Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Paul-André Meyer

Guide détaillé de la théorie « générale » des processus

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 2 (1968), p. 140-165

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1968__2__140_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1966/67

GUIDE DÉTAILLÉ DE LA THÉORIE "GÉNÉRALE" DES PROCESSUS

(P.A.Meyer)

La théorie "générale" ou "abstraite" des processus stochastiques prend sa source dans le livre de DOOB [2] (1953). Elle s'est considérablement développée depuis lors, grâce à diverses méthodes : théorie des martingales, ensembles analytiques abstraits, capacités... qui ont fait d'une théorie déjà austère à ses débuts l'une des branches les plus rébarbatives du Calcul des Probabilités. Le dernier exposé d'ensemble de la question figure dans le livre [3] ; datant de 1965, il est déjà démodé, et l'exposé qui suit a pour objet de présenter le squelette de la théorie sous sa forme actuelle (Mai 1967).

Les références renvoient au livre [3] (chapitre et n°). On n'a pas rappelé les définitions des notions les plus connues (temps d'arrêt...), mais on a essayé d'être aussi explicite que possible lorsqu'il y avait ambiguïté. Les résultats qui ne figurent pas dans [3] sont prouvés dans les appendices.

Le guide est divisé en quatre sections (0,1,2,3) à l'intérieur desquelles définitions et résultats sont numérotés à la suite les une des autres (la section 2, par ex., commence par 201,202,...)

Un bon guide touristique doit donner des indications sur le réseau routier, sur les bons repas, et aussi sur leurs prix. On a fait de même ici :

A) L'intérêt d'une définition ou d'un résultat est indiqué par un certain nombre d'étoiles dans la marge (jusqu'à xxx).

B) La difficulté d'un résultat est indiquée par l'une des lettres <u>t</u> (trivial), <u>m</u> (moyen), <u>p</u> (pénible : long ou difficile). La notation t/215 signifie " trivial modulo le résultat 15 de la section 2" , mais bien entendu 215 peut être difficile.

C) Il est intéressant dans certains cas de connaître la méthode qui permet de démontrer un théorème. On l'a indiquée de la manière suivante :

el : démonstration élémentaire à partir des définitions - élémentaire signifiant que seuls les outils classiques de la théorie de la mesure sont utilisés (théorème des classes monotones, th. de Lebesgue, etc).

mar : la démonstration utilise en plus la théorie classique des martingales, telle qu'elle figure dans le chapitre VII de [2], ou le chap. VI de [3] : régularité des trajectoires, théorème d'arrêt, théorème de convergence...

dec : la démonstration repose sur la théorie de la décomposition des surmartingales (existence et unicité de la décomposition de DOOB).

cap : la démonstration utilise le théorème de capacitabilité de CHOQUET (abstrait)

Les appréciations d'intérêt et de difficulté sont bien entendu subjectives.

Remarques sur la seconde édition du Guide Gris (Octobre 1967)

CONFUCIUS dit : il faut rectifier les noms (Analectes, livre XIII, 3). La terminologie de la première édition a donc été rectifiée dans celle-ci . Voici un tableau de concordance entre les noms employés dans [3] et dans la première édition du Guide, et ceux de cette édition.

Anciens noms	Nouveaux noms
Processus, ensemble progressivement mesurable	Processus, ensemble progressif
Processus, ensemble bien-mesurable	pas de changement
Temps d'arrêt	pas de changement
Processus, ensemble $\underline{\underline{T}}(\underline{\underline{I}}')$-mesurable	processus, ensemble accessible
Temps d'arrêt accessible	temps d'arrêt (ou simplement var. aléatoire) accessible
Processus, ensemble très-bien-mesurable	Processus, ensemble prévisible
Temps d'arrêt approchable	temps d'arrêt (ou simplement var. aléatoire) prévisible

On remarquera (les adjectifs *très-bien-mesurable* et *approchable* ne figurant pas dans [3]) que la terminologie de [3] n'est pratiquement pas modifiée. Le mot *temps d'arrêt* se disant *optional random variable* en anglais, il est recommandé de traduire"processus bien-mesurable" par ' optional process'. Nous ne chercherons pas ici à rectifier les noms dans les autres langages.

Je remercie vivement M. CHUNG, qui m'a communiqué plusieurs remarques utiles (que j'ai ajoutées à cette édition du Guide), ainsi que la citation des Analectes de CONFUCIUS.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHUNG (K.L.) et DOOB (J.L.).- Fields, optionality and measurability. Amer.J. of M., 87, 1965, 397-424.

[2] DOOB (J.L.).- *Stochastic processes*. New York, Wiley, 1953.

[3] MEYER (P.A.).- *Probabilités et Potentiel* . Paris, Hermann ; Boston, Blaisdell, 1966.

Un article récent de C.DOLÉANS (à paraître dans le Z. für Warscheinlichkeitstheorie) permet de ramener la théorie de la décomposition des surmartingales, de manière très simple, à la théorie générale des processus telle qu'elle est exposée ici. Bien entendu, cela modifie profondément le " réseau routier". Nous n'avons pas tenu compte de cet article dans le Guide, bien que la méthode de Mlle DOLÉANS soit évidemment la " bonne " méthode pour traiter de la décomposition des surmartingales.

On peut encore ajouter que CORNEA et LICEA viennent de simplifier très considérablement la démonstration du théorème de section pour les ensembles accessibles ou bien-mesurables (ils donnent en fait une démonstration unifiée des trois théorèmes de section). Ainsi, la théorie exposée ci-dessous semble avoir atteint une forme presque définitive (l'article de CORNEA et LICEA doit paraître dans le Z. für W.).

0.- GÉNÉRALITES

1. Notations générales. $(\Omega, \underline{\underline{F}}, \underline{P})$ est un espace probabilisé complet. $(\underline{\underline{F}}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une famille croissante de sous-tribus de $\underline{\underline{F}}$ (IV.30), continue à droite, telle que chaque tribu $\underline{\underline{F}}_t$ contienne tous les ensembles $\underline{P}$-négligeables (voir IV.30 pour ces définitions, ainsi que pour la notation $\underline{\underline{F}}_{t-} = \bigvee_{s<t} \underline{\underline{F}}_s$; on pose par convention $\underline{\underline{F}}_{0-} = \underline{\underline{F}}_0$).

Un processus est une fonction X définie sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$, telle que pour chaque $t\in\mathbb{R}_+$ la fonction $\omega \mapsto X(t,\omega)$ [toujours notée X_t : on dira le processus (X_t), ou le processus X] soit $\underline{\underline{F}}$-mesurable. Si la fonction X est elle même mesurable sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ pour la tribu produit naturelle $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+) \times \underline{\underline{F}}$, on dira que le processus est mesurable (IV.45) . Si X_t est $\underline{\underline{F}}_t$-mesurable pour chaque t, on dira que le processus X est adapté (à la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$) (IV.31).

xx 2. Deux processus X et Y à valeurs dans le même espace d'états sont dits indiscernables si pour presque tout $\omega\in\Omega$ on a $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$ pour tout t.

Cette définition indispensable ne figure pas explicitement dans [3]. Dans toute la suite, chaque fois que l'on trouvera l'expression " il existe un seul processus possédant la propriété $\underline{\underline{P}}$" , cela signifiera que tous les processus possédant $\underline{\underline{P}}$ sont indiscernables les uns des autres.

x 3. Processus progressivement mesurable ou progressif (IV.50)

Cette définition a été très largement utilisée au début de la théorie. Son principal intérêt vient du théorème 9 ci-dessous. En pratique, on peut toujours la remplacer par la notion de processus bien-mesurable (201) qui est à la fois plus simple et plus intéressante. On sait cependant qu'il existe des ensembles progressifs non bien-mesurables (cf. 211 et 216)

xxx 4. Temps d'arrêt (IV.33)

xxx 5. Tribu $\underline{\underline{F}}_T$ des événements antérieurs à un t.d'a. T (IV.35) xx 6. Si T est un t.d'a. , on note $\underline{\underline{F}}_{T-}$ la tribu engendrée par $\underline{\underline{F}}_0$ et par les événements de la forme $A\cap\{t<T\}$ ($t\in\mathbb{R}_+$, $A\in\underline{\underline{F}}_t$).

