SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

VAZGAIN AVANISSIAN

Sur l'harmonicité des fonctions séparément harmoniques

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 1 (1967), p. 3-17
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1967__1__3_0>

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE
STRASBOURG

Séminaire de Probabilités — Février 1967

SUR L'HARMONICITÉ DES FONCTIONS SÉPARÉMENT HARMONIQUES

(par V. Avanissian)

§ 1. D'après le célèbre théorème de Hartogs une fonction $f(z_1, \dots z_p)$ définie dans un domaine de $\mathbb{C}^n$ et analytique par rapport à chaque variable, les autres variables étant fixées, est analytique de l'ensemble des variables $z_1, \dots z_n$. Si on considère le même problème dans le cas réel, on n'a pas en général la même conclusion ; c'est à dire si $f(x_1, \dots x_p)$ est une fonction définie dans un domaine D de R^p et analytique par rapport à chaque variable x_j séparément, f n'est pas en général analytique de l'ensemble des variables $x_1, \dots x_p$, même si $|f|$ est borné sur tout compact de son domaine de définition. Les exemples suivants montrent la difficulté du problème :

Exemple 1 - La fonction

$$f(z) = u(x,y) + i\, v(x,y) = \begin{cases} \exp(-z^4) & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases} \qquad z = x + iy$$

est indéfiniment différentiable en x et en y séparément sans être continue à l'origine $\left[\text{si } z = r\exp\left(\frac{1}{4}\, i\pi\right) \to 0,\ f(z) = \exp(r^{-4}) \to \infty\right]$

Exemple 2 - Soient les boules

$$B_x(0,1) = \left\{ x = (x_1, \dots, x_p) \;\middle|\; \|x\|^2 = \sum_{j=1}^{p} x_j^2 < 1 \right\} \subset \mathbb{R}^p \qquad p \geqslant 1$$

$$B_y(0,1) = \left\{ y = (y_1, \dots, y_q) \;\middle|\; \|y\|^2 = \sum_{j=1}^{q} y_j^2 < 1 \right\} \subset \mathbb{R}^q \qquad q \geqslant 1$$

La fonction :

$$f(x\,;\,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{\|x\|^2 - \|y\|^2}{\|x\|^2 + \|y\|^2}\right)^{2n} & \text{si } \|x\| + \|y\| \neq 0 \quad n \in \mathbb{N} \\ 1 & \text{si } \|x\| + \|y\| = 0 \end{cases}$$

est analytique (réelle) de $x \in B_x$ pour tout $y \in B_y$ fixé et analytique de $y \in B_y$ pour tout $x \in B_x$ fixé. On a $|f| \leqslant 1$ dans $B_x \times B_y$, pourtant $f(x\,;\,y)$ n'est pas analytique de l'ensemble des variables x, y au voisinage de $x = 0$, $y = 0$ de l'espace $\mathbb{R}^{p+q} = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$.

1 . 2 Néanmoins dans le cas réel on peut énoncer un théorème analogue à celui de Hartogs pour une certaine classe de fonctions réelles [8] et particulièrement pour la classe des fonctions $f(x_1, \ldots, x_p\,;\,y_1, \ldots, y_q)$ séparément harmoniques en $x = (x_1, \ldots, x_p)$ et en $y = (y_1, \ldots, y_q)$ dans un domaine $D = D_x \times D_y$, $D_x \subset \mathbb{R}^p$, $D_y \subset \mathbb{R}^q$.

On s'intéressera ici tout particulièrement à cette dernière classe de fonctions, introduite dans [2]. Rappelons que depuis le mémoire [2] la théorie des fonctions doublement harmoniques (resp. doublement sous harmoniques) a eu des développements fort intéressants notamment par M. M. Cairoli [5] et J. B. Walsh [11] dans le cadre de la théorie des probabilités et par K. Gowrisankaran [7] dans le cadre de la théorie axiomatique de Brelot.

1 . 3 Le but de cet exposé est la démonstration du théorème suivant, (qui entraîne celui de Hartogs complexe) où les fonctions harmoniques considérées sont celles de tout le monde.

