un élément de $\mathcal{U}$, $\underline{\underline{S}}$ un système stable de processus continus associé à U, A une frontière admissible pour $\underline{\underline{S}}$ et φ une fonction numérique définie dans A, borélienne et minorée.

Suivant Walsh, on va associer à φ une fonction surharmonique Φ_φ^A dont on étudiera ensuite le comportement à la frontière A, lorsque φ est continue. Etant destinée à résoudre un problème de Dirichlet convenablement posé, la fonction Φ_φ^A sera <u>appelée solution généralisée de Dirichlet</u>. Sa valeur au point $x \in U$ est, par définition,

$$\Phi_\varphi^A(x) = \sup_{P \in \underline{\underline{S}}(x,\, A)} \int \varphi(X_{\sigma_U})dP.$$

<u>Théorème 1</u>. La solution généralisée de Dirichlet Φ_φ^A est une fonction surharmonique dans U.

On démontre d'abord les deux lemmes suivants:

<u>Lemme 1</u>. Soit G un élément de $\mathcal{G}(x)$ tel que $\overline{G} \subset U$ et soit f une fonction numérique dans Ω, minorée et mesurable par rapport à $\mathcal{H}^{P_x^G}$, où $\mathcal{H}$ désigne la tribu engendrée par X_{σ_G}. Alors $\int f\, dP_y^G$, en tant que fonction de $y \in G$, est s.c.i.

On peut supposer que f est bornée. Si f est mesurable par rapport à $\mathcal{H}$, il existe une fonction borélienne bornée g dans E_δ telle que $f = g(X_{\sigma_G})$. Alors $\int f\, dP_y^G = \Pi_G g(y)$ et la conclusion du lemme est une conséquence de la fellérénéité forte des répartitions de sortie. Si f est seulement mesurable par rapport à $\mathcal{H}^{P_x^G}$, il existe deux fonctions bornées f' et f", mesurables par rapport à $\mathcal{H}$, telles que $f' \leqq f \leqq f''$ et que $\int f'\, dP_x^G = \int f''\, dP_x^G$. Mais en raison de l'hypothèse (E), cette égalité a encore lieu si l'on remplace x par n'importe quel point $y \in G$. On retrouve donc la situation précédente.

<u>Lemme 2</u>. Soit B un sous-ensemble borélien de U et h une fonction numérique continue définie dans B. Pour chaque $x \in B$ soit en outre P_x un processus continu tel que

(a) $P_x \in \underline{\underline{S}}(x, A)$;

(b) $h(x) < \int \varphi(X_{\sigma_U})dP_x$.

L'on peut alors choisir P'_x, pour chaque $x \in B$, de telle manière que les conditions (a) et (b) soient encore satisfaites et qu'en plus, $x \longmapsto P'_x(F)$ soit une application borélienne pour tout $F \in \mathcal{F}$.

Fixons pour l'instant $y \in B$ et supposons que P_y est localement équivalent à P_y^G. Le système $\underline{\underline{S}}$ étant supposé stable, $P'_x = \mathfrak{R}_{\sigma_G}\big(P_x^G,$

$\mathfrak{T}_{\sigma_G}(P_y)) \in \underline{\underline{S}}(x, A)$ pour tout $x \in G$. En outre, en raison de (R.b) et du fait que $\sigma_U = \sigma_G + \sigma_U(\theta_{\sigma_G})$, on a

$$\int \varphi(X_{\sigma_U})dP'_x = \int \varphi\bigl(X_{\sigma_U}(\theta_{\sigma_G})\bigr)dP'_x = \int f\ dP^G_x$$

pour tout $x \in G$, où f dénote la fonction dont la valeur au point ω est $\int \varphi(X_{\sigma_U})dP_\omega$, P_ω désignant l'élément général de $\mathfrak{T}_{\sigma_G}(P_y)$. Cette fonction est minorée et mesurable par rapport à $\mathcal{H}^{P^G_y}$, donc en vertu du lemme 1, $\int \varphi(X_{\sigma_U})dP'_x$ est s.c.i. en tant que fonction de $x \in G$. D'autre part, (R.b), (T.a), l'équivalence locale de P_y et P^G_y et (T.c) entraînent les relations $\int \varphi(X_{\sigma_U})dP'_y = \int \varphi(X_{\sigma_U})dP_y > h(y)$. Il existe donc un voisinage V de y tel que $\int \varphi(X_{\sigma_U})dP'_x > h(x)$ pour tout $x \in V \cap B$. En outre, pour chaque $F \in \mathfrak{F}$, $P'_x(F)$, en tant que fonction de $x \in G$, est borélienne. En effet, si F est de la forme particulière $H \cap \theta^{-1}_{\sigma_G}F$, où $H \in \mathfrak{F}_{\sigma_G}$ et $F \in \mathfrak{F}$, on a, d'après (R.c), $P'_x(H \cap \theta^{-1}_{\sigma_G}F) = \int_H P_\omega(F)dP^G_x(\omega)$ et l'assertion résulte en utilisant successivement (T.a), l'équivalence de P_y et P^G_y, l'hypothèse (E) et la propriété (b) d'une réalisation. Dans le cas général, il suffit de remarquer que les F de la forme particulière engendrent $\mathfrak{F}$ ([3], p. 261). On a ainsi défini P'_x pour $x \in V \cap B$ de telle manière que les conditions du lemme soient remplies. En faisant parcourir à y l'ensemble B, on obtient un recouvrement de B par des ensembles V. L'espace E ayant une base dénombrable, une infinité dénombrable de ces ensembles recouvre B. Il est donc possible de construire une partition dénombrable de B constituée par des sous-ensembles boréliens d'ensembles V. On peut alors définir P'_x, pour $x \in B$, ayant les propriétés requises, en utilisant, dans chaque ensemble de la partition, l'une quelconque des définitions locales ayant ces mêmes propriétés.

Démonstration du théorème 1. On montre d'abord que Φ_{φ}^{A} est s.c.i.. Soient $x \in U$ et $P \in \underline{\underline{S}}(x, A)$. Alors P est localement équivalent à un processus P_x^G et donc, comme $\underline{\underline{S}}$ est supposé stable, $P_y = \mathfrak{R}_{\sigma_G}\left(P_y^G, \mathfrak{T}_{\sigma_G}(P)\right) \in \underline{\underline{S}}(y, A)$ pour tout $y \in G$. Appelons f_P la fonction dans G dont la valeur au point y est $\int \varphi(X_{\sigma_U})dP_y$. D'après la première partie de la démonstration du lemme 2, f_P est s.c.i. et $f_P(x) = \int \varphi(X_{\sigma_U})dP$. En outre, par définition de Φ_{φ}^{A}, $f_P(y) \leq \Phi_{\varphi}^{A}(y)$ pour tout $y \in G$, puisque $P_y \in \underline{\underline{S}}(y, A)$. Il résulte donc que la fonction Φ_{φ}^{A} est s.c.i. au point x, car, en ce point, elle est la borne supérieure des $f_P(x)$ lorsque P parcourt $\underline{\underline{S}}(x, A)$. Cela établi, il reste seulement à démontrer que, G étant un élément de $\mathcal{G}$ tel que $\overline{G} \subset U$ et x un point dans G, on a $\Pi_G \Phi_{\varphi}^{A}(x) \leq \Phi_{\varphi}^{A}(x)$. Soit h une fonction numérique continue dans ∂G telle que $h(y) < \Phi_{\varphi}^{A}(y)$ pour tout $y \in \partial G$. Quel que soit y dans ∂G, il existe alors, par définition de $\Phi_{\varphi}^{A}(y)$, un processus $P_y \in \underline{\underline{S}}(y, A)$ (sans rapport avec le P_y du début) tel que $h(y) < \int \varphi(X_{\sigma_U})dP_y$. En vertu du lemme 2, on peut supposer que $P_y(F)$, en tant que fonction de y, est borélienne pour tout $F \in \mathcal{F}$. Posons $P_\omega = P_{X_{\sigma_G}(\omega)}$ si $X_{\sigma_G}(\omega) \in \partial G$ et $P_\omega = \varepsilon_{\omega_0}$ sinon, ω_0 étant un point quelconque dans Ω. La famille (P_ω) ainsi définie est alors mesurable et $P_\omega \in \underline{\underline{S}}\left(X_{\sigma_G}(\omega), A\right)$ pour P_x^G-presque tout ω. Comme $\underline{\underline{S}}$ est supposé stable, $P'_x = \mathfrak{R}_{\sigma_G}\left(P^G_x, (P_\omega)\right)$ appartient à $\underline{\underline{S}}(x, A)$, ce qui entraîne, compte tenu de (R.b) et du fait que $h\left(X_{\sigma_G}(\omega)\right) < \int \varphi(X_{\sigma_U})dP_\omega$ pour P^G_x-presque tout ω,

$$\Phi^A_\varphi(x) \geqq \int \varphi(X_{\sigma_U})dP'_x = \int \varphi\left(X_{\sigma_U}(\theta_{\sigma_G})\right)dP'_x =$$

$$= \int dP^G_x(\omega) \int \varphi(X_{\sigma_U})dP_\omega > \int h(X_{\sigma_G})dP^G_x.$$

En faisant parcourir à h une suite croissante, convergeant vers Φ^A_φ dans ∂G, ce qui est possible puisque Φ^A_φ est s.c.i. dans U, on en déduit que $\Pi_G \Phi^A_\varphi(x) \leqq \Phi^A_\varphi(x)$.

7. CONDITIONS DE REGULARITE DES POINTS-FRONTIERE

Les données étant celles du paragraphe précédent, on introduit, pour les points-frontière, deux différentes conditions de régularité. Soit I(B) la fonction indicatrice de l'ensemble B:

Définition 6. On dira qu'un point a est régulier (resp. extrémal) pour A si $a \in A$ et si, pour tout voisinage V de a, $\lim_{x \to a} \Phi^A_{I(A \cap V)}(x) = 1$ (resp. $\liminf_{x \to a} \Phi^A_{I(A - V)}(x) = o$) [12].

Il convient de remarquer qu'en général ces deux définitions dépendent effectivement de la frontière admissible A. On verra toutefois que l'une des deux hypothèses qui seront faites par la suite

---

(12) La justification du terme "extrémal" résultera des développements ultérieurs de la théorie. Il apparaîtra aussi que la condition d'extrémalité est équivalente à la condition définissant dans [5] les points semi-réguliers.

aura comme conséquence l'indépendance de la seconde du choix de la frontière admissible.

On peut exprimer la condition d'extrémalité d'un point a pour A, en disant que a appartient à A et qu'il existe, pour tout voisinage V de a, une suite (x_n) dans U tendant vers a de telle sorte que $\lim_{n\to\infty} \Phi^A_{I(A - V)}(x_n) = o$. On voit alors immédiatement que l'ensemble des points extrémaux pour A est fermé.

<u>Théorème 2</u>. Si a est un point régulier (resp. extrémal) pour A, alors $\liminf_{x \to a} \Phi^A_{\varphi}(x) \geqq \varphi(a)$ (resp. $\liminf_{x \to a} \Phi^A_{\varphi}(x) \leqq \varphi(a)$) pour toute fonction φ s.c.i. et à valeurs $> -\infty$ (resp. s.c.s. (13) et bornée). Réciproquement, la première (resp. seconde) de ces inégalités entraîne la régularité (resp. l'extrémalité) d'un point $a \in A$, si elle a lieu pour toute fonction φ continue et finie.

Supposons φ s.c.i., à valeur $> -\infty$ et finie au point a (on procède de manière analogue dans le cas où $\varphi(a) = \infty$). Si ε est un nombre positif, il existe un voisinage V de a tel que $\varphi(b) \geqq \varphi(a) - \varepsilon$ pour tout $b \in A \cap V$. On a donc, λ désignant une constante finie minorant φ,

$$(\varphi(a) - \lambda)I(A \cap V) + \lambda - \varepsilon \leqq \varphi$$

et, par conséquent,

$$(\varphi(a) - \lambda)\Phi^A_{I(A \cap V)} + \lambda - \varepsilon \leqq \Phi^A_{\varphi}.$$

Si a est un point régulier, le membre de gauche tend vers $\varphi(a) - \varepsilon$ quand $x \longrightarrow a$. Comme ε est arbitraire, on en déduit que

(13) s.c.s. signifie semi-continue supérieurement.

$\varphi(a) \leqq \liminf_{x \to a} \Phi_\varphi^A(x)$. Réciproquement, si cette inégalité a lieu pour toute fonction φ continue et finie, a est régulier, sinon il existerait un voisinage V de a tel que $\liminf_{x \to a} \Phi_{I(A \cap V)}^A(x) < 1$ et alors on aurait $\liminf_{x \to a} \Phi_\varphi^A(x) < \varphi(a)$ pour toute fonction φ continue et finie telle que $\varphi \leqq I(A \cap V)$ et $\varphi(a) = 1$. La partie du théorème qui figure entre parenthèses se démontre de manière analogue.

Désignons par r(A) et s(A) les ensembles respectivement des points réguliers et des points extrémaux pour A. Il est évident que, si A' et A" sont deux frontières admissibles pour $\underline{\underline{S}}$ telles que $A' \subset A''$, alors $r(A') \subset r(A'')$. En choisissant convenablement U et en prenant pour $\underline{\underline{S}}$ le système $\underline{\underline{T}}$, on constate qu'en général r(A) n'est pas un sous-ensemble de s(A). Pour s'assurer que s(A) n'est pas nécessairement contenu dans r(A), on considère l'exemple suivant: E est l'espace $\mathbb{R}^n (n \geqq 2)$, $\mathcal{G}$ la famille $\mathcal{U}(\mathbb{R}^n)$, P_x^G le processus P_x du mouvement brownien partant de x, $\Pi_G(x,\cdot)$ la répartition de sortie de ce processus de G, A la frontière ∂U et $\underline{\underline{S}}(x)$ l'ensemble constitué par le seul processus P_x. Le système $\underline{\underline{S}}$ ainsi défini est stable, en vertu de la propriété de Markov forte, et ∂U est admissible pour $\underline{\underline{S}}$. En outre, $\Phi_\varphi^{\partial U}(x) = \int \varphi(X_{\sigma_U})dP_x$, donc $\Phi_\varphi^{\partial U}$ est la solution généralisée du problème de Dirichlet relatif à φ et, par conséquent, $r(\partial U)$ est l'ensemble des points réguliers au sens classique. On remarque alors qu'il existe des U ayant des points-frontière extrémaux non réguliers.