Cette notion a été introduite par CHUNG et DOOB dans [1]. Elle est très intéressante, mais a peu servi jusqu'à présent . Un petit sommaire (avec démonstrations) des résultats connus sur cette tribu figure à l'appendice 1.

Nous ne reviendrons pas ici sur les résultats élémentaires concernant les temps d'arrêt (IV.33-44), sauf :

7. Si T est un t.d'a., et si $A\in\underline{\underline{F}}_T$, la variable aléatoire égale à T sur A, à $+\infty$ sur A^c, est notée T_A ; c'est aussi un t.d'a..

x 8. <u>Début</u> D_C d'une partie C de $\mathbb{R}_+\times\Omega$ (IV.51) :

$$D_C(\omega) = \inf \{ t : (t,\omega) \in C \}$$

xxx cap m 9. Le début d'un ensemble progressif est un temps d'arrêt (IV.52).

Les xxx de ce résultat tiennent plutôt à ses applications à la théorie des processus de Markov. La plupart des applications à la théorie générale des processus, ci-dessous, se ramènent en effet à des cas particuliers tout à fait élémentaires de ce théorème.

1.-CLASSIFICATION DES TEMPS D'ARRÊT

101. Notations générales .- Si T est un temps d'arrêt, $\underline{\underline{S}}(T)$ désigne l'ensemble des suites croissantes (R_n) de temps d'arrêt telles que $R_n \leqq T$ pour tout n, et $K[(R_n)]$ désigne alors l'événement $\{ \lim_n R_n = T < \infty , R_n < T$ pour tout $n \}$ (VII.44).

Si (R_n) est une suite croissante de temps d'arrêt, la tribu engendrée par la réunion des $\underline{\underline{F}}_{R_n}$ est notée $\bigvee_n \underline{\underline{F}}_{R_n}$ (VII.38).

Classification des temps d'arrêt

xxx 102. T est totalement inaccessible (VII.42)

Avec les notations précédentes : T est totalement inaccessibles si et seulement si $T>0$ p.s., $P\{T<\infty\}>0$, et $P(K[(R_n)])=0$ pour toute suite $(R_n) \in \underline{\underline{S}}(T)$.

103. T est inaccessible (VII.42).

xxx 104. T est accessible (VII.42) si $P\{T=S<\infty\}=0$ pour tout temps d'arrêt totalement inaccessible S.

xxx 105. T est prévisible s'il existe une suite croissante (R_n) de temps d'arrêt qui converge vers T p.s., telle que $R_n<T$ p.s. sur $\{T>0\}$ pour tout n.

> Cette définition, dont toute la suite va montrer l'importance, ne figure pas explicitement dans [3]. En revanche, on trouvera dans [3] d'autres définitions qui ne servent pas à grand chose, et ne seront pas étudiées ici (VII.45).

106. T est un temps de discontinuité (VII.40)

> Cette définition est technique, et assez peu intéressante. En revanche, la notion suivante est à la fois simple et utile :

xx 107. La famille $(\underline{\underline{F}}_t)$ est dépourvue de temps de discontinuité (VII.39).

> Par exemple, la famille de tribus canonique d'un processus de HUNT est dépourvue de temps de discontinuité.

Premières propriétés et critères élémentaires

el,t 108. Si T est accessible (resp. totalement inaccessible) et si $A \in \underline{\underline{F}}_T$ (resp. $A \in \underline{\underline{F}}_T$ et $P\{T_A<\infty\}>0$), T_A est accessible (resp. tot. inaccessible). (VII.43)

el,m 109. Si T est prévisible et si $A \in \underline{\underline{F}}_{T-}$, T_A est prévisible

> Ce résultat ne figure pas dans [3]. Voir l'appendice 2

el,t 110. Si S et T sont deux temps d'arrêt tot. inacc. (resp. accessibles, prévisibles), $S \vee T$ et $S \wedge T$ sont tot.inacc (resp. accessibles, prévisibles). (VII.43)

el,m 111. Si (S_n) est une suite croissante de temps d'arrêt accessibles (resp. prévisibles), $\lim_n S_n$ est accessible (resp. prévisible.

> Voir VII.43 pour le cas accessible, l'appendice 2 pour le cas prévisible.

x
el,t 112. Pour qu'un t.d'a. T soit accessible, il faut et il suffit qu'il existe une suite $(R_n^p)_{p\in\underset{\sim}{N}}$ d'éléments de $\underline{\underline{S}}(T)$, telle que $\{0<T<\infty\} = \bigcup_p K[(R_n^p)]$ p.s.

xx
el,m 113. Pour que T soit prévisible, il faut et il suffit que T soit accessible et que, pour toute suite croissante (R_n) de t.d'a., l'événement $\{\lim_n R_n=T\}$ appartienne à $\bigvee_n \underline{\underline{F}}_{R_n}$.

> Ce résultat ne figure pas explicitement dans [3], mais a) c'est le point crucial de la démonstration de VII.45, b) il est en fait équivalent à VII.52, compte tenu du critère VII.49 pour qu'un processus croissant soit naturel.

xxx
t/113 114. Si la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$ est dépourvue de temps de discontinuité, tout temps d'a. accessible est prévisible.

el,m 115. Soit T un t.d'a. ; l'ensemble des $A \in \underline{\underline{F}}_T$ tels que T_A soit prévisible est stable pour les réunions et intersections dénombrables.

> Ce résultat ne figure pas dans [3] explicitement, mais c'est en fait la première partie de la démonstration de VII.45. Voir l'appendice 2 pour plus de détails. Dans l'ordre logique des démonstrations, 115 doit

<u>précéder</u> 109 et 113. Voir aussi app.2, propriété 6.
On notera que 115 entraîne l'existence d'un plus grand $A\in\underline{\underline{F}}_T$ (aux ensembles négligeables près) tel que T_A soit prévisible. Si $A=\emptyset$ p.s., on peut donc dire que T est <u>totalement imprévisible</u>. Mais il ne faudrait pas croire que si S est prévisible, T totalement imprévisible, l'on ait nécessairement $P\{S=T<\infty\}=0$! Il se peut que S soit prévisible, et S_A totalement imprévisible pour un $A\in\underline{\underline{F}}_S$ (comparer à 109).

xx t/112 116. Soit T un t.d'a. ; il existe une partition essentiellement unique de $\{T<\infty\}$ en deux éléments A et I de $\underline{\underline{F}}_T$, telle que T_A soit accessible, T_I tot. inacc. ou p.s. égal à $+\infty$ (VII.44)

Critères utilisant les martingales.

xxx dec,m 117. Si T est totalement inaccessible, il existe une martingale uniformément intégrable continue à droite Y dont la seule discontinuité est un saut unité à l'instant T. Inversement, si la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$ est dépourvue de temps de discontinuité, et s'il existe une martingale Y continue à droite uniformément intégrable telle que $Y_T\neq Y_{T-}$ p.s. sur $\{T<\infty\}$, et si $P\{T<\infty\}>0$, alors T est totalement inaccessible.

L'appréciation <u>dec,m</u> se rapporte à la première phrase. La seconde résulte facilement de la théorie classique des martingales.

x dec,m 118. Si T est prévisible, et si Y est une martingale uniformément intégrable continue à droite, on a p.s. $Y_{T-}=E[Y_\infty|\underline{\underline{F}}_{T-}]$. Inversement, si cette relation est satisfaite pour toute martingale Y unif. intégrable continue à droite (ou même seulement la relation plus faible $E[Y_{T-}]=E[Y_\infty]$), alors T est prévisible.

Ne figure pas explicitement dans [3]. La seconde phrase est la remarque VII.53 . Pour la première, voir l'appendice 2.

119. T est prévisible si et seulement si le processus croissant intégrable $(I_{\{t\geq T\}})$ est naturel . (VII.53) .

xxx 120. Soit X un processus de HUNT canonique, et soit T un t.d'a. de la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$ canonique. T est accessible (cela équivaut ici à prévisible) si et seulement si $P\{X_T\neq X_{T-}\}=0$.

2.-LES TROIS PRINCIPALES TRIBUS SUR $\mathbb{R}_+ \times \Omega$

Définitions

xxx 201. Tribu $\underline{\underline{BM}}$ des ensembles bien-mesurables (VIII.14).

