Michel Marias

Transformations canoniques linéaires dans les espaces de Hilbert

Séminaire Paul Krée, tome 4 (1977-1978), exp. nº 8, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=SPK_1977-1978__4__A9_0>

Séminaire P. KRÉE
(Equations aux équations partielles
en dimension infinie)
4e année, 1977-1978, n° 8, 13 p.

TRANSFORMATIONS CANONIQUES LINÉAIRES DANS LES ESPACES DE HILBERT

par Michel MARIAS (*)

Soit Z un espace de Hilbert complexe séparable avec conjugaison $z \longmapsto \bar{z}$, dont le produit scalaire est noté $\bar{z}z_1 = (z , \bar{z}_1)$. L'espace réel Z^r sous-jacent à Z est muni de la forme alternée $\varphi_-^r = 2i \operatorname{Im} \bar{z}z_1$ (respectivement quadratique $\varphi_+^r = 2 \operatorname{Re} \bar{z}z_1$). On note $TC_\epsilon(Z^r)$, $\epsilon = \pm$, le groupe des opérateurs linéaires continus g^r de Z^r conservant φ_ϵ^r, avec $\epsilon = -$ pour les bosons et $\epsilon = +$ pour les fermions. On pose, pour tout $\zeta = (\bar{z} , z') \in \bar{Z} \times Z$, $R(\zeta) = a(\bar{z}) + a^*(z')$, avec $a(\bar{z})$ et $a^*(z')$ les opérateurs d'annihilation et de création associés à $\bar{z}$ et z' qui opèrent dans la réalisation holomorphe $FH_\epsilon(\bar{Z})$ de l'espace de Fock ϵ-symétrique construit sur Z. L'application $z \longrightarrow (\bar{z} , z)$ identifie l'espace vectoriel Z^r réel sous-jacent à Z à un sous-espace de son complexifié $\bar{Z} \times Z$. Et tout opérateur linéaire continu g^r de Z^r est caractérisé par son complexifié g, opérateur linéaire continu de $\bar{Z} \times Z$. On dit que $g^r \in TC_\epsilon(Z^r)$ est implémentable par un opérateur unitaire $\hat{U}$ de $FH_\epsilon(\bar{Z})$ si l'on a $R(gZ)\hat{U} = \hat{U}R(Z)$ (les produits étant supposés définis). Il en est toujours ainsi si $\dim Z$ est fini [10], [2]. En dimension infinie, ce n'est plus le cas, et seulement les transformations canoniques linéaires (TCL) sont implémentables par un opérateur unitaire de l'espace de Fock et ont été étudiées jusqu'ici : Ce sont les transformations canoniques propres.

Pour étudier les TCL propres, on procède en général ainsi : On cherche le nouveau vecteur de vide et puis, éventuellement, l'opérateur unitaire d'implémentation. Ceci pose le problème de l'étude des TCL non propres [1], [12]. Nous étudions ces transformations en utilisant les triplets centrés sur l'espace de Fock construits dans [4], [6]. On trouve au § 2 les opérateurs $\hat{U}$ qui implémentent de telles transformations canoniques et les nouveaux vecteurs vides, c'est-à-dire les formes F_0 qui sont annihilées par tous les nouveaux annihilateurs. Au § 3 on montre comment ces nouveaux résultats permettent de retrouver très simplement la caractérisation [9], [10], [11], [12], ... des transformations canoniques propres. Ces résultats prolongent ceux de [7] qui concernaient seulement les TCL propres pour les fermions, ils ont été annoncés dans la note [8].

1. Préliminaires.

L'objet de ce paragraphe est de rappeler, dans un cas particulier, les résultats de [4], [5], [6] que nous utiliserons.

(*) Texte reçu en Mars 1979.

Michel MARIAS, Pavillon hellenique, 47-B boulevard Jourdan, 75014 PARIS.

Soit X un espace vectoriel sur un corps $\underset{\sim}{K}$ de caractéristique nulle. Un tenseur $t = \sum t_k \in \bigoplus_{k=0}^{\infty} (\circledast_k X)$ est dit ϵ-symétrique s'il est symétrique pour $\epsilon = -$ ou s'il est antisymétrique pour $\epsilon = +$. L'espace de tenseurs ϵ-symétriques sur X est noté $T_\epsilon(X)$. Le sous-espace des tenseurs ϵ-symétriques homogènes de degré k est noté $T_\epsilon^k(X)$. On a donc $T_\epsilon(X) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} T_\epsilon^k(X)$ et $T_\epsilon(X)$ est une algèbre pour le produit ϵ-symétrique.

Soient X et E deux espaces vectoriels sur $\underset{\sim}{K}$ et soit E' le dual algébrique de E. Le dual de $T_\epsilon^k(X) \otimes E$ est l'espace $\mathfrak{F}_\epsilon^k(X, E')$ des formes k-linéaires ϵ-symétriques à valeurs dans E'. Donc, le dual de $T_\epsilon(X) \otimes E$ est l'espace $\mathfrak{F}_\epsilon(X, E') = \prod_{k=0}^{\infty} \mathfrak{F}_\epsilon^k(X, E')$ des formes ϵ-symétriques sur X à valeurs dans E'. Un élément $f(x) \in \mathfrak{F}_\epsilon(X, E')$ s'écrit $f(x) = \sum f_k(x)$ avec $f_k \in \mathfrak{F}_\epsilon^k(X, E')$. Si $E = \underset{\sim}{K}$, on écrit simplement $\mathfrak{F}_\epsilon(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathfrak{F}_\epsilon^k(X)$.

Entre $T_\epsilon(X)$ et $\mathfrak{F}_\epsilon(X)$ on met la dualité suivante : Si $f = \sum f_k \in \mathfrak{F}_\epsilon(X)$ et $t = \sum t_k \in T_\epsilon(X)$, avec $t_k = x_{k_1} \dots x_{k_k}$,

(1.1) $$\langle f , t\rangle_{nat} = \sum_{k=0}^{\infty} k! \, \langle f_k , t_k\rangle_{k,nat} = \sum_{k=0}^{\infty} k! \, f_k(x_{k_1} \dots x_{k_k}) \, .$$

Cette dualité est appelée la dualité naturelle.

Soient X et X' deux espaces vectoriels en dualité. La notation $X'_\alpha \subset\subset X'$ signifie que X'_α est un sous-espace vectoriel de dimension finie de X'. Soit i_α (respectivement s_α) l'injection canonique de $X'_\alpha \subset X'$ (respectivement la projection canonique de X sur $X_\alpha = X/(X'_\alpha)^\perp$). La dualité entre X_α et X'_α est définie par $\langle s_\alpha x , \xi\rangle = \langle x , i_\alpha \xi\rangle$. L'image de l'injection canonique $T_\epsilon(X') \longrightarrow \mathfrak{F}_\epsilon(X)$ est notée $\mathfrak{F}_{\epsilon\text{-cyl}}(X)$, car chaque φ, dans cette image, est cylindrique, c'est-à-dire du type $\varphi(x) = \varphi_\alpha(s_\alpha x)$, avec $\varphi_\alpha \in \mathfrak{F}_\epsilon(X_\alpha)$.