8. HYPOTHESES A_1 ET A_2, CHOIX D'UN SYSTEME STABLE

Dans ce qui précède, aucun élément n'est ressorti qui laisse prévoir quelque avantage dans le choix de l'un plutôt que d'un autre système stable auquel sont associées les solutions généralisées Φ_φ^A. Il n'en pouvait être, d'ailleurs, autrement. Aucun de ces systèmes, sauf peut-être le système trivial $\underline{\underline{T}}$, ne joue un rôle distinct. Ce n'est qu'après l'introduction des deux prochaines hypothèses qu'un choix s'impose tout naturellement. Et c'est grâce à ce choix qu'on va pouvoir poursuivre la théorie et, en particulier, formuler et traiter un problème de Dirichlet analogue à celui qui à été étudié par Bremermann dans [6] et contenant, comme cas particulier, le problème de Dirichlet pour fonctions multi-surharmoniques, tel qu'il a été formulé et étudié par Walsh dans sa thèse.

Quant aux hypothèses annoncées, on peut dire d'avance que la première est de nature à garantir une richesse suffisante de fonctions surharmoniques continues tandis que la seconde va permettre l'emploi de la théorie des martingales (14).

Soient donc (Π_G) une famille de répartitions de sortie, fortement fellérienne et vérifiant (E) et (P_x^G) une réalisation de (Π_G).

Afin d'exclure des situations indésirables, comme c'est le cas lorsqu'il n'existe pas de trajectoires continues issues de l'intérieur d'un ensemble $U \in \mathcal{U}$ et rencontrant la frontière ∂U, on exige désormais de la réalisation (P_x^G) qu'elle satisfasse, outre aux conditions (a),

(14) A ce sujet, voir les travaux fondamentaux de Doob [7], [8], [9].

(b) et (c) de la définition 3, à la condition supplémentaire suivante:

(d) quel que soit $x \in E$, $P_x^G\{\sigma_U < \sigma_E\} = 1$ pour tout $G \in \mathcal{G}(x)$, $U \in \mathcal{U}(x)$.

Cette condition exprime que δ est un point adhérent à P_x^G-presque toute trajectoire lorsque $t \uparrow \sigma_E$, quels que soient $G \in \mathcal{G}(x)$, $x \in E$ ([2], p. 8-08).

Par la suite, le terme surmartingale sera utilisé exclusivement pour dénommer les surmartingales ayant presque toutes les trajectoires continues à droite. Signalons que seule la partie négative de chaque variable aléatoire sera supposée intégrable.

Les deux conditions suivantes sont, supposées remplies:

(A_1) Pour tout $U \in \mathcal{U}$ et. tout couple x, y de points différents dans U, il existe deux fonctions surharmoniques continues f et g dans U telles que $f(x) < f(y)$ et $g(x) > g(y)$.

(A_2) Pour tout $x \in E$, tout $G \in \mathcal{G}(x)$ et toute fonction surharmonique f dans un voisinage de $\overline{G}$, $\left(f(X_t^G), \mathcal{F}_t, P_x^G\right)$ est une surmartingale (15) (16) (17).

(15) Cf. [9], p. 76.

(16) La continuité à droite p.s., implicite dans la définition de surmartingale que l'on a adoptée, a été introduite afin de pouvoir appliquer le théorème d'arrêt de Doob. On peut démontrer que, si ce théorème s'applique au triplet figurant dans (A_2), presque toutes les trajectoires sont continues à droite. On remarque, en outre, que le triplet est une surmartingale si et seulement si $(f(X_t^G), \mathcal{F}_{t\wedge\sigma_G}, P_x^G)$ en est une. Voir la suite de l'exposé.

(17) En remplaçant dans l'énoncé "fonction surharmonique" par "fonction surharmonique bornée", on obtient une condition équivalente (voir [10], p. 135).

L'hypothèse (A_1) est par exemple vérifiée si, pour chaque $U \in \mathcal{U}$, les fonctions harmoniques dans U séparent les points de U. D'après (A_2), les fonctions surharmoniques dans un ouvert $V \subset E$ sont exactement les fonctions numériques s.c.i. $f > -\infty$ telles que $\left(f(X_t^G), \mathcal{F}_t, P_x^G\right)$ est une surmartingale pour tout $x \in V$ et tout $G \in \mathcal{G}(x)$ avec $\overline{G} \subset V$.

On choisit maintenant un ensemble U dans $\mathcal{U}$ et on le retient pour toute la suite. A cet ensemble on associe le système $\underline{\underline{T}}$ défini au paragraphe 5.

Si x est un point dans U, f une fonction surharmonique dans U et σ un temps d'arrêt, on désigne par $\underline{\underline{M}}_\sigma^f(x)$ l'ensemble des processus continus P partant de x et jouissant des deux propriétés suivantes:

(a) $P\{X_{\sigma_U} \in \partial U\} = 1$, autrement dit $P\{\sigma_U < \sigma_E\} = 1$;

(b) $\left(f(X_{t \wedge \sigma}^{U'}), \mathcal{F}_t, P\right)$ est une surmartingale pour tout ouvert U' tel que $\overline{U'} \subset U$.

Il est clair que, compte tenu de (a), la surmartingale figurant dans (b) se prolonge, par l'adjonction de la variable à l'infini $f(X_\sigma^{U'})$, en une surmartingale admettant $[o, \infty]$ comme ensemble des temps. Il est clair aussi que si P appartient à $\underline{\underline{M}}_\sigma^f(x)$, alors, $\mathcal{X}_t$ désignant la tribu $\bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$, on a

(TA) $E\{f(X_{T \wedge \sigma}^{U'}) \mid \mathcal{X}_S\} \leqq f(X_{S \wedge \sigma}^{U'})$, P-p.s., pour tout couple S, T de temps d'arrêt relativement à $(\mathcal{X}_t)$ tel que $S \leqq T$ et tout ouvert U' tel que $\overline{U'} \subset U$.

Réciproquement, si P est un processus continu partant de x et vérifiant (TA), alors P vérifie (b) (l'appendice 2 contient une démonstration de cette proposition).

On désigne par $\underline{\underline{M}}_\sigma(x)$ l'intersection des $\underline{\underline{M}}_\sigma^f$, f parcourant l'ensemble des fonctions surharmoniques dans U, et par $\underline{\underline{S}}(x)$ l'ensemble $\underline{\underline{M}}_{\sigma_U} \cap \underline{\underline{T}}(x)$.

Manifestement, $\underline{\underline{M}}_{\sigma_U}(x)$ est l'intersection des $\underline{\underline{M}}_{\sigma_{U'}}(x)$, U' parcourant les ouverts tels que $\overline{U}' \subset U$. On signale, en outre, que $P_x^G \in \underline{\underline{M}}_{\sigma_G}(x)$ pour tout $G \in \mathcal{G}(x)$ tel que $\overline{G} \subset U$, ce qui est une conséquence de (A_2).

Il ne sera désormais question que du système $\underline{\underline{S}} = \left(\underline{\underline{S}}(x)\right)_{x \in U}$ ainsi défini. Une frontière admissible pour $\underline{\underline{S}}$ sera appelée simplement frontière admissible.

Cela étant dit, on passe à la démonstration de deux lemmes qui serviront, entre autre, à établir la stabilité de $\underline{\underline{S}}$ et l'admissibilité de U.

<u>Lemme 4</u>.Soient x un point dans U, f une fonction surharmonique dans U, ρ et σ deux temps d'arrêt et P un processus de $\underline{\underline{M}}_\rho^f$. Soit en outre (P_ω) une famille satisfaisant aux conditions de recollement relatives à P, ρ et telle que $P_\omega \in \underline{\underline{M}}_\sigma^f\left(X_\rho(\omega)\right)$ pour P-presque tout $\omega \in \{\rho < \sigma_U\}$. Alors $\mathfrak{R}_\rho\left(P, (P_\omega)\right) \in \underline{\underline{M}}_\tau^f(x)$, où $\tau = \rho + \sigma(\theta_\rho)$.

Soit P_r le processus recollé figurant dans l'énoncé. C'est un processus qui part de x. En outre, comme $\rho + \sigma_U(\theta_\rho) = \sigma_U$ sur $\{\rho < \sigma_U\}$, on a, compte tenu de (R.c),

$$P_r(\{X_{\sigma_U} \in \partial U\} \cap \{\rho < \sigma_U\}) = \int_{\{\rho < \sigma_U\}} P_\omega\{X_{\sigma_U} \in \partial U\} dP(\omega) = P\{\rho < \sigma_U\}$$

et, du fait que $\{X_{\sigma_U} \in \partial U\} \cap \{\sigma_U \leqq \rho\}$ appartient à $\mathcal{F}_\rho$, compte tenu de (R.a),

$$P_r(\{X_{\sigma_U} \in \partial U\} \cap \{\sigma_U \leqq \rho\}) = P\{\sigma_U \leqq \rho\},$$

ce qui montre que $P_r\{X_{\sigma_U} \in \partial U\} = 1$. Il reste à vérifier (TA). A cet effet, on considère un ouvert U' d'adhérence contenue dans U, un couple S, T de temps d'arrêt relativement à $(\mathcal{X}_t)$ tel que $S \leqq T$ et un ensemble F appartenant à $\mathcal{X}_S$ et on montre que

$$(1) \qquad \int_F f(X^{U'}_{T \wedge \tau}) dP_r \leqq \int_F f(X^{U'}_{S \wedge \tau}) dP_r.$$

On traitera successivement les cas où $F \cap \{\rho \leqq S\}$ et $F \cap \{S < \rho\}$ remplacent F dans (1). Pour établir le premier cas, il suffit de prouver que, H désignant l'ensemble $\{\rho \leqq S\} \cap \{\rho < \sigma_{U'}\}$, la relation (1) a lieu pour $H \cap F$ à la place de F puisque, manifestement, elle a lieu pour $F \cap \{\rho \leqq S\} \cap \{\sigma_{U'} \leqq \rho\}$. D'après le théorème 5.3 dans [3], il existe une fonction positive $\overline{S}$ (resp. $\overline{T}$) dans $\Omega \times \Omega$, de valeur infinie sur $\{(\omega, \omega') : X_\rho(\omega) \neq X_o(\omega')\}$, mesurable par rapport à $\mathcal{F}_\rho \otimes \mathcal{F}$ et telle que, pour chaque ω, $\rho(\omega) \vee S(\omega) = \rho(\omega) + \overline{S}(\omega, \theta_\rho \omega)$ (resp. $\rho(\omega) \vee T(\omega) = \rho(\omega) + \overline{T}(\omega, \theta_\rho \omega)$) et l'application $\omega' \longmapsto \overline{S}(\omega, \omega')$ (resp. $\omega' \longmapsto \overline{T}(\omega, \omega')$) est un temps d'arrêt relativement à $(\mathcal{X}_t)$. On remarquera qu'on doit avoir $\overline{S} \leqq \overline{T}$, puisque $S \leqq T$, par hypothèse. D'après le corollaire 5.5 dans [3], il existe une fonction positive g dans

$\Omega \times \Omega$, mesurable par rapport à $\mathcal{F}_\rho \otimes \mathcal{F}$ et telle que, pour chaque ω, $I(F)(\omega) = g(\omega, \theta_\rho \omega)$ et l'application $\omega' \longmapsto g(\omega, \omega')$ est mesurable par rapport à $\mathcal{H}_{\overline{S}(\omega, \cdot)}$. Or, L étant une fonction numérique positive dans $\Omega \times \Omega$, posons

$$h_L(\omega, \omega') = I(H)(\omega) g(\omega, \omega') f\left(X_{L(\omega,\omega') \wedge \sigma(\omega') \wedge \sigma_{U'}(\omega')}(\omega')\right).$$

Si L est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_\rho \otimes \mathcal{F}$, il en est de même de la fonction h_L ainsi définie, puisque $\{\rho \leqq S\}$ et par conséquent H appartiennent à $\mathcal{F}_\rho$, ce qui est facile à vérifier. Dans ce cas, on a, en vertu de (R.c),

$$\text{(2)} \qquad \int h_L(\omega, \theta_\rho \omega) dP_r(\omega) = \int dP(\omega) \int h_L(\omega, \omega') dP_\omega(\omega').$$

Dans le cas particulier $L = \overline{S}$, on a, compte tenu de la définition de $\overline{S}$ et du fait que $\rho \leqq S$ et $\rho < \infty$ sur H,

$$\text{(3)} \quad \begin{aligned} h_{\overline{S}}(\omega, \theta_\rho \omega) &= I(H)(\omega) g(\omega, \theta_\rho \omega) f\left(X_{((S(\omega)-\rho(\omega)) \wedge \sigma(\theta_\rho \omega) \wedge \sigma_{U'}(\theta_\rho \omega)) + \rho(\omega)}(\omega)\right) = \\ &= I(H \cap F)(\omega) f\left(X^{U'}_{S \wedge \tau}(\omega)\right), \end{aligned}$$

puisque, sur $\{\rho < \sigma_{U'}\}$,

$$(u + \rho) \wedge \tau \wedge \sigma_{U'} = (u \wedge \sigma(\theta_\rho) \wedge \sigma_{U'}(\theta_\rho)) + \rho$$

pour tout $u \in [0, \infty]$, ce qui est facile à vérifier, en utilisant l'égalité $\rho + \sigma_{U'}(\theta_\rho) = \sigma_{U'}$, vraie sur $\{\rho < \sigma_{U'}\}$. De même, on a

$$\text{(4)} \qquad h_{\overline{T}}(\omega, \theta_\rho \omega) = I(H \cap F)(\omega) f\left(X^{U'}_{T \wedge \tau}(\omega)\right).$$