Elle est engendrée par les processus (réels) adaptés dont les trajectoires sont continues à droite et pourvues de limites à gauche, ou par les intégrales stochastiques de la forme $[S,T[$ (VIII.16). Un processus adapté continu à droite, sans hypothèse sur l'existence de limites à gauche, est indiscernable d'un processus b-m (VIII.16, c)). Tout processus bien-mesurable est progressif (IV.47).

xxx 202. Tribu $\underline{\underline{A}}$ des ensembles accessibles : c'est la tribu engendrée par les intervalles stochastiques de la forme $[S,T]$, où S est un temps d'arrêt accessible.

> Cette tribu est identique à la tribu $\underline{\underline{T}}(\underline{\underline{I}}')$ engendrée par le pavage $\underline{\underline{I}}'$ du n°VII.13 de [3] - pavage dont il est inutile de rappeler ici la définition.

xxx 203. Tribu $\underline{\underline{P}}$ des ensembles prévisibles : c'est la tribu engendrée par les processus (réels) adaptés à trajectoires continues à gauche (tout processus est continu à gauche par convention à l'instant 0). Elle est aussi engendrée par les intervalles $[S,T]$, où le temps d'arrêt S est prévisible , ou par les ensembles $\{0\}\times A$ ($A\in\underline{\underline{F}}_0$) et $]s,t]\times A$ ($0<s\leq t$, $A\in\bigcup_{r<s}\underline{\underline{F}}_r$). Pour tout cela, voir l'appendice 3.

> Les tribus $\underline{\underline{BM}}$, $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{P}}$ sont toutes trois engendrées par les intervalles stochastiques fermés $[S,T]$, où le temps d'arrêt S est supposé quelconque dans le premier cas, accessible dans le second, prévisible dans le troisième. Voir l'appendice 3.

204. On a $\underline{\underline{P}}\subset\underline{\underline{A}}\subset\underline{\underline{BM}}$; si la famille ($\underline{\underline{F}}_t$) n'a pas de temps de discontinuité, on a $\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{A}}$.

> Pour le premier résultat, voir VIII.19 ; pour le second, qui n'est pas explicité dans [3], voir l'appendice 3.

Théorèmes d'existence de sections

Notation .- Si T est un t.d'a., nous désignons par $\lfloor T \rfloor$ l'ensemble $\{(T(\omega),\omega) : T(\omega)<\infty\}$ (le graphe de T, encore égal à l'intervalle stochastique $[T,T]$). Si H est une partie de $\underset{\approx}{R}_+ \times \Omega$, nous désignons par p(H) sa projection sur Ω, qui est mesurable si H est mesurable (cf.IV.52).

xxx cap,p 205. Soit A un ensemble bien-mesurable, et soit $\varepsilon>0$. Il existe un temps d'arrêt T tel que $[T]\subset A$ et que $\underset{\approx}{P}(p([T]))\geq \underset{\approx}{P}(p(A))-\varepsilon$.

C'est le plus difficile des trois théorèmes de section. On le déduit en fait de 206 et de 213 ci-dessous. Voir VIII.21.

xxx cap,p 206. Si A est accessible, il existe un temps d'arrêt accessible T tel que $[T]\subset A$ et que $\underset{\approx}{P}(p([T])) \geqq \underset{\approx}{P}(p(A))-\varepsilon$. (VIII.21)

xxx cap,m 207. Si A est prévisible, il existe un temps d'arrêt prévisible T tel que $[T]\subset A$ et que $\underset{\approx}{P}(p([T])) \geqq \underset{\approx}{P}(p(A))-\varepsilon$.

Ce théorème de section (plus facile que les deux autres) ne figure pas dans [3]. Voir l'appendice 3.

Voici des corollaires de ces théorèmes

xxx t/205-07 208. Soient X et Y deux processus ; supposons que X et Y soient tous deux bien-mesurables (resp. accessibles, prévisibles) et que l'on ait pour chaque temps d'arrêt T (resp. chaque temps d'arrêt accessible, prévisible) $X_T=Y_T$ p.s. . Alors X et Y sont indiscernables.

209. Soit V une variable aléatoire positive. Pour que V soit un temps d'arrêt (resp. accessible, prévisible) il faut et il suffit que le graphe de V soit un ensemble bien-mesurable (resp. accessible, prévisible).

209. bis Soit A un ensemble accessible (prévisible) fermé à droite (cf.216 ci-dessous). Le début de A est alors accessible (prévisible).

Aucun de ces théorèmes ne figure explicitement dans [3] ; 208 est vraiment trivial modulo les théorèmes de sections. Pour les autres, voir l'appendice 3.

Théorèmes de projection et de modification

On donne ici un théorème de projection, suivi d'un théorème de modification, pour chacune des trois tribus $\underline{\underline{BM}}$, $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{P}}$. Cet ordre n'est pas l'ordre logique des démonstrations. Les résultats d'unicité annoncés sont des conséquences triviales de 208.

Tribu $\underline{\underline{BM}}$

xxx mar,m

210. Soit X un processus (réel) mesurable et borné. Il existe un processus bien-mesurable Y unique tel que $Y_T I_{\{T<\infty\}}$ = $\underline{E}[X_T I_{\{T<\infty\}} | \underline{\underline{F}}_T]$ p.s. pour chaque temps d'arrêt T. (VIII.17)

Nous dirons que Y est la projection de X sur $\underline{\underline{BM}}$, et nous écrirons $Y=p_1(X)$. Voici un corollaire :

x t/210

211. Soit X un processus progressif (réel, ou à valeurs dans un espace LCD). Il existe un processus bien-mesurable Y unique tel que $X_T=Y_T$ p.s. pour chaque temps d'arrêt fini T (VIII.17)

> C'est ce théorème qui permet en pratique de se borner à considérer des processus bien-mesurables. Si X est une indicatrice d'ensemble, on a $X^2=X$, donc Y^2 et Y sont indiscernables et Y est (indiscernable d')une indicatrice d'ensemble.

Tribu $\underline{\underline{A}}$

x t/210 et 213

212. Soit X un processus (réel) mesurable borné. Il existe un processus accessible Y unique tel que $Y_T I_{\{T<\infty\}}$ = $\underline{E}[X_T I_{\{T<\infty\}} | \underline{\underline{F}}_T]$ p.s. pour chaque t.d'a. <u>accessible</u> T .

Nous dirons que Y est la projection de X sur $\underline{\underline{A}}$, et nous écrirons $Y=p_2(X)$.

xxx mar,m

213. Soit X un processus bien-mesurable (réel, ou à valeurs dans un espace LCD). Il existe un processus accessible Y, unique, tel que $X_T=Y_T$ p.s. pour chaque t.d'a. accessible T. Plus précisément, l'ensemble $\{X \neq Y\}$ est la réunion d'une suite de graphes de temps d'arrêt totalement inaccessibles (VIII.20)

> Ici encore, si X est une indicatrice, Y est indiscernable d'une indicatrice.

Tribu $\underline{\underline{P}}$

× mar,m 214. Soit X un processus mesurable borné ; il existe un processus prévisible Y, unique, tel que l'on ait $Y_T I_{\{T<\infty\}} = \underset{\sim}{E}[X_T I_{\{T<\infty\}} | \underline{\underline{F}}_{T-}]$ p.s. pour chaque temps d'arrêt <u>prévisible</u> T. L'ensemble $\{Y \neq p_1(X)\}$ (resp. $\{Y \neq p_2(X)\}$ est alors la réunion d'une suite de graphes de t.d'a. (resp. de t.d'a. accessibles).

> Ce résultat ne figure pas dans [3] : voir l'appendice 3 ; par exemple, si (X_t) est une martingale bornée continue à droite, Y est le processus (X_{t-}).

Nous dirons que Y est la projection de X sur $\underline{\underline{P}}$, et nous écrirons $Y = p_3(X)$.

×× el,t 215. Soit X un processus bien-mesurable (réel ou à valeurs dans un espace LCD). Il existe un processus prévisible Y tel que l'ensemble $\{X \neq Y\}$ soit la réunion d'une suite de graphes de temps d'arrêt (et en particulier que $\{ t : X_t(\omega) \neq Y_t(\omega)\}$ soit dénombrables pour tout ω). Si X est une indicatrice, on peut choisir pour Y une indicatrice.

