CATHERINE DOLÉANS

Fonctionnelles additives parfaites

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 2 (1968), p. 34-42
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1968__2__34_0>

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE
STRASBOURG

Séminaire de Probabilités 1966-67

FONCTIONNELLES ADDITIVES PARFAITES

(par Catherine DOLEANS)

Nous montrons dans cet exposé comment les résultats de Blumenthal et Getoor sur la représentation des fonctions p-excessives régulières et ceux de S. Watanabe sur la structure des fonctionnelles additives, positives, purement discontinues et quasi continues à gauche d'un processus de Hunt permettent de prouver que toute fonctionnelle additive positive est indistinguable d'une fonctionnelle parfaite.

E est un espace localement compact à base dénombrable et (P_t) un semi-groupe de transition markovien sur E satisfaisant à l'hypothèse (A) de Hunt (on suppose pour simplifier que les noyaux P_t transforment les fonctions boréliennes en fonctions boréliennes). On suppose de plus qu'il existe une mesure positive θ sur E telle que la seule fonction p-excessive nulle θ - presque partout soit la fonction identiquement nulle (Hypothèse L) . Les notations Ω, (X_t), θ_t, $\underline{\underline{F}}$, $\underline{\underline{F}}_t$, $\underset{\sim}{P}^{\mu}$ seront celles de [3] (processus canoniques).

Théorème : Sous ces hypothèses toute fonctionnelle additive positive est indistinguable d'une fonctionnelle parfaite.

Démonstration. - Remarquons tout d'abord que, toute fonctionnelle additive positive (A_t) étant fortement markovienne, on a pour tout temps d'arrêt T

$$(*) \quad A_{T+s} = A_T + A_s \circ \theta_T \qquad \forall s$$

et

$$(**) \quad A_{(T+s)-} = A_T + A_{s-} \circ \theta_T \qquad \forall s > 0$$

sauf sur un ensemble H_T négligeable pour toute mesure $\underset{\sim}{P}^{\mu}$. (A_t) se décompose donc en la somme des trois fonctionnelles additives positives $B_t = \sum_{s\le t} (A_s - A_{s-}) I_{\{X_s = X_{s-}\}}$, $C_t = \sum_{s\le t} (A_s - A_{s-}) I_{\{X_s \neq X_{s-}\}}$ et $D_t = A_t - B_t - C_t$. On est donc ramené à étudier séparément les cas : d'une fonctionnelle purement discontinue naturelle, d'une fonctionnelle purement discontinue quasicontinue à gauche, d'une fonctionnelle continue.

1 . ÉTUDE D'UNE FONCTIONNELLE PUREMENT DISCONTINUE, QUASI CONTINUE A GAUCHE.

Si une fonctionnelle additive positive (C_t) est purement discontinue et quasi-continue à gauche, il existe une fonction f borélienne positive sur $E \times E$, nulle sur la diagonale, telle que (C_t) soit indistinguable de la fonctionnelle

$$S f_t = \sum_{s\le t} f(X_{s-}, X_s) I_{\{X_s \neq X_{s-}\}} .$$

(Ce résultat est dû à S. Watanabe [6] , et a été exposé au théorème 6 de [4]). La fonctionnelle Sf_t étant parfaite le théorème est établi dans ce cas.

2 . ÉTUDE D'UNE FONCTIONNELLE PUREMENT DISCONTINUE NATURELLE.

Nous commençons par le cas où la fonctionnelle possède un p-potentiel borné.

Lemme 1. - Soit (B_t) une fonctionnelle additive positive, naturelle, purement discontinue. S'il existe un nombre $p \geq 0$ tel que le p-potentiel $U_B^p = \underset{\sim}{E}^{\bullet} [\int_0^{\infty} e^{-pt} \, d B_t]$ soit borné, alors (B_t) est indistinguable d'une fonctionnelle parfaite.