<u>Théorème 1</u> - Une fonction

$$f(x\,;\,y\,;\,\ldots\,;\,w) = f(x_1, \ldots, x_p\,;\,y_1, \ldots, y_q\,;\,\ldots\,;\,w_1, \ldots, w_m)$$

définie dans le domaine

$$D = D_x \times D_y \times \ldots \times D_w \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \ldots \times \mathbb{R}^m$$

et séparément harmonique par rapport à chaque groupe de variables x ; y ... w les autres groupes de variables étant fixés, est harmonique de l'ensemble des variables $x_1, \ldots x_p$; $y_1, \ldots y_q$;... ; $w_1, \ldots, w_m$

Remarquons que, sous l'hypothèse supplémentaire : $|f|$ est bornée sur tout compact de D ; le théorème 1 est une conséquence directe de l'énoncé en vertu duquel une fonction $f(x ; y ; \ldots ; w)$ bornée supérieurement sur tout compact de D et sous-harmonique par rapport à chaque groupe de variables x ; y ; ... ; w séparément, est sous-harmonique de l'ensemble des variables ([2], Pour une généralisation voir [5]).

(Notons en passant qu'il est souhaitable d'étudier si dans ce dernier énoncé on peut se passer de l'hypothèse "bornée supérieurement sur tout compact". Signalons que cette condition peut être remplacée sans difficulté par "majorée sur tout compact par une fonction localement sommable" [1] .) La démonstration du théorème 1 sera faite en considérant $\mathbb{R}^p$ comme un sous ensemble de $\mathbb{C}^p$ et en s'appuyant sur un résultat de P. Lelong [8] . On peut sans restreindre la généralité se contenter de deux groupes de variables $x = (x_1, \ldots, x_p)$; $y = (y_1, \ldots y_q)$ et supposer que D est le produit des boules $B_x \subset \mathbb{R}^p$, $B_y \subset \mathbb{R}^q$ $(p \geqslant 2,\ q \geqslant 2)$.

§ 2 . Proposition 1 [6] . Soit $U_t(x)$, $a < t < b$, une famille de fonctions sous-médianes (1) dans un domaine D de $\mathbb{R}^p$, uniformément majorée sur tout compact de D. S'il existe une fonction continue $f(x)$ dans D telle que

$$\limsup_{t \to b} U_t(x) \leqslant f(x)$$

---

(1) La proposition est encore vraie pour la classe C_α de fonctions $V(x)$ vérifiant :

(i) $V(x)$ sommable sur tout compact de D

(ii) En tout point $x \in D$, $V(x) \leqslant A(V, x, r) + \alpha(r)$

où $\alpha(r)$ est une fonction positive définie pour $0 < r < r_0$ non décroissante et tendant vers zéro avec r. Pour $\alpha(r) = 0$, C_α est la classe de fonctions sous-médianes. Remarquons que si $f(x) = $ cte la proposition est dûe à Hartogs.

alors à tout couple (K, ε) où K est un compact de D et $\varepsilon > 0$ un nombre arbitrairement petit, correspond $t_o(\varepsilon, K)$ tel que

$$U_t(x) \leq f(x) + \varepsilon \quad \text{pour tout } x \in K \quad \text{pour tout } t > t_o(\varepsilon, K)$$

Démonstration : Soit t_n une suite croissante de nombres tendant vers b. On a

$$U(x) = \limsup_{t \to b} U_t(x) = \lim_{n \to \infty} \left[\sup_{t > t_n} U_t(x) \right]$$

Posons $\varphi_n(x) = \sup_{t > t_n} U_t(x)$.

$\varphi_n(x)$, étant l'enveloppe supérieure d'une famille de fonctions sous médianes majorée sur tout compact, est sous-médiane. Si $U^*(x)$ est la régularisée supérieure de $U(x)$: ($U^*(x)$ = reg. sup $U(x)$; plus petite fonction s. c. sup^t majorant $U(x)$) on aura :

(1) $$U^*(x) = \lim_{n \to \infty} \varphi_n^*(x) \leqslant f(x) \qquad (\varphi_n^*(x) = \text{reg. sup } \varphi_n(x))$$

Rappelons que $U^*(x)$ est sous-harmonique et que $U^*(x) = \lim_{r \to 0} A(U; x; r)$ où A est la moyenne spatiale de U sur la boule $B(x, r) \subset D$.

L'inégalité (1) résulte du fait que f est continue et que $U^*(x)$ est l'enveloppe inférieure des fonctions continues majorant $U(x)$.