> A la terminologie près, c'est la première partie de la démonstration de VIII.20. Voir l'appendice 3. On notera que ce théorème de modification est incomplet (il n'y a pas d'assertion d'unicité)

Fermés aléatoires

Soit A une partie de $\underset{\sim}{R}$: on dit que A est fermée à droite * si A est fermée pour la topologie droite de $\underset{\sim}{R}$, i.e. si la limite de toute suite décroissante d'éléments de A appartient à A. Si maintenant A est une partie de $\underset{\sim}{R}_+ \times \Omega$, on dit que A est fermée (resp. fermée à droite) si pour tout $\omega \in \Omega$ la coupe A_ω est fermée (resp. fermée à droite). On définit alors aussitôt l'adhérence $\overline{A}$ et l'adhérence à droite $\overline{A}^d$ de $A \subset \underset{\sim}{R}_+ \times \Omega$.

m 216. Soit A un ensemble progressif ; $\overline{A}$ est alors bien-mesurable, ainsi que l'ensemble des extrémités droites des intervalles contigus à $\overline{A}$; $\overline{A}^d$ est progressif, ainsi que l'ensemble des extrémités gauches des intervalles contigus à $\overline{A}$.

* On notera qu'avec cette convention un intervalle de la forme [a,b[est fermé à droite!

Ce théorème n'est établi ni dans [3], ni dans l'appendice : voir Invent.Math. 1, 1966, p.114. Si l'on désigne par X un mouvement brownien issu de 0, par A l'ensemble prévisible $\{(t,\omega) : X_t(\omega)=0\}$, par H l'ensemble des extrémités gauches des intervalles contigus à A, H est progressif, la mesure de la projection de H sur Ω est 1, et il ne passe dans H aucun graphe de temps d'arrêt (propriété de Markov forte). H est donc progressif et non bien-mesurable.

3.-PROCESSUS CROISSANTS

xxx 301. Processus <u>croissant</u> (p.c.) ; processus croissant <u>intégrable</u> (pci) (VII.3)

Dans ce qui suit, et pour simplifier, nous ne nous occuperons que de p.c. intégrables.

302. Partie continue et partie discontinue d'un pci : VIII.10.

xxx 303. Processus croissant intégrable <u>naturel</u> : VII.19, a).

Rappelons cette définition, qui est la plus commode lorsqu'on on se borne aux p.c. intégrables : A est naturel si et seulement si, pour toute martingale Y continue à droite et bornée, on a

$$\mathbb{E}[\int_0^\infty Y_s dA_s] = \mathbb{E}[\int_0^\infty Y_{s-} dA_s]$$

On a alors avec les mêmes notations, pour tout temps d'arrêt T

$$\mathbb{E}[\int_T^\infty Y_s dA_s | \underline{\underline{F}}_T] = \mathbb{E}[\int_T^\infty Y_{s-} dA_s | \underline{\underline{F}}_T] \quad \text{p.s.}$$

xxx dec,m 304. Pour qu'un p.c.i. A soit naturel, il faut et il suffit : a), que A ne charge aucun temps d'arrêt T totalement inaccessible (i.e., $A_T - A_{T-}=0$) et b) que pour toute suite croissante (S_n) de temps d'arrêt, la variable aléatoire A_S ($S=\lim_n S_n$) soit mesurable par rapport à la tribu $\bigvee_n \underline{\underline{F}}_{S_n}$. (VII.49)

L'appréciation <u>dec,m</u> se rapporte à la démonstration de [3]. Il en existe une autre démonstration, due à C.DOLÉANS, qui n'utilise plus la décomposition.

x t/304 et 113 305. Soit T un temps d'arrêt. Pour que le p.c. $(I_{\{t\geq T\}})$ soit naturel, il faut et il suffit que T soit prévisible (VII.52-53).

306. Tout processus croissant intégrable naturel s'écrit

$$A_t = A_t^c + \sum \lambda_n I_{\{t \geqq T_n\}}$$

où A^c est la partie continue de A, où les λ_n sont des constantes, et les T_n des temps d'arrêt prévisibles.

> Ce théorème ne figure pas explicitement dans [3]. Voir l'appendice 4.

307. Deux p.c. intégrables A et B sont dits <u>associés</u> ($A \sim B$) si le processus A-B est une martingale.

> Cette définition commode n'est pas donnée dans [3]. Voici une conséquence immédiate du théorème de décomposition des surmartingales.

xx dec 308. Tout p.c. intégrable A est associé à un p.c.i. naturel unique, noté $\tilde{A}$; $\tilde{A}$ est continu si et seulement si A ne charge aucun temps d'arrêt accessible.

> Pour la seconde assertion, voir l'appendice 4.

<u>Intégration par rapport à un processus croissant</u>

xxx el,m 309. Soient X et Y deux processus mesurables, bornés ou positifs, tels qu'on ait pour temps d'arrêt T

$$\underset{\sim}{E}[X_T I_{\{T<\infty\}}] = \underset{\sim}{E}[Y_T I_{\{T<\infty\}}]$$

On a alors pour tout p.c. intégrable A et tout temps d'arrêt T

$$\underset{\sim}{E}[\int_T^\infty X_s dA_s | \underline{\underline{F}}_T] = \underset{\sim}{E}[\int_T^\infty Y_s dA_s | \underline{\underline{F}}_T] \text{ p.s.} \qquad \text{(VII.15)}$$

> L'hypothèse ci-dessus entraîne en fait $\underset{\sim}{E}[X_T I_{\{T<\infty\}} | \underline{\underline{F}}_T] = \underset{\sim}{E}[Y_T I_{\{T<\infty\}} | \underline{\underline{F}}_T]$ p.s. ; pour le voir, appliquer l'hypothèse aux t.d'a. T_H , H parcourant $\underline{\underline{F}}_T$.

xx el,t 310. Soient A et B deux p.c. intégrables associés, X un processus prévisible $\geqq 0$ ou borné. On a alors pour tout temps d'arrêt T

$$\underset{\sim}{E}[\int_T^\infty X_s dA_s \mid \underline{\underline{F}}_T] = \underset{\sim}{E}[\int_T^\infty X_s dB_s \mid \underline{\underline{F}}_T] \qquad \text{p.s.} \qquad \text{(VII.17)}$$

> Ce résultat est en fait un peu plus précis que VII.17 : voir l'appendice 4. On consultera aussi l'appendice 4 pour l'énoncé suivant :

× 311. Soit X un processus mesurable borné, et soient X^1, X^2 et X^3 respectivement les projections de X sur $\underline{\underline{BM}}$, $\underline{\underline{A}}$ et $\underline{\underline{P}}$.

Soit A un processus croissant intégrable

a) On a $\underset{\sim}{E}[\int_0^\infty X_s dA_s] = \underset{\sim}{E}[\int_0^\infty X_s^1 dA_s]$ (309)

b) Si A ne charge aucun t.d'a. totalement inaccessible (i.e. soit $\underline{\underline{A}}$-mesurable ; cf ci-dessous) on a

$$\underset{\sim}{E}[\int_0^\infty X_s dA_s] = \underset{\sim}{E}[\int_0^\infty X_s^2 dA_s]$$

c) Si A est naturel (i.e., $\underline{\underline{P}}$-mesurable ; cf ci-dessous) on a

$$\underset{\sim}{E}[\int_0^\infty X_s dA_s] = \underset{\sim}{E}[\int_0^\infty X_s^3 dA_s]$$

312. Soit A un processus croissant intégrable

a) A est un processus accessible si et seulement si A ne charge aucun temps d'arrêt totalement inaccessible.

×× b) A est un processus prévisible si et seulement s'il est naturel.

Ce dernier résultat est dû à Mlle DOLÉANS. Voir l'appendice 4.

APPENDICE 1 : TRIBU $\underline{\underline{F}}_{T-}$

Rappelons la définition de CHUNG et DOOB : $\underline{\underline{F}}_{T-}$ est engendrée par $\underline{\underline{F}}_0$ et par les ensembles de la forme $A\cap\{t<T\}$ $(t>0,\ A\in\underline{\underline{F}}_t)$.

Si T est une constante s, on retrouve bien $\underline{\underline{F}}_{s-}$. On peut remplacer dans cette définition $A\in\underline{\underline{F}}_t$ par $A\in \bigcup_{r<t} \underline{\underline{F}}_r$; en effet, $A\cap\{t<T\}$ est la réunion des $A\cap\{s<T\}$ pour s rationnel $>t$, et on a $A\in \bigcup_{r<s} \underline{\underline{F}}_r$.