Démonstration :

1) Soit $\epsilon > 0$ et posons $T^{\epsilon} = \inf (t \, ; \, B_t - B_{t-} > \epsilon)$. D'après [2], T^{ϵ} est un temps d'arrêt accessible (ce qui entraîne que pour chaque mesure $\underset{\sim}{P}^x$ il existe une suite S_k^x de temps d'arrêt telle que l'on ait $\underset{\sim}{P}^x$-p. s. $\lim_k S_k^x = T^{\epsilon}$, $S_k^x < T^{\epsilon} \; \forall k$) et le processus $B_t - \Delta B_{T^{\epsilon}} \, I_{\{t \leq T^{\epsilon}\}}$ est encore naturel. En itérant ce procédé et en faisant varier ϵ on voit que l'ensemble des points de discontinuité de B_t est la réunion des graphes d'une suite de temps d'arrêt accessibles T_n.

2) Considérons maintenant la fonction $f = U_B^p$; f étant p-excessive on a $(f \circ X_t)_-^{(1)} \geq f \circ X_{t-}$ p. s., et une construction analogue à celle faite pour (B_t) montre que $\{(t, \omega) \, ; \, (f \circ X_t)_- \neq f \circ X_{t-}\}$ est la réunion des graphes d'une suite de temps d'arrêt accessibles S_n.

3) Soit maintenant T un temps d'arrêt accessible ; si $x \in E$, T_n^x désigne une suite de temps d'arrêt telle que l'on ait $\underset{\sim}{P}^x$-p. s. $\lim_n T_n^x = T$, $T_n^x < T \; \forall n$; le processus croissant naturel associé à la surmartingale $\xi_t = e^{-pt} f \circ X_t$ est $C_t = \int_0^{t]} e^{-ps} \, d B_s$ et l'on a si $m \geq n$:

$$\underset{\sim}{E}^x [- \xi_T + \xi_{T_m^x} \mid \underline{\underline{F}}_{T_n^x}] = \underset{\sim}{E}^x [C_T - C_{T_m^x} \mid \underline{\underline{F}}_{T_n^x}]$$

ce qui donne en passant à la limite en m puis en n (on remarquera que $\underline{\underline{F}}_T = \bigvee_n \underline{\underline{F}}_{T_n^x}$) :

$$\underset{\sim}{E}^x [- \xi_T + \xi_{T-} \mid \underline{\underline{F}}_T] = \underset{\sim}{E}^x [C_T - C_{T-} \mid \underline{\underline{F}}_T]$$

ou encore

$$\xi_T - \xi_{T-} = C_{T-} - C_T \quad \underset{\sim}{P}^x\text{-p. s.}$$

---

(1) $(f \circ X_t)_- = \lim_{\substack{s<t \\ s \to t}} f \circ X_s$; cette limite existe sauf sur un ensemble négligeable, ne dépendant pas de t.

4) La fonctionnelle p-additive (C_t) $(C_{t+s} = C_t + e^{-pt} C_s \circ \theta_t$ p. s.$)$, est donc indistinguable de la fonctionnelle p-additive parfaite $C'_t = \sum_{s \le t} e^{-ps} [(f \circ X_s)_- - f \circ X_{s-}) I_{\{X_s = X_{s-}\}}$ et la fonctionnelle $B_t = \int_0^{t]} e^{ps} \, d\, C_s$ est indistinguable de la fonctionnelle $\sum_{s \le t} [(f \circ X_s)_- - f \circ X_{s-}] I_{\{X_s = X_{s-}\}}$ qui est parfaite.

c. q. f. d.

Passons maintenant au cas général ; considérons une fonctionnelle additive (B_t) positive naturelle et purement discontinue ; le temps d'arrêt $T^k = \inf \{t \,;\, B_t - B_{t-} \in] \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}] \}$ est un temps d'arrêt terminal sans points permanents. Les relations (*) et (**) ainsi que la proposition 2 de [4] montrent que, si T_n^k sont les itérés de T^k, la fonctionnelle $B_t^k = \sum_{t \ge T_n^k} \Delta B_{T_n^k}$ est une fonctionnelle additive positive dont les sauts sont compris entre $\frac{1}{k+1}$ et $\frac{1}{k}$. La fonctionnelle (B_t) étant une somme dénombrable de telles fonctionnelles, il suffit de montrer que chacune des fonctionnelles B_t^k est indistinguable d'une fonctionnelle parfaite. Mais d'après la proposition 3 de [4], B_t^k est somme d'une suite de fonctionnelles additives positives naturelles purement discontinues ayant un p-potentiel borné. Celles - ci sont indistinguables d'une fonctionnelle parfaite d'après le lemme 1, il en est donc de même de leur somme (B_t^k), et enfin de (B_t).

c. q. f. d.