Grâce à la formule intégrale (2) et aux propriétés de $\overline{S}$, $\overline{T}$ et g en tant que fonctions de ω', on obtient, du fait que P_ω appartient à $\underline{\underline{M}}_\sigma^f(Y_\rho(\omega))$ pour P-presque tout $\omega \in H$,

$$\int h_{\overline{T}}(\omega,\ \theta_\rho\omega)dP_r(\omega) = \int_H dP(\omega) \int g(\omega,\ \omega')f\big(X^{U'}_{\overline{T}(\omega,\cdot)\wedge\sigma}(\omega')\big)dP_\omega(\omega') \leqq$$

$$\leqq \int_H dP(\omega) \int g(\omega,\ \omega')f\big(X^{U'}_{\overline{S}(\omega,\cdot)\wedge\sigma}(\omega')\big)dP_\omega(\omega') = \int h_{\overline{S}}(\omega,\ \theta_\rho\omega)dP_r(\omega),$$

ce qui établit le premier cas, en vertu de (3) et (4). Passons à la démonstration du second cas. Puisque P appartient à $\underline{\underline{M}}_\rho^f(x)$, on a

$$\int_{F\cap\{S<\rho\}} f(X^{U'}_{T\wedge\rho})dP \leqq \int_{F\cap\{S<\rho\}} f(X^{U'}_{S\wedge\rho})dP.$$

Il est en outre facile de vérifier que $F\cap\{S<\rho\}$ appartient à $\mathfrak{F}_\rho$ et que $f(X^{U'}_{S\wedge\rho})$ et $f(X^{U'}_{T\wedge\rho})$ sont mesurables par rapport à $\mathfrak{F}_\rho$, ce qui permet, en vertu de (R.a), de remplacer P par P_r dans les deux membres. Compte tenu du fait que $S\wedge\rho = S\wedge\tau$ sur $\{S<\rho\}$, tout revient donc à démontrer que

$$\int_{F\cap\{S<\rho\}} f(X^{U'}_{T\wedge\tau})dP_r \leqq \int_{F\cap\{S<\rho\}} f(X^{U'}_{T\wedge\rho})dP_r. \tag{5}$$

Le premier cas (déjà établi) appliqué au couple de temps d'arrêt ρ et $\rho\vee(T\wedge\tau)$ montre que la relation (5) a lieu pour $F\cap\{S<\rho\}\cap\{\rho\leqq T\}$ à la place de $F\cap\{S<\rho\}$, car, sur $\{\rho\leqq T\}$, on a $\rho = T\wedge\rho$ et $\rho\vee(T\wedge\tau) = T\wedge\tau$. Il est en outre clair que (5) a également lieu pour $F\cap\{T<\rho\}$ à la place de $F\cap\{S<\rho\}$. Le lemme est donc démontré.

<u>Lemme 5</u>. Soient x un point dans U, (σ_n) une suite de temps d'arrêt croissant vers $\sigma \leqq \sigma_U$ et (P_n) une suite de processus continus telle que, pour chaque n, $P_n \in \underline{\underline{M}}_{\sigma_n}(x)$ et $P_n(F) = P_m(F)$ quels que soient $F \in \mathfrak{F}_{\sigma_m}$ et $m < n$. Alors il existe un processus continu P tel que $P\{\sigma_U < \sigma_E\} = 1$ et que $P(F) = P_n(F)$ pour tout $F \in \mathfrak{F}_{\sigma_n}$, quel que soit n. En outre, $P_\infty \in \underline{\underline{M}}_\tau(x)$ pour tout temps d'arrêt $\tau \leqq \sigma$ tel que $\tau < \sigma$ P-p.s. sur $\bigcap_{n=1} \{\sigma_n < \sigma\}$.

Soit (P_J) le système projectif défini par la relation $P_J(B) =$

$$= P_n\{(X_{t_1^1 \wedge \sigma_1}, X_{t_2^1 \wedge \sigma_1}, \ldots, X_{t_{m_1}^1 \wedge \sigma_1}, \ldots \ldots, X_{t_1^n \wedge \sigma_n}, \ldots, X_{t_{m_n}^n \wedge \sigma_n}) \in B\},$$

où $J = \{t_1^1, \ldots, t_{m_1}^1, \ldots \ldots, t_1^n, \ldots, t_{m_n}^n\}$ et B est un sous-ensemble borélien du produit cartésien E_δ^J. Ecrivons $\hat{\Omega}$ pour $\{\sigma < \sigma_E\}$ et indiquons par ^ les restrictionset les traces sur $\hat{\Omega}$. D'après le théorème sur les limites projectives, il existe une probabilité P' sur la tribu $\mathfrak{F}'$ engendrée par la réunion des $\hat{\mathfrak{F}}_{\sigma_n}$ telle que $P'(F) = P_n(F)$ pour tout $F \in \hat{\mathfrak{F}}_{\sigma_n}$, quel que soit n. Soit P" le processus canonique induit par le processus continu $(\hat{\Omega}, \mathfrak{F}', \hat{X}_{t \wedge \sigma}, P')$. En faisant appel au théorème cité au paragraphe 4 après l'énoncé de (R.c), il est facile de montrer que, quel que soit n, $P''(F) = P_n(F)$ pour tout $F \in \mathfrak{F}_{\sigma_n}$ et que $P''(\hat{\Omega}) = 1$. Considérons une partition borélienne (B_n) de U, telle que $B_n \subset G_n \in \mathcal{G}$ pour tout n, et posons $P_\omega = P_{X_\sigma(\omega)}^{G_n}$ si $X_\sigma(\omega) \in B_n$, n = 1, 2, ..., et $P_\omega = \varepsilon_{\omega_\sigma}$ si $X_\sigma(\omega) \notin U$, ω_σ désignant la trajectoire de valeur constante égale à $X_\sigma(\omega)$. La famille (P_ω) ainsi définie remplit les conditions de recollement relatives à P", σ. On peut donc former le processus P, recollé de P" et de la famille (P_ω) en σ. Ce processus répond à la question. En effet, il jouit des propriétés énoncées dans la première partie de la conclusion du lemme. En outre, si τ satisfait aux conditions de la seconde partie, P appartient à $\underline{\underline{M}}_\tau(x)$, ce qui se démontre de la manière suivante: soit F_{σ_n} (resp. F_τ) l'ensemble des ω tels que $f\left(X^{U'}_{t\wedge\sigma_n}(\omega)\right)$ (resp. $f\left(X^{U'}_{t\wedge\tau}(\omega)\right)$), en tant que fonction de t, n'est pas continue à droite, f et U' désignant respectivement une fonction surharmonique dans U et un ouvert tel que $\overline{U}'\subset U$. Comme P_n appartient à $\underline{\underline{M}}_{\sigma_n}(x)$, F_{σ_n} est négligeable pour P, car F_{σ_n} est un élément de $\mathfrak{F}^{P_n}_{\sigma_n}$ négligeable pour P_n (voir l'appendice 2) et P_n coïncide avec P sur $\mathfrak{F}_{\sigma_n}$. En outre, $F_\tau \cap \{\tau \leqq \sigma_n\} \subset F_{\sigma_n}$, ce qui est facile à vérifier, donc F_τ est négligeable pour P, puisque $P(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{\tau \leqq \sigma_n\}) = 1$, par hypothèse. Les trajectoires de $\left(f(X^{U'}_{t\wedge\tau})\right)$ sont donc P-presque toutes continues à droite et il reste à prouver l'inégalité des surmartingales. A cet effet, on peut admettre que f est majorée et on considère un couple s, t tel que $o \leqq s < t$ et un ensemble $F \in \mathfrak{F}_{s\wedge\tau}$. Il est facile de voir que $H_n = F \cap \{s\wedge\tau \leqq s\wedge\sigma_n\}$ est un élément de $\mathfrak{F}_{s\wedge\sigma_n\wedge\tau}$, de sorte que

$$\int_{H_n} f(X^{U'}_{t\wedge\sigma_n\wedge\tau})dP \leqq \int_{H_n} f(X^{U'}_{s\wedge\sigma_n\wedge\tau})dP,$$

car P coïncide avec P_n sur $\mathfrak{F}_{\sigma_n}$ et P_n appartient à $\underline{\underline{M}}_{\sigma_n}(x)$. En faisant tendre n vers l'infini, H_n et $f(X^{U'}_{u\wedge\sigma_n\wedge\tau})$ tendent P-p.s. respectivement vers F et vers $f(X^{U}_{u\wedge\tau})$, pour tout $u \geqq o$, et l'inégalité précédente entraîne

$$\int_F f(X^{U'}_{t \wedge \tau})dP \leqq \int_F f(X^{U'}_{s \wedge \tau})dP,$$

pour tout $F \in \mathfrak{F}_{s \wedge \tau}$, donc pour tout $F \in \mathfrak{F}_s$, ce qui achève la démonstration.

<u>Théorème 3</u>. Le système $\underline{\underline{S}}$ est stable.

En effet, une application du lemme 4 pour $\rho = \sigma_G$ et $\sigma = \sigma_U$ montre que la condition (a) de la définition 4 est remplie. Il faut seulement remarquer que P^G_x appartient à $\underline{\underline{M}}_{\sigma_G}(x)$, que τ est dans ce cas σ_U et que le processus recollé est, d'après (R.a), localement équivalent à P^G_x. Pour montrer que (b) de la même définition est aussi satisfaite, on considère un point x dans U, un processus $P \in \underline{\underline{S}}(x)$, que l'on suppose localement équivalent à P^G_x, un point y dans G et une fonction surharmonique f dans U. On désigne par P_ω l'élément général de $\mathfrak{T}_{\sigma_G}(P)$. On rappelle que $P_\omega(F) = P^{\sigma_G}_\omega(\theta^{-1}_{\sigma_G} F)$, pour tout ω et tout $F \in \mathfrak{F}$ (voir le paragraphe 4). Il suffit de prouver que P appartient à $\underline{\underline{M}}^f_{\sigma_U}\big(X_{\sigma_G}(\omega)\big)$ pour P^G_y-presque tout ω, car le raisonnement utilisé pour établir (a) permet alors de conclure. On sait déjà (voir la seconde remarque suivant la définition 4) que, pour chaque ω en dehors d'un ensemble M, négligeable pour P^G_y, P_ω est un processus continu partant de $X_{\sigma_G}(\omega)$ et tel que $P_\omega\{X_{\sigma_U} \in \partial U\} = 1$. Il reste donc à démontrer qu'il existe un ensemble N, négligeable pour P^G_y, tel qu'on ait, si $\omega \notin M \cup N$,

(1) $$\int_F f(X^{U'}_T)\, dP_\omega \leqq \int_F f(X^{U'}_S)\, dP_\omega,$$

pour tout couple S, T de temps d'arrêt relativement à $(\mathcal{H}_t)$ tel que $S \leqq T$, tout $F \in \mathcal{H}_S$ et tout ouvert U' avec $\overline{U}' \subset U$, ou, ce qui revient au même, pour tout U' appartenant à une suite croissante (U_n) d'ouverts contenant G, d'adhérence contenue dans U et dont la réunion est U. Par hypothèse, P-presque toutes les trajectoires de $\left(f(X_t^{U'})\right)$ sont continues à droite. Il s'ensuit, en vertu de l'équivalence locale de P et P_x^G et de l'hypothèse (E), que ces mêmes trajectoires sont $P_\omega^{\sigma G}$-presque toutes continues à droite, pour chaque ω en dehors d'un ensemble N' négligeable pour P_y^G. Supposons d'avoir pu montrer qu'il existe un ensemble N", négligeable pour P_y^G, tel qu'on ait, si $\omega \notin M \cup N''$,

(2) $$\int_{\theta_{\sigma_G}^{-1}F} f\left(X_{r'}^{U_n}(\theta_{\sigma_G})\right)dP_\omega^{\sigma G} \leqq \int_{\theta_{\sigma_G}^{-1}F} f\left(X_r^{U_n}(\theta_{\sigma_G})\right)dP_\omega^{\sigma G},$$

pour tout couple r, r' de rationnels tel que $o \leqq r < r'$, tout $F \in \mathcal{F}_r$ et tout n. Posons $N = N' \cup N''$. Alors $\left(f\left(X_t^{U_n}(\theta_{\sigma_G})\right), \mathcal{K}_t, P_\omega^{\sigma G}\right)$ est une surmartingale pour chaque $\omega \notin M \cup N$ et chaque n, où $\mathcal{K}_t$ désigne la tribu $\bigcap_{s>t} \theta_{\sigma_G}^{-1}\mathcal{F}_s$. Par conséquent, si S, T est un couple de temps d'arrêt relativement à $(\mathcal{H}_t)$, tel que $S \leqq T$, et si F est un ensemble dans $\mathcal{H}_S$, on a, pour $\omega \notin M \cup N$ et tout n,

$$\int_{\theta_{\sigma_G}^{-1}F} f\left(X_T^{U_n}(\theta_{\sigma_G})\right)dP_\omega^{\sigma G} \leqq \int_{\theta_{\sigma_G}^{-1}F} f\left(X_S^{U_n}(\theta_{\sigma_G})\right)dP_\omega^{\sigma G},$$

car $S(\theta_{\sigma_G})$ et $T(\theta_{\sigma_G})$ sont des temps d'arrêt relativement à $(\mathcal{H}_t)$ et $\theta_{\sigma_G}^{-1}F$ appartient à $\mathcal{H}_{S(\theta_{\sigma_G})}$, ce qui est facile à vérifier. Mais cette dernière inégalité est équivalente à (1). Prouvons donc la supposition. Comme P appartient à $\underline{\underline{S}}(x)$, on a, d'après le théorème d'arrêt

$$\int_{H \cap \theta_{\sigma_G}^{-1}F} f(X_{r'+\sigma_G}^{U_n})dP \leqq \int_{H \cap \theta_{\sigma_G}^{-1}F} f(X_{r+\sigma_G}^{U_n})dP,$$

où $o \leqq r < r'$, F appartient à $\mathcal{F}_r$ et H à la tribu engendrée par X_{σ_G}. Compte tenu de l'égalité

$$(u + \sigma_G) \wedge \sigma_{U_n} = (u \wedge \sigma_{U_n}(\theta_{\sigma_G})) + \sigma_G,$$

vraie pour tout $u \geqq o$, cela donne

$$\int_H dP(\omega) \int_{\theta_{\sigma_G}^{-1}F} f\left(X_{r'}^{U_n}(\theta_{\sigma_G})\right)dP_\omega^{\sigma_G} \leqq \int_H dP(\omega) \int_{\theta_{\sigma_G}^{-1}F} f\left(X_r^{U_n}(\theta_{\sigma_G})\right)dP_\omega^{\sigma_G}.$$

Comme H est arbitraire, on en conclut, en tenant compte de l'équivalence locale de P et P_x^G et de l'hypothèse (E), qu'il existe un ensemble, dépendant de r, r', n, F et négligeable pour P_y^G, en dehors duquel (2) a un sens et est vraie. Mais $\mathcal{F}_r$ est dénombrablement engendrée, donc il existe un ensemble N" répondant à la question.