Soit pour (K, ε) donné :

$$e_n = \left\{ x \in K \mid \varphi_n^*(x) - f(x) \geqslant \varepsilon > 0 \right\} \qquad n = 1, 2 \ldots$$

e_n est fermé en vertu de la semi-continuité supérieure de $\varphi_n^*(x) - f(x)$, et on a $e_{n+1} \subset e_n$ $n = 1, 2, \ldots$. D'après (1), $\bigcap_n e_n = \emptyset$. Donc, à partir d'une certaine valeur n_o de n, les e_n sont vides, c'est à dire pour $t > t_{n_o} = t_o(\varepsilon, K)$ on a :

$$U_t(x) \leqslant \varphi_n^*(x) < f(x) + \varepsilon \qquad t > t_o(\varepsilon, K), \ x \in K.$$

Remarque : La proposition est vraie si on considère une suite de fonctions sous harmoniques.

Remarque : Si $U(x) = -\infty$, la convergence des $U_t(x)$ vers $-\infty$ est uniforme sur tout compact.

2, 1 - Rappels sur les fonctions plurisous harmoniques [9]

Une fonction $V(X_1, \ldots, X_p) = V(X)$ à valeurs réelles définie dans un domaine D de $\mathbb{C}^p$ est dite plurisous harmonique si elle vérifie :

(i) $-\infty \leq V < \infty$, V bornée supérieurement sur tout compact de D. V non identiquement $-\infty$.

(ii) si $\pi : X_k = X_k^o + a_k u$ $\quad k = 1, \ldots, n$, u complexe

est une droite complexe, la restriction de V à chaque composante connexe de $D \cap \pi$ est une fonction sous harmonique ou la constante $-\infty$.

a) Une fonction plurisous-harmonique $V(X) = V(x_1 + i x'_1, \ldots, x_p + i x'_p)$, est semi-continue supérieurement et est sous-harmonique des variables réelles $(x_1, x'_1, \ldots x_p, x'_p)$ dans D considéré comme un domaine de $\mathbb{R}^{2p}$.

Appelons P la classe de fonctions plurisous-harmoniques, dans $D \subset \mathbb{C}^p$, S la classe des fonctions sous-harmoniques dans D considéré comme un domaine de $\mathbb{R}^{2p}$ et $S_{x,y}$ la classe des fonctions $V(x_1 \ldots, x_p ; y_1, \ldots, y_p)$ qui sont séparément sous-harmoniques en x et en y dans D et majorées sur tout compact. Alors

$$P \subset S_{x,y} \subset S$$

b) Si V_t est une famille de fonctions plurisous harmoniques dans D uniformément majorées sur tout compact de D, $W = \sup_t V_t$ a pour régularisée supérieure W^* une fonction plurisous harmonique.

Plus généralement désignons par (M) la classe des fonctions $V(X_1, \dots, X_p)$ définies dans un domaine D de $\mathbb{C}^p$, contenant : toutes les fonctions plurisous harmoniques dans D ; l'enveloppe supérieure de toute famille telle que V_t ; ainsi que la limite supérieure lorsque $t \to b$ de toute famille V_t de fonctions plurisous harmoniques uniformément majorées sur tout compact de D. Si $W \in (M)$, la régularisée W^* de W est plurisous harmonique et

$$e = \left\{ X \in D \;\middle|\; W_{(X)} < W^*(X) \right\}$$

ne peut contenir un ensemble de mesure positive de $\mathbb{R}^p$.

<u>Proposition 2 [8]</u>. Soit $V_t(X)$, $a < t < b$, $X_j = x_j + i\, x'_j$

une famille de fonctions plurisous harmoniques (ou plus généralement de la classe (M) dans $\hat{D} \subset \mathbb{C}^p$, uniformément majorée sur tout compact de $\hat{D}$. Si $D = \hat{D} \cap \mathbb{R}^p$ est un domaine non vide de $\mathbb{R}^p$ et s'il existe une fonction continue $g(X) = g(X_1, .. X_p)$ dans $\hat{D}$ à valeurs réelles et telle que :

$$(2) \qquad W(x) = \limsup_{t \to b} V_t(x_1, \dots, x_p) \leqslant g(x_1, \dots, x_p) \text{ pour } x \in D$$

alors à tout compact K de D et à tout $\varepsilon > 0$, correspond un $t_0(\varepsilon, K)$ tel qu'on ait :

$$V_t(x) \leqslant g(x) + \varepsilon \text{ pour tout } x \in K, \text{ pour tout } t > t_0(\varepsilon, K)$$

La proposition (2) n'est pas une conséquence directe de la proposition 1. En effet, si, V(X) est plurisous harmonique (ou de la classe (M)) la fonction V (x) restriction de V à D n'est pas en général sous harmonique, ni même sous médiane.