(1.2) Formes sur un produit.

Soient X et Y deux espaces vectoriels sur $\underset{\sim}{K}$. On a

(1.3) $$T_\epsilon(X \times Y) \simeq T_\epsilon(X) \otimes T_\epsilon(Y) \, ,$$

donc $\mathfrak{F}_\epsilon(X \times Y)$ est isomorphe à l'espace vectoriel des formes bilinéaires sur $T_\epsilon(X) \times T_\epsilon(Y)$. Noter que si $f \in \mathfrak{F}_\epsilon(X)$, $g \in \mathfrak{F}_\epsilon(Y)$, $\varphi \in T_\epsilon(X)$ et $\psi \in T_\epsilon(Y)$, alors $\langle f(x)\, g(x) , \psi(\eta)\, \varphi(\xi)\rangle_{nat} = \langle f(x) , \psi(\eta)\rangle_{nat} \langle g(y)\, \varphi(\xi)\rangle_{nat}$.

(1.4) Exemples. - Soient X et X' deux espaces en dualité. La 2-forme ϵ-canonique sur $X \times X'$ est définie par la formule

(1.5) $$(X \times X') \times (X \times X') \xrightarrow{x\xi} \underset{\sim}{K}$$
$$(x , \xi) \; ; \; (x_1 , \xi_1) \longrightarrow 2^{-1}(\langle x , \xi_1\rangle - \epsilon\langle x_1 , \xi\rangle) \, .$$

On retrouve la forme symplectique usuelle si $\epsilon = +$, et la forme quadratique canonique usuelle si $\epsilon = -$. On définit l'exponentielle de cette 2-forme dans l'algèbre $\mathfrak{F}_\epsilon(X \times X')$ par

(1.6) $$\exp(x\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} (k!)^{-1} (x\xi)^k .$$

Noter qu'on retrouve l'exponentielle usuelle si $\epsilon = -$.

(1.7) Contraction sur les lettres duales.

Comme $\mathfrak{F}_\epsilon(X \times Y)$ est l'espace des formes bilinéaires sur $T_\epsilon(X) \times T_\epsilon(Y)$, on a une application bilinéaire canonique $\mathfrak{F}_\epsilon(X \times Y) \times T_\epsilon(Y) \longrightarrow \mathfrak{F}_\epsilon(X)$, notée $f(x,y)$, $t(\eta) \longmapsto \langle\langle f(x , y) , t(\eta)\rangle\rangle = \langle f(x , y) , t(\eta)\rangle_{nat}$. Par exemple, si $Y = X'$, $\forall\ t \in T_\epsilon(X')$, $\langle\langle \exp(xy) , t(\eta)\rangle\rangle = t^\vee(x)$, où $t \longrightarrow t^\vee$ désigne l'involution de $T_\epsilon(X')$ qui prolonge l'application $x_1 \dots x_k \longmapsto x_k \dots x_1$. Afin d'éviter ce retournement, on remplace dès lors la dualité $\langle\ ,\ \rangle_{nat}$ définie par (1.1) par la dualité retournée : Si $f = \sum f_n \in \mathfrak{F}_\epsilon(X)$, $t = \sum t_k \in T_\epsilon(X)$ et $t_k = x_{k1} \dots x_{kk}$,

(1.8) $$\langle f , t\rangle = \sum k!\ f_k(x_{kk} \dots x_{k1}) = \langle f , t^\vee\rangle_{nat} .$$

Dans ce cas, $\langle\langle \exp(xy) , t(\eta)\rangle\rangle = t(x)$.

(1.9) Opérateur de dérivation à gauche.

Soient X et X' en dualité séparante. Pour ψ fixé dans $T_\epsilon(X)$, l'opérateur de dérivation à gauche $f \longmapsto \psi(D)f$ dans $\mathfrak{F}_\epsilon(X)$ est défini comme étant le transposé de l'opérateur $\varphi \longrightarrow \varphi\psi$ de multiplication à droite par ψ dans l'algèbre $T_\epsilon(X)$. La dérivation à droite $f \longrightarrow f\psi(D)$ se définit en transposant l'opérateur linéaire $\varphi \longrightarrow \psi\varphi$ de $T_\epsilon(X)$. Dans le cas particulier où $\epsilon = -$, on a $f\psi(D) = \psi(D)f$, et l'opérateur $\psi(D)$ ainsi défini est l'opérateur de dérivation usuellement associé à ψ . Dans le cas particulier où $\epsilon = +$ et où X est de dimension finie, on retrouve les produits intérieurs de l'algèbre extérieure. Pour $\epsilon = \pm$, et $\psi = u \in X$, on écrit encore

$$u(D)f = \partial_u f = \langle\langle Df \circ u\rangle\rangle .$$

(1.10) Espace de Fock ϵ-symétrique et sa réalisation holomorphe.

Soit Z un espace de Hilbert complexe séparable avec conjugaison $z \longmapsto \bar{z}$. L'anti-espace $\bar{Z}$ de Z est l'espace de Hilbert suivant : Comme groupe additif, $\bar{Z}$ coïncide avec Z mais la multiplication d'un élément $\bar{z} \in \bar{Z}$ par un scalaire complexe λ est définie par $\lambda\bar{z} = \overline{\bar{\lambda}z} \neq \overline{\lambda z}$. $\bar{Z}$ est isomorphe au dual Z' de l'espace de Hilbert Z .

Pour tout $k \in \underset{\sim}{N}$, Z_ϵ^k désigne l'adhérence de $T_\epsilon^k(Z)$ dans $\widehat{\otimes}_{H\,k}\, Z$. Usuellement l'espace de Fock ϵ-symétrique sur Z est la somme hilbertienne $\bigoplus_{k=0}^{\infty} Z_\epsilon^k$. Ici, tout $t_k \in Z_\epsilon^k$ est identifié à la forme $f_k(\bar{z}) \in \mathfrak{F}_\epsilon^k(\bar{Z})$ définie par

(1.11) $$(\bar{z}_1 , \bar{z}_2 , \dots , \bar{z}_k) \longmapsto (z_1 z_2 \dots z_k , t_k)_k ,$$

où $(\ ,\ )_k$ désigne le produit scalaire dans l'espace Z_ϵ^k .

Donc, $Z_\epsilon^k \subset \mathfrak{F}_\epsilon^k(Z)$. La réalisation holomorphe $FH_\epsilon(\overline{Z})$ de l'espace de Fock ϵ-symétrique de Z est l'espace hilbertien des formes $f = \sum f_k \in \mathfrak{F}_\epsilon(\overline{Z})$ vérifiant la condition de norme

(1.12) $$\|f\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k!\ \|f_k\|^2 < +\infty \text{ , avec } f_k \in Z_\epsilon^k \text{ ,}$$

la norme de f_k étant prise dans Z_ϵ^k.