<u>Théorème 4</u>. ∂U est une frontière admissible.

Convenons d'appeler une famille de processus (P_x) borélienne, si, pour chaque $F \in \mathfrak{F}$, l'application $x \longmapsto P_x(F)$ est borélienne. Etant donné deux ouverts V et W d'adhérence contenue dans U et deux familles boréliennes $(P_x^V)_{x \in V}$ et $(P_x^W)_{x \in W}$ telles que $P_x^V \in \underline{\underline{M}}_{\sigma_V}(x)$ pour tout $x \in V$ et $P_x^W \in \underline{\underline{M}}_{\sigma_W}(x)$ pour tout $x \in W$, on va tout d'abord montrer qu'il existe une famille borélienne $(P_x^{V \cup W})_{x \in V \cup W}$, dite famille engendrée par les deux précédentes, telle que $P_x^{V \cup W} \in \underline{\underline{M}}_{\sigma_{U'}}(x)$ pour tout $x \in V \cup W$ et tout ouvert U' d'adhérence contenue dans $V \cup W$ et telle que $P_x^{V \cup W}(F) = P_x^V(F)$ pour tout $F \in \mathfrak{F}_{\sigma_V}$ et tout $x \in V$. On établira seulement l'existence de $P_x^{V \cup W}$ pour $x \in V$, car une permutation de V et W dans la démonstration fournira les $P_x^{V \cup W}$ d'indice x appartenant à W - V. Posons $\sigma_1 = \sigma_V$, $\sigma_2 = \sigma_1 + \sigma_W(\theta_{\sigma_1})$, ..., $\sigma_{2n+1} = \sigma_{2n} + \sigma_V(\theta_{\sigma_{2n}})$, $\sigma_{2n+2} = \sigma_{2n+1} + \sigma_W(\theta_{\sigma_{2n+1}})$, ... Soit σ la limite des σ_n: il est clair que $\sigma = \sigma_{V \cup W}$. Par récurrence, on va définir pour chaque n une famille borélienne $(P_x^n)_{x \in V}$ telle que $P_x^n \in \underline{\underline{M}}_{\sigma_n}(x)$ pour tout $x \in V$. Par définition, P_x^1 est le processus P_x^V. Si $(P_x^n)_{x \in V}$ a été déjà définie, on pose $P_x^{n+1} = \mathfrak{R}_{\sigma_n}\big(P_x^n, (P_\omega)\big)$, où (P_ω) est définie de la manière suivante: soit (B_i) une partition de U du type de celle qu'on a introduite dans la partie centrale de la démonstration du lemme 5; alors, n étant pair (resp. impair), $P_\omega = P^V_{X_{\sigma_n}(\omega)}$ (resp. $P_\omega = P^W_{X_{\sigma_n}(\omega)}$) si $X_{\sigma_n}(\omega) \in V$ (resp. $X_{\sigma_n}(\omega) \in W$), $P_\omega = P^{G_i}_{X_{\sigma_n}(\omega)}$ si $X_{\sigma_n}(\omega) \in B_i - V$ (resp. $X_{\sigma_n}(\omega) \in B_i - W$), i = 1, 2, ..., et $P_\omega = \varepsilon_{\sigma_n}$ si $X_{\sigma_n}(\omega) \notin U$, où ω_n désigne la trajectoire de valeur constante égale à $X_{\sigma_n}(\omega)$. La famille $(P_x^{n+1})_{x \in V}$ possède les propriétés requises. En effet, la mesurabilité en x résulte en appliquant (R.c) (il faut rappeler que $\mathfrak{F}$ est engendrée par les ensembles de la forme $H \cap \theta_{\sigma_n}^{-1} F$, où $H \in \mathfrak{F}_{\sigma_n}$ et $F \in \mathfrak{F}$) et l'appartenance à $\underline{\underline{M}}_{\sigma_{n+1}}(x)$ en appliquant le lemme 4. Or, par construction même, $P_x^{n+1}(F) = P_x^n(F)$ pour tout $F \in \mathfrak{F}_{\sigma_n}$, quels que soient $x \in V$ et n. Une application du lemme 5 montre donc l'existence d'une famille $(P_x^{V \cup W})_{x \in V}$ répondant à la question, car il est facile de voir que la mesurabilité en x subsiste au cours des opérations effectuées dans la première partie de la démonstration de ce lemme. Cela établi, on va prouver qu'il existe une famille borélienne $(P_x)_{x \in U}$ telle que $P_x \in \underline{\underline{M}}_{\sigma_U}(x)$ pour tout $x \in U$. Le théorème sera alors démontré car, pour avoir un processus P appartenant à $\underline{\underline{S}}(x)$, il suffit de considérer un $G \in \mathcal{G}(x)$ d'adhérence contenue dans U et de poser $P = \mathfrak{R}_{\sigma_G}\left(P_x^G, (P_\omega)\right)$, où $P_\omega = P_{X_{\sigma_G}(\omega)}$ si $X_{\sigma_G}(\omega) \in \partial G$ et $P_\omega = \varepsilon_{\omega_o}$ sinon, ω_o désignant un point quelconque dans Ω. Ce processus P appartient à $\underline{\underline{M}}_{\sigma_U}(x)$, en raison de (A_2) et du lemme 4, et est localement équivalent à P_x^G. Il appartient donc à $\underline{\underline{S}}(x)$. Soient (G_n) et (V_n) deux suites d'ensembles ouverts telles que $\overline{V}_n \subset G_n \subset \overline{G}_n \subset U$ et $G_n \in \mathcal{G}$ pour tout n et que la réunion des V_n soit U. Par récurrence, on définit pour chaque n un ouvert U_n contenant $\overline{V}_1 \cup \ldots \cup \overline{V}_n$ et une famille borélienne $(P_x^n)_{x \in U_n}$ telle que $P_x^n \in \underline{\underline{M}}_{\sigma_{U_n}}(x)$ pour tout $x \in U_n$. On pose $U_1 = G_1$ et $P_x^1 = P_x^{G_1}$. Alors $P_x^1 \in \underline{\underline{M}}_{\sigma_{U_1}}(x)$ pour tout $x \in U_1$, en vertu de (A_2). Si U_n et $(P_x^n)_{x \in U_n}$ ont été définis, on choisit U_{n+1} de telle manière que $\overline{V}_1 \cup \ldots \cup \overline{V}_{n+1} \subset U_{n+1} \subset$ $\subset \overline{U}_{n+1} \subset U_n \cup G_{n+1}$ et on définit $(P_x^{n+1})_{x \in U_{n+1}}$ comme étant la restriction à U_{n+1} de la famille borélienne $(P_x^{n+1})_{x \in U_n \cup G_{n+1}}$ engendrée par $(P_x^n)_{x \in U_n}$ et $(P_x^{G_{n+1}})_{x \in G_{n+1}}$ (première partie de la démonstration). A ce point, on pose $\sigma_n = \sigma_{V_1 \cup \ldots \cup V_n}$. La suite (σ_n) est croissante et converge vers σ_U. En outre, pour x dans $V_1 \cup \ldots \cup V_m$, $(P_x^n)_{n \geq m}$ est, par construction même, de telle nature que $P_x^n \in \underline{\underline{M}}_{\sigma_n}(x)$ et que $P_x^{n+1}(F) = P_x^n(F)$ pour tout $F \in \mathfrak{F}_{\sigma_n}$, quel que soit $n \geqq m$. Une application du lemme 5 montre donc l'existence d'une famille borélienne $(P_x)_{x \in V_1 \cup \ldots \cup V_m}$ telle que $P_x \in \underline{\underline{M}}_{\sigma_{U'}}(x)$ pour tout $x \in V_1 \cup \ldots \cup V_m$ et tout ouvert U' d'adhérence contenue dans U, donc telle que $P_x \in \underline{\underline{M}}_{\sigma_U}(x)$ pour tout $x \in V_1 \cup \ldots \cup V_m$. Comme m est arbitraire, le théorème est démontré.

9. INDEPENDANCE DE LA CONDITION D'EXTREMALITE DU CHOIX DE LA FRONTIERE ADMISSIBLE

Voici d'abord deux lemmes.

<u>Lemme 6</u>. Soient a et x deux points différents respectivement dans ∂U et dans $\overline{U}$. Il existe alors un voisinage V de a, un voisinage W de x et un $\varepsilon > o$ tels que $P\{X_{\sigma_U} \in V\} < 1 - \varepsilon$ pour tout $P \in \underline{\underline{S}}(y)$, quel que soit $y \in W \cap U$ [18].

[18] (A_1) intervient uniquement dans la démonstration de ce lemme, dont la conclusion ne sera utilisée que sous une forme affaiblie: celle que l'on obtient en remplaçant dans l'énoncé "pour tout P" par "pour un P".

En effet, d'après (A_1), il existe une fonction sousharmonique f dans un voisinage de $\overline{U}$, continue, finie et telle que $f(a) < f(x)$. Pour un voisinage V de a on a donc $\alpha = \sup_{y \in V} f(y) < f(x)$. Posons $W = \{f > (f(x)+\alpha)/2\}$ et $\varepsilon = (f(x)-\alpha)/2(\beta-\alpha)$, où $\beta = \sup_{y \in \overline{U}} f(y)$. Alors W est un voisinage de x, $\varepsilon > o$ et si y est un point dans $W \cap U$ et P un élément de $\underline{\underline{S}}(y)$, on a, en vertu du théorème d'arrêt et de la continuité de f, (U_n) désignant une suite croissante d'ouverts d'adhérence contenue dans U et dont la réunion est U,

$$\frac{f(x)+\alpha}{2} < f(y) \leqq \lim_{n \to \infty} \int f(X_{\sigma_{U_n}})dP = \int f(X_{\sigma_U})dP \leqq$$

$$\leqq P\{X_{\sigma_U} \in V\} + \beta(1 - P\{X_{\sigma_U} \in V\}),$$

ce qui entraîne $P\{X_{\sigma_U} \in V\} < 1 - \varepsilon$.

<u>Lemme 7</u>. Soient A et A' deux frontières admissibles, a un point dans ∂U et V un voisinage de a. Il existe alors un voisinage V' de a et un $\varepsilon > o$ tels que $\varepsilon \Phi^{A}_{I(A - V)} \leqq \Phi^{A'}_{I(A' - V')}$.

En effet, pour chaque $x \in \overline{U} - V$ il existe, en vertu du lemme 6, un voisinage V_x de a, un voisinage W_x de x et un $\varepsilon_x > o$ tels qu'on ait $P\{X_{\sigma_U} \in A' - V_x\} > \varepsilon_x$ pour tout $P \in \underline{\underline{S}}(y, A')$, quel que soit $y \in W_x \cap U$. L'ensemble $\overline{U} - V$ étant compact, un nombre fini $W_{x_1}, \ldots, W_{x_n}$ d'ensembles W_x le recouvrent. Il en résulte, en posant $V' = \bigcap_j V_{x_j}$ et $\varepsilon = \min(\varepsilon_{x_1}, \ldots, \varepsilon_{x_n})$, que $P\{X_{\sigma_U} \in A' - V'\} > \varepsilon$ pour tout $P \in \underline{\underline{S}}(y, A')$, quel que soit $y \in \bigcup_j W_{y_j} \cap U$. D'où, il s'ensuit que $\liminf_{y \to b} \Phi^{A'}_{I(A' - V')}(y) > \varepsilon$ pour tout $b \in \partial U - V$. Cela établi, fixons

$x \in U$, $P \in \underline{\underline{S}}(x, A)$ et posons $f = \Phi^{A'}_{I(A' - V')}$. Considérons en outre une suite croissante d'ouverts U_n d'adhérence contenue dans U et dont la réunion est U. On a alors, compte tenu de l'inégalité qui précède,

$$\varepsilon I\{X_{\sigma_U} \in A - V\} \leqq \liminf_{y \to X_{\sigma_U}} f(x) I\{X_{\sigma_U} \in A - V\} \leqq \liminf_{n \to \infty} f(X_{\sigma_{U_n}}),$$

et donc, en vertu du lemme de Fatou et du théorème d'arrêt (f est surharmonique d'après le théorème 1),

$$\varepsilon P\{X_{\sigma_U} \in A - V\} \leqq \int \liminf_{n \to \infty} f(X_{\sigma_{U_n}}) dP \leqq \lim_{n \to \infty} \int f(X_{\sigma_{U_n}}) dP \leqq f(x).$$

Comme $x \in U$ et $P \in \underline{\underline{S}}(x, A)$ sont arbitraires, on en conclut que $\varepsilon \Phi^{A}_{I(A - V)} \leqq f$.