Remarquons que dans la démonstration de la proposition 2 on peut se contenter de traiter le cas où $V_t(X)$ est plurisous harmonique, car si, $V_t(X)$ est de la classe (M) et V_t^* sa régularisée supérieure,

$$\limsup_{t \to b} V_t(x) \leqslant g(x) \Rightarrow \limsup_{t \to b} V_t^*(x) \leqslant g(x) ;$$

Pour les détails voir [8].

Démonstration de la proposition 2 (V_t étant supposée plurisous harmonique)

Avec les mêmes notations que dans l'énoncé 2, on a (en considérant $\mathbb{R}^p$ comme un sous-espace de $\mathbb{C}^p$) :

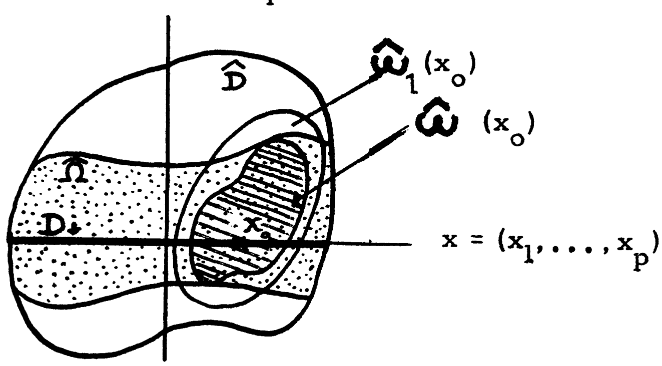
Lemme 1 - Soit $W^*(X) = W^*(X_1, \dots, X_p)$ la régularisée supérieure de

$$W(X) = \limsup_{t \to b} V_t(X_1, \dots, X_p)$$

Pour tout $\varepsilon_1 > o$; il existe un voisinage ouvert $\hat{\Omega}$ de D dans C^p, pour la topologie de $\mathbb{C}^p$ tel que :

$$D \subset \hat{\Omega} \subset \hat{D}$$

$$W(x) \leqslant g(x_1, \dots x_p) \implies W^*(X) < g(X_1, \dots, X_p) + \varepsilon_1, \text{ pour tout } X \in \hat{\Omega}$$



En effet, soit $X_o = x_o \in$ D. On a par hypothèse $W(x_o) \leqslant g(x_o)$ donc,

$$W(x_o) < g(x_o) + \frac{\varepsilon_1}{2} \quad \text{et} \quad W^*(x_o) < g(x_o) + \frac{\varepsilon_1}{2}$$

$W^*(X)$ étant semi-continue supérieurement dans $\hat{D}$, il existe dans $\mathbb{C}^p$ un voisinage ouvert $\hat{\omega}_1(x_o) \subset \hat{D}$ tel que :

(3) $$W^*(X) < g(x_o) + \frac{\varepsilon_1}{2} \quad ; \text{ pour tout } X \in \hat{\omega}_1(x_o).$$

Mais g (X) étant continue dans $\hat{D}$, il existe dans $\mathbb{C}^p$ un voisinage ouvert $\hat{\omega}(x_o) \subset \hat{\omega}_1(x_o)$ tel que $g(x_o) < g(X) + \frac{\varepsilon_1}{2}$ pour tout $X \in \hat{\omega}(x_o)$. Dans $\hat{\omega}(x_o)$ on aura en vertu de (3)

$$W(X) \leqslant W^*(X) < g(X) + \varepsilon_1 \text{ , pour tout } X \in \hat{\omega}(x_o)$$

l'ouvert $\hat{\Omega} = \bigcup_{x_o \in D} \hat{\omega}(x_o)$ répond au lemme 1.

§ 3 . Cellule d'harmonicité [10]

Soit D un domaine borné de $\mathbb{R}^p$ considéré comme un sous ensemble de $\mathbb{C}^p = \mathbb{R}^p(x) \times \mathbb{R}^p(x')$. Soit ∂D la frontière de D. A tout $\xi \in \partial D$ associons le cône isotrope

$$\Gamma_\xi = \left\{ X = (X_1, \dots, X_n) \,\middle|\, \sum_{j=1}^{p} | X_j - \xi_j |^2 = 0 \right\} \qquad (X_j = x_j + i\, x'_j)$$

soit :

$$\Lambda = \bigcup_{\xi \in \partial D} \Gamma_\xi$$

L'ensemble $C^p \setminus \Lambda$ est ouvert, en effet, ∂D est localement compact, il en est de même Λ dans $\mathbb{C}^p$. On a

$$\Lambda \cap \mathbb{R}^p = \partial D$$

Donc, D ne coupe pas Λ et appartient à une même composante connexe $\mathcal{H}(D)$ de $\mathbb{C}^p \setminus \Lambda$:

<u>Définition</u> : La composante connexe $\mathcal{H}(D)$ contenant D de l'ouvert $\mathbb{C}^p \setminus \Lambda$ s'appelle la cellule d'harmonicité de D. Cette terminologie se justifie par l'énoncé suivant :

<u>Proposition 4</u>. Si $U(x_1, \dots, x_p)$ est harmonique dans $D \subset \mathbb{R}^p$

$U(X_1,\ldots,X_p)$ $(X_j = x_j + i\,x'_j)$ est holomorphe [2] dans la cellule d'harmonicité $\mathcal{H}(D)$ de D. A tout compact $K \subset \mathcal{H}(D)$ correspond un nombre $\mathcal{C}(K) > 0$ ne dépendant que de K et de D tel que :

(4) $$U(x_1,\ldots,x_p) \leqslant M_1 \text{ pour } (x_1,\ldots,x_p) \in D \Rightarrow |U(X_1,\ldots X_p)| \leqslant M_1 \left[1 + \mathcal{C}(K)\right], \; X \in K$$

Pour la proposition 4 nous renvoyons à [10] . Signalons seulement que pour obtenir $U(X_1,\ldots X_p)$ on part de la représentation classique des fonctions harmoniques dans D :

$$U(x) = k_p \int_{\xi \in \partial D,\; x \in D} \left[U(\xi)\frac{\partial h(x,\xi)}{\partial n_i} - h(x,\xi)\frac{\partial U(\xi)}{\partial n_i}\right] d\sigma(\xi)$$

où

$$h(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{\left[\sum_{j=1}^{p}(x_j-\xi_j)^2\right]^{\frac{p-2}{2}}} & \text{si } p \geqslant 3 \\ -\dfrac{1}{2}\operatorname{Log}\sum_{k=1}^{p}(x_k-\xi)^2 & \text{si } p = 2 \end{cases}$$

k_p est une constante numérique, ∂n_i étant la dérivée selon la normale intérieure.

Le noyau $h(X,\xi)$ qu'on obtient à partir de $h(x,\xi)$, en remplaçant les variables réelles x_j par les variables complexes X_j, est holomorphe hors du cône isotrope Γ_ξ. La fonction $U(X_1,\ldots,X_p) = U(X)$ est égale à :

$$U(X) = k_p \int_{\xi \in \partial D,\; X \in \mathcal{H}(D)} \left[U(\xi)\frac{\partial h(X,\xi)}{\partial n_i} - h(X,\xi)\frac{\partial U(\xi)}{\partial n_i}\right] d\sigma(\xi).$$

Remarquons aussi que la majoration (4) est un cas particulier d'une majoration valable pour les fonctions polyharmoniques [10] .

---

(2) Rappelons que de manière générale, si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$, pour toute fonction analytique réelle f dans Ω, il existe un ouvert $\hat{\Omega}_f$ de $\mathbb{C}^n$ avec $\hat{\Omega}_f \cap \mathbb{R}^n = \Omega$ et une fonction holomorphe F dans $\hat{\Omega}_f$ telle que $F|\Omega = f$.

§ 4 . Démonstration du théorème 1.

Proposition 4 [2] Posons $D = B_x(0, R) \times B_y(0, R') \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ où B_x est la boule de centre 0 et de rayon R, B_y la boule analogue dans $\mathbb{R}^q$.
Soit :

$$V : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto V(x, y)$$

assujettie aux conditions suivantes :

(i) Pour y fixé, $V(x, y)$ est harmonique de $x \in B_x(0,R)$

(ii) Pour x fixé, $V(x, y)$ est harmonique de $y \in B_y(0,R')$

(iii) Il existe une boule $B_y(0,\rho) \subset B_y(0,R')$ telle que $V(x,y)$ soit bornée en module sur tout compact de $B_x(0,R) \times B_y(0,\rho)$.

Dans ces conditions $V(x,y)$ est harmonique de l'ensemble des variables $(x ; y)$ dans $B_x(0,R) \times B_y(0,R')$.