Le triplet centré sur $FH_\epsilon(\overline{Z})$ est $\mathfrak{F}_\epsilon \mathfrak{T} = (T_\epsilon(Z) \subset FH_\epsilon) \subset \mathfrak{F}_\epsilon(\overline{z}))$. On a une anti-dualité naturelle entre $T_\epsilon(\overline{Z})$ et $\mathfrak{F}_\epsilon(Z)$ qui prolonge le produit scalaire de $FH_\epsilon(\overline{Z})$ donné par

(1.13) $$\forall\ \Phi\ ,\ \Psi \in FH_\epsilon(\overline{Z})\ ,\quad (\Phi\ ,\ \Psi)_{nat} = k!\ (\Phi_k\ ,\ \Psi_k)_{nat}\ .$$

De manière à nous ramener à la dualité décrite par (1.8), on définit les bijections antilinéaires $t \longrightarrow t^*$: $T_\epsilon(\overline{Z}) \longrightarrow T_\epsilon(\overline{Z})$ et $f \longrightarrow f^*$: $\mathfrak{F}_\epsilon(Z) \longrightarrow \mathfrak{F}_\epsilon(\overline{Z})$, obtenues en composant le retournement des tenseurs et la conjugaison de $\overline{Z}$:

$$(z_1\ z_2 \cdots z_k)^* = \overline{z}_k\ \overline{z}_{k-1} \cdots \overline{z}_1 \quad \text{et} \quad f_k^*(\overline{z}_1 \cdots \overline{z}_n) = \overline{f(z_k \cdots z_1)}\ .$$

La dualité entre $T_\epsilon(\overline{Z})$ et $\mathfrak{F}_\epsilon(\overline{Z})$ est donnée par

(1.14) $$\forall\ f \in \mathfrak{F}_\epsilon(\overline{Z})\ ,\quad \forall\ t \in T(Z)\ ,\quad \langle f\ ,\ t^* \rangle = (t\ ,\ f)_{nat}\ .$$

Notation des multi-indices d'ordre infini. - Pour simplifier l'écriture, on suppose $d = \dim Z = +\infty$. Les coordonnées de tout $z \in Z$, par rapport à une base orthonormée, sont notées z_i. L'ensemble $J(-\ ,\ d)$ est l'ensemble des suites infinies d'entiers positifs $\alpha = (\alpha_1\ ,\ \ldots\ ,\ \alpha_n\ ,\ 0\ ,\ \ldots)$ nuls à partir d'un certain rang. On pose alors $\overline{z}^\alpha = \overline{z}_1^{\alpha_1}\ \overline{z}_2^{\alpha_2} \cdots \overline{z}_n^{\alpha_n}$; $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$. Toute partie finie α de $\{1\ ,\ 2\ ,\ \ldots\}$ est notée $\alpha = (\alpha_1\ ,\ \ldots\ ,\ \alpha_k)$, avec $1 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_k$, si $\alpha \neq \Phi$. On pose $|\alpha| = k$, si $\alpha \neq \Phi$, et $|\varphi| = 0$. L'ensemble de ces parties finies est noté $J(+\ ,\ d)$. Pour $\alpha \in J(+\ ,\ d)$, on pose

$$\overline{z}^\alpha = \overline{z}_{\alpha_1} \wedge \overline{z}_{\alpha_2} \wedge \cdots \wedge \overline{z}_{\alpha_k}\ ,\quad \overline{z}^\varphi = 1\ ,\ \text{et}\quad \alpha! = 1\ .$$

On rappelle que les formes $\overline{z}^\alpha/(\alpha!)^{1/2}$, $\alpha \in J(\epsilon\ ,\ d)$, forment une base orthonormée de $FH_\epsilon(\overline{Z})$.

(1.15) LEMME. - Soit $A \in L(\overline{Z}\ ,\ Z)$. $\forall\ z \in Z$, posons $\overline{A}z = \overline{A\overline{z}}$ et supposons que $\overline{A}^* = -A$. Pour que la forme anti-symétrique $F = \exp f$, avec

$$f(\overline{z}_1\ ,\ \overline{z}_2) = 2^{-1}(z_1\ ,\ A\overline{z}_2)$$

appartienne à $FH_+(\overline{Z})$, il faut et il suffit que A soit un opérateur de Hilbert-Schmidt.

Preuve. - Supposons que $\exp f \in FH_+(\overline{Z})$, donc $f \in FH_+^2(\overline{Z})$. En utilisant l'isomorphisme $FH_+^2(\overline{Z}) \simeq Z_+^2 \subset HS(\overline{Z}\ ,\ Z)$, on déduit que A est de Hilbert-Schmidt.

Inversement, si A est de Hilbert-Schmidt, on utilise le fait [5] que $\varphi \in \mathfrak{F}_+(\overline{Z})$ appartient à $FH_+(\overline{Z})$ si, et seulement si, $\sup_{Z_\alpha \subset\subset Z} \|\varphi_\alpha\|^2 < +\infty$, avec $\varphi_\alpha = \varphi|_{\overline{Z}_\alpha}$.

En posant, $\forall\ \alpha$, $A_\alpha = i_\alpha^* A \bar{i}_\alpha$, on trouve que la restriction f_α de f à Z_α est telle que, $\forall\ z_1, z_2 \in Z_\alpha$, $f_\alpha(\bar{z}_1, \bar{z}_2) = 2^{-1}(z_1, A_\alpha z_2)$. Vu [2] (§ 7, n° 3, proposition 6), il existe une base orthonormée $(\bar{b}_i)$ de $\overline{Z}_\alpha$ par rapport à laquelle la matrice de f_α est de la forme

(1.16)
$$M_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -a_2 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix},$$

où les a_i sont positifs. Vu la définition de A_α et la relation

(1.17)
$$\forall\ z_1, z_2 \in Z_\alpha, \quad (z_1, Az_2) = (z_1, A_\alpha z_2),$$

on déduit que $A_\alpha \in L(\overline{Z}_\alpha, Z_\alpha)$ a pour matrice M_α par rapport à la base $(\bar{b}_i)$. On prouve alors

(1.18)
$$f_\alpha = a_1\, \bar{z}_1 \wedge \bar{z}_2 + a_2\, \bar{z}_3 \wedge \bar{z}_4 + \cdots + a_p\, \bar{z}_{2p-1} \wedge \bar{z}_{2p}.$$

Donc

$$F_\alpha = F|_{\overline{Z}_\alpha} = \exp f_\alpha = (\exp(a_1\, \bar{z}_1 \wedge \bar{z}_2)) \wedge \cdots \wedge (\exp(a_p\, \bar{z}_{2p-1} \wedge \cdots \wedge \bar{z}_p))$$
$$= (1 + a_1\, \bar{z}_1 \wedge \bar{z}_2) \wedge \cdots \wedge (1 + a_p\, \bar{z}_{2p-1} \wedge \bar{z}_{2p}),$$

et

$$\|F_\alpha\|^2 = \prod_{\ell=1}^{p} \|1 + a_\ell\, \bar{z}_{2\ell-1} \wedge \bar{z}_{2\ell}\|^2 = \prod_{\ell=1}^{p} (a_\ell^2 + 1).$$

Si, alors $\|A\|_2$ désigne la norme de Hilbert-Schmidt d'un opérateur A, comme $A_\alpha = i_\alpha^* A \bar{i}_\alpha$, on déduit que $\|A_\alpha\|_2 \leq \|A\|_2$, $\forall\ Z_\alpha \subset\subset Z$. Par ailleurs, en utilisant l'inégalité $\operatorname{Log}(1 + x^2) \leq x^2$, on trouve, $\forall\ x$,

(1.19)
$$2 \operatorname{Log} \|F_\alpha\|^2 \leq 2 \sum_{\ell=0}^{p} a_\ell^2 = \|A_\alpha\|_2^2 \leq \|A\|_2^2.$$

Par conséquent, les normes des restrictions F_α de F à tous les sous-espaces vectoriels de dimension finie Z_α de Z sont bornées par la même constante. Donc, $F \in FH_+(\overline{Z})$.