<u>Théorème 5</u>. Soient A et A' deux frontières admissibles. Un point est alors extrémal pour A s'il est extrémal pour A'.

Supposons que a est extrémal pour A'. Alors a appartient à A, sinon il existe un voisinage V de a qui est disjoint de A et alors, d'après le lemme 7 et du fait que $\Phi^{A}_{I(A - V)} = 1$, on a $\varepsilon \leqq \Phi^{A'}_{I(A' - V')}$ pour un $\varepsilon > 0$ et pour un voisinage V' de a, ce qui contredit l'extrémalité de a pour A'. Une seconde application du lemme 7 montre que a est extrémal pour A.

A la suite de ce théorème, il est permis de parler de points extrémaux sans référence à une frontière admissible quelconque.

10. BARRIERES

La solution généralisée de Dirichlet Φ_{φ}^{A} est minimale au sens suivant:

Théorème 6. Soit f surharmonique dans U, minorée et telle que $\liminf_{x \to a} f(x) \geqq \varphi(a)$ pour tout $a \in A$. Alors $f \geqq \Phi_{\varphi}^{A}$.

Soient en effet x un point dans U, P un élément de $\underline{\underline{S}}(x, A)$ et (U_n) une suite croissante d'ouverts d'adhérence contenue dans U et dont la réunion est U. On a alors,

$$\liminf_{n \to \infty} f(X_{\sigma_{U_n}}) \geqq \liminf_{y \to X_{\sigma_U}} f(y) \geqq \varphi(X_{\sigma_U}) \quad \text{P-p.s.},$$

donc, en raison du théorème d'arrêt et du lemme de Fatou,

$$f(x) \geqq \lim_{n \to \infty} \int f(X_{\sigma_{U_n}})dP \geqq \int \liminf_{n \to \infty} f(X_{\sigma_{U_n}})dP \geqq \int \varphi(X_{\sigma_U})dP.$$

Comme $x \in U$ et $P \in \underline{\underline{S}}(x, A)$ sont arbitraires, on en conclut que $f \geqq \Phi_{\varphi}^{A}$.

Le théorème suivant caractérise les points extrémaux par la notion de barrière.

Définition 8. Une fonction surharmonique f dans U est dite barrière en $a \in \partial U$ si

a) $\liminf_{x \to a} f(x) = o$;

b) $\inf_{x \in U - V} f(x) > o$ pour tout voisinage V de a [19].

[19] Cf. [1], [5], [11].

Théorème 7. Pour que $a \in \partial U$ soit extrémal il faut et il suffit qu'il existe une barrière en a[20].

Soit en effet a extrémal et soit φ une fonction numérique continue et finie dans ∂U telle que $\varphi(a) = o$ et $\varphi(b) > o$ pour tout $b \neq a$. En vertu du théorème 2, $\liminf_{x \to a} \Phi_\varphi^{\partial U}(x) = o$. En outre, V étant un voisinage de a, il existe, d'après la première partie de la démonstration du lemme 7, un voisinage V' de a et un $\varepsilon > o$ tels qu'on ait $P\{X_{\sigma_U} \in \partial U - V'\} > \varepsilon$ pour tout $P \in \underline{\underline{S}}(x)$, quel que soit $x \in U - V$. Soit $\alpha > o$ une constante minorant φ dans $\partial U - V'$. On a alors, pour tout $x \in U - V$, P désignant un élément de $\underline{\underline{S}}(x)$,

$$\Phi_\varphi^{\partial U}(x) \geqq \int \varphi(X_{\sigma_U})dP \geqq \alpha P\{X_{\sigma_U} \in \partial U - V'\} \geqq \alpha\varepsilon,$$

ce qui démontre que $\Phi_\varphi^{\partial U}$ est une barrière en a. Inversement, si f est une barrière en ce point, il existe une constante $\alpha > o$ telle que $\liminf_{x \to b} f(x) \geqq \alpha$ pour tout $b \in \partial U - V$, où V est un voisinage de a. D'après le théorème 6, $f \geqq \alpha \Phi_{I(\partial U - V)}^{\partial U}$, donc $\liminf_{x \to a} \Phi_{I(\partial U - V)}^{\partial U}(x) = o$. Comme V est arbitraire, cela montre que a est extrémal.

11. PLUS PETITE FRONTIERE ADMISSIBLE, CARACTERISATION DE LA FRONTIERE DE ŠILOV

Soit $\mathcal{L}$ la famille des fonctions numériques f définies dans $\overline{U}$, à valeurs $> -\infty$, dont la restriction à U est surharmonique dans U et telles que $\liminf_{x \to a, x \in U} f(x) = f(a)$ pour tout a appartenant à ∂U. Désignons par S(f) l'ensemble des points où f atteint sa borne inférieure. On peut démontrer directement (cf. [5], [12]) que, parmi

(20) Un point extrémal est donc semi-régulier au sens de [5].

les sous-ensembles fermés de $\overline{U}$ ayant une intersection non vide avec chaque $S(f)$, lorsque f parcourt $\mathcal{L}$, il y en a un plus petit, appelé frontière de Šilov de U (relativement à $\mathcal{L}$).

Dans ce paragraphe, on commencera par démontrer l'existence d'une plus petite frontière admissible. On prouvera ensuite que cette frontière est identique à l'ensemble S des points extrémaux. Cela établi, il sera facile de montrer, sans devoir faire appel au résultat susmentionné, que S est la frontière de Šilov de U.

<u>Théorème 8</u>. L'ensemble S des points extrémaux constitue la plus petite frontière admissible et aussi la frontière de Šilov de U.

Soit $(A_\iota)_{\iota \in I}$ une partie totalement ordonnée de l'ensemble des frontières admissibles. On va montrer que $A = \bigcap_{\iota \in I} A_\iota$ est une frontière admissible. Comme l'espace E a une base dénombrable, on peut extraire une suite décroissante (A_{ι_n}) telle que $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\iota_n}$. Soient x un point dans U, P_1 un élément de $\underline{\underline{S}}(x, A_1)$ localement équivalent à P_x^G et (V_n) une suite d'ouverts dont l'intersection est A et telle que $E - G \supset V_n \supset$ $\supset A_{\iota_n}$ et $V_n \supset \overline{V}_{n+1}$ pour tout n. On montre qu'il existe un processus P appartenant à $\underline{\underline{S}}(x, A)$. A cet effet, on écrit A_n et σ_n au lieu respectivement de A_{ι_n} et $\sigma_{U - \overline{V}_n}$ et on définit par récurrence une suite (P_n) de telle sorte que $P_n \in \underline{\underline{S}}(x, A_n)$ et que $P_{n+1}(F) = P_n(F)$ pour tout $F \in \mathcal{F}_{\sigma_n}$, quel que soit n: P_1 est le processus choisi ci-dessus; si $P_n \in \underline{\underline{S}}(x, A_n)$ a été défini, on choisit, pour chaque $y \in U \cap \partial V_n$, P_y dans $\underline{\underline{S}}(y, A_{n+1})$ de telle manière que l'application $y \longmapsto P_y(F)$ soit mesurable pour tout $F \in \mathcal{F}$, ce qui est possible grâce au lemme 2. On pose alors $P_{n+1} = \mathfrak{R}_{\sigma_n}\big(P_n, (P_\omega)\big)$, où $P_\omega = P_{X_{\sigma_n}(\omega)}$ si $X_{\sigma_n}(\omega) \in U \cap \partial V_n$ et $P_\omega = \varepsilon_{\omega_o}$ sinon, ω_o étant un point quelconque dans Ω. Du fait que $P_\omega \in \underline{\underline{S}}\big(X_{\sigma_n}(\omega), A_{n+1}\big)$ pour P_n-presque tout ω, P_{n+1} appartient à $\underline{\underline{S}}(x, A_{n+1})$, en vertu du lemme 4. En outre, par construction même, $P_{n+1}(F) = P_n(F)$ pour tout $F \in \mathfrak{F}_{\sigma_n}$, quel que soit n. D'après le lemme 5, il existe donc $P \in \underline{\underline{S}}(x)$ tel que $P(F) = P_n(F)$ pour tout $F \in \mathfrak{F}_{\sigma_n}$. Or, $\{\sigma_n < \sigma_U\}$ est un élément de $\mathfrak{F}_{\sigma_n}$, donc $P\{\sigma_n < \sigma_U\} = 1$ pour tout n, ce qui montre que $P\{X_{\sigma_U} \in A\} = 1$, autrement dit que $P \in \underline{\underline{S}}(x, A)$. On en conclut que l'ensemble des frontières admissibles est inductif. D'après le théorème de Zorn, il existe en conséquence une frontière admissible minimale que l'on notera encore par A. Or, $S \subset A$, en vertu du théorème 5, et la première partie du théorème sera établie si l'on prouve que tout point de A est extrémal. Supposons le contraire, c'est-à-dire que $A - S$ contient un point a. On va montrer qu'il existe un voisinage W de a tel que $A - W$ est une frontière admissible, ce qui contredit la minimalité de A. Comme a n'est pas extrémal, il existe un voisinage V de a tel que $\liminf\limits_{x \to a} \Phi^A_{I(A - V)}(x) = \alpha > o$, donc un voisinage V' de a contenu dans V tel que $\Phi^A_{I(A - V)}(y) > \alpha/2$ pour tout $y \in U \cap V'$. Un voisinage quelconque W de a d'adhérence contenue dans V' répond à la question. En effet, pour tout $y \in U \cap V'$, il existe $P_y \in \underline{\underline{S}}(y, A)$ tel que $P_y\{X_{\sigma_U} \in A - \overline{W}\} \geqq P_y\{X_{\sigma_U} \in A - V\} > \alpha/2$. En vertu du lemme 2, l'on peut admettre que l'application $y \longmapsto P_y(F)$ est mesurable pour tout $F \in \mathfrak{F}$. On pose $A' = A \cap \overline{W}$ et $\beta = 1 - \alpha/2$. Alors $P_y\{X_{\sigma_U} \in A'\} < \beta$ pour tout $y \in U \cap V'$. Soient x un point dans U, P_o un élément de $\underline{\underline{S}}(x, A)$ localement équivalent à P_x^G et (V_n) une suite d'ouverts dont l'intersection est A' et telle que $V' - G \supset \overline{V}_n \supset V_n \supset \overline{V}_{n+1}$ pour tout n. On va définir, par récurrence, deux suites (P_n) et (σ_n) de telle nature que P_n appartienne à $\underline{\underline{S}}(x, A)$, $P_n\{\sigma_n < \sigma_U\} < \beta^n$ et $\sigma_n = \sigma_{U - \overline{V}_{m_n}}$ pour tout n, où m_n dénote un entier croissant, avec n, vers l'infini: P_o est le processus choisi ci-dessus et σ_o le temps de sortie $\sigma_{U - \overline{V}_1}$. Supposons que P_n et σ_n aient été déjà définis et posons $P_\omega = P_{X_{\sigma_n}(\omega)}$ si $\omega \in \{\sigma_n < \sigma_U\}$, $P_\omega = \varepsilon_{\omega_n}$ sinon, ω_n dénotant la trajectoire de valeur constante égale à $X_{\sigma_n}(\omega)$. La famille (P_ω) ainsi définie remplit les conditions de recollement relatives à P_n, σ_n et $P_\omega \in \underline{\underline{S}}\big(X_{\sigma_n}(\omega), A\big)$ pour tout $\omega \in \{\sigma_n < \sigma_U\}$. Posons $P_{n+1} = \mathfrak{R}_{\sigma_n}\big(P_n, (P_\omega)\big)$. Il est clair que $P_{n+1}\{X_{\sigma_U} \in A\} = 1$ de sorte qu'une application du lemme 4 montre que $P_{n+1} \in \underline{\underline{S}}(x, A)$. On a, en outre, en vertu de (R.b) et du fait que $P_\omega\{X_{\sigma_U} \in A'\} < \beta$ pour tout $\omega \in \{\sigma_n < \sigma_U\}$,

$$P_{n+1}\{X_{\sigma_U} \in A'\} = P_{n+1}\{X_{\sigma_U}(\theta_{\sigma_n}) \in A'\} = \int P_\omega\{X_{\sigma_U} \in A'\}dP_n(\omega) =$$

$$= \int_{\{\sigma_n < \sigma_U\}} P_\omega\{X_{\sigma_U} \in A'\}dP_n(\omega) < \beta^{n+1}.$$

Puisque l'ensemble $\{X_o \in U\} \cap \{\sigma_U < \sigma_E\} \cap \{\sigma_{U - \overline{V}_m} < \sigma_U\}$ décroît vers $\{X_o \in U\} \cap \{X_{\sigma_U} \in A'\}$ quand m tend vers l'infini, on peut choisir $m_{n+1} > m_n$ tel que $P_{n+1}\{\sigma_{U - \overline{V}_{m_{n+1}}} < \sigma_U\} < \beta^{n+1}$. On pose alors $\sigma_{n+1} = \sigma_{U - \overline{V}_{m_{n+1}}}$. Par construction même, $P_{n+1}(F) = P_n(F)$ pour tout $F \in \mathfrak{F}_{\sigma_n}$, quel que soit n. D'après le lemme 5, il existe donc un processus $P \in \underline{\underline{S}}(x)$ tel que $P(F) = P_n(F)$ pour tout $F \in \mathfrak{F}_{\sigma_n}$, quel que soit n. Il est clair que $\{X_{\sigma_n} \in A - A'\}$ croît vers $\{X_{\sigma_U} \in A - A'\}$ quand n tend vers l'infini. La démonstration de la première partie du théorème sera en conséquence achevée si l'on montre que $\lim_{n\to\infty} P\{X_{\sigma_n} \in A - A'\} = 1$. Or, il est facile de vérifier que $\{X_0 \in U\} \cap \{X_{\sigma_n} \in \partial U - A'\} =$ $= \{X_0 \in U\} \cap \{\sigma_U < \sigma_E\} \cap \{\sigma_n = \sigma_U\}$. Compte tenu du fait que $P_n \in \underline{\underline{S}}(x, A)$ et que $P_n\{\sigma_n < \sigma_U\} < \beta^n$, cela entraîne $P_n\{X_{\sigma_n} \in A - A'\} = 1 - P_n\{\sigma_n < \sigma_U\} >$ $> 1 - \beta^n$, ce qui prouve l'assertion, car le membre de gauche est égal à $P\{X_{\sigma_n} \in A - A'\}$, en raison de l'appartenance de $\{X_{\sigma_n} \in A - A'\}$ à $\mathcal{F}_{\sigma_n}$. Passons à la démonstration de la seconde partie du théorème. D'après le théorème 7, il existe une barrière en chaque point de S. Si, donc, chaque fonction de $\mathcal{L}$ atteint sa borne inférieure dans l'ensemble S', on doit avoir $S \subset S'$. D'autre part, S étant une frontière admissible, toute fonction de $\mathcal{L}$ atteint sa borne inférieure dans S, d'après le théorème 6. Par conséquent, S est la frontière de Šilov de U et la démonstration est achevée.