Démonstration : Il suffit de montrer que $|V(x,y)|$ est borné sur tout compact de $B_x(0,R) \times B_y(0,R')$. Pour x fixé dans $B_x(0,R)$, $V(x,y)$, en tant que fonction harmonique de y, se développe de façon unique selon :

$$(5) \qquad V(x,y) = \sum_{s=0}^{\infty} A_s(x, \vec{\varphi}) \, \|y\|^s$$

où $\vec{\varphi}$ est le vecteur unitaire de $\mathbb{R}^q$ porté par $\vec{0y}$ et $\|y\|^2 = y_1^2 + \dots + y_q^2$, Les fonctions $A_s(x, \vec{\varphi}) \, \|y\|^s$ pour x fixé sont des polynômes harmoniques homogènes en $y_1, \dots, y_q$. La série $\sum_{s=0}^{\infty} \sup_{\varphi} |A_s(x, \vec{\varphi})| \, \|y\|^s$ a un rayon de convergence $r(x) \geq R'$ [4].

Si on part de l'intégrale de Poisson de $B_y(0,R'')$, $R'' < R'$, pour obtenir (5) on aura (a désignant un point courant de la frontière de $B_y(0, 1)$ et $\sigma_q(1)$ la mesure - aire de $\partial B_y(0, 1)$):

$$A_s(x,\vec{\varphi}) = \frac{1}{\sigma_q(1)\rho_1^s} \int V(x, \rho_1 a) \left[P_s^{(q)}(\cos\theta) - P_{s-2}^{(q)}(\cos\theta)\right] d\sigma_q(a)$$
$$s \geqslant 2$$

(6) $$A_1(x,\vec{\varphi}) = \frac{q}{\sigma_q(1)\rho_1} \int V(x, \rho_1 a) \cos\theta \; d\sigma_q(a)$$

$$A_o(x,\vec{\varphi}) = \frac{1}{\sigma_q(1)} \int V(x, \rho_1 a)\, d\sigma_q(a)$$

avec $\rho_1 < R'$ arbitraire (d'après l'unicité de (5)), θ étant l'angle des vecteurs $\vec{0a}$ et $\vec{0y}$. Les fonctions $P_s^{(q)}(\cos\theta)$ sont les polynômes de Gegenbauer définis par :

$$(1 - 2t\cos\theta + t^2)^{-\frac{q}{2}} = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} P_s^q(\cos\theta)\, t^s \qquad 0 \leqslant t < 1$$

Rappelons que

(7) $$\left|P_s^{(q)}(\cos\theta)\right| \leqslant P_s^{(q)}(1) = \frac{(q+s-1)!}{(q-1)!\,s!}$$

Si dans (6) on choisit $\rho_1 < \rho$, $|V(x, y)|$ sera borné sur tout compact de $B_x(0, R) \times B_y(0, \rho)$ par hypothèse, et par conséquent sera harmonique de l'ensemble des variables (x,y) dans ce dernier domaine. Il en résulte que les coefficients $A_s(x, \vec{\varphi})$ seront pour $\vec{\varphi}$ fixé, harmoniques de $x \in B_x(o,R)$ et les $A_s(x, \vec{\varphi})\,\|y\|^s$ harmoniques de l'ensemble des variables x, y dans $B_x(o,R) \times B_y(0,R')$.

Choisissons une fois pour toutes $\rho_1 < \rho$; soit R_1 tel que $\overline{B_x(0,R_1)} \subset B_x(0,R)$, R_1 arbitrairement près de R. Si :

$$m(R_1) = m(R_1, \rho_1) = \sup |V(x,y)| \,, \quad (x,y) \in B_x(0,R_1) \times B_y(0,\rho_1) \,,$$

$m(R_1)$ est fini, et on aura en vertu de (6) et (7).

$$|A_s(x, \vec{\varphi})| \leqslant \frac{m(R_1)}{\rho_1^s} \left[|P_s^{(q)}(1)| + |P_{s-2}^{(q)}(1)| \right]$$

$$\leqslant \frac{m(R_1)}{\rho_1^s}\left[\frac{(q+s-1)\,!}{(q-1)\,!\;s\,!} + \frac{(q+s-3)\,!}{(q-1)\,!\;(s-2)\,!}\right]$$

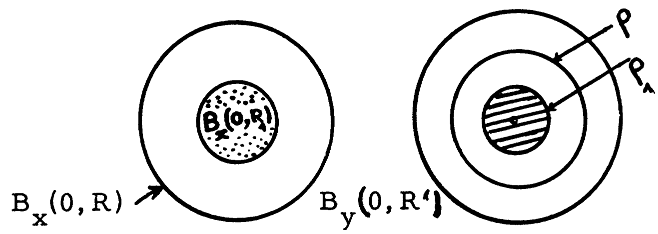
$s \geqslant 2$, pour tout $x \in B_x(0\ ,\ R_1)$ et pour tout $\vec{\varphi}$.