(1.20) <u>Noyaux et symboles des opérateurs linéaires.</u>

Désignons par Op l'espace des applications linéaires de $T_\epsilon(Z)$ à valeurs dans $\mathfrak{F}_\epsilon(\overline{Z})$. Comme $\mathfrak{F}_\epsilon(\overline{Z})$ est le dual de $T_\epsilon(\overline{Z})$, on a

(1.21) $$\mathrm{Op} \simeq L(T_\epsilon(Z)\ ,\ T_\epsilon(\overline{Z})') \simeq (T_\epsilon(\overline{Z}) \otimes T_\epsilon(Z))' \simeq \mathfrak{F}_\epsilon(\overline{Z} \times Z)\ .$$

La forme ϵ-symétrique sur $\overline{Z} \times Z$ associée à $\hat{Q} \in \mathrm{Op}$ par cet isomorphisme est notée $\tilde{Q}(\overline{z}\ ,\ z')$ et elle est appelée le noyau de $\hat{Q}$; on a

(1.22) $$\forall\ \Phi \in T(Z)\ ,\quad (\hat{Q}(\Phi))(\overline{z}) = \langle\langle\ \tilde{Q}(\overline{z}\ ,\ z')\ ,\ \Phi(\overline{z}')\rangle\rangle\ ,$$

avec contraction sur les lettres duales z' et $\overline{z}'$.

Le symbole de $\hat{Q} \in \mathrm{Op}$ est la forme ϵ-symétrique sur $\overline{Z} \times Z$ suivante

(1.23) $$Q(\overline{z}\ ,\ z') = \tilde{Q}(\overline{z}\ ,\ z')\ \exp(-\ \overline{z}z') = \exp(-\ \overline{z}z')\ \tilde{Q}(\overline{z}\ ,\ z')\ .$$

Pour calculer le noyau d'un opérateur $\hat{Q} \in \mathrm{Op}$, on utilise les méthodes de [6], à savoir les théorèmes (3.10) et (3.15).

(1.24) Exemples. - Pour tout $u \in Z$, l'opérateur de création associé à u , $a^*(u)$, est défini par $a^*(u)(\psi(\overline{z})) = u\psi(\overline{z})$, et c'est un opérateur de $T_\epsilon(\overline{Z})$ à valeurs dans $T_\epsilon(\overline{Z})$ et de $\mathfrak{F}_\epsilon(\overline{Z})$ dans $\mathfrak{F}_\epsilon(\overline{Z})$.

Son adjoint $a(\overline{u})$ est, par définition, l'annihilateur associé au point $\overline{u}$, et il est défini par

$$a(\overline{u})\ f_k(\overline{z}_1\ ,\ \dots\ ,\ \overline{z}_k) = k\ f_k(\overline{u}\ ,\ \overline{z}_1\ ,\ \dots\ ,\ \overline{z}_{k-1}) = \partial_{\overline{u}}\ f_k(\overline{z}_1\ ,\ \dots\ ,\ \overline{z}_k)\ ,$$

$\forall\ f_k \in \mathfrak{F}^k_\epsilon(\overline{Z})$.

L'opérateur $a(\overline{u})$ envoie $T_\epsilon(\overline{Z})$ dans lui-même. Les noyaux et symboles de ces opérateurs sont donnés par

(1.25) $$\begin{cases} \widetilde{a^*(u)}(\overline{z}\ ,\ z') = (z\ ,\ u)\ \exp(\overline{z}z') \\ \widetilde{a(\overline{u})}(\overline{z}\ ,\ z') = (u\ ,\ z')\ \exp(\overline{z}z') \end{cases},$$

et leurs symboles

$$\begin{cases} a^*(u)(\overline{z}\ ,\ z') = (z\ ,\ u) \\ a(\overline{u})(\overline{z}\ ,\ z') = (u\ ,\ z') \end{cases},$$

Si $\epsilon = +1$, ces opérateurs sont bornés. Pour $\epsilon = \pm$, ils vérifient les relations de ϵ-commutation

(1.26) $\forall\ u\ ,\ u' \in Z$,

$$[a(\overline{u})\ ,\ a(\overline{u}')]_\epsilon = [a^*(u)\ ,\ a^*(u')]_\epsilon = 0 \quad \text{et} \quad [a(\overline{u})\ ,\ a(u')]_\epsilon = (u\ ,\ u')\ ,$$

où $[A\ ,\ B]_\epsilon = AB + \epsilon BA$ désigne le ϵ-commutateur de deux opérateurs qui se composent.

2. Transformations ϵ-canoniques.

Avec les notations du § 1, l'espace de phase désigne ci-après l'espace réel Z^r sous-jacent à Z. L'application $z \longrightarrow (\bar{z}, z)$ identifie Z^r à un sous-espace de son complexifié $\bar{Z} \times Z$. Il est commode de caractériser tout opérateur linéaire continu g^r de Z^r par son complexifié g. Dans ce cas, g admet une décomposition par blocs

$$(2.1) \qquad g = \begin{pmatrix} \Phi & \bar{\Psi} \\ \Psi & \bar{\Phi} \end{pmatrix}, \text{ avec } \Phi \in L(\bar{Z}, \bar{Z}), \quad \Psi \in L(\bar{Z}, Z)$$

et $\bar{\Phi}$, $\bar{\Psi}$ définies par $\bar{\Phi}u = \overline{\Phi\bar{u}}$, $\bar{\Psi}u = \overline{\Psi\bar{u}}$, $\forall\, u \in Z$.

De même, la 2-forme ϵ-canonique φ_ϵ^r de Z^r est caractérisée par son complexifié φ_ϵ donnée par

$$(2.2) \qquad \varphi_\epsilon(\zeta, \zeta_1) = (z, z_1') + \epsilon(z_1, z'),$$

où $\zeta = (\bar{z}, z')$ et $\zeta_1 = (\bar{z}_1, z_1')$ désignent des éléments arbitraires de $\bar{Z} \times Z$.