Les propriétés suivantes, à l'exception de la dernière, sont dues à CHUNG et DOOB.

<u>Propriété</u> 1.- <u>On a</u> $\underline{\underline{F}}_{T-}\subset \underline{\underline{F}}_T$; T <u>est</u> $\underline{\underline{F}}_{T-}$<u>-mesurable.</u>

La première assertion est évidente, la seconde résulte de ce que $\{t<T\}\in\underline{\underline{F}}_{T-}$.

<u>Propriété</u> 2.- <u>Soient</u> S <u>et</u> T <u>deux temps d'arrêt tels que</u> $S\leq T$. <u>On a</u> $\underline{\underline{F}}_{S-}\subset \underline{\underline{F}}_{T-}$.

En effet, soient $t>0$, $A\in\underline{\underline{F}}_t$; on a $A\ \{t<S\} = (A\cap\{t<S\})\cap\{t<T\}$, et la parenthèse appartient à $\underline{\underline{F}}_t$, donc $A\cap\{t<S\} \in \underline{\underline{F}}_{T-}$.

<u>Propriété</u> 3.- <u>Si</u> S <u>et</u> T <u>sont deux temps d'arrêt et</u> $A\in\underline{\underline{F}}_S$, <u>on a</u> $A\cap\{S<T\} \in \underline{\underline{F}}_{T-}$. <u>De même, si</u> $A\in\underline{\underline{F}}_{\infty}$, <u>on a</u> $A\cap\{T=\infty\}\in\underline{\underline{F}}_{T-}$.

<u>Si</u> S <u>est un temps d'arrêt, si</u> $S\leq T$ <u>et</u> $S<T$ <u>p.s. sur</u> $\{0<T<\infty\}$, <u>on a</u> $\underline{\underline{F}}_S\subset \underline{\underline{F}}_{T-}$.

Pour établir la première assertion, il suffit de remarquer que $\{S<T\}$ est la réunion, pour r rationnel, des ensembles $\{S<r<T\}$. Alors $A\cap\{S<r<T\} = (A\cap\{S<r\})\cap\{r<T\}$, et la parenthèse appartient à $\underline{\underline{F}}_r$, d'où le résultat.

L'ensemble des A tels que $A\cap\{T=\infty\} \in \underline{\underline{F}}_{T-}$ est une tribu , et il suffit donc, pour établir la seconde assertion, de montrer que $A\cap\{T=\infty\} \in \underline{\underline{F}}_{T-}$ si $A\in\underline{\underline{F}}_n$ ($n\in\mathbb{N}$) ; mais cet ensemble est l'intersection des $A\cap\{m<T\}$ (m entier $\geq$ n), qui appartiennent à $\underline{\underline{F}}_{T-}$.

La dernière affirmation de l'énoncé est alors évidente.

<u>Propriété</u> 4.- <u>Soit</u> T <u>un temps d'arrêt</u> ; <u>on a</u> $\underline{\underline{F}}_T = \bigcap_n \underline{\underline{F}}_{(T+\frac{1}{n})-}$.

Cette tribu contient $\underline{\underline{F}}_T$ d'après la propriété 3, et elle est contenue dans $\bigcap_n \underline{\underline{F}}_{(T+\frac{1}{n})} = \underline{\underline{F}}_T$.

Propriété 5.- Soit (T_n) une suite croissante de temps d'arrêt, et soit $T = \lim_n T_n$; alors $\underline{\underline{F}}_{T-} = \bigvee_n \underline{\underline{F}}_{T_n-}$.

En effet, cette tribu est contenue dans $\underline{\underline{F}}_{T-}$ (propriété 2). D'autre part, si $A\in\underline{\underline{F}}_T$, $A\cap\{t<T\}$ est la réunion des $A\cap\{t<T_n\}\in\underline{\underline{F}}_{T_n-}$.

Propriété 6.- Soit T un temps d'arrêt prévisible, limite d'une suite croissante (T_n) de temps d'arrêt telle que $T_n<T$ p.s. sur $\{0<T<\infty\}$; alors $\underline{\underline{F}}_{T-} = \bigvee_n \underline{\underline{F}}_{T_n}$.

En effet cette tribu contient $\underline{\underline{F}}_{T-}$ (propriétés 1 et 5) et elle est contenue dans $\underline{\underline{F}}_{T-}$ (propriété 3).

Propriété 7.- Soit T un temps d'arrêt ; pour qu'une variable aléatoire $\underline{\underline{F}}_{\infty}$-mesurable Z soit $\underline{\underline{F}}_{T-}$-mesurable, il faut et il suffit qu'il existe un processus prévisible X tel que $X_T=Z$ sur $\{T<\infty\}$.

1) La tribu $\underline{\underline{P}}$ est engendrée par les processus de la forme $X_t(\omega) = Y_s(\omega)I_{\{s<t\leq u\}}$, où Y_s est $\underline{\underline{F}}_s$-mesurable, ou de la forme $X_t(\omega)=Y_0(\omega)I_{\{t=0\}}$ où Y_0 est $\underline{\underline{F}}_0$-mesurable (voir l'appendice 3). Montrons que si Z ($\underline{\underline{F}}_{\infty}$ -mesurable) est telle que $Z=X_T$ sur $\{T<\infty\}$, Z est $\underline{\underline{F}}_{T-}$-mesurable. En effet, $Z=Y_sI_{\{s<t\}}I_{\{T<\infty\}} - Y_sI_{\{s<u\}}I_{\{T<\infty\}} +ZI_{\{T=\infty\}}$; les deux premiers termes sont $\underline{\underline{F}}_{T-}$-mesurables d'après la propriété 1, et le dernier d'après la propriété 3.

2) Il suffit de vérifier l'existence du processus X lorsque Z est l'indicatrice d'un élément de $\underline{\underline{F}}_0$, ou de $A\cap\{t<T\}$ $(t>0, A\in\underline{\underline{F}}_t)$. Mais il suffit de poser alors $X_s(\omega) = I_A(\omega)I_{\{s>t\}}$: c'est un processus adapté continu à gauche, donc prévisible, et on a $Z=X_T$.

APPENDICE 2 : TEMPS D'ARRÊT PRÉVISIBLES

Nous reprenons ici les propriétés des temps d'arrêt prévisibles citées dans la section 1, en suivant l'ordre de démonstration naturel.

110 Propriété 1.- Si S et T sont prévisibles, $S\wedge T$ et $S\vee T$ le sont aussi : c'est évident à partir de la définition.

111 Propriété 2.- Soit (S_n) une suite croissante de temps d'arrêt prévisibles, et soit $S=\lim_n S_n$; S est alors prévisible.

DÉMONSTRATION.- Il est commode de se ramener au cas où S est fini, au moyen d'une bijection monotone de $[0,\infty]$ sur $[0,1]$. Pour chaque n, soit $(S^n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de t.d'a. approchant S_n, et satisfaisant à la définition des t.d'a. prévisibles. Choisissons

k_1 assez grand pour que $\mathbb{P}\{S^1_{k_1} < S_1 - \frac{1}{2}\} < \frac{1}{2}$

k_2 assez grand pour que $\mathbb{P}\{S^2_{k_2} < S^1_{k_1}$ ou $S^2_{k_2} < S_2 - \frac{1}{4}\} < \frac{1}{4}$

$k_3\ldots$ pour que $\mathbb{P}\{S^3_{k_3} < S^2_{k_2}$ ou $S^3_{k_3} < S^1_{k_1}$ ou $S^3_{k_3} < S_3 - \frac{1}{8}\} < \frac{1}{8}$

etc. On a $S^i_{k_i} < S^i$ sur $\{S_i>0\}$, donc $S^i_{k_i} < S$ sur $\{S>0\}$. Posons $T_n = \inf_{j\geqq n} S^j_{k_j}$; ces temps d'arrêt croissent et sont $<S$ sur $\{S>0\}$.

