SÉMINAIRE PAUL KRÉE

DANIEL KALNINS

Intégration non commutative représentation projective d'espaces L^p

Séminaire Paul Krée, tome 4 (1977-1978), exp. n° 7, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SPK_1977-1978__4__A8_0>

© Séminaire Paul Krée
(Secrétariat mathématique, Paris), 1977-1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Paul Krée » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire P. KRÉE
(Equations aux dérivées partielles
en dimension infinie)
4e année, 1977-1978, n° 7, 11 p.

INTÉGRATION NON COMMUTATIVE
REPRÉSENTATION PROJECTIVE D'ESPACES L^p

par Daniel KALNINS (*)

Cet article sera divisé en trois parties, la première partie se proposant de rappeler les définitions et théorèmes principaux de l'intégration non commutative dans le cas des traces, la deuxième consiste en un théorème de représentation projective des espaces L^p analogue à celui obtenu dans le cas commutatif, la troisième présente une application de ce théorème à la trace de I. SEGAL et L. GROSS qui a été introduite pour l'étude des champs de fermions.

1. Rappels d'intégration non commutative.

La théorie débute au début des années cinquante avec les articles de J. DIXMIER [4] et I. SEGAL [8]. Elle donne une extension non commutative de la théorie de l'intégrale de Lebesgue. Elle permet aussi l'étude de certains modèles en théorie constructive des champs, voir [5], par exemple.

Soient H un espace de Hilbert complexe et $L(H)$ l'algèbre stellaire des opérateurs bornés de H dans H. C'est une C^*-algèbre unitaire munie de la norme $\|T\| = \sup_{\|\xi\|\leq 1} \|T\xi\|$ et de l'involution $T \longrightarrow T^*$ définie par

$$\langle T^* \xi , \eta\rangle = \langle \xi , T\eta\rangle , \quad \forall \xi , \eta \in H ,$$

avec la convention suivante pour les produits scalaires : $\langle \xi , \eta\rangle$ est linéaire par rapport à ξ et antilinéaire par rapport à η. On a bien

$$\|T^* T\| = \|T\|^2 , \quad \forall T \in L(H) .$$

Même si H est séparable, $L(H)$ n'est pas de type dénombrable (sauf si $\dim H < + \infty$).

Il existe un unique sous-espace fermé du dual $L(H)^*$ dont $L(H)$ est le dual, cet espace se note $L(H)_*$ et s'appelle le prédual de $L(H)$. Il est formé des opérateurs nucléaires de $L(H)$ aussi appelés opérateurs à trace, car on a l'équivalence

$$\rho \in L(H)_* \Longleftrightarrow \sum_{i\in I} \langle |\rho|\xi_i , \xi_i\rangle = \text{Trace } |\rho| < + \infty ,$$

pour toute base orthonormée $(\xi_i)_{i\in I}$ de H et $|\rho| = (\rho^* \rho)^{1/2}$.

$$L(H)_* = \{\rho \in L(H) ; \text{ trace } |\rho| < + \infty\}$$

est de type dénombrable si H est séparable, car tout opérateur nucléaire est limi-

(*) Texte reçu en Janvier 1979.

Daniel KALNINS, 41 rue Decorse, 94410 St MAURICE.

te uniforme d'une suite d'opérateurs de rang fini.

On peut munir $L(H)$ de nombreuses topologies, les plus utilisées étant la topologie normique ou uniforme introduite précédemment, puis la topologie pré-faible $\sigma(L(H), L(H)_*)$, on utilisera également la topologie de la convergence simple faible. On l'appelle aussi très souvent topologie faible d'opérateurs. C'est la topologie faible sur $L(H)$ provenant de la dualité avec le sous-espace de $L(H)_*$ formé des opérateurs de rang fini.

La dualité entre $L(H)_*$ et $L(H)$ est donnée par la trace $\langle T|_\rho\rangle = \operatorname{tr} \rho T$, donc la topologie de la convergence simple faible est définie par

$$T_\alpha \longrightarrow T \Longleftrightarrow \forall\ \xi, \eta \in H, \ \langle T_\alpha \xi, \eta\rangle \longrightarrow \langle T\xi, \eta\rangle .$$

Elle est moins fine que $\sigma(L(H), L(H)_*)$ et, comme l'espace des opérateurs de rang fini est dense en norme dans $L(H)_*$, elle coïncide avec $\sigma(L(H), L(H)_*)$ sur les parties bornées de $L(H)$.

On utilisera également la topologie forte d'opérateur, c'est-à-dire celle définie par

$$T_\alpha \longrightarrow T \Longleftrightarrow \forall\ \eta \in H, \ \|(T_\alpha - T)\eta\| \longrightarrow 0 .$$

Elle est plus fine que la topologie simple faible et moins fine que la topologie normique, et comme cette dernière, elle n'est pas compatible avec la topologie $\sigma(L(H), L(H)_*)$.

Soit $\mathfrak{A}$ une sous-algèbre involutive et contenant l'unité 1_H de $L(H)$, alors les quatre propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) $\mathfrak{A}$ est $\sigma(L(H), L(H)_*)$-fermée ;

(ii) $\mathfrak{A}$ est fermée pour la topologie faible d'opérateur ;

(iii) $\mathfrak{A}$ est fermée pour la topologie forte d'opérateur ;

(iv) $\mathfrak{A}'' = \mathfrak{A}$, où $\mathfrak{A}' = \{T \in L(H) ; TA = AT, \ \forall A \in \mathfrak{A}\}$, $\mathfrak{A}'$ s'appelle le commutant de $\mathfrak{A}$.

DÉFINITION 1. – <u>Une sous-algèbre involutive et contenant l'unité de $L(H)$, vérifiant l'une des quatre propriétés équivalentes précédentes s'appelle une algèbre de Von Neumann.</u>

S. SAKAI a donné une définition abstraite d'une algèbre de Von Neumann qui ne fait pas intervenir l'espace de Hilbert dans lequel agit $\mathfrak{A}$.

DÉFINITION 1'. – <u>Une algèbre de Von Neumann est une C^*-algèbre qui est un dual.</u>

Les deux définitions ne sont cependant pas tout à fait équivalentes. En effet, soit $\mathfrak{A}$ une C^*-algèbre dual d'un espace de Banach $\mathfrak{A}_*$, alors $\mathfrak{A}_*$ est unique et s'appelle le prédual de $\mathfrak{A}$ (voir [7], p. 30). Soit B la boule unité de $\mathfrak{A}$, B est $\sigma(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_*)$-compacte donc possède des points extrémaux d'après le théorème de

Krein Milman et donc $\mathfrak{A}$ est unitaire (voir [7], p. 10). D'après [7] (p. 41), $\mathfrak{A}$ est $*$-isomorphe à une sous-algèbre involutive W faiblement fermée de $L(H)$, où H est un espace de Hilbert. Mais W bien qu'unitaire ne contient pas en général l'unité de $L(H)$. Lorsque nous parlerons d'algèbre de von Neumann $\mathfrak{A}$ agissant sur un espace de Hilbert H, nous supposerons toujours que $1_H \in \mathfrak{A}$.

Soit $\mathfrak{A}$ une algèbre de von Neumann (en abrégé V-N algèbre) agissant sur un espace de Hilbert H, et soit $\mathfrak{A}^+$ le cône des éléments positifs de $\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{a} \in L(H)$ est positif si $(\mathfrak{a}\xi , \xi) \geq 0$, $\forall\ \xi \in H$). Si $(a_\alpha)_{\alpha \in I}$ est une famille filtrée croissante uniformément bornée ($\sup_{\alpha \in I} \|a_\alpha\| < +\infty$) d'éléments de $\mathfrak{A}^+$, alors elle converge pour $\sigma(\mathfrak{A} , \mathfrak{A}_*)$ vers sa borne supérieure qui est dans $\mathfrak{A}$ ([7], p. 15).

Donnons maintenant la définition d'une trace.

DÉFINITION 2. - <u>On appelle trace sur une V-N algèbre</u> $\mathfrak{A}$, <u>une application</u> τ <u>de</u> $\mathfrak{A}^+$ <u>dans</u> $[0 , +\infty]$, <u>additive et positivement homogène telle que</u> $\tau(ab) = \tau(ba)$, <u>pour tout</u> $a , b \in \mathfrak{A}^+$.

<u>La trace</u> τ <u>est dite normale si, pour toute famille filtrée croissante</u> $(a_\alpha)_{\alpha \in I}$ <u>dans</u> $\mathfrak{A}^+$ <u>telle que</u> $\sup \|a_\alpha\| < +\infty$, <u>on a</u>

$$\tau(\sup_\alpha a_\alpha) = \sup_\alpha \tau(a_\alpha) .$$

(v) <u>La trace</u> τ <u>est dite semi-finie si</u>

$$\forall\ a \in \mathfrak{A}^+ ,\ a \neq 0 ,\ \exists\ b \in \mathfrak{A}^+ ,\ b \neq 0 ,\ \underline{\text{tel que}}\ \tau(b) < +\infty\ \ \underline{\text{et}}\ \ b \leq a .$$

τ <u>est dite finie si</u> $\tau(1) < +\infty$ (1 <u>étant limite de</u> $\mathfrak{A}$).

(vi) <u>La trace</u> τ <u>est dite fidèle si</u>

$$\tau(a) = 0 ,\quad a \in \mathfrak{A}^+ \Longrightarrow a = 0 .$$

<u>Remarque</u>. - On montre que, si τ est finie, τ est normale si, et seulement si, elle est $\sigma(\mathfrak{A} , \mathfrak{A}_*)$-continue ([7], p. 28).

Nous pouvons maintenant définie les espaces $L^p(\mathfrak{A} , \tau)$.

DÉFINITION 3 : <u>Espaces</u> $L^p(\mathfrak{A} , \tau)$. - <u>Soit</u> $\mathfrak{A}$ <u>une algèbre de V-N possédant une trace</u> τ <u>fidèle, normale et semi-finie. Considérons l'ensemble</u>

$$I_2 = \{a \in \mathfrak{A} ;\ \tau(\mathfrak{A}^* , \mathfrak{A}) < +\infty .$$

<u>C'est un idéal bilatère de</u> $\mathfrak{A}$. <u>Considérons alors l'idéal bilatère</u>

$$I_1 = I_2^2 = \{x \in \mathfrak{A} ;\ x = \textstyle\sum_{i=1}^n a_i\, b_i ,\ a_i \in I_2 ,\ b_i \in I_2\} .$$

<u>Si</u> $a \in \mathfrak{A}^+$ <u>et</u> $\tau(a) < +\infty$, <u>alors</u> $a \in I$, <u>car</u> $a^{1/2} \in I_2$.

Réciproquement, soit $c \in \mathfrak{A}^+ \cap I$, alors $\tau(c) < +\infty$, car, si $c = \sum_{i=1}^n a_i\, b_i$ $(a_i , b_i \in I_2)$, on a

$$2c = c + c^* = \textstyle\sum_{i=1}^n a_i\, b_i + \sum_{i=1}^n b_i^*\, a_i^* \leq \sum_{i=1}^n (a_i\, a_i^* + b_i^*\, b_i) = y ,$$

car $(a_i - b_i^*)(a_i^* - b_i) \geq 0$, $\forall\ i$ et $2\tau(c) \leq \tau(y) < +\infty$.

Or tout élément de I_1 admet une décomposition unique en quatre éléments de $\mathfrak{A}^+ \cap I_1$ (voir [6]), la trace τ admet donc un prolongement par linéarité à I_1 qui est unique et vérifie $\tau(ab) = \tau(ba)$, $\forall$ a , b $\in I_1$. De plus, si $|a| = (a^* a)^{\frac{1}{2}}$ vérifie $\tau(|a|) < + \infty$, alors $a \in I_1$, car $a = u|a|$ (u isométrie partielle $\in \mathfrak{A}$) et I_1 est un idéal.

On a donc l'égalité $I_1 = \{a \in \mathfrak{A} \; ; \; \tau(|a|) < + \infty\}$.

On démontre de même que les ensembles $I_p = \{a \in \mathfrak{A} \; ; \; \tau(|a|^p) < + \infty\}$ sont des idéaux bilatères de $\mathfrak{A}$, pour tout $p \geq 1$.

Les applications $a \longrightarrow \tau(|a|^p)^{1/p}$ sont des normes qui font des idéaux I_p des espaces normés. On pose $\|a\|_p = \tau(|a|^p)^{1/p}$ et, par convention,

$$\|a\|_\infty = \|a\| = \sup_{\|x\| \leq 1, x \in H} \|ax\| \; .$$

On montre que

$$\forall \, a \in \mathfrak{A} , \quad \forall \, b \in I_1 , \quad |\tau(ab)| \leq \|a\|_\infty \, \|b\|_1 \; .$$

On en déduit que I_1 est inclus dans I_p , pour tout $p \geq 1$, car

$$\tau(|a|^p) = \tau(|a|^{p-1} \, |a|) \leq \|a\|^{p-1} \, \tau(|a|) < + \infty$$

si $a \in I_1$. De même $I_p \subset I_q$ dès que $q > p$.

On notera $L^p(\mathfrak{A} , \tau)$ le complété séparé de I_p pour la norme p , pour tout $1 \leq p < + \infty$, et, par convention, $L^\infty(\mathfrak{A} , \tau)$ désignera $\mathfrak{A}$, convention justifiée par le fait que $L^1(\mathfrak{A} , \tau)$ s'identifie au prédual de $\mathfrak{A}$. L'espace $L^p(\mathfrak{A} , \tau)$ est réflexif pour $1 < p < + \infty$ et son dual s'identifie à $L^q(\mathfrak{A} , \tau)$, avec $q^{-1} + p^{-1} = 1$ (voir [4]).

D'autre part, sur I_1 , on a une inégalité de Hölder

$$\forall \, a , b \in I_1 , \quad |\tau(ab)| \leq \tau(|ab|) \leq \tau(|a|^p)^{1/p} \, \tau(|b|^q)^{1/q} ,$$

avec $p^{-1} + q^{-1} = 1$ et $\sup_{\|b\|_q \leq 1, b \in I_1} |\tau(ab)| = \|a\|_p$, pour $a \in I_1$.

Les espaces $L^p(\mathfrak{A} , \tau)$, introduits précédemment, montrent une analogie frappante avec les espaces L^p classiques de la théorie de la mesure, mais le nom d'intégration non commutative se justifie pleinement par le théorème suivant.

THÉORÈME 1. - Toute algèbre de von Neumann commutative est $*$-isomorphe à un espace $L^\infty(\Omega , \mu)$, où (Ω , μ) est un espace mesuré localisable.

Nous allons donner une démonstration de ce théorème dans le cas où $\mathfrak{A}$ est une algèbre de V-N admettant une trace τ fidèle, normale et finie (pour la démonstration dans le cas général, voir [7], p. 45). Remarquons tout d'abord que, si (Ω , μ) est un espace mesuré localisable, $L^\infty(\Omega , \mu)$ est bien une algèbre de V-N, car c'est une C^*-algèbre pour la norme sup et c'est le dual de $L^1(\Omega , \mu)$. L'espace $L^\infty(\Omega , \mu)$ se représente de façon naturelle dans $L(L^2(\Omega , \mu))$ comme l'algèbre des opérateurs de multiplication définie par l'application π suivante.

$$\forall\ f \in L^\infty(\Omega\ ,\ \mu)\ ,\quad \pi(f)\ :\quad \begin{array}{ccc} L^2(\Omega\ ,\ \mu) & \longrightarrow & L^2(\Omega\ ,\ \mu) \\ g & \longmapsto & fg \end{array}$$

Les espaces $L^\infty(\Omega\ ,\ \mu)$ et $\pi(L^\infty(\Omega\ ,\ \mu))$ sont isomorphes comme algèbres de V-N, c'est-à-dire que π est un isomorphisme d'algèbres stellaires qui est continu pour les topologies $\sigma(L^\infty\ ,\ L^1)$ et la topologie faible d'opérateur dans $L(L^2)$. $\pi(\underset{\sim}{1}_\Omega)$ est bien l'unité de $L(L^2(\Omega\ ,\ \mu))$. Passons à la démonstration du théorème.

Soit $\mathfrak{a}$ une V-N algèbre commutative admettant une trace τ normale, fidèle et finie. D'après la théorie de Gelfand, il existe un espace compact K tel que $\mathfrak{a} \simeq C(K)$, $C(K)$ désignant la C^*-algèbre des fonctions continues sur K à valeur dans $\underset{\sim}{C}$.

D'après le théorème de Riesz, il existe une unique mesure de Radon positive μ sur K représentant τ , c'est-à-dire, si $\hat{a}$ désigne l'image de $a \in \mathfrak{a}$ dans $C(K)$,

$$\forall\ a \in \mathfrak{a}\ ,\quad \tau(a) = \int_K \hat{a}(t)\ d\mu(t)\ .$$

Puisque τ est fidèle, on a $\operatorname{supp} \mu = K$ et $\tau(1) = 1$ implique que $\mu(K) = 1$.

On peut définir un $*$-homomorphisme $\Phi\ \mathfrak{a} \longrightarrow L^\infty(K\ ,\ \mu)$ en associant à toute fonction de $C(K)$ sa classe dans $L^\infty(K\ ,\ \mu)$. Montrons que Φ est un isomorphisme de V-N algèbres.

$$\forall\ a\ ,\ b \in \mathfrak{a}\ ,\quad \tau(ab) = \int_K \hat{a}(t)\ \hat{b}(t)\ d\mu(t) = \int_K \Phi(a)\ \Phi(b)\ d\mu\ .$$

Soit $(a_\alpha)_{\alpha\in I}$ dans $\mathfrak{a}$ telle que (a_α) converge vers a pour $\sigma(\mathfrak{a}\ ,\ \mathfrak{a}_*)$. Alors τ étant $\sigma(\mathfrak{a}\ ,\ \mathfrak{a}_*)$-continue, $\tau(a_\alpha\ b)$ converge vers $\tau(ab)$, et donc $\Phi(a_\alpha)$ converge vers $\Phi(a)$ pour la topologie $\sigma(L^\infty\ ,\ L^1)$, car $C(K)$ est dense dans $L^1(K, \mu)$. Donc $\Phi(a)$ est $\sigma(L^\infty\ ,\ L^1)$-fermé dans $L^\infty(K\ ,\ \mu)$ ([7], p. 40). Or $C(K) \subset \Phi(a)$ et $C(K)$ est $\sigma(L^\infty\ ,\ L^1)$-dense dans $L^\infty(K\ ,\ \mu)$, d'où $\Phi(a) = L^\infty(K, \mu)$ et Φ est bien injectif car $\operatorname{supp} \mu = K$.

C. Q. F. D.

Les espaces $L^p(\mathfrak{a}\ ,\ \tau)$ sont isomorphes isométriquement aux espaces $L^p(K\ ,\ \mu)$ car $\tau(|a|^p) = \int_X |\hat{a}(t)|^p\ d\mu(t)$, $\forall\ a \in \mathfrak{a}$.

Nous allons maintenant introduire la notion de convergence en mesure qui nous permettra de représenter les espaces L^p non commutatifs comme des espaces d'opérateurs non bornés sur un espace de Hilbert.

Soit $\mathfrak{a}$ une V-N algèbre admettant une trace τ , fidèle, normale, semi-finie, pour tout couple ϵ , δ de réels positifs. On pose

$$N(\epsilon\ ,\ \delta) = \{a \in \mathfrak{a}\ ;\ \exists\ p \text{ projection } \in \mathfrak{a} \text{ avec } \|ap\| < \epsilon \text{ et } \tau(p^\perp) < \delta\}\ ,$$

où $p^\perp = 1 - p$. Les ensembles $N(\epsilon\ ,\ \delta)$ forment un système fondamental de voisinages équilibrés de l'origine dans $\mathfrak{a}$.

DÉFINITION 4. - <u>On appelle topologie de la convergence en mesure, la topologie invariante par translation induite par le système fondamental des ensembles</u> $N(\varepsilon , \delta)$.

<u>Remarque</u>. - Dans le cas où $\mathfrak{A}$ est une V-N algèbre commutative, c'est-à-dire $L^{\infty}(\Omega , \mu)$, cette topologie coïncide bien avec la topologie de la convergence en mesure usuelle, car les projections de $L^{\infty}(\Omega , \mu)$ sont les fonctions caractéristiques d'ensembles mesurables.

Si H est l'espace de Hilbert dans lequel agit $\mathfrak{A}$, on définit de même un système fondamental de voisinages de l'origine de H par

$$O(\varepsilon , \delta) = \{\psi \in H \; ; \; \exists \; p \text{ projection } \in \mathfrak{A} , \; \|p\psi\| < \varepsilon \text{ et } \tau(p^{\perp}) < \delta\} .$$

La topologie d'E. V. T. sur H , engendrée sur ce système fondamental de voisinages de 0 , s'appellera également topologie de la convergence en mesure (sur H).

On démontre que, alors, ces deux topologies sont séparées et, comme elles sont visiblement métrisables, $\mathfrak{A}$ (respectivement H) s'injecte dans son complété séparé $\hat{\mathfrak{A}}$ (respectivement $\hat{H}$) pour cette topologie. $\hat{\mathfrak{A}}$ est une $*$-algèbre topologique possédant une représentation continue dans $\hat{H}$, c'est-à-dire que $\hat{\mathfrak{A}}$ s'identifie à une sous-algèbre avec involution de $L(\hat{H})$, espace vectoriel des opérateurs continus de $\hat{H}$. (voir NELSON [6])

Le complété $\hat{\mathfrak{A}}$ s'identifie également à une algèbre d'opérateurs non bornés de H . Soit $a \in \hat{\mathfrak{A}}$ et $\psi \in H$. Alors, si $a\psi \in H$, on dira que ψ appartient au domaine de multiplication $D(M_a)$ par l'élément a . Donc a définit un opérateur M_a de domaine $D(M_a)$. On démontre que M_a est fermé et affilié à $\mathfrak{A}$, c'est-à-dire qu'il commute avec tous les opérateurs unitaires de $\mathfrak{A}'$ (M_a est même mesurable au sens de I. SEGAL, voir [6]).

On a de plus $M_{a^*} = M_a^*$, $M_{a+b} = M_a \dotplus M_b$, $M_{ab} = M_a \cdot M_b$, où $\dotplus$ et $\cdot$ désignent respectivement la somme et le produit fort, c'est-à-dire la fermeture de ces opérations. On démontre que, si $a \in \hat{\mathfrak{A}}$, $\forall \, \varepsilon > 0$, $\exists$ projecteur $p \in \mathfrak{A}$ tel que $ap \in \mathfrak{A}$ et $\tau(p^{\perp}) < \varepsilon$. Mais le résultat principal est que les espaces $L^p(\mathfrak{A} , \tau)$ s'injectent dans $\hat{\mathfrak{A}}$, pour tout p , $1 \leq p \leq +\infty$ (voir [6]).

Ce résultat est très utile car il permet d'identifier les éléments abstraits de $L^p(\mathfrak{A} , \tau)$ à des opérateurs non bornés sur l'espace de Hilbert H dans lequel agit $\mathfrak{A}$.

On peut alors définir le produit d'un élément de $L^p(\mathfrak{A} , \tau)$ par un élément de $L^q(\mathfrak{A} , \tau)$, en particulier on démontre que l'on a encore une inégalité de Hölder.

$$\forall \, a \in L^p(\mathfrak{A} , \tau) , \quad \forall \, b \in L^q(\mathfrak{A} , \tau) , \quad a.b \in L^1(\mathfrak{A} , \tau) , \text{ si } p^{-1} + q^{-1} = 1 ,$$

$$|\tau(a.b)| \leq \tau(|a|^p)^{1/p} \, \tau(|b|^q)^{1/q}$$

(voir [11]).

Introduisons maintenant une notion d'espérance conditionnelle. On supposera pour simplifier que $\mathfrak{A}$ est une V-N algèbre finie, c'est-à-dire que $\mathfrak{A}$ possède une trace τ fidèle, normale et finie, la généralisation au cas où τ n'est que semi-finie étant triviale.

Soit $a \in \mathfrak{A}$ et soit τ_a la forme linéaire sur $\mathfrak{A}$ définie par

$$\forall\ x \in \mathfrak{A}\ ,\quad \tau_a(x) = \tau(ax) = \tau(xa)\ .$$

Soit $\mathfrak{B}$ une sous-algèbre de V-N de $\mathfrak{A}$, c'est-à-dire une sous-algèbre de $\mathfrak{A}$, stable pour l'involution, $\sigma(\mathfrak{A}\ ,\ \mathfrak{A}_*)$-fermée, et contenant l'unité de $\mathfrak{A}$. La restriction τ' de τ à $\mathfrak{B}$ est une trace sur $\mathfrak{B}$ qui a toutes les propriétés de τ. Si l'on restreint τ_a à $\mathfrak{B}$, on a

$$\forall\ b \in \mathfrak{B}\ ,\quad |\tau_a(b)| = \tau(ab)| \leqslant \|a\|_\infty\ \tau'(|b|) \quad \text{car} \quad |b| \in \mathfrak{B}\ .$$

Donc la restriction τ'_a de τ_a à $\mathfrak{B}$ se prolonge de façon unique en un élément de $L^1(\mathfrak{B}\ ,\ \tau')^* \simeq \mathfrak{B}$, c'est-à-dire qu'il existe un unique élément de $\mathfrak{B}$, noté $E_{\mathfrak{B}}(a))$ tel que

$$\forall\ b \in \mathfrak{B}\ ,\quad \tau_a(b) = \tau'(b\ E_{\mathfrak{B}}(a))\ .$$

$E_{\mathfrak{B}}$ définit une application de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}$ visiblement linéaire et qui est un projecteur car $E_{\mathfrak{B}}^2 = E_{\mathfrak{B}'}$. En effet, si $a \in \mathfrak{B}$, $E_{\mathfrak{B}}(a) = a$ car $\tau'((a - E_{\mathfrak{B}}(a))b) = 0$ $\forall\ b \in \mathfrak{B}$. Donc $\|a - E_{\mathfrak{B}}(a)\|_\infty = 0$, soit $E_{\mathfrak{B}}(a) = a$.

DÉFINITION 5. - <u>On appelle espérance conditionnelle relativement à</u> $\mathfrak{B}$, <u>l'opérateur de projection</u> $E_{\mathfrak{B}}$ <u>de</u> $\mathfrak{A}$ <u>dans</u> $\mathfrak{B}$ <u>défini précédemment</u>.

$E_{\mathfrak{B}}$ est une contraction de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}$ pour toutes les normes L^p, en effet,

$$\forall\ a \in \mathfrak{A}\ ,\quad \forall\ b \in \mathfrak{B}\ ,\quad |\tau'(b\ E_{\mathfrak{B}}(a))| = |\tau(ba)| \leqslant \|b\|_q\ \|a\|_p\ ,$$

avec $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Donc

$$\sup_{\|b\|_q \leq 1, b \in \mathfrak{B}} |\tau'(b\ E_{\mathfrak{B}}(a))| = \|E_{\mathfrak{B}}(a)\|_p \leqslant \|a\|_p\ .$$

L'application $E_{\mathfrak{B}}$ s'étend donc en une contraction de $L^p(\mathfrak{A}\ ,\ \tau)$ dans $L^p(\mathfrak{B}\ ,\ \tau')$, sous-espace de Banach de $L^p(\mathfrak{A}\ ,\ \tau)$. Comme $E_{\mathfrak{B}}(L^p(\mathfrak{A}\ ,\ \tau)) = L^p(\mathfrak{A}\ ,\ \tau')$ et que $E_{\mathfrak{B}}$ est un projecteur continu, cela montre que $L^p(\mathfrak{B}\ ,\ \tau')$ est facteur direct dans $L^p(\mathfrak{A}\ ,\ \tau)$, pour tout $p \in [1\ ,\ +\infty]$.

D'après un résultat remarquable de J. TOMIYAMA, $E_{\mathfrak{B}}$ étant une projection de norme 1 sur une sous-algèbre de V-N $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{A}$, on

$$\forall\ a \in \mathfrak{A}\ ,\quad \forall\ b\ ,\ c \in \mathfrak{B}\ ,\quad E_{\mathfrak{B}}(bac) = b\ E_{\mathfrak{B}}(a)\ c$$

(voir [10]).

2. Représentation projective d'espaces L^p.

Soit $\mathfrak{A}$ une V-N algèbre admettant une trace τ fidèle, normale et finie, et soit $(\mathfrak{A}_\alpha)_{\alpha \in I}$ une famille filtrée croissante de sous-algèbres de V-N de $\mathfrak{A}$ telles que

$\bigcup_{\alpha\in I} \mathfrak{A}_\alpha$ engendre , c'est-à-dire que $\bigcup_{\alpha\in I} \mathfrak{A}_\alpha$ est $\sigma(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_*)$-dense dans $\mathfrak{A}$.

Considérons la famille $(E_\alpha)_{\alpha\in I}$ des espérances conditionnelles relativement aux $\mathfrak{A}_\alpha$. Pour $\alpha < \beta$ ($\mathfrak{A}_\alpha \subset \mathfrak{A}_\beta$), notons $E_{\alpha\beta}$ la restriction de E_α au sous-espace $L^p(\mathfrak{A}_\alpha, \tau_\alpha)$ de $L^p(\mathfrak{A}, \tau)$ (τ_α désigne la restriction de τ à $\mathfrak{A}_\alpha$).

Les $E_{\alpha\beta}$ vérifient les relations

$$E_{\alpha\beta} E_\beta = E_\alpha \quad \text{si} \quad \alpha < \beta \text{ , et } \quad E_{\alpha\beta} E_{\beta\gamma} = E_{\alpha\gamma} \quad \text{si} \quad \alpha < \beta < \gamma \text{ .}$$

On a vu, de plus, que $E_{\alpha\beta}$ est un inverse à gauche de l'injection canonique $i_{\alpha\beta} : L^p(\mathfrak{A}_\alpha, \tau_\alpha) \longrightarrow L^p(\mathfrak{A}_\beta, \tau_\beta)$ $(\alpha < \beta)$.

Les $(L^p(\mathfrak{A}_\alpha, \tau_\alpha), E_{\alpha\beta})$ forment un système projectif d'espaces de Banach. Considérons dans $X = \text{proj lim } (L^p(\mathfrak{A}_\alpha, \tau_\alpha), E_{\alpha\beta})$ le sous-espace $C \cup B_p$ des familles cohérentes bornées.

$$C \cup B_p = \{(\mathfrak{a}_\alpha) \ ; \ \mathfrak{a}_\alpha \in L^p(\mathfrak{A}_\alpha, \tau_\alpha) \ , \ E_{\alpha\beta}(\mathfrak{a}_\beta) = \mathfrak{a}_\alpha \text{ si } \alpha < \beta \text{ et } \sup_{\alpha\in I} \|\alpha\|_p < +\infty\}.$$

C'est un espace de Banach pour la norme sup et nous allons démontrer que $L^p(\mathfrak{A}, \tau)$ est isomorphe isométriquement à $C \cup B_p$, pour tout $p \in \,]1, +\infty[$. Démontrons d'abord un lemme.

LEMME 1. - <u>Soit</u> $\mathfrak{A}$ <u>une algèbre de von Neumann admettant une trace</u> τ <u>fidèle, normale et finie, et soit</u> $\mathfrak{A}_1$ <u>une sous-algèbre involutive de</u> $\mathfrak{A}$ <u>engendrant</u> $\mathfrak{A}$, <u>alors</u> $\mathfrak{A}_1$ <u>est dense dans</u> $L^p(\mathfrak{A}, \tau)$, <u>pour tout</u> $p \in [1, +\infty[$.

<u>Démonstration</u>. - Il suffit de montrer, d'après le théorème de Hahn Banach, que toute forme linéaire continue sur $L^p(\mathfrak{A}, \tau)$, s'annulant sur $\mathfrak{A}_1$, est nulle.

Soit ψ dans $L^p(\mathfrak{A}, \tau)^*$, alors il existe un b unique dans $L^q(\mathfrak{A}, \tau)$ $(p^{-1} + q^{-1} = 1)$ tel que $\psi(a) = \tau(ab)$, pour tout a dans $L^p(\mathfrak{A}, \tau)$. Supposons que

$$\forall\ x \in \mathfrak{A}_1 \ , \quad \psi(x) = \tau(xb) = 0 \text{ .}$$

Pour tout $a \in \mathfrak{A}$, montrons que $\tau(ab) = 0$. L'algèbre $\mathfrak{A}_1$ étant $\sigma(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_*)$-dense dans $\mathfrak{A}$, d'après le théorème de densité de KAPLANSKI ([7], p. 22), il existe une famille $(a_\alpha)_{\alpha\in I}$ dans $\mathfrak{A}_1$ telle que $(a_\alpha)_{\alpha\in I}$ converge vers $\mathfrak{a}$ pour la topologie $\sigma(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_*)$ et telle que $\|\sup_\alpha \|a_\alpha\| \leq \|a\|$.

Si $p = 1$, alors $b \in L^\infty(\mathfrak{A}, \tau) = \mathfrak{A}$ et donc

$$\lim_\alpha \tau(a_\alpha b) = \tau(ab) = 0$$

car τ étant normale, τ est $\sigma(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_*)$-continue, donc $a \longrightarrow \tau(ab)$ aussi.

Si $p > 1$, alors, comme $b \in \hat{\mathfrak{A}}$, pour tout $\epsilon > 0$, il existe une projection p dans $\mathfrak{A}$ telle que $bp \in \mathfrak{A}$ et $\tau(p^\perp) < \epsilon$, et l'on a

$$|\tau((a_\alpha - a)b)| \leq |\tau((a_\alpha - a)bp)| + \tau((a_\alpha - a)bp^\perp) \text{ ,}$$

$$bp \in \mathfrak{A} \Longrightarrow |\tau((a_\alpha - a)bp)| < \epsilon \quad \text{car} \quad \alpha > \beta_0 \text{ ,}$$

et

$$|\tau((a_\alpha - a)bp^\perp)| \leq \|a_\alpha - a\|_\infty \, \tau(|bp^\perp|) \leq 2\|a\| \, \tau(|b|^p)^{1/p} \, \tau(p^\perp)^{1/q} ,$$

$$|\tau((a_\alpha - a)bp^\perp)| \leq 2\|a\|_\infty \, \|b\|_p \, \varepsilon^{1/q} .$$

Donc $\lim_\alpha \tau(a_\alpha b) = \tau(ab) = 0$.

C. Q. F. D.

Comme $\mathfrak{a}$ est dense dans $L^p(\mathfrak{a}, \tau)$, pour tout $p \in [1 , +\infty[$, on en déduit que ψ est nulle.

On peut alors énoncer le théorème suivant.

THÉORÈME 2. - Soit $\mathfrak{a}$ une algèbre de von Neumann possédant une trace τ fidèle, normale et finie, et soit $(\mathfrak{a}_\alpha)_{\alpha\in I}$ une famille filtrée, croissante de sous-algèbres de von Neumann de $\mathfrak{a}$ telle que $\bigcup_{\alpha\in I} \mathfrak{a}_\alpha$ engendre $\mathfrak{a}$. Alors $L^p(\mathfrak{a}, \tau)$ est isomorphe isométriquement à l'espace de Banach $C \cup B_p$, pour tout $p \in]1 , +\infty[$.

Démonstration. - D'après le lemme précédent, $\bigcup_{\alpha\in I} L^p(\mathfrak{a}_\alpha , \tau_\alpha)$ est dense dans $L^p(\mathfrak{a}, \tau)$. Considérons l'application Φ suivante

$$\begin{array}{rcl} L^p(\mathfrak{a}, \tau) & \xrightarrow{\Phi} & C \quad B_p \\ a & \longmapsto & (E_\alpha(a))_{\alpha\in I} \end{array}$$

L'application Φ est isométrique sur $\bigcup_{\alpha\in I} L^p(\mathfrak{a}_\alpha , \tau_\alpha)$, car, si $a \in L^p(\mathfrak{a}_\alpha , \tau_\alpha)$, alors $E_\beta(a) = a$, pour $\beta > \alpha$ et

$$\sup_\alpha \|E_\alpha(a)\|_p = \lim_\alpha \|E_\alpha(a)\|_p = \|a\|_p .$$

Comme $\bigcup_{\alpha\in I} L^p(\mathfrak{a}_\alpha , \tau_\alpha)$ est dense dans $L^p(\mathfrak{