3 . ÉTUDE DES FONCTIONNELLES CONTINUES

La "perfection" de la fonctionnelle additive positive et continue (D_t) va résulter des lemmes 2, 3, 4. Nous rappelons tout d'abord la définition suivante:

__Définition__ : Une fonction p-excessive f est dite uniformément p-excessive si elle est bornée et si les fonctions $f_n = n \int_0^{1/n} e^{-ps} P_s f \, ds$ tendent uniformément (en croissant) vers la fonction f lorsque n tend vers l'infini.

Les lemmes 2 et 3 suivants sont dûs à Blumenthal et Getoor ([1]) .

Lemme 2. - Soit (A_t) une fonctionnelle additive positive continue ; si pour un $p \geq 0$, le p-potentiel f de (A_t) est une fonction uniformément p-excessive, la fonctionnelle (A_t) est indistinguable d'une fonctionnelle parfaite.

Démonstration : Pour montrer que (A_t) est indistinguable d'une fonctionnelle parfaite nous montrerons que la fonctionnelle $B_t = \int_o^t e^{ps} \, d A_s$ est indistinguable d'une fonctionnelle p-additive parfaite (si ξ_t désigne la surmartingale $\xi_t = e^{-pt} f \circ X_t$, B_t est, pour toute mesure $\underset{\sim}{P}^{\mu}$, le processus croissant continu associé à la surmartingale ξ_t) .

Posons pour tout n entier :

$$f_n = n \int_o^{1/n} e^{-ps} P_s f \, ds$$

$$g_n = n(f - e^{-p/n} P_{1/n} f) \quad (\text{on a } f_n = U^p g_n),$$

$$\xi_t^n = e^{-pt} f_n \circ X_t$$

$$B_t^n = \int_o^t e^{-ps} g_n \circ X_s \, ds \quad (\text{on a } f_n = \underset{\sim}{E}^{\cdot} [B_\infty^n])$$

$T_n^\epsilon = \inf \{t \,;\, \xi_t - \xi_t^n > \epsilon\}$ (T_n^ϵ est un temps d'arrêt et l'on a $T_n^\epsilon = \infty$ pour n assez grand).

Pour toute mesure $\underset{\sim}{P}^{\mu}$, (B_t^n) est le processus croissant continu associé au potentiel ξ_t^n et l'on a, si $c = \sup_x f(x)$:

$$\underset{\sim}{E}^{\cdot} [(B_\infty^n)^2] = 2 \underset{\sim}{E}^{\cdot} [\int_o^\infty \xi_t^n \, d B_t^n] \leq 2 c \underset{\sim}{E}^{\cdot} [B_\infty^n] \leq 2 c^2 < + \infty$$

et

$$\underset{\sim}{E}^{\cdot} [(B_\infty^n - B_\infty^m)^2] = 2 \underset{\sim}{E}^{\cdot} [\int_o^\infty (\xi_t^n - \xi_t^m) \, d (B_t^n - B_t^m)]$$

(on applique T. 15 chap. VII de [5] d'abord au processus (B_t^n), puis au processus $B_t^n - B_t^m$ lorsqu'on est sûr que les quantités $E^{\cdot} [(B_\infty^n)^2]$ sont finies). Si m et n sont supérieurs à q on a donc :

$$\underset{\sim}{E}^{\cdot} [(B_\infty^n - B_\infty^m)^2] \leq 2 \underset{\sim}{E}^{\cdot} [\int_o^{T_q^\epsilon} | \xi_t^n - \xi_t^m | d(B_t^n + B_t^m) + 4c \int_{T_q^\epsilon}^{+\infty} d (B_t^n + B_t^m)]$$

$$\leq 2\epsilon\, \underset{\sim}{E}^{\cdot}\,[B_\infty^n + B_\infty^m] + 8\,c\, P^p_{T^\epsilon_q} f$$

$$\leq 4\,\epsilon\, c + 8\,c\, P^p_{T^\epsilon_q} f$$

(On a utilisé la relation $P^p_T f_n = \underset{\sim}{E}^{\bullet}[\int_T^{+\infty} d\,B^n_s\,]$).