$P_s^{(q)}(1)$ est croissante de s et $\lim\limits_{s\to\infty} \sqrt[s]{\left|P_s^{(q)}(1)\right|} = 1$ (en effet, $\dfrac{P_{s+1}^{(q)}(1)}{P_s^{(q)}(1)} \to 1,\ s\to\infty$)

Il en résulte qu'il existe une constante $m\ (R_1,\ \rho_1)$ ne dépendant que de R_1 et ρ_1 telle que

(8) $\left| A_s\ (x,\ \vec{\varphi}\,)\right| \leqslant m^s$, pour tout $\vec{\varphi}$ et tout $x \in B_x\ (0, R_1)$.

Revenons à la série (5). On a



(9) $\limsup\limits_{s\to\infty}\left[\frac{1}{s}\ \ \text{Log}\ \sup\limits_{\varphi}\left|A_s\ (x,\vec{\varphi}\,)\right|\right] = -\ \text{Log}\ r\ (x) \leqslant -\ \text{Log}\ R'$, pour $x \in B_x(0,R)$

D'après (8) et (4) les fonctions plurisousharmoniques

$$\frac{1}{s}\,\text{Log}\left|A_s\ (X,\ \vec{\varphi}\ )\right| \qquad s = 1,2,\ldots \qquad X = (X_1,\ldots,X_p)$$
$$X_j = x_j + i\ x'_j$$

sont majorées uniformément sur tout compact de la cellule d'harmonicité de $B_x\ (0, R_1)$ par des constantes ne dépendant que de K, ρ_1 ,R_1; pour chaque s

$$\sup_{\varphi} \frac{1}{s}\ \ \text{Log}\left| A_s\ (X, \vec{\varphi}\,)\right| \qquad s = 1,2,\ldots$$

est de la classe (M) . D'après l'inégalité (9) et la proposition 2, à tout compact K de $B_x\ (0, R_1)$ et à tout $\varepsilon >$ o correspond $s_o\ (\varepsilon\ , K)$ tel que

$$\sup_{\varphi} \frac{1}{s}\ \text{Log}\ \left|A_s\ (x, \varphi\ )\right| \leqslant -\ \text{Log}\ R' + \varepsilon\ ,$$

pour tout $x \in$ K et pour tout $s \geqslant s_o$ Donc :

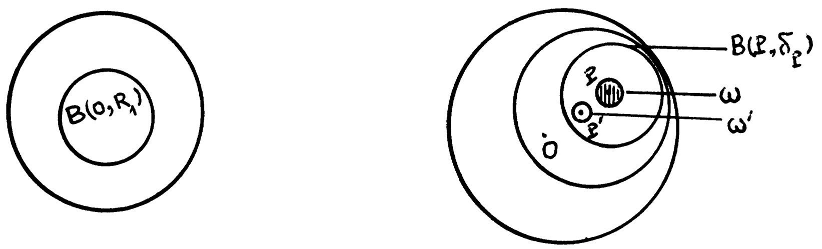
$$|A_s(x,\varphi)|\ \|y\|^s \leqslant \left(\frac{e^{\varepsilon}}{R'}\right)\|y\|^s \quad \text{pour } x\in K, \text{ et pour } s \geqslant s_o(\varepsilon, K)$$

Il en résulte que la série $\sum_{s \geqslant s_o} A_s(x,\varphi)\ \|y\|^s$

converge absolument pour tout $x\in K$ et $\|y\| < R'$; par conséquent $|V(x,y)|$ est bornée sur tout compact de $B_x(0,R_1) \times B_y(0,R')$, R_1 étant arbitrairement voisin de R. D'où l'harmonicité de V(x, y) par rapport à l'ensemble des variables (x, y) dans $B_x(0,R) \times B_y(0,R')$.

Fin de la démonstration du théorème 1.