Le groupe $TC_\epsilon(Z^r)$ des transformations ϵ-canoniques de Z^r est le groupe des transformations linéaires continues de Z^r qui conservent la 2-forme ϵ-canonique φ_ϵ^r.

(2.3) LEMME. - Soit $g^r \in L(Z^r)$ tel que son complexifié g admette la décomposition (2.1). Alors, $g^r \in TC_\epsilon(Z^r)$ si, et seulement si, g est inversible et

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} \Phi^* & \epsilon\Psi^* \\ \epsilon\bar{\Psi}^* & \bar{\Phi}^* \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas, on a les relations suivantes

$$(2.4) \qquad \begin{cases} \Phi\Phi^* + \epsilon\overline{\Psi\Psi^*} = 1 \,; & \Phi^*\Phi + \epsilon\Psi^*\Psi = 1 \,; \\ \Psi\Phi^* + \epsilon\overline{\Phi\Psi^*} = 0 \,; & \epsilon\bar{\Psi}^*\Phi + \bar{\Phi}^*\Psi = 0 \,; \\ \epsilon\Phi\Psi^* + \overline{\Psi\Phi^*} = 0 \,; & \Phi^*\bar{\Psi} + \epsilon\Psi^*\bar{\Phi} = 0 \,; \\ \epsilon\Psi\Psi^* + \overline{\Phi\Phi^*} = 1 \,; & \epsilon\bar{\Psi}^*\bar{\Psi} + \bar{\Phi}^*\bar{\Phi} = 1 \,. \end{cases}$$

Preuve. - Si $\zeta = (\bar{z}, z')$ et $\zeta_1 = (\bar{z}_1, z_1')$ appartiennent à $\bar{Z} \times Z$, la relation $\varphi_\epsilon(g\zeta, g\zeta_1) = \varphi_\epsilon(\zeta, \zeta_1)$ est équivalente à

$$(2.5) \quad (\Phi\bar{z} + \bar{\Psi}z', \Phi\bar{z}_1 + \epsilon\bar{\Psi}z_1') + (\Psi\bar{z} + \bar{\Phi}z', \epsilon\Psi\bar{z}_1 + \bar{\Phi}z_1') = (\bar{z}, z_1') + \epsilon(\bar{z}', \bar{z}_1).$$

En posant

$$h = \begin{pmatrix} \Phi & \epsilon\bar{\Psi} \\ \epsilon\Psi & \bar{\Phi} \end{pmatrix},$$

on vérifie que l'adjoint de cet opérateur de $\overline{Z} \times Z$ est

$$h^* = \begin{pmatrix} \Phi^* & \epsilon\Psi^* \\ \epsilon\overline{\Psi}^* & \overline{\Phi}^* \end{pmatrix} ,$$

et la relation (2.5) s'écrit $(g\zeta , h\zeta_1) = (\zeta , \zeta_1)$ ou encore $(h^* g\zeta , \zeta_1) = (\zeta , \zeta_1)$ d'où $g^{-1} = h^*$.

Pour tout $\zeta = (\overline{z} , z') \in \overline{Z} \times Z$, on pose $R(\zeta) = a^*(z') + a(\overline{z})$, alors $[R(\zeta) , R(\zeta_1)]_\epsilon = \varphi_\epsilon(\zeta , \zeta_1)$, quels que soient ζ et $\zeta_1 \in \overline{Z} \times Z$.

Soit $g^r \in L(Z^r)$ tel que son complexifié g admette la décomposition (2.1). On définit

$$(2.6) \qquad \begin{cases} \forall\, z \in Z , & A(\overline{z}) = R(g(\overline{z} , 0)) = a^*(\Psi\overline{z}) + a(\Phi\overline{z}) , \\ \forall\, z' \in Z , & A^*(z') = R(g(0 , z')) = a^*(\overline{\Phi}z') + a(\overline{\Psi}z') . \end{cases}$$

Ce sont des opérateurs linéaires de $\mathfrak{F}_\epsilon(\overline{Z})$ qui laissent stable le sous-espace $T_\epsilon(Z)$ des formes cylindriques.

(2.7) LEMME. - Les propositions suivantes sont équivalentes.

(i) $g^r \in TC_\epsilon(Z^r)$;

(ii) $\forall\, \zeta , \zeta_1 \in \overline{Z} \times Z$, $[R(g\zeta) , R(g\zeta_1)]_\epsilon = \varphi_\epsilon(\zeta , \zeta_1)$;

(iii) $\forall\, z , z' \in Z$, $[A(\overline{z}) , A(\overline{z}')]_\epsilon = [A^*(z) , A^*(z')]_\epsilon = 0$ et $[A(\overline{z}) , A^*(z')]_\epsilon = (z , z')$.

Preuve. - Par définition, on a, $\forall\, \zeta , \zeta_1 \in \overline{Z} \times Z$,

$$[R(g\zeta) , R(g\zeta_1))]_\epsilon = \varphi_\epsilon(g\zeta , g\zeta_1) ,$$

d'où l'équivalence de (i) et (ii). Pour prouver que (ii) est équivalente à (iii), on utilise (2.6), le fait que les opérateurs de création $a^*(z')$ et d'annihilation $a(\overline{z})$ vérifient les relations de ϵ-commutation qui figurent dans (iii), et le fait que $R(\zeta)$ dépend linéairement de $\zeta \in \overline{Z} \times Z$.

(2.8) Remarque. - (2.7)(iii) nous permet de dire que les opérateurs $A(\overline{z})$ et $A^*(z')$ définis par (2.6) sont les nouveaux créateurs et annihilateurs associés à $g^r \in TC_\epsilon(Z^r)$.

Avec les mêmes notations, on donne la définition suivante.

(2.9) Définition.

(i) Un opérateur $\hat{U} \in Op$ implémente $g^r \in TC_\epsilon(Z^r)$ si, et seulement si,

$$(2.10) \qquad \forall\, \zeta \in \overline{Z} \times Z , \ (R(g\zeta))\hat{U} = \hat{U}R(\zeta) ;$$

(ii) Une forme ϵ-symétrique $F_0 \in \mathfrak{F}_\epsilon(\overline{Z})$ définie sur $\overline{Z}$ est appelée nouveau vecteur de vide si, et seulement si,

(2.11) $$\forall\ u \in Z\ ,\quad A(\bar{u})\ F_0 = 0\ .$$

(2.12) LEMME. - Soit $g^r \in TC_\epsilon(Z^r)$ et supposons que Φ soit inversible dans $L(\bar{Z})$. Pour tout $\zeta = (\bar{z}\ ,\ z') \in \bar{Z} \times Z$, la 2-forme suivante sur $\bar{Z}$

$$f(\bar{z}\ ,\ \bar{z}') = -\ 2^{-1}(z'\ ,\ \epsilon\Psi\Phi^{-1}\ \bar{z})$$

est ϵ-symétrique. De plus, toute solution de l'équation (2.11) est proportionnelle à $F_0(\bar{z}) = \exp f$.