Comme les temps d'arrêts T^ϵ_q sont identiquement égaux à $+\infty$ lorsque q est assez grand, les fonctions $x \to P^p_{T^\epsilon_q} f(x)$ tendent uniformément vers 0 avec $\frac{1}{q}$ et l'on peut construire une sous-suite n_i telle que l'on ait pour tout $x \in E$

$$\sqrt{\underset{\sim}{E}^x[(B_\infty^{n_i} - B_\infty^{n_{i+1}})^2\,]} \leq 2^{-i}\,.$$

L'inégalité de Doob appliquée aux martingales $\xi_t^{n_i} + B_t^{n_i}$ de variables aléatoires terminales $B_\infty^{n_i}$ donne alors :

$$\sqrt{\underset{\sim}{E}^x\,[\sup_s |\, \xi_s^{n_i} + B_s^{n_i} - \xi_s^{n_{i+1}} - B_s^{n_{i+1}}\,|\,]} \leq \alpha\, 2^{-i} \; (\alpha = \text{constante})\;;$$

et les fonctions $s \mapsto \xi_s^{n_i} + B_s^{n_i}$ forment $\underset{\sim}{P}^x$ - p. s. une suite de Cauchy pour la convergence uniforme. Les fonctions $s \mapsto \xi_s^{n_i}$ étant uniformément convergentes vers ξ_s (f est uniformément p-excessive), l'ensemble $\Lambda = \{\omega\,;\, B^n_s(\omega)$ ne converge pas uniformément sur $(0, +\infty)$ quand $i \to +\infty\,\}$ est de $\underset{\sim}{P}^x$- mesure nulle pour tout $x \in E$. D'autre part si $\complement\Lambda$ contient ω , il contient $\theta_s\,\omega$ (car $e^{-ps}\, B_t^{n_i}(\theta_s\omega) = B_{s+t}^{n_i}(\omega) - B_s^{n_i}(\omega)$).

Posons :

$$B'_s(\omega) = \begin{cases} \lim_i B_s^{n_i}(\omega) & \text{sur } \complement\Lambda \\ 0 & \text{sur } \Lambda\;; \end{cases}$$

(B'_s) est une fonctionnelle p-additive continue parfaite ; on vérifie facilement que pour toute mesure $\underset{\sim}{P}^x$ $B'_t + \xi_t$ est une martingale ; d'après T 21 chap. VII de [5] , (B'_t) est donc $\underset{\sim}{P}^x$-p. s. indistinguable de (B_t) et les fonctionnelles (B_t) et (B'_t) sont indistinguables .

c. q. f. d.

Lemme 3. - Soit A une fonctionnelle additive continue positive, il existe une fonction φ partout > 0 telle que la fonctionnelle additive continue $A'_t = \int_0^t \varphi \circ X_s \, d A_s$ soit de 1-potentiel borné.

Démonstration : Soit $\varphi = \underset{\sim}{E}^{\cdot} [\int_0^\infty e^{-t} e^{-A_t} dt]$ et $A'_t = \int_0^t \varphi \circ X_s \, d A_s$.

Pour tout temps d'arrêt T on a :

$$\varphi \circ X_T = \underset{\sim}{E}^{\cdot} [\int_0^\infty e^{-t} e^{-A_t \circ \theta_T} dt \,|\, \underline{F}_T] = \underset{\sim}{E}^{\cdot} [e^T e^{A_T} \int_T^\infty e^{-s} e^{-A_s} ds \,|\, \underline{F}_T]$$

et donc en utilisant T. 15 chap VII de [5] :

$$U^1_{A'} = \underset{\sim}{E}^{\cdot} [\int_0^\infty e^{-u} \varphi \circ X_u \, d A_u] = \underset{\sim}{E}^{\cdot} [\int_0^\infty e^{A_u} d A_u \int_u^\infty e^{-s} e^{-A_s} ds]$$

$$= \underset{\sim}{E}^{\cdot} [\int_0^\infty ds \, e^{-s} e^{-A_s} \int_0^s e^{A_u} d A_u] = \underset{\sim}{E}^{\cdot} [\int_0^\infty e^{-s} (1 - e^{-A_s}) ds] \leq 1$$

c. q. f. d.