On a $\mathbb{P}\{T_n < S^n_{k_n}\} \leqq \sum_{j>n} \mathbb{P}\{S^k_{k_j} < S^n_{k_n}\} \leqq \frac{1}{2^{n+1}} + \ldots = \frac{1}{2^n}$. Comme cette série converge, le lemme de Borel-Cantelli entraîne que p.s. $T_n = S^n_{k_n}$ pour n assez grand. Il reste donc seulement à prouver que $S^n_{k_n} \to S$ p.s. ; mais $\sum_n \mathbb{P}\{S^n_{k_n} < S_n - \frac{1}{2^n}\}$ converge, donc $S^n_{k_n} \geqq S_n - \frac{1}{2^n}$ p.s. pour n assez grand, d'où le résultat.

115 <u>Propriété</u> 3.- <u>Soit</u> T <u>un temps d'arrêt</u> ; <u>l'ensemble des</u> $A\in\underline{\underline{F}}_T$ <u>tels que</u> T_A <u>soit prévisible est stable pour les réunions et intersections dénombrables</u>.

En effet, il est stable pour les réunions et intersections finies (mais attention à l'intersection de la famille vide !) d'après la propriété 1. Restent à étudier les suites croissantes et décroissantes . Le cas d'une suite décroissante (A_n) résulte de la propriété 2 , car les T_{A_n} croissent. Le cas des suites croissantes est traité dans [3] : début de la démonstration de VII.45.

113 <u>Propriété</u> 4 .- T <u>prévisible</u> <=> T <u>accessible et, pour toute suite croissante</u> (R_n) <u>de temps d'arrêt</u>, <u>on a</u> $\{\lim_n R_n = T\} \in \bigvee_n \underline{\underline{F}}_{R_n}$

L'événement $\{\lim_n R_n > T\}$ appartient évidemment à $\bigvee_n \underline{\underline{F}}_{R_n}$. Quitte à remplacer R_n par $R_n \wedge T$, on peut donc supposer les R_n majorés par T. Si T est prévisible, soit (S_n) une suite croissante de temps d'arrêt, telle que $\lim_n S_n = T$ et que $S_n < T$ p.s. sur $\{T>0\}$. Alors l'événement $\{\lim_n R_n = T\}$ est la réunion des événements $\{T=0\}$ et $\{T>0, \lim_n R_n > S_m\}$, qui appartiennent à $\bigvee_n \underline{\underline{F}}_{R_n}$. Inversement, supposons que la condition de l'énoncé soit satisfaite ; T est alors prévisible d'après la démonstration de VII.45.

109 Propriété 5.- Supposons T prévisible. Alors $A \in \underline{\underline{F}}_{T-} \Leftrightarrow A \in \underline{\underline{F}}_T$ et T_A est prévisible.

DÉMONSTRATION.- Soit (S_n) une suite de temps d'arrêt approchant T comme plus haut. D'après la propriété 3, l'ensemble des $A \in \underline{\underline{F}}_T$ tels que T_A et T_{A^c} soient prévisibles est une tribu $\underline{\underline{G}}$. Soit $A \in \underline{\underline{F}}_{S_n}$: $(S_m)_A$ est un temps d'arrêt pour $m \geq n$, et il en résulte que T_A (et de même T_{A^c}) est prévisible ; $\underline{\underline{G}}$ contient donc $\bigcup_n \underline{\underline{F}}_{S_n}$, et donc aussi $\underline{\underline{F}}_{T-}$ (appendice 1, pr. 5). Ainsi $A \in \underline{\underline{F}}_{T-} \Rightarrow T_A$ est prévisible. Inversement, supposons que T_A soit prévisible ; l'événement $\{\lim_n S_n = T_A\} = \{T=T_A\}$ appartient à $\bigvee_n \underline{\underline{F}}_{S_n} = \underline{\underline{F}}_{T-}$ (propriété 4) . Comme on a $A = \{T=T_A\} \setminus (\{T=\infty\} \cap A^c)$, et comme le second ensemble appartient aussi à $\underline{\underline{F}}_{T-}$ (appendice 1, pr.3) on a bien $A \in \underline{\underline{F}}_{T-}$.

La propriété suivante (que nous n'avons pas explicitée dans le guide) est une extension facile de la partie de 115 relative aux suites croissantes d'événements.

Propriété 6.- Soit (T_n) une suite décroissante de temps d'arrêt prévisibles, telle que, si l'on pose $T = \lim_n T_n$, on ait p.s. $T=T_n$ pour n assez grand . Alors T est prévisible.

En effet, soit $A_n = \{T_n = T\}$; $A_n = \{T < T_n\}^c$ appartient à $\underline{\underline{F}}_{T_n-}$ (app.1 , pr.3) , donc $(T_n)_{A_n} = T_{A_n}$ est prévisible (propriété 5). Comme Ω est la réunion des A_n p.s., T est prévisible (propr.3).

118 Propriété 7 .- Soit T un temps d'arrêt prévisible, et soit (Y_t) une martingale continue à droite uniformément intégrable ; alors $Y_{T-} = \mathbb{E}[Y_\infty | \underline{\underline{F}}_{T-}]$ p.s. . En effet, soit (S_n) une suite croissante de temps d'arrêt approchant T par valeurs strictement inférieures. On a $Y_{T-} = \lim_n Y_{S_n} = \lim_n \mathbb{E}[Y_\infty | \underline{\underline{F}}_{S_n}] = \mathbb{E}[Y_\infty | \bigvee_n \underline{\underline{F}}_{S_n}] = \mathbb{E}[Y_\infty | \underline{\underline{F}}_{T-}]$ (appendice 1, propriété 6).

APPENDICE 3 : LES TRIBUS $\underline{\underline{P}}$ et $\underline{\underline{A}}$.

Générateurs de la tribu $\underline{\underline{P}}$

203 Considérons le pavage $\underline{\underline{J}}$ constitué par les ensembles de la forme $[S,T]$, où S est prévisible, et le pavage $\underline{\underline{J}}'$ constitué par les ensembles de la forme $\{0\}\times A$ ($A\in\underline{\underline{F}}_0$) ou $[s,t]\times A$ ($0<s\leq t$, $A \in \bigcup_{r<s} \underline{\underline{F}}_r$) . On a $\underline{\underline{J}}'\subset \underline{\underline{J}}$, et $\underline{\underline{J}}\subset \underline{\underline{P}}$. En effet, choisissons une suite croissante (S_n) de temps d'arrêt, telle que $\lim_n S_n = S$ et que $S_n < S$ sur $\{S>0\}$; $[S,T]$ est la réunion de $\{0\}\times\{S=0\}$ (dont l'indicatrice est continue à gauche par convention) et de $\bigcap_n]S_n,T]$ (ensembles dont l'indicatrice est un processus adapté continu à gauche). Nous allons montrer que $\underline{\underline{P}}$ est contenue dans la tribu engendrée par $\underline{\underline{J}}'$, ce qui prouvera que $\underline{\underline{J}}$ et $\underline{\underline{J}}'$engendrent $\underline{\underline{P}}$. Soit Y un processus adapté continu à gauche. Le processus Z^n défini par

$$Z^n(t,\omega)= Y_0(\omega)I_{\{0\}}(t)+ \sum_{k\in\mathbb{N}} Y_{\frac{k}{n}}(\omega)I_{]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]}(t)$$

converge vers Y lorsque $n\to\infty$. Comme $Y_{k/n}$ est $\underline{\underline{F}}_{k/n}$-mesurable, il suffit de montrer qu'un ensemble de la forme $]s,t]\times A$ $(A\in\underline{\underline{F}}_s)$ appartient à la tribu $\underline{\underline{T}}(\underline{\underline{J}}')$; or c'est évident, car un tel ensemble est réunion des $[s+\frac{1}{n}]\times A$, qui appartiennent à $\underline{\underline{J}}'$.

203 Nous venons de voir que $\underline{\underline{P}}$ est engendrée par les intervalles $[S,T]$, où S est prévisible ; $\underline{\underline{A}}$ est engendrée, par définition, par les intervalles $[S,T]$, où S est accessible. Enfin, la tribu $\underline{\underline{BM}}$ est engendrée par les intervalles $[S,T[$, où S est un temps d'arrêt quelconque : en effet, ces intervalles stochastiques sont des ensembles bien-mesurables, et on a $]S,T] = [S,T]\setminus[S]$, de sorte que la tribu engendrée par les $[S,T]$ contient les $]S,T]$, et donc aussi la tribu $\underline{\underline{BM}}$ (VIII.14-16).