Preuve. - Vérifions d'abord que $f(\bar{z}\ ,\ \bar{z}')$ est une forme ϵ-symétrique, c'est-à-dire que $-\Psi\Phi^{-1} = \epsilon\ \bar{\Phi}^{-1*}\ \bar{\Psi}^{*}$. Cette relation est vérifiée si $g^r \in TC_\epsilon(Z^r)$, d'après (2.4).

Prouvons que $F_0(\bar{z})$ est effectivement une solution de (2.11) ; en effet

$$A(\bar{z})F_0 = 0 \Longleftrightarrow (a^*(\Psi\bar{z}) + a(\Phi\bar{z}))F_0 = 0 \Longleftrightarrow \Psi\bar{z} = -\partial_{\Phi\bar{z}}\ f$$

et

$$-\ (\partial_{\Phi\bar{z}}\ f)(\bar{x}) = -\ 2f(\Phi\bar{z}\ ,\ \bar{x}) = (x\ ,\ \Psi\bar{z})\ ,$$

ce qui implique que $-\ \partial_{\Phi\bar{z}}\ f = \Psi\bar{z}$ et par conséquent F_0 est une solution de (2.11).

Supposons que $F_1 = F_0\ G$, avec $G \in \mathfrak{F}_\epsilon(\bar{Z})$ est une autre solution de (2.11) ; on a alors, $\forall\ z \in Z$,

$$(a^*(\Psi\bar{z}) + a(\Phi\bar{z}))F_0\ G = 0 \Longleftrightarrow \partial_{\Phi\bar{z}}\ G = 0\ ,$$

c'est-à-dire $G = \lambda \in \mathbb{C}$ car Φ est bijectif.

(2.14) THÉORÈME. - Soit $g^r \in TC_\epsilon(Z^r)$ et supposons que Φ soit inversible dans $L(\bar{Z})$. Alors tous les opérateurs $\hat{U} \in Op$ qui implémentent g^r sont proportionnels à l'opérateur $\hat{U}_0 \in Op$ de noyau

(2.15) $$\tilde{U}_0(\bar{z}\ ,\ z') = \exp\{2^{-1}[(z\ ,\ \epsilon\Psi\Phi^{-1}\ \bar{z}) + 2(z\ ,\ \bar{\Phi}^{*-1}\ z') - \epsilon(\bar{z}'\ ,\ \Phi^{-1}\ \bar{\Psi}z')]\}.$$

Démonstration. - Supposons que $\hat{U}_0 \in Op$ implémente g^r . D'après (2.10), on a les équations

(2.16) $$\forall\ u' \in Z\ ,\quad (a^*(\bar{\Phi}u') + a(\bar{\Psi}u'))\hat{U}_0 = \hat{U}_0\ a^*(u')$$

et

(2.17) $$\forall\ u \in Z\ ,\quad (a^*(\Psi\bar{u}) + a(\Psi\bar{u}))\hat{U}_0 = \hat{U}_0\ a(u)\ .$$

En utilisant la formule (1.22) définissant le noyau d'un opérateur et les définitions des annihilateurs et créateurs, supposant $\tilde{U}_0(\bar{z}\ ,\ z') = \exp B$, avec

$B \in \mathfrak{F}^2_\epsilon(\bar{Z} \times Z)$, on voit que les équations (2.16) et (2.17) sont équivalentes aux équations suivantes.

$$(2.18) \qquad \forall\, u' \in Z\,, \quad (z\,,\, \phi u') + \langle\!\langle \bar{\Psi} u'\,,\, D_{\bar{z}} B \rangle\!\rangle = \langle\!\langle D_{z'} B\,,\, u' \rangle\!\rangle$$

et

$$(2.19) \qquad \forall\, u \in Z\,, \quad (z\,,\, \psi \bar{u}) + \langle\!\langle \phi \bar{u}\,,\, D_{\bar{z}} B \rangle\!\rangle = (u\,,\, z')\;.$$

En posant $\phi\bar{u} = \bar{v}$, donc $v = \bar{\Phi} u$, (2.19) devient

$$(z\,,\, \psi\Phi^{-1}\,\bar{v}) - (\bar{\Phi}^{-1}\, v\,,\, z') = -\,(v\,,\, D_{\bar{z}} B)\;.$$

En remarquant que, d'après (2.4), $\psi\Phi^{-1} = -\epsilon\epsilon\Phi^{*-1}\,\bar{\Psi}^{*}$, on a

$$(v\,,\, D_{\bar{z}} B) = (v\,,\, \Phi^{*-1}\, z' + \epsilon\Psi\Phi^{-1}\,\bar{z})\,,$$

donc

$$(2.20) \qquad B(\bar{z}\,,\, z') = (z\,,\, \bar{\Phi}^{*-1}\, z') + 2^{-1}(z\,,\, \epsilon\Psi\Phi^{-1}\,\bar{z}) + C(z')\,,$$

avec $C(z') \in \mathfrak{F}^2_\epsilon(Z)$. En utilisant (2.18), on détermine $C(z')$: En effet, d'après (2.20) ,

$$(2.21) \qquad D_{z'} B = \Phi^{-1}\,\bar{z} + D_{z'} C\,,$$

et en rapportant (2.21) dans (2.18), on trouve

$$(2.22) \quad \forall\, u' \in Z\,, \quad (z\,,\, \bar{\Phi} u')) + \langle\!\langle \bar{\Psi} u'\,,\, \bar{\Phi}^{*-1}\, z' + \epsilon\Psi\Phi^{-1}\,\bar{z} \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \Phi^{-1}\,\bar{z} + D_{z'} C\,,\, u' \rangle\!\rangle$$

$$\Longleftrightarrow (z\,,\, \bar{\Phi} u') + (\psi\bar{u}'\,,\, \bar{\Phi}^{-1*}\, z' + \epsilon\Psi\Phi^{-1}\,\bar{z}) = (\Phi^{-1}\,\bar{z}\,,\, u') + \langle\!\langle D_{z'} C\,,\, u' \rangle\!\rangle\;.$$

En utilisant (2.4), $(\psi\bar{u}'\,,\, \epsilon\Psi\Phi^{-1}\,\bar{z}) = (\bar{u}'\,,\, \Phi^{-1}\,\bar{z}) - (z\,,\, \bar{\Phi} u')$, et par conséquent (2.22) est équivalente à

$$(2.23) \qquad \forall\, u' \in Z\,, \quad (\psi\bar{u}'\,,\, \bar{\Phi}^{-1*}\, z') = (\bar{u}'\,,\, D_{z'} C)\,,$$

ce qui donne $C(z') = -\,2^{-1}(\bar{z}'\,,\, \epsilon\Phi^{-1}\,\bar{\Psi} z')$, donc

$$\tilde{U}_0(\bar{z}\,,\, z') = \exp\{2^{-1}[(z\,,\, \epsilon\Psi\Phi^{-1}\,\bar{z}) + 2(z\,,\, \bar{\Phi}^{*-1}) - \epsilon(z'\,,\, \Phi^{-1}\,\bar{\psi} z')]\}\;.$$

Soit $\hat{U} \in \mathrm{Op}$ un autre opérateur implémentant g^r . Supposons que $\tilde{U}_1(\bar{z}\,,\, z') = \tilde{U}_0(\bar{z}\,,\, z')\; G(\bar{z}\,,\, z')$, avec $G(\bar{z}\,,\, z') \in \mathfrak{F}_\epsilon(\bar{Z} \times Z)$. Alors $\tilde{U}_1(\bar{z}\,,\, z')$ vérifie les équations (2.18) et (2.19), et en effectuant les calculs, on trouve que $D_{\bar{z}}\, G = 0$ et $D_{z'}\, G = 0$. Par conséquent, $G(\bar{z}\,,\, z') = \lambda \in \underset{\sim}{C}$

C. Q. F. D.

3. Transformations ϵ-canoniques propres.

(3.1) Définition. - Soient $\epsilon = \pm$ et $g^r \in TC_\epsilon(Z^r)$; g^r est dite propre si elle est implémentable par un opérateur unitaire $\hat{U}^\epsilon$ de $FH_\epsilon(\overline{Z})$.