12. PROBLEME DE DIRICHLET

On s'intéresse au problème généralisé de Dirichlet suivant (cf. [1], [6]): A étant un sous-ensemble fermé de ∂U, dans quelles conditions, pour chaque fonction numérique continue et finie φ donnée sur A, existe-t-il une fonction surharmonique dans U qui (dans un sens à préciser) atteigne les valeurs prescrites φ à la frontière et qui soit minimale? Les paragraphes précédents contiennent déjà essentiellement la réponse à cette question. Aussi, pour résoudre le problème, ne restera-t-il qu'à rapprocher les résultats dont on dispose.

Mais précisons tout d'abord les termes nouveaux.

On dit qu'une fonction surharmonique f dans U est minimale relativement à A si $f \leqq f'$ pour toute f' surharmonique minorée dans U telle que $\liminf_{x \to a} f(x) \leqq \liminf_{x \to a} f'(x)$ pour tout $a \in A$.

On appelle solution du problème de Dirichlet relatif à A et à la fonction numérique φ dans A, une fonction surharmonique minorée f dans U (nécessairement unique) ayant les propriétés suivantes:

(a) $\liminf_{x \to a} f(x) = \varphi(a)$ pour tout $a \in A$;
(b) f est minimale relativement à A.

On dit que le problème de Dirichlet relatif à A est résoluble s'il existe une solution pour toute fonction φ dans A, continue et finie.

Dans ce cas, si f est surharmonique dans U, minorée et telle que $\liminf_{x \to a} f(x) \geqq o$ pour tout $a \in A$, alors $f \geqq o$ [21], autrement dit la solution relative à une constante est la constante elle-même. En effet, s'il existe x tel que $f(x) < o$, alors pour λ suffisamment grand $\lambda f(x) < f_o(x)$, où f_o dénote la solution relative à la constante o. Mais cela montre que f_o n'est pas minimale.

D'après le théorème 8, S est une frontière admissible. Il est donc justifié de parler le points-frontière réguliers pour S (cf. paragraphe 7). Par commodité on appellera ces points tout simplement points réguliers. Rappelons-en la définition: $a \in S$ est régulier si, quel que

[21] C'est-à-dire que le principe du minimum relatif à A est valable.

soit le voisinage V de a, $\sup_{P \in \underline{\underline{S}}(x, S)} P\{X_{\sigma_U} \in V\} \longrightarrow 1$ quand $x \longrightarrow a$, $x \in U$.

<u>Théorème 9</u>. Le problème de Dirichlet relatif à A est résoluble si et seulement si A est la frontière de Šilov de U et tout point de cette frontière est régulier. Dans ce cas la solution relative à φ est la solution généralisée Φ_{φ}^{S}.

Au cours de cette démonstration le symbole φ désignera les fonctions continues et finies. Supposons que la condition de l'énoncé soit remplie. En vertu des théorèmes 8, 1 et 2, Φ_{φ}^{S} est surharmonique dans U et $\liminf_{x \to a} \Phi_{\varphi}^{S}(x) = \varphi(a)$ pour tout φ défini dans S et tout $a \in S$. En outre, d'après le théorème 6, Φ_{φ}^{S} est minimale relativement à S donc le problème de Dirichlet relatif à S est résoluble. Supposons, inversement, que ce problème relatif à A soit résoluble. Si S - A n'est pas vide et a dénote un de ses points, il existe, d'après le théorème 7, une barrière f en a et donc un $\varepsilon > o$ tel que $\liminf_{x \to a'} f(x) \geqq \varepsilon$ pour tout $a' \in A$. Mais alors $f \geqq \varepsilon$, ce qui est impossible. On doit donc avoir $S \subset A$. D'autre part, si S est un sous-ensemble propre de A, il existe une fonction φ dans A telle que $\varphi(a') = o$ pour tout $a' \in S$ et que $\varphi(a) < o$ pour un $a \in A - S$. Si f_{φ} dénote la solution relative à φ, alors, en vertu du théorème 6, $f_{\varphi} \geqq \Phi_{\varphi}^{S} = o$, ce qui est impossible. Donc A = S et il reste seulement à démontrer que tout point de S est régulier. D'après le théorème 2, $\liminf_{x \to a} \Phi_{\varphi}^{S}(x) \geqq \varphi(a)$ pour tout φ défini dans S et tout $a \in S$. Du fait que f_{φ} est minimale, on déduit que $\Phi_{\varphi}^{S} \geqq f_{\varphi}$ pour tout φ. Si, donc, a est un point dans S, V un voisinage de a et φ une fonction dans S telle que $\varphi \leqq I(S \cap V)$ et $\varphi(a) = 1$, on a

$$1 = \liminf_{x \to a} f_{\varphi}(x) \leqq \liminf_{x \to a} \Phi^{S}_{I(S \cap V)}(x) \leqq \limsup_{x \to a} \Phi^{S}_{I(S \cap V)}(x) \leqq 1,$$

ce qui démontre que a est régulier.

13. CAS PARTICULIER

Les résultats des paragraphes précédents s'appliquent, en particulier, au cas des fonctions de deux (ou plusieurs) variables, surharmoniques en chacune de ces variables par rapport à un processus de Markov. Le présent paragraphe sera consacré à cette application.

Précisons tout d'abord les termes et les données. De même qu'au paragraphe 2, soient E un espace localement compact non compact et à base dénombrable, $E_\delta = E \cup \{\delta\}$ son compactifié d'Alexandrov, $\mathcal{U}(E)$ l'ensemble des ouverts non vides de E relativement compacts dans E.

On dira que $X = (\Omega^X, \mathfrak{F}^X, \omega^X_\delta, X_t, \theta^X_t, P_x)$ est un <u>processus de Markov</u> à valeurs dans E_δ [22], si

(a) X est un processus de Markov au sens usuel;

(b) toutes les trajectoires de (X_t) sont continues et absorbées par δ (voir le paragraphe 2);

(c) $P_x\{\sigma^X_U < \sigma^X_E\} = 1$ pour tout $x \in E$ et tout $U \in \mathcal{U}(E)$ [23];

---

(22) X n'est pas nécessairement un processus canonique; ω^X_δ est un élément de Ω^X tel que $X_0(\omega^X_\delta) = \delta$ (cf. [2], p. 8-05).

(23) σ^X_A désigne le temps de sortie de (X_t) de $A \subset E_\delta$; pour des conditions équivalentes à (c), voir [2], p. 8-08.

(d) X est fortement fellérien, cela signifiant que le semi-groupe de transition (P_t^X) de X est fortement fellérien [24][25];

(e) X est localement continu, c'est-à-dire que, pour toute fonction f continue finie et à support compact dans E, $\lim_{t\to o} P_t^X f = f$ uniformément dans tout compact de E [26][27].

Ainsi défini, un processus de Markov est nécessairement fortement markovien [28].

Soit donc X un tel processus à valeurs dans E_δ. Pour tout $U \in \mathcal{U}(E)$, tout $x \in E$ et tout borélien $B \subset E$, désignons par $\Pi_U^X(x, B)$ la probabilité $P_x\{X_{\sigma_U^X} \in B\}$. On dit que $(\Pi_U^X)_{U \in \mathcal{U}(E)}$ est la famille de noyaux harmoniques associée à X. C'est une famille de répartitions de sortie fortement fellérienne au sens du paragraphe 3 (voir [2], p. 8-18).

On dira qu'une fonction est surharmonique (resp. harmonique) par rapport au processus X si elle est surharmonique (resp. harmonique) par rapport à (Π_U^X) conformément à la définition 2.

---

(24) $P_t^X(x, B) = P_x\{X_t \in B\}$ pour tout $x \in E$ et tout borélien $B \subset E$.

(25) (P_t^X) est dit fortement fellérien si, pour tout $t > o$ et toute fonction borélienne bornée dans E, $P_t^X f$ est une fonction continue.

(26) Pour des conditions équivalentes à (e), voir [2], p. 8-43.

(27) (a) — (e) sont des hypothèses appropriées à l'étude du problème de Dirichlet formulé en termes probabilistes.

(28) Par rapport à $(\mathcal{X}_t^X)$, où $\mathcal{X}_t^X = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s^X$ et $\mathcal{F}_s^X$ désigne la tribu engendrée par les variables X_r d'indice $r \leqq s$ (voir [13], vol I, p. 87 et 99).

Considérons à présent deux processus de Markov X et Y à valeurs respectivement dans $E^X_\gamma = E^X \cup \{\gamma\}$ et $E^Y_\delta = E^Y \cup \{\delta\}$.

Soit U un ouvert dans $E^X \times E^Y$. Une fonction numérique f, définie dans U, sera dite <u>séparément surharmonique</u> dans U, si

(a) f est localement minorée;

(b) pour chaque $x \in E^X$, f_x est surharmonique dans U_x par rapport à Y [29] et, pour chaque $y \in E^Y$, f_y est surharmonique dans U_y par rapport à X.

<u>Théorème 10</u>. Pour qu'une fonction numérique f, définie dans un ouvert $U \subset E^X \times E^Y$, soit séparément surharmonique dans U, il faut et il suffit que

(a) $f(x, y) > -\infty$ pour tout $(x, y) \in U$;

(b) f soit s.c.i.;

(c) $(\Pi^X_V \otimes \Pi^Y_W) f(x, y) \leq f(x, y)$ pour tout $(x, y) \in V \times W$, quel que soit l'ouvert $V \times W$ dont l'adhérence est compacte et contenue dans U.

Supposons que f est séparément surharmonique et montrons d'abord que f est s.c.i. [30]. A cet effet, considérons un ouvert relativement compact $V \times W$ tel que $\overline{V} \times \overline{W} \subset U$ et posons $P^V_t(x, B) = P_x\{X_t \in B, t < \sigma^X_V\}$ pour tout $x \in V$ et tout borélien $B \subset V$, $P^W_t(y, C) = P_y\{Y_t \in C, t < \sigma^Y_W\}$ pour tout $y \in W$ et tout borélien $C \subset W$. Comme f est minorée

---

(29) $U_x = \{y: (x, y) \in U\}$; f_x désigne l'application partielle $y \mapsto f(x, y)$.

(30) Dans le cas classique, c'est un résultat dû à V. Avanissian ([14], p. 137).

dans $V \times W$, la restriction de f à $V \times W$ est égale à la somme d'une constante et d'une fonction g, séparément surharmonique et positive dans $V \times W$. D'après [13], vol. II, p. 19, g est séparément excessive par rapport à (P_t^V) et (P_t^W). Ces deux semi-groupes étant fortement fellériens (voir [13], vol. II, p. 31), g est s.c.i., d'après le théorème 11 dans [15], ce qui prouve l'assertion. Il est maintenant facile de vérifier que la condition (c) de l'énoncé est remplie et la première partie du théorème est donc démontrée. Passons à la seconde en supposant que f obéit aux trois conditions de l'énoncé. Soient x un point dans E^X et W un ouvert de $\mathcal{U}(E^Y)$ tel que $\overline{W} \subset U_x$. Il faut montrer que $\Pi_W^Y f_x(y) \leqq f_x(y)$ pour tout $y \in U_x$ ou, ce qui revient au même, pour tout $y \in W$. A cet effet, considérons une suite d'ouverts $V_n \in \mathcal{U}(E^X, x)$ dont $\overline{V}_n$ décroît vers $\{x\}$ et avec $\overline{V}_1 \times \overline{W} \subset U$. Si g désigne une fonction continue et finie dans U, on a, pour chaque $y \in W$,

$$\lim_{n \to \infty} (\Pi_{V_n}^X \otimes \Pi_W^Y) g(x, y) = \int \Pi_W^Y(y, dy') \lim_{n \to \infty} \Pi_{V_n}^X g_{y'}(x) = \Pi_W^Y g_x(y).$$

Puisque f, en tant que fonction s.c.i. $> -\infty$, est limite d'une suite croissante de fonctions continues et finies dans U, on en conclut que

$$\Pi_W^Y f_x(y) \leqq \liminf_{n \to \infty} (\Pi_{V_n}^X \otimes \Pi_W^Y) f(x, y) \leqq f(x, y) = f_x(y),$$

pour chaque $y \in W$, ce qui achève la démonstration.