V (x, y) étant séparément continue dans $B_x(0,R)\times B_y(0,R')$ à toute boule $\overline{B_x(0,R_1)} \subset B_x(0,R)$ correspond un ouvert $\omega \subset B_y(0,R')$ (par exemple une boule ouverte de centre P) telle que : $|V(x,y)|$ soit bornée dans $B_x(0,R_1)\times\omega$ (Propriété de Baire, V. par ex. [3]).



$B_x(0,R)$ $B_y(0,R')$

Il en résulte que V (x, y) est harmonique de l'ensemble des variables dans $B_x(0,R_1)\times\omega$. Soit $\delta_P = \delta(P, \partial B_y)$ la distance minimale de P à $\partial B_y(0,R')$. D'après la proposition 4, V (x, y) est alors harmonique de l'ensemble des (x, y) dans $B_x(0,R_1)\times B_y(P,\delta_P)$. Si $0\in B_y(P,\delta_P)$ la proposition 4 achève la démonstration. Supposons $0 \notin B_y(P,\delta_P)$. Soit $P'\in B_y(P,\delta_P)$, $|0P'| = R' - 2\delta_P + \varepsilon$ où $\varepsilon > o$ est arbitrairement petit. La boule $\omega' = B_y(P', \frac{\varepsilon}{2})$ étant contenue dans $B_y(P,\delta_P)$, $|V(x,y)|$ est borné dans $B_x(0,R_1)\times\omega'$, elle sera donc harmonique de l'ensemble des variables dans $B_x(0,R_1)\times B_y(P',\delta_{P'})$ En poursuivant ce procédé on arrivera au cas de la proposition 4. Le théorème est ainsi démontré dans le cas de produit de deux boules. Pour les domaines quelconques le théorème résultera facilement de celui-ci. Terminons en remarquant que la démonstration du théorème 1 sera considérablement simplifiée si on montre directement et par des considérations uniquement réelles l'énoncé suivant :

Soit $U_n(x_1, \ldots, x_p, \varphi)$ une suite de fonctions harmoniques dans $D \subset \mathbb{R}^p$ dépendant d'un paramètre φ (variant dans un ensemble e) et vérifiant :

(i) Il existe une constante m telle que

$$|U_n(x_1, \ldots, x_p, \varphi)| \leqslant m^n \qquad n = 1, 2, \ldots$$

pour tout $x \in D$ et pour tout $\varphi \in e$

(ii) $\limsup\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{n} \operatorname{Log} |U_n(x_1, \ldots, x_p \varphi)| \leqslant A = \text{cte}$

Alors à tout compact $K \subset D$ et à tout $\varepsilon > 0$ correspond $n_0(\varepsilon, K)$ ne dépendant que du couple (ε, K) et non de φ, telle que

$$\frac{1}{n} \operatorname{Log} |U_n(x_1, \ldots, x_p, \varphi)| \leqslant A + \varepsilon$$

pour tout $x \in K$, $\quad n > n_0(\varepsilon, K)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. ARSOVE.- On subharmonicity of doubly subharmonic functions. Proc. Amer. Math. Soc., 1966, vol.17.

[2] V.AVANISSIAN.- Fonctions plurisousharmoniques et fonctions doublement harmoniques. Ann. E.N.S., ~~1~~78, 1961.

[3] N.BOURBAKI.- Topologie générale, chap.IX.

[4] M.BRELOT .- Eléments de la théorie classique du potentiel . Centre de Doc. Universitaire, Paris, 3e éd., 1965.

[5] R.CAIROLI.- Produits de semigroupes de transition et produits de processus. Publ. ISUP, t.15, 1966.

[6] J.DENY et P.LELONG.- Etude des fonctions sousharmoniques dans un cône. Bull. Soc. M. France, 1947.

[7] K. GOWRISANKARAN.- Limites fines et fonctions doublement harmoniques. C.R.Acad.Sc., t.262, 1966, p.388.

[8] P. LELONG .- Fonctions plurisousharmoniques et fonctions analytiques de variables réelles. Ann. Inst. Fourier, t. 11, 1961.

[9] P. LELONG.- Fonctions plurisousharmoniques et formes différentielles positives. Coll. Sém. de Varenna (1963).

[10] P.LELONG .- Sur l'approximation des fonctions de plusieurs variables au moyen de fonctions polyharmoniques d'ordres croissants. C.R.Acad. Sc., 227, 1948, p.26.

[11] J.W.WALSH .- Probability and a Dirichlet problem for multiply superharmonic functions (thèse : Urbana, Illinois, 1966).