(3.2) THÉORÈME. - Soit $g^r \in TC_\epsilon(Z^r)$, $\epsilon = \pm$. Alors g^r est propre si, et seulement si, ψ est un opérateur de Hilbert Schmidt.

De plus, $\hat{U} = \lambda\hat{U}_0$, avec $\hat{U}_0$ l'opérateur dont le symbole est donné par le théorème (2.14) et $|\lambda| = \|F_0\|$, où $F_0(\overline{z})$ est le nouveau vecteur vide donné par (2.13).

Démonstration.

1° Soit $g^r \in TC_\epsilon(Z^r)$ propre et supposons que Φ^{-1} existe (d'ailleurs c'est toujours le cas quand $\epsilon = -$). Il existe alors un opérateur unitaire $\hat{U}$ de $FH_\epsilon(\overline{Z})$ vérifiant , $\forall\ \zeta \in \overline{Z} \times Z$, $\hat{U}R(\zeta)\hat{U}^{-1} = R(g\zeta)$. Donc son noyau $\tilde{U}(\overline{z}\ ,\ z')$ est donné par (2.15) et le nouveau vecteur de vide $F_0(\overline{z})$ qui, dans ce cas, est un élément de $FH_\epsilon(\overline{Z})$, est donné par (2.13). Vu la définition de $F_0(\overline{z})$ et le lemme (1.15) et [12], pour que $F_0(\overline{z}) \in FH_\epsilon(\overline{Z})$, il faut et il suffit que $\psi\Phi^{-1}$ soit un opérateur de Hilbert-Schmidt, c'est-à-dire ψ de Hilbert-Schmidt car Φ^{-1} est un opérateur borné.

Inversement, supposons que ψ est un opérateur de Hilbert-Schmidt. D'après le lemme (1.15) et [12], $F_0 = \hat{U}_\Omega(1) \in FH_\epsilon(\overline{Z})$ donc [7] g est propre. Il existe alors un opérateur unitaire U_1 de $FH_\epsilon(\overline{Z})$ tel que

$$R(g\zeta) = \hat{U}_1\ R(\zeta)\ \hat{U}_1^{-1}\ ,\quad \forall\ \zeta \in \overline{Z} \times Z\ ,$$

donc, d'après le théorème (2.14),

$$\tilde{U}_1(\overline{z}\ ,\ z') = \lambda\ \tilde{U}_0(\overline{z}\ ,\ z') \quad \text{et} \quad 1 = \|\hat{U}_1(1)\| = \|\lambda\hat{U}_0(1)\| = |\lambda|\ \|F_0\|\ ,$$

donc $\lambda = \|F_0\|^{-1}$.

2° Supposons maintenant que $\epsilon = +$; Φ n'est pas en général inversible. Pour démontrer le théorème (3.2) dans ce cas, on a besoin des résultats suivants.

(3.3) LEMME. - Soit $g^r \in TC_+(Z^r)$ propre telle que $\Phi \equiv 0$. Alors Z est de dimension finie.

Preuve. - Dans ce cas, $A(\overline{z}) = a^*(\psi\overline{z})$ et les équations, $\forall\ z \in Z$, $A(\overline{z})\ F_0 = 0$ sont équivalents aux, $\forall\ z \in Z$, $a^*(\psi\overline{z})F_0 = 0$. Mais en utilisant les relations (2.4), on déduit que ψ est un opérateur unitaire, donc, si Z est de dimension infinie, on conclut que $F_0(\overline{z}) = 0$. Contradiction donc $\dim Z < +\infty$.

(3.4) Définition. - Supposons que $Z^r = Z_1^r \oplus Z_2^r$ et soit $g^r \in TC_+(Z^r)$ telle que $g^r = g_1^r \oplus g_2^r$. Comme $g_1^r \in TC_+(Z_1^r)$ et $g_2^r \in TC_+(Z_2^r)$, on dit que g^r est une transformation canonique décomposable.

(3.5) LEMME. - <u>Soit</u> $g^r \in TC_+(Z^r)$ <u>décomposable. Alors</u> g^r <u>est propre si, et seulement si, ses composantes sont propres.</u>

<u>Preuve</u>. - Supposons que $g^r = g_1^r \oplus g_2^r \in T_{C+}(Z^r)$ soit propre. Soit alors F_0 le nouveau vecteur de vide qui satisfait les équations, $\forall\ z \in Z$, $A(\bar{z})F_0 = 0$.

(i) Supposons que $F_{0|Z_1} \equiv 0$, donc $F_0 \in FH_+(\bar{Z}_2)$ et comme Φ et Ψ laissent stables les espaces Z_1 et Z_2 , les équations d'annihilation impliquent que $\Psi_1 = \Psi|_{\bar{Z}_1} \equiv 0$, donc, d'après (2.4), $\Phi_1 = \Phi|_{\bar{Z}_1}$ est inversible. Par conséquent, $g_1^r \in TC_+(Z_1^r)$ est propre, d'après le théorème 3.2. D'autre part, comme $F_0 \in FH_+(\bar{Z})$, F_0 vérifie les équations $A(\bar{u})F_0 = 0$, $\forall\ u \in Z_2$, c'est-à-dire $g_2^r \in TC_+(Z_2^r)$ est propre.

(ii) Supposons que $F_1 = F_{0|Z_1} \not\equiv 0$. On a donc $F_1 \in FH_+(\bar{Z}_1)$ et, $\forall\ u \in Z_1$, $A(\bar{u})F_1 = 0$, c'est-à-dire g_1^r est propre. De même, g_2^r est propre.