En accord avec les paragraphes précédents, on adopte les notations suivantes: Ω, Z_t et $\mathcal{F}_t$ pour respectivement l'espace de base l'application coordonnée t et sa tribu relative, définis, ainsi que

$\mathcal{U}(E)$, comme au paragraphe 2, à partir de l'espace $E_{(\gamma,\delta)} = E \cup \{(\gamma, \delta)\}$, où $E = E^X \times E^Y$; $\mathcal{F}$ pour la tribu engendrée par la réunion des $\mathcal{F}_t$; la probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{F})$ pour le processus canonique $(\Omega, \mathcal{F}, Z_t, P)$; $\mathcal{G}$ pour l'ensemble des ouverts de $\mathcal{U}(E)$ de la forme $V \times W$. Pour chaque $V \times W$ appartenant à $\mathcal{G}$, on pose

$$\pi_{V \times W}((x, y),\cdot) = \begin{cases} (\pi_V^X \otimes \pi_W^Y)((x, y),\cdot) & \text{si } (x, y) \in V \times W, \\ \varepsilon_{(x, y)} & \text{si } (x, y) \in E - (V \times W). \end{cases}$$

La famille $(\pi_G)_{G \in \mathcal{G}}$ ainsi définie est une famille de répartitions de sortie fortement fellérienne au sens du paragraphe 3 [(31)]. En vertu du théorème 10, les fonctions surharmoniques, associées à cette famille selon la définition 2, sont exactement les fonctions séparément surharmoniques.

Pour pouvoir appliquer la théorie générale au cas des fonctions séparément surharmoniques, il faut s'assurer que (π_G) possède une réalisation, au sens de la définition 3, vérifiant l'hypothèse (A_2) du paragraphe 8. Le théorème suivant sert à ce but.

<u>Théorème 11</u>. $(\pi_G)_{G \in \mathcal{G}}$ admet une réalisation $(P_z^G)_{G \in \mathcal{G}(z),\, z \in E}$ vérifiant (A_2) par rapport aux fonctions séparément surharmoniques.

Soient $G = V \times W$ un ouvert de $\mathcal{G}$ et f une fonction séparément surharmonique dans un voisinage de $\overline{G}$. Soit en outre $G' = V' \times W'$

---

(31) La forte fellérénéité résulte de la démonstration du théorème 7 dans [15], si l'on n'y considère que des x et des y appartenant à des sous-ensembles ouverts des espaces respectifs.

un ouvert de $\mathcal{G}$ contenant $\overline{G}$ et dont l'adhérence est contenue dans le domaine de définition de f. La restriction de f à G' est égale à la somme d'une constante et d'une fonction g, séparément excessive par rapport aux semi-groupes $(P_t^{V'})$ et $(P_t^{W'})$ (voir la première partie de la démonstration du théorème 10). Posons $g_n = (P_{1/n}^{V'} \otimes P_{1/n}^{W'})(g \wedge n)$. La fonction g_n est séparément excessive et continue, car elle est la transformée d'une fonction bornée par un noyau fortement fellérien. Elle tend en outre en croissant vers g, quand $n \to \infty$ et cela prouve que la restriction de f à G' est la limite d'une suite croissante de fonctions séparément surharmoniques continues et finies dans G'. En vertu du théorème 16 dans [10],p.135,il n'y a donc aucune restriction de la généralité si l'on se borne à considérer des fonctions séparément surharmoniques qui sont continues et finies. Soit f une telle fonction, définie dans un voisinage de $\overline{G}$. Il suffit de prouver l'existence de P_z^G pour des z appartenant a un ensemble préalablement donné de $\mathcal{G}$ dont l'adhérence est contenue dans G. Cet ensemble est le début d'une suite d'ensembles $G_n = V_n \times W_n \in \mathcal{G}$ telle que $\overline{G}_n \subset G_{n+1} \subset \overline{G}_{n+1} \subset G$ pour tout n et que $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = G$. Faisons correspondre à la trajectoire de $((X_t, Y_t))$ relative à (ω^X, ω^Y) l'élément de Ω dont la coordonnée t est le point $((X_t(\omega^X), Y_t(\omega^Y))$ si ce point appartient à E, le point (γ, δ) sinon. Par cette correspondance, $(\Omega^X \times \Omega^Y, \mathcal{F}^X \otimes \mathcal{F}^Y, (X_t, Y_t), P_x \otimes P_y)$ induit une famille borélienne $(P_z)_{z \in E_{(\gamma,\delta)}}$ de processus canoniques (borélienne au sens de la démonstration du théorème 4) telle que $P_z\{\sigma_U < \sigma_E\} = 1$ pour tout $U \in \mathcal{U}(E)$, quel que soit $z \in E$ (32).

(32) $(\Omega, \mathcal{F}, Z_t, P_z)$ est en réalité un processus de Markov à valeurs dans $E_{(\gamma,\delta)}$ dont le semi-groupe de transition est $(P_t^X \otimes P_t^Y)$ (voir [15], p. 327).

Appelons σ_n le temps de sortie de (Z_t) de l'ouvert $(V_n \times W) \cup \cup (V \times W_n)$ et écrivons ρ_n et τ_n au lieu respectivement de $\sigma^X_{V_n}$ et $\sigma^Y_{W_n}$. Il est clair que σ_n tend en croissant vers σ_G quand $n \to \infty$. Pour chaque $z = (x, y) \in E_{(\gamma,\delta)}$ désignons par Q^n_z le processus que l'on obtient en recollant, au temps σ_n, le processus canonique induit par $\left(\Omega^X \times \Omega^Y,\ \mathcal{F}^X \otimes \mathcal{F}^Y,\ (X_{t\wedge\rho_n}, Y_{t\wedge\tau_n}),\ P_x \otimes P_y\right)$ à $(P_{Z_{\sigma_n}(\omega)})$. Or, pour chaque $(x, y) \in G_n$, $\left(f(X_{t\wedge\rho_n}, Y_{t\wedge\tau_n}),\ \mathcal{F}^X_t \otimes \mathcal{F}^Y_t,\ P_x \otimes P_y\right)$ est une surmartingale [33]. Donc $\left(f(Z_{t\wedge\sigma_n}),\ \mathcal{F}_t,\ Q^n_z\right)$ en est également une pour chaque $z \in G_n$. Par récurrence, on va définir, pour chaque n, une famille borélienne de processus canoniques $(P^n_z)_{z \in G_1}$ de telle sorte que, pour z fixé, $\left(f(Z_{t\wedge\sigma_n}),\ \mathcal{F}_t,\ P^n_z\right)$ soit une surmartingale, $P^n_z\{Z_{\sigma_n} \in \in \partial V_n \times \partial W_n\} = 1$ et $P^n_z\{\sigma_G < \sigma_E\} = 1$. P^1_z est le processus Q^1_z. Si (P^n_z) a été déjà définie, on pose $P^{n+1}_z = \mathfrak{R}_{\sigma_n}\left(P^n_z,\ (Q^{n+1}_{Z_{\sigma_n}(\omega)})\right)$. Il est clair que (P^{n+1}_z) est une famille borélienne et le lemme 4 montre $\left(f(Z_{t\wedge\sigma_{n+1}}),\ \mathcal{F}_t,\ P^{n+1}_z\right)$ est une surmartingale pour chaque $z \in G_1$. Or, par construction même, on a $P^{n+1}_z(F) = P^n_z(F)$ pour tout $F \in \mathcal{F}_{\sigma_n}$. D'après le lemme 5, il existe une famille borélienne $(P^G_z)_{z \in G_1}$ telle que $P^G_z(F) = P^n_z(F)$ pour tout $F \in \mathcal{F}_{\sigma_n}$ et que $P^G_z\{\sigma_G < \sigma_E\} = 1$, quel que soit $z \in G_1$. Compte tenu de la continuité de f et du fait que $\left(f(Z_{t\wedge\sigma_n}),\ \mathcal{F}_t,\ P^n_z\right)$ est une

---

[33] Cela résulte en appliquant le théorème de Fubini et la remarque suivante: soit g une fonction continue excessive par rapport à (P^V_t); alors si $s < t$ on a, compte tenu de la relation $\{t < \sigma^X_V\} \subset \subset \{s < \sigma^X_V\} \cap \{t-s < \sigma^X_V(\theta_s)\}$,

$$E_x\{I\{t<\sigma^X_V\}g(X_t)\,|\,\mathcal{F}^X_s\} \leqq I\{s<\sigma^X_V\}E_x\{(I\{t-s<\sigma^X_V\}g(X_{t-s}))(\theta_s)\,|\,\mathcal{F}^X_s\} =$$
$$= I\{s<\sigma^X_V\}E_{X_s}\{I\{t-s<\sigma^X_V\}g(X_{t-s})\} = I\{s<\sigma^X_V\}P^V_{t-s}g(X_s) \leqq I\{s<\sigma^X_V\}g(X_s),$$

P_x-p.s., quel que soit $x \in V$; donc, d'après le théorème d'arrêt, $(g(X_{t\wedge\rho_n}),\ \mathcal{F}^X_t,\ P_x)$ est une surmartingale pour chaque $x \in V_n$.

surmartingale, on en conclut que $(f(Z_t^G),\ \mathcal{F}_t,\ P_z^G)$ est aussi une surmartingale. Il reste donc seulement à vérifier les conditions (c) et (d) de la définition 3 (cette dernière a été introduite au paragraphe 8). Sans rien changer à ce que l'on vient de dire à propos de P_z^G, on peut remplacer ce processus, tout en gardant sa notation, par le processus que l'on obtient en recollant, au temps σ_G, P_z^G à $(P_{Z_{\sigma_G}(\omega)})$. Le nouveau processus P_z^G vérifie alors (d). Il vérifie aussi (c). Pour le démontrer, il suffit de prouver que, pour chaque $z \in G_1$ et chaque borélien B, $P_z^G\{Z_{\sigma_n} \in B\} = \Pi_{G_n}(z, B)$ car cela, joint au fait que les mesures $\Pi_{G_n}(z,\cdot)$ tendent vaguement vers $\Pi_G(z,\cdot)$ quand $n \to \infty$, entraîne aussitôt que $P_z^G\{Z_{\sigma_G} \in B\} = \Pi_G(z, B)$. La preuve sera faite par récurrence sur n, en utilisant la relation $Q_z^n\{Z_{\sigma_n} \in B\} = \Pi_{G_n}(z, B)$ qui est évidemment vraie pour chaque $z \in G_n$. L'assertion est vraie pour n = 1. Supposons qu'elle soit vraie pour n. Alors on a

$$P_z^G\{Z_{\sigma_{n+1}} \in B\} = P_z^{n+1}\{Z_{\sigma_{n+1}} \in B\} = P_z^{n+1}\{Z_{\sigma_{n+1}}(\theta_{\sigma_n}) \in B\} =$$

$$= \int Q^{n+1}_{Z_{\sigma_n}(\omega)}\{Z_{\sigma_{n+1}} \in B\} dP_z^n(\omega) = \int \Pi_{G_{n+1}}(Z_{\sigma_n}(\omega), B) dP_z^n(\omega) =$$

$$= \int \Pi_{G_{n+1}}(Z_{\sigma_n}(\omega), B) dP_z^G(\omega) = (\Pi_{G_n}\Pi_{G_{n+1}})(z, B) = \Pi_{G_{n+1}}(z, B),$$

ce qui achève la démonstration.

On dira que le processus de Markov X (resp. Y) est du type (E) si, pour chaque $V \in \mathcal{U}(E^X)$ (resp. $W \in \mathcal{U}(E^Y)$), les mesures appartenant à la famille $\{\Pi_V^X(x,\cdot) : x \in V\}$ (resp. $\{\Pi_W^Y(y,\cdot) : y \in W\}$) sont équivalentes.

Il est clair que si X et Y sont du type (E), la famille $(\Pi_G)_{G \in \mathcal{G}}$ qui leur est associée vérifie la condition (E) du paragraphe 5.

Grâce aux théorèmes 10 et 11, les résultats des paragraphes précédents sont donc applicables au cas des fonctions séparément surharmoniques par rapport à deux processus de Markov du type (E) dont les fonctions harmoniques dans un ouvert relativement compact séparent les points de cet ouvert.

En particulier, la théorie s'applique au cas des fonctions séparément surharmoniques au sens classique, en prenant pour X et Y deux mouvements browniens. C'est d'ailleurs dans ce cadre que J.B. Walsh situe son travail de thèse. Pour plus de renseignements à ce sujet, notamment pour des résultats découlant d'une notion de régularité forte pour les points-frontière, ainsi que pour une étude détaillée du problème de Dirichlet dans des domaines du type produit, on renvoie au travail de J.B. Walsh [1].

APPENDICE 1

On utilise les données du deuxième paragraphe.

<u>Théorème 12</u>. Soient P une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ et $\mathcal{H}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. Il existe alors une version $P^{\mathcal{H}}_{\bullet}$ de la probabilité conditionnelle $P\{\ |\mathcal{H}\}$ telle que

(a) pour chaque $\omega \in \Omega$, $P^{\mathcal{H}}_{\omega}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$;

(b) pour chaque $F \in \mathcal{F}$, l'application $\omega \longmapsto P^{\mathcal{H}}_{\omega}(F)$ est mesurable par rapport à la complétée universelle de $\mathcal{H}$.