204 La relation $\mathscr{P}\subset\mathscr{A}$ est maintenant évidente, car tout temps d'arrêt prévisible est accessible ; si la famille $(\mathscr{F}_t)$ n'a pas de temps de discontinuité, tout temps d'arrêt accessible est prévisible (114), donc $\mathscr{P}=\mathscr{A}$.

Sections des ensembles prévisibles

207 *Si* A *est un ensemble prévisible, il existe un t.d'a. prévisible* T *tel que* $[T]\subset A$ *et que* $\mathbf{P}\{T<\infty\} > \mathbf{P}(p(A))-\varepsilon$

DÉMONSTRATION.- Reprenons le pavage $\mathscr{J}'$ considéré au début de l'appendice, et désignons par $\mathscr{J}'_f$ le pavage constitué par les réunions finies d'éléments de $\mathscr{J}'$. Comme $\mathscr{J}'$est stable pour les intersections finies, $\mathscr{J}'_f$ est stable pour les réunions et intersections finies.

Considérons la fonction d'ensemble $H\mapsto P^*(p(H))$ (probabilité extérieure de la projection) sur $\mathbb{R}_+\times\Omega$. La coupe de tout $H\in\mathscr{J}'_f$ suivant tout $\omega\in\Omega$ étant compacte, cette fonction est une capacité relativement au pavage $\mathscr{J}'_f$. Tout $H\subset\mathbb{R}_+\times\Omega$, $\mathscr{J}'$-analytique, contient donc un ensemble $L\in\mathscr{J}'_{f\delta}$ tel que $\mathbf{P}(p(L))\geq\mathbf{P}(p(H)) - \varepsilon$; soit T le début de L . La coupe de L suivant tout $\omega\in\Omega$ étant fermée, on a $[T]\subset H$, $\mathbf{P}\{T<\infty\} = \mathbf{P}(p(L))$. D'où le théorème si nous prouvons :

a) que T est prévisible,

b) que tout H prévisible est $\mathscr{J}'$-analytique

a) L est l'intersection d'une suite décroissante (L_n) d'éléments de $\mathscr{J}'_f$; en vertu de 111, on est ramené à vérifier que le début d'un élément de $\mathscr{J}'_f$ est prévisible ; d'après 110, on peut se borner à un élément de $\mathscr{J}'$, de la forme $[s,t]\times A$ (où $0\leq r<s\leq t$, $A\in\mathscr{F}_r$) . C'est alors évident.

b) D'après III.12, il suffit de montrer que le complémentaire d'un élément de $\mathscr{J}'$ est $\mathscr{J}'$-analytique. Si cet élément est de la forme $\{0\}\times A$, $A\in\mathscr{F}_0$, le complémentaire est la réunion de $]0,\infty]\times\Omega$ et de $\{0\}\times A^c$, d'où aussitôt le résultat. De même, s'il est de la forme $[s,t]\times A$ $(A\in\mathscr{F}_s)$, le complémentaire est réunion de $[0,s[\times\Omega$, de $]t,\infty[\times A$, de $[s,t]\times A^c$, et c'est encore trivial.

209 Pour qu'une variable aléatoire T soit un temps d'arrêt (resp. accessible, prévisible) il faut et il suffit que son graphe [T] soit bien-mesurable (resp. accessible, prévisible).

DÉMONSTRATION.- Si T est un temps d'arrêt,[T] est un intervalle stochastique, donc bien-mesurable. Inversement, si [T] est bien-mesurable, T (début de [T]) est un temps d'arrêt (201 et 9).

Si T est un temps d'arrêt accessible, [T] appartient à $\underline{\underline{A}}$ (c'est la définition même de $\underline{\underline{A}}$: voir 202). Inversement, si [T] est accessible, T est un temps d'arrêt, et pour tout $\varepsilon>0$ il existe un temps d'arrêt S tel que $[S]\subset[T]$ (donc S est de la forme T_A, $A\in\underline{\underline{F}}_T$) et que $P\{S<\infty\} > P\{T<\infty\} - \varepsilon$ (206) ; il en résulte aussitôt que T est accessible (112).

Si T est prévisible, [T] appartient à $\underline{\underline{P}}$ (voir la démonstration du n°203 au début de cet appendice) . Inversement, si [T] est prévisible, T est un temps d'arrêt prévisible : même démonstration que pour $\underline{\underline{A}}$, en utilisant 207 au lieu de 206.

209 bis Soit A un élément de $\underline{\underline{A}}$ (resp. de $\underline{\underline{P}}$) fermé à droite. Le début T de A est alors un temps d'arrêt accessible (resp. prévisible)

En effet, $]T,\infty[$ est un ensemble prévisible, donc $B=A\cap]T=\infty[$ est accessible (prévisible), et donc $[T]=A\setminus B$ est accessible (prévisible).

Théorème de projection sur la tribu $\underline{\underline{P}}$

214 Soit X un processus mesurable borné ; il existe un processus prévisible $Y=p_3(X)$, unique, tel que l'on ait $Y_T I_{\{T<\infty\}} = E[X_T I_{\{T<\infty\}} | \underline{\underline{F}}_{T-}]$ pour chaque temps d'arrêt prévisible T (p.s.). L'ensemble $\{Y\neq p_1(X)\}$ (resp. $\{Y\neq p_2(X)\}$) est réunion d'une suite de graphes de t.d'a. (resp. de t.d'a. accessibles).

DÉMONSTRATION.- Nous ne nous occuperons ici que de p_3 et de ses rapport avec p_1, en laissant de côté ce qui touche p_2.

a) Si X est de la forme

(1) $X_t(\omega)= I_{[r,s]}(t)Y(\omega)$ ($r\leq s$, Y $\underline{\underline{F}}$-mesurable bornée)

et si (Y_t) est une version continue à droite de la martingale $(E[Y|\underline{\underline{F}}_t])$, les projections $p_1(X)$ et $p_3(X)$ sont respectivement les processus

$$I_{[r,s]}(t)Y_t(\omega) \text{ et } I_{[r,s]}(t)Y_{t-}(\omega)$$

(la projection $p_2(X)$ est plus difficile à expliciter : elle s'obtient en appliquant à $p_1(X)$ le procédé de VIII.20 : remplacement de Y_t par Y_{t-} sur les parties accessibles des sauts de (Y_t)) . Ces projections satisfont à l'énoncé.

b) Considérons l'ensemble $\underline{\underline{H}}$ des processus mesurables bornés admettant une projection p_3 qui satisfait à l'énoncé. Comme $\underline{\underline{H}}$ contient les processus de la forme (1), le théorème des classes monotones nous ramène à montrer que $\underline{\underline{H}}$ est un espace vectoriel, fermé pour la convergence uniforme, et que si (X_n) est une suite croissante uniformément bornée d'éléments de $\underline{\underline{H}}$ on a $\lim_n X_n \in \underline{\underline{H}}$. Montrons que $p_3(X_n)$ croît (à un processus indiscernable de 0 près). En effet, soit $Z = p_3(X_{n+1})-p_3(X_n)$; Z est prévisible, et on a $\underline{\underline{E}}[Z_T|\underline{\underline{F}}_{T-}] \geq 0$ pour tout temps d'arrêt prévisible **fini** T ; mais Z_T est $\underline{\underline{F}}_{T-}$-mesurable (appendice 1, propriété 7) et on a donc $Z_T \geq 0$ p.s. ; cela entraîne que Z est indiscernable d'un processus positif . Soit alors $X' = \underline{\lim}_n \, p_3(X_n)$ là où cette limite existe, 0 là où elle n'existe pas : on vérifie aussitôt que X' est une projection de $\lim_n X_n$. Raisonnements analogues pour la somme , la limite uniforme d'une suite d'éléments de $\underline{\underline{H}}$.

Il reste encore à vérifier que la relation "$\{p_1(X) \neq p_3(X)\}$ est réunion d'une suite de graphes de temps d'arrêt" passe à la somme, à la limite uniforme, à la limite croissante... tout cela est presque évident à partir du lemme suivant :

<u>Soit</u> A <u>la réunion d'une suite</u> $([T_n])$ <u>de graphes de temps d'arrêt, et soit</u> B <u>une partie bien-mesurable de</u> A. <u>Alors</u> B <u>est une réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt</u>.

En effet, l'ensemble $B \cap [T_n]$ est évidemment le graphe de son début ; comme cet ensemble est bien-mesurable, son début est un temps d'arrêt.