Il nous suffira donc de traiter le cas où A a un 1-potentiel borné, cas qui résulte du lemme suivant et du lemme 2.

Lemme 4. - Soit (A_t) une fonctionnelle additive positive continue dont le p-potentiel f est borné, il existe alors des fonctionnelles additives continues positives A^n_t telles que les fonctions $f_n = U^p_{A_n}$ soient uniformément p-excessives et que $A_t = \sum_n A^n_t$.

Démonstration : Choisissons une mesure θ bornée telle que la seule fonction p-excessive nulle θ - p.p. soit la fonction zéro, et considérons le noyau W défini par :

$$W g^x = \underset{\sim}{E}^x [\int_0^\infty e^{-pt} g \circ X_t \, d A_t]$$

La mesure $\eta = \theta W$ est une mesure bornée ($< \eta, 1 > = < \theta, W 1 > = < \theta, f > < +\infty$) et les fonctions $e^{-pt} P_t f$ tendent vers la fonction f lorsque $t \to 0$; il existe donc, d'après le théorème d'Egorov, une suite croissante de compacts K_n tels que $e^{-pt} P_t f$ tende uniformément vers f sur K_n et que $\eta(E \setminus \bigcup_n K_n) = 0$

Posons $g_n = W(I_{K_n})$ et $\Gamma = E \setminus \bigcup_n K_n$; la fonction $W I_\Gamma$ étant p-excessive, et nulle θ-p.p. est identiquement nulle et les fonctions g_n et $f_n = g_n - g_{n-1}$ sont p-excessives et bornées. De plus pour tout $\epsilon > 0$ il existe un $h > 0$ tel que l'on ait ; si $t < h$.

$$e^{-pt} P_t f + \epsilon \geq f \qquad \text{sur } K_n$$

on a donc sur K_n

$$W(I_{K_n}) + e^{-pt} W(1 - I_{K_n}) \leq f \leq e^{-pt} P_t f + \epsilon = e^{-pt} P_t W I_{K_n} + e^{-pt} P_t (W(1 - I_{K_n})) + \epsilon$$

c. à. d.

$$g_n = W I_{K_n} \leq e^{-pt} P_t g_n + \epsilon \qquad \text{sur } K_n .$$

D'après le principe du maximum cette inégalité a lieu partout sur E et les fonctions g_n (et donc les fonctions f_n) sont uniformément p-excessives. Pour chaque fonction f_n on peut construire une fonctionnelle p-additive continue parfaite A_t^n telle que $f_n = E^\cdot_{w} [\int_0^\infty e^{-pt} d A_t^n]$ (cette construction est contenue dans la démonstration du lemme 2). La fonctionnelle additive naturelle $A_t' = \sum_n A_t^n$ a pour p-potentiel la fonction $\sum_n f_n = f - W I_\Gamma = f$, elle est donc indistinguable de la fonctionnelle additive continue A_t (voir l'argument utilisé à la fin du lemme 2).

c. q. f. d.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BLUMENTHAL et GETOOR, livre à paraître

[2] C. DOLÉANS, Processus croissants naturels et processus croissants très bien mesurables, C.R.A.S. (voir aussi dans ce fascicule le "Guide des processus").

[3] P.A. MEYER, Intégrales Stochastiques III, Séminaire de Probabilités I, Strasbourg, 1966-67.

[4] P.A. MEYER, Intégrales Stochastiques IV, Séminaire de Probabilités I, Strasbourg, 1966-67.

[5] P.A. MEYER, Probabilités et potentiel, Hermann Paris 1966.

[6] S. WATANABE, On discontinuous additive functionals and Lévy measures of a Markov process, Jap. J. of math. (1964) p. 53-70.

-=-=-=-=-