Considérons en effet l'injection $X: \omega \longmapsto (X_t(\omega))_{t \in D}$ de Ω dans le produit cartésien $E_\delta^D = (E_\delta)^D$, où D désigne l'ensemble des rationnels ≥ 0. Il est clair que $\mathcal{F} = X^{-1}(\mathcal{B})$, où $\mathcal{B}$ désigne la tribu des boréliens de E_δ^D. Soit Π l'image de P par X et soit $\mathcal{C}$ la sous-tribu de $\mathcal{B}$ constituée par les ensembles B tels que $X^{-1}(B) \in \mathcal{H}$. Comme E_δ^D est un compact métrisable, il existe une version $\Pi_\bullet^{\mathcal{C}}$ de la probabilité conditionnelle $\Pi\{\ |\mathcal{C}\}$ telle que (a) pour chaque $z \in E_\delta^D$, $\Pi_z^{\mathcal{C}}$ est une probabilité sur $(E_\delta^D, \mathcal{B})$ et (b) pour chaque $B \in \mathcal{B}$, l'application $z \longmapsto \Pi_z^{\mathcal{C}}(B)$ est mesurable par rapport à $\mathcal{C}$. Si, pour chaque z, on prolonge $\Pi_z^{\mathcal{C}}$ à $\mathcal{B}^*$ (* apposé au symbole d'une tribu, indiquera la complétion universelle de cette tribu), cette application est alors mesurable par rapport à $\mathcal{C}^*$ pour chaque $B \in \mathcal{B}^*$. Supposons d'avoir pu démontrer que l'image $X(\Omega)$ de Ω par X appartient à $\mathcal{B}^*$ et désignons par B_F le sous-ensemble (unique) de $X(\Omega)$ dont l'image inverse par X est F. Alors B_F appartient à $\mathcal{B}^*$. Posons donc, pour chaque ω et chaque $F \in \mathcal{F}$, $P_\omega^{\mathcal{H}}(F) = \Pi_{X(\omega)}^{\mathcal{C}}(B_F)$. Il est clair que $P_\bullet^{\mathcal{H}}$ ainsi définie est une version de $P\{\ |\mathcal{H}\}$ satisfaisant aux conditions (a) et (b) du théorème. Il reste à prouver que $X(\Omega)$ est un élément de $\mathcal{B}^*$. Pour cela, on désigne par A_n^i le sous-ensemble de E_δ^D constitué par les $z = (z(t))_{t \in D}$ obéissant aux trois conditions suivantes: (a') $(z(t))_{t \in [0,\, i/2^n[\cap D}$ se prolonge en une application continue de $[0, i/2^n[$ dans E; (b') $z(i/2^n)$ appartient à E et $(z(t))_{t \in [i/2^n,\, (i+1)/2^n[\cap D}$ se prolonge en une application continue à droite de $[i/2^n, (i+1)/2^n[$ dans E_δ; (c') $z(t) = \delta$ pour tout $t \in [(i+1)/2^n, \infty[\cap D$. Il est facile de voir que $X(\Omega) = \liminf_{n \to \infty} (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n^i) \cup \{z_0\}$, où z_0 désigne l'élément de E_δ^D dont toutes les coordonnées $z_o(t)$ sont égales à δ. Il suffit donc de prouver que A_n^i appartient à $\mathcal{B}^*$. Mais cela résulte du fait que l'ensemble des z satisfaisant à (a') appartient à $\mathcal{B}$, ce qui est bien connu, que l'ensemble des z satisfaisant à (b') appartient à $\mathcal{B}^*$ (voir [15], théorème 20) et que celui des z vérifiant (c') appartient à $\mathcal{B}$.

APPENDICE 2

Soit $(\Omega, \mathcal{X}, P)$ un espace probabilisé complet muni d'une famille $(\mathcal{X}_t)$ de sous-tribus de $\mathcal{X}$, croissante et continue à droite(34). Supposons que $\mathcal{X}_o$ contienne tous les ensembles négligeables. On dira qu'un processus (Y_t) défini sur $(\Omega, \mathcal{X}, P)$ est adapté à $(\mathcal{X}_t)$ si, pour chaque t, la variable Y_t est mesurable par rapport à $\mathcal{X}_t$. Dans cette appendice, par temps d'arrêt sans autre précision, on entendra un temps d'arrêt relativement à $(\mathcal{X}_t)$. Le lemme suivant est un corollaire d'un théorème de P.A. Meyer ([10] théorème 21, p. 204).

Lemme 8. Soit (Y_t) un processus défini sur $(\Omega, \mathcal{X}, P)$, à valeurs réelles, bien-mesurable (voir [10], chap. VIII), dont chaque variable Y_t est intégrable et tel que

(a) pour chaque couple de rationnels r, r' tel que $o \leqq r < r'$, $E\{Y_{r'} \mid \mathcal{X}_r\} \leqq Y_r$ p.s.;

(b) pour chaque suite décroissante (T_n) de temps d'arrêt, $\lim_{n\to\infty} I\{T_n < \infty\} Y_{T_n} = I\{T < \infty\} Y_T$ p.s., où T désigne la limite des T_n(35).

(34) C'est-à-dire telle que $\mathcal{X}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{X}_s$ pour tout t.

(35) Rappelons qu'un processus bien-mesurable est progressivement mesurable par rapport à $(\mathcal{X}_t)$, de sorte que si S est un temps d'arrêt, $I\{S < \infty\} Y_S$ est mesurable par rapport à $\mathcal{X}_S$.

Alors presque toutes les trajectoires de (Y_t) sont continues à droite et dépourvues de discontinuités oscillatoires.

Soit en effet D l'ensemble des rationnels $\geqq o$. L'hypothèse (a) entraîne l'existence d'un ensemble négligeable N, en dehors duquel la restriction d'une trajectoire de (Y_t) à D possède une limite à droite et une limite à gauche en tout point t (voir [10], p. 128). Pour $\omega \notin N$ appelons $Z_t(\omega)$ cette limite à droite au temps t et posons $Z_t(\omega) = o$ si $\omega \in N$. Le processus (Z_t) ainsi défini est adapté à $(\mathcal{X}_t)$, continu à droite et dépourvu de discontinuités oscillatoires. D'après le théorème 16 dans [10], p. 198, il est donc bien-mesurable. Par conséquent, l'ensemble $A = \{(t, \omega): Y_t(\omega) \neq Z_t(\omega)\}$ est bien-mesurable. Désignons par C sa projection sur Ω. On démontre que $P(C) = o$, ce qui achèvera la démonstration. Soit $\varepsilon > o$. Il existe, en vertu du théorème 21 dans [10], p. 204, un temps d'arrêt T tel qu'on ait (a') $(T(\omega), \omega) \in A$ pour tout ω tel que $T(\omega) < \infty$ et (b') $P\{T < \infty\} + \varepsilon \geqq P(C)$. Pour chaque n, posons $T_n(\omega) = k/2^n$ si $(k-1)/2^n \leqq T(\omega) < k/2^n$ ($k = 1, 2, \ldots$), $T_n(\omega) = \infty$ si $T(\omega) = \infty$. Les T_n ainsi définis sont des temps d'arrêt à valeurs dans $D \cup \{\infty\}$ et décroissent vers T quand $n \to \infty$. Comme conséquence de l'hypothèse (b), on a, pour chaque n, $I\{T_n < \infty\} Y_{T_n} = I\{T_n < \infty\} Z_{T_n}$ p.s.. En faisant tendre n vers l'infini, le membre de droite converge p.s. vers $I\{T < \infty\} Z_T$ et celui de gauche, en vertu de l'hypothèse (b), p.s. vers $I\{T < \infty\} Y_T$. On en conclut que $I\{T < \infty\} Y_T = I\{T < \infty\} Z_T$ p.s.. Or, si $\{T < \infty\}$ n'est pas négligeable, cette relation entraîne l'existence d'un ω tel que $T(\omega) < \infty$ et que $Y_T(\omega) = Z_T(\omega)$, ce qui contredit (a'). On doit donc avoir $P\{T < \infty\} = o$ et par conséquent $P(C) \leqq \varepsilon$, d'après (b'). Comme ε est arbitraire, la démonstration est achevée.

Revenons à la situation du paragraphe 8. Soient U et U' deux éléments de $\mathcal{U}$ tels que $\overline{U'} \subset U$, f une fonction numérique dans U, à valeurs $> -\infty$ et s.c.i., x un point dans U et P un processus continu partant de x. Soit en outre σ un temps d'arrêt relativement à $(\mathcal{F}_t)$. Posons $\mathcal{H}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_{s \wedge \sigma}$.

<u>Théorème 13</u>. Supposons que, pour chaque couple S, T de temps d'arrêt (relativement à $(\mathcal{H}_t)$) tel que $S \leqq T$, on ait

$$E\{f(X^{U'}_{T \wedge \sigma}) \mid \mathcal{H}_S\} \leqq f(X^{U'}_{S \wedge \sigma}) \quad \text{P-p.s..}$$

Alors il existe un ensemble $N \in \mathcal{F}_\sigma$ tel que $P(N) = o$ et que, si $\omega \notin N$, l'application $t \longmapsto f\left(X^{U'}_{t \wedge \sigma}(\omega)\right)$ est continue à droite.

On peut supposer que f est majorée, sinon on considère $f \wedge n$, qui satisfait encore aux hypothèses du théorème, et on fait tendre n vers l'infini, en invoquant le théorème 16 dans [10], p. 135. On pose $Y_t = f(X^{U'}_{t \wedge \sigma})$ pour tout $t \in [o, \infty]$ et $\mathcal{H} = \mathcal{F}_\sigma$. On note encore P la restriction de P à $\mathcal{H}$ et on considère (Y_t) en tant que processus sur l'espace $(\Omega, \mathcal{H}, P)$. L'abréviation "p.s." et le terme "négligeable" se rapportent à cet espace. La condition (a) du lemme 8 est vérifiée par (Y_t). Montrons que (b) aussi est vérifiée. A cet effet, considérons une suite décroissante (T_n) de temps d'arrêt et désignons par T sa limite. Par hypothèse $E\{Y_{T_n} | \mathcal{X}_T\} \leqq Y_T$ p.s. pour tout n, et cela entraîne, compte tenu du théorème de convergence des surmartingales et de la continuité à droite de $(\mathcal{X}_t)$, $\lim_{n\to\infty} Y_{T_n} \leqq Y_T$ p.s.. D'autre part, d'après la semi-continuité de f, on a $Y_T \leqq \liminf_{n\to\infty} Y_{T_n}$. D'où $\lim_{n\to\infty} Y_{T_n} = Y_T$ p.s.. Or, (a) et (b) sont encore satisfaites si l'on considère comme famille de tribus la famille des $\mathcal{X}_t$ augmentées de tous les ensembles négligeables(36). D'autre part, d'après le théorème 16 dans [10], remarque c), p. 199, il existe un $N' \in \mathcal{X}$ et un processus bien-mesurable (X'_t) à valeurs dans E_δ tels que $P(N') = o$ et $X^{U'}_{t\wedge\sigma}(\omega) = X'_t(\omega)$ pour tout $t \in [o, \infty[$, quel que soit $\omega \notin N'$. On en conclut, en vertu de lemme 8, qu'il existe un $N'' \in \mathcal{X}$ tel que $P(N'') = o$ et que l'application $t \longmapsto f(X'_t(\omega))$ est continue à droite pour chaque $\omega \notin N''$. Il ne reste donc qu'a poser $N = N' \cup N''$.

(36) Pour chaque temps d'arrêt T relativement à cette nouvelle famille, il existe un temps d'arrêt T' tel que T = T' p.s. (voir [13], vol. I, p. 102).

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.B. Walsh, Probability and a Dirichlet problem for multiply superharmonic functions, Thèse, Illinois Univ., 1966.

[2] Ph. Courrège et P. Priouret, Axiomatique du problème de Dirichlet et processus de Markov, Séminaire de théorie du potentiel, 8e année, 1963/64, p. 8-01—8-48.

[3] Ph. Courrège et P. Priouret, Temps d'arrêt d'une fonction aléatoire, Publ. Inst. Stat. Univ. Paris, vol. 14, 1965, p. 245-274.

[4] H. Bauer, Harmonische Räume und ihre Potentialtheorie, Lecture Notes in Math., 22, Springer-Verlag, Berlin, 1966.

[5] J. Siciak, On function families with boundary, Pac. J. Math., vol. 12, 1962, p. 375-384.

[6] H.J. Bremermann, On a generalized Dirichlet problem for plurisubharmonic functions and pseudo-convex domains; Characterization of Šilov boundaries, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 91, 1959, p. 246-276.

[7] J.L. Doob, Semimartingales and subharmonic functions, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 77, 1954, p. 86-121.

[8] J.L. Doob, A probability approach to the heat equation, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 80, 1955, p. 216-280.

[9] J.L. Doob, Probability methods applied to the first boundary value problem, Proc. Third Berkeley Symposium on Math. Statistics and Probability, vol. 2, 1956, p. 49-80.

[10] P.A. Meyer, Probabilités et potentiel, Actualités scientifiques et industrielles (1318), Hermann, Paris, 1966.

[11] I. Kimura, Sur les fonctions plurisousharmoniques et les barrières, Proc. Japan Acad., vol. 36, 1960, p. 639-643.

[12] H. Bauer, Šilovscher Rand und Dirichletsches Problem, Ann. Inst. Fourier Grenoble, vol. 11, 1961, p. 89-136.

[13] E.B. Dynkin, Markov processes, vol. I et II, Springer-Verlag, Berlin, 1965.

[14] V. Avanissian, Fonctions plurisousharmoniques et fonctions doublement sousharmoniques, Ann. Ecole Normale Sup., vol. 78, 1961, p. 101-161.

[15] R. Cairoli, Produits de semi-groupes de transition et produits de processus, Publ. Inst. Stat. Univ. Paris, vol. 15, 1966, p. 311-384.

avril 1968