Prouvons l'inverse en supposant que $g_1^r \in TC_+(Z_1^r)$ et $g_2^r \in TC_+(Z_2^r)$ soient propres. $g^r = g_1^r \oplus g_2^r$ est propre si, et seulement si, il existe $F_0 \in FH_+(Z)$ vérifiant les équations d'annihilation, $\forall\ u \in Z$, $A(\bar{u})F_0 = 0$. Posons $F_0 = F_1\ F_2$, où $F_i \in FH_+(\bar{Z}_i)$, $i = 1$, 2 , est le vecteur de vide associé à $g_i^r \in TC_+(Z_i^r)$. Comme $\|F_0\| \leqslant \|F_1\|\ \|F_2\|$, on voit que $F_0 \in FH_+(\bar{Z})$ et de plus il vérifie les équations d'annihilation, donc $g^r = g_1^r \oplus g_2^r$ est propre.

(3.6) <u>Remarque</u>. - Soit $g^r \in TC_+(Z^r)$ et posons $\bar{Z}_1 = \text{Ker}\ \Phi$ et $\bar{Z}_2 = (\text{Ker}\ \Phi)^\perp$. D'autre part, en remarquant que g admet une décomposition polaire $g = UG$, car g est inversible, on peut toujours considérer que g est auto-adjoint, c'est-à-dire que

$$(3.7) \qquad \Phi^* = \Phi\ ,\quad \bar{\Psi} = \Psi^*\ ,\ \Psi = \bar{\Psi}^* \quad \text{et} \quad \bar{\Phi} = \bar{\Phi}^*\ .$$

En utilisant (2.4) et (3.7), on trouve que $\Phi(\bar{Z}_1) \subset \bar{Z}_1$, $\Psi(\bar{Z}_1) \subset Z_1$, $\bar{\Phi}(Z_1) \subset Z_1$ et $\bar{\Psi}(Z_1) \subset \bar{Z}_1$. De même pour Z_2 , et par conséquent, si $g^r \in TC_+(Z^r)$, avec g auto-adjoint, g^r se décompose en deux composantes $g_1 \in TC_+[(\text{Ker}\ \Phi)^r]$ et $g_2 \in TC_+[(\text{Ker}\ \Phi^\perp)^r]$.

(3.8) <u>Fin de démonstration du théorème 3.2.</u> - Soit $g^r \in TC_\epsilon(Z^r)$, avec g auto-adjoint. D'après la remarque ci-dessus, $g^r = g_1^r \oplus g_2^r$ et $\bar{Z}_1 = \text{Ker}\ \Phi$, $\bar{Z}_2 = (\text{Ker}\,\Phi)^\perp$. Supposons que g^r est propre, donc g_1^r et g_2^r sont propres, d'après le lemme (3.5). Mais $\Phi_1 = \Phi|_{\bar{Z}_1} \equiv 0$, donc $\dim Z_1 < +\infty$. Par ailleurs $\Phi_2 = \Phi|_{\bar{Z}_2}$ est injectif, et g_2^r est propre, donc il existe un nouveau vecteur de vide $F_0^2 \in FH_+(\bar{Z}_2)$ qui, sur $\text{Im}\ \Phi_2$, est donné par la formule (2.13). Mais en remarquant que $\text{Im}\ \Phi_2^*\Phi_2 \subset \text{Im}\ \Phi_2$, on déduit que $\text{Im}\ \Phi_2$ est dense dans $\bar{Z}_2$. Donc $\Psi_2\ \Phi_2^{-1}\ \bar{z} = L_2\ \bar{z}$ sur une partie dense de $\bar{Z}_2$ et avec L_2 opérateur de Hilbert

Schmidt. En posant $\bar{u} = \Phi_2^{-1}\bar{z}$, on voit par continuité que, $\forall\, \bar{u} \in \bar{Z}_2$, $\psi_2\bar{u} = L_2\Phi_2\bar{u}$, donc Ψ_2 est un opérateur de Hilbert-Schmidt. Comme $\Psi = \Psi_1 \oplus \Psi_2$ et $\dim Z_1 < +\infty$, on déduit que Ψ est de Hilbert Schmidt.

Supposons maintenant que ψ est un opérateur de Hilbert Schmidt et posons $g^r = g_1^r \oplus g_2^r$ comme plus haut. En utilisant le fait que $\Psi_2^*\Psi_2$ est un opérateur compact, on déduit de la relation $\Phi_2^*\Phi_2 = 1 - \Psi_2^*\Psi_2$ que $\Phi_2^*\Phi_2$ est un opérateur à indice. Donc $\operatorname{Im}\Phi_2^*\Phi_2$ est fermée dans $\bar{Z}_2$. D'autre part $\operatorname{Im}\Phi_2^*\Phi_2$ est dense dans $\bar{Z}_2$, donc Φ_2 est un opérateur bijectif et par conséquence $\Psi_2\Phi_2^{-1}$ est de Hilbert Schmidt, et, d'après le théorème (3.2), $g_2^r \in TC_+(Z_2^r)$ est propre. Mais, comme $\dim Z_1^R < +\infty$, $g_1^r \in TC_\epsilon(Z_1^r)$ est propre [13], donc $g^r = g_1^r \oplus g_2^r$ est propre.

C. Q. F. D.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BEREZIN (F. A.). - The methode of the second quantization. - New York, Academic Press, 1966.

[2] BOURBAKI (N.). - Algèbre. Chapitre 9 : Formes sesquilinéaires et formes quadratiques. - Paris, Hermann, 1959 (Act. scient. et ind., 1272 ; Bourbaki, 24).

[3] JORDAN (P.) und WIGNER (E.). - Über das paulische Äquivalenzverbot, Z. für Physik, t. 47, 1928, p. 631-651.

[4] KRÉE (P.). - Méthodes fonctionelles en dimension infinie et holomorphie anticommutative, Séminaire P. Lelong : Analyse, Année 1976/77. - Berlin, Springer-Verlag (Lecture Notes in Mathematics) (à paraître).

[5] KRÉE (P.). - Equations aux dérivées partielles en dimension infinie, Séminaire P. Krée, Année 1976/77. - Paris, Secrétariat mathématique, 1978.

[6] KRÉE (P.). - Feynman paths integrals and theory of forms, "Conference on Feynman paths [1978. Marseille]". - Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag (Lecture Notes in Mathematics) (à paraître).

[7] MARIAS (M.). - Transformations canoniques propres pour les fermions. Thèse de 3e cycle, Univ. P. et M. Curie, 1978.

[8] MARIAS (M.). - Transformations canoniques linéaires dans les espaces de Hilbert, C. R. Acad. Sc. Paris, Série A (à paraître).

[9] PALMER (J.). - Scattering automorphisms of the Dirac field, J. math. Analysis and Appl., t. 64, 1978, p. 189-215.

[10] SHALE (D.) et STINESPRING (W. F.). - Spinor representations of infinite orthogonal groups, J. Math. and Mech., t. 14, 1965, p. 315-322.

[11] SHALE (D.). - Linear symmetries of free boson fields, Trans. Amer. math. Soc., t. 103, 1962, p. 149-167.

[12] VERGNE (M.). - Groupe symplectique et seconde quantification, C. R. Acad. Sc. Paris, Série A, t. 285, 1977, p. 191-194.

[13] VON NEUMANN (J.). - Die Eindentigkeit der Schrödingerschen Operatoren, Math. Annalen, t. 104, 1931, p. 570-578.