<u>Théorème de modification pour la tribu</u> $\underline{\underline{P}}$

<u>Soit</u> X <u>un processus bien-mesurable</u> ; <u>il existe alors un processus prévisible</u> Y <u>tel que</u> $\{X \neq Y\}$ <u>soit réunion d'une suite de graphes de temps d'arrêt</u>.

En effet, X est mesurable par rapport à la tribu engendrée par les processus adaptés continus à droite, dont les trajectoires admettent des limites à gauche. Il existe donc un processus Z à valeurs dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, dont les trajectoires possèdent les propriétés ci-dessus, et une fonction borélienne f sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, tels que l'on ait $X_t = f\circ Z_t$. Le processus $(f\circ Z_{t-})$ est alors la modification cherchée.

Enfin, nous laisserons au lecteur la démonstration facile de la propriété suivante (non citée dans le Guide) :

Soient X *un processus mesurable borné*, Y *un processus borné bien-mesurable* (*resp. accessible*, *prévisible*). *On a alors* $p_1(XY) = Y.p_1(X)$ (*resp.* $p_2(XY)=Y.p_2(X)$, $p_3(XY)=Y.p_3(X)$).

APPENDICE 4 : PROCESSUS CROISSANTS

Structure des p.c. naturels

306 *Tout p.c. intégrable naturel* A *s'écrit*

$$A_t = A_t^c + \sum_n \lambda_n I_{\{t \geqq T_n\}}$$

où (A_t^c) *est continu, où les* T_n *sont des temps d'arrêt prévisibles, et où les* λ_n *sont des constantes positives.*

DÉMONSTRATION.- La construction de VII.49 montre que tout p.c. naturel est somme de sa partie continue, et d'une série de processus croissants naturels purement discontinus, dont les trajectoires ont au plus un saut. Soit A un tel processus, soit $T = \inf \{ t : A_t>0\}$ (l'instant du saut) et soit $U=A_T-A_{T-}$ (la valeur du saut). Il résulte aussitôt de 304,b) et de 113 que T est prévisible. En utilisant à nouveau 304,b), on voit alors que U est $\underline{\underline{F}}_{T-}$-mesurable. D'après un théorème bien connu, on peut donc écrire $U = \lim_n U_n$, où U_n est une combinaison linéaire finie d'indicatrices d'éléments de $\underline{\underline{F}}_{T-}$, et croît avec n. Posons $V_n = U_{n+1}-U_n$; V_n est positive, et c'est une combinaison linéaire finie d'indicatrices : c'est donc aussi une combinaison linéaire finie d'indicatrices d'ensembles disjoints, avec des coefficients positifs . Comme $U = \sum_n V_n$, on voit que U s'écrit $\sum_n \lambda_n I_{A_n}$ ($\lambda_n>0$, $A_n \in \underline{\underline{F}}_{T-}$) . Posons alors $T_n=T_{A_n}$: on a $A_t = \sum \lambda_n I_{\{t\geqq T_n\}}$, et le théorème en résulte.

308 <u>Soit</u> A <u>un p.c. intégrable</u> , <u>et soit</u> $\tilde{A}$ <u>le p.c. naturel associé à</u> A ; $\tilde{A}$ <u>est continu si et seulement si</u> A <u>ne charge aucun temps d'arrêt accessible</u>.

DÉMONSTRATION.- Soit A un p.c.i. qui ne charge aucun temps d'arrêt accessible ; le potentiel engendré par A est régulier, et il est donc engendré par un p.c.i. <u>continu</u> B ; B est alors naturel, donc $B=\tilde{A}$, et $\tilde{A}$ est continu.

Inversement, supposons que A charge un temps d'arrêt accessible S, et montrons que $\tilde{A}$ ne peut être continu . Soit (S_n) une suite croissante de temps d'arrêt majorés par S, telle que $\underset{\sim}{P}\{ \lim_n S_n = S, A_S > \lim_n A_{S_n} \} > 0$ (112) . Mais alors $\underset{\sim}{E}[\tilde{A}_S - \lim_n \tilde{A}_{S_n}]$ $= \underset{\sim}{E}[A_S - \lim_n A_{S_n}] > 0$, et A ne peut être continu.

310 Ce résultat est donné dans [3] seulement pour X continu à gauche, pour T=0, et sans espérances conditionnelles. Pour en déduire 310, on procède ainsi : on étend d'abord ce résultat au cas où X est prévisible, grâce au théorème des classes monotones. Puis on l'applique au processus prévisible $Z_t(\omega)=X_t(\omega)I_{]S(\omega),\infty[}(t)$ S désignant le t.d'a. T_H ($H\in\underline{\underline{F}}_T$). Il vient

$$\int_H d\underset{\sim}{P} \int_T^\infty X_s dA_s = \int_H d\underset{\sim}{P} \int_T^\infty X_s \, dB_s$$

d'où le résultat, H étant arbitraire.

311 <u>Intégration par rapport à un processus croissant</u> .- a) est un cas particulier de 309 ; b) en résulte aussitôt, car l'ensemble $\{X_2 \neq X_1\}$ est réunion d'une suite de graphes de t.d'a. totalement inaccessibles (212-213), et A ne charge pas un tel ensemble. Pour c), on remarque que cette égalité a lieu lorsque X est de la forme $X_t(\omega) = X(\omega)I_{[u,v]}(t)$ (compte tenu de a), c'est la définition même des processus croissants naturels : expliciter les projections $p_1(X)$ et $p_3(X)$) . On étend cela à tout X mesurable borné au moyen du théorème des classes monotones

312 a) <u>Soit</u> A <u>un p.c.i.</u> ; A <u>est accessible si et seulement s'il ne charge aucun t.d'a. totalement inaccessible</u>.
b) A <u>est prévisible si et seulement s'il est naturel</u>.

DÉMONSTRATION.- Supposons A accessible . Le processus (A_{t-}) étant continu à gauche, donc prévisible, l'ensemble $\{A_t - A_{t-} > \frac{1}{n}\}$ est accessible ; notons le B_n . Il est clair que B_n est réunion d'une suite de temps d'arrêt $T_1, T_2 \ldots$ tels que $T_i < T_{i+1}$ sur $\{T_i < \infty\}$. Il en résulte que $[T_1] = B_n \setminus]T_1, \infty[$ est accessible, donc T_1 est accessible (209) ; $B_n \setminus [T_1]$ est alors accessible, donc T_2 est accessible, etc. Il en résulte que T ne charge aucun t.d'a. totalement inaccessible.

Supposons que A ne charge aucun t.d'a. totalement inaccessible. Décomposons la partie purement discontinue de A en une combinaison linéaire à coefficients positifs de processus de la forme $(I_{\{t \geq T\}})$, à la façon de la démonstration de 306 ; on a alors $\underset{\sim}{P}\{T = I < \infty\} = 0$ pour tout t.d'a. totalement inaccessible I ; T est alors accessible (104), et le processus croissant $(I_{\{t \geq T\}})$ est donc accessible, d'où le résultat par combinaison linéaire.

Supposons A naturel . D'après 306, A est somme d'un processus continu et d'une combinaison linéaire à coefficients positifs de processus de la forme $(I_{\{t \geq T\}})$, où T est prévisible. Un processus croissant de cette forme est prévisible, ainsi qu'un p.c. continu, et A est donc prévisible.

Supposons A prévisible, et montrons que A est naturel. Posons comme au début de la démonstration $B_n = \{(t,\omega) : A_t(\omega) - A_{t-}(\omega) > \frac{1}{n}\}$; B_n est cette fois prévisible, et on voit comme plus haut que B_n est la réunion d'une suite de graphes de temps d'arrêt T_i, mais cette fois-ci les T_i sont prévisibles. Soit $c_i = A_{T_i} - A_{T_i -}$; c_i est $\underline{\underline{F}}_{T_i -}$-mesurable (appendice 1, propriété 7) , donc le processus croissant $(c_i I_{\{t \geq T_i\}})$ est naturel. Par conséquent, quel que soit n, la somme $(\sum_{s \leq t} (A_s - A_{s-}) I_{\{A_s - A_{s-} > 1/n\}})$ est un processus croissant naturel . En faisant tendre n vers $+\infty$, on voit que la partie discontinue de A est naturelle, d'où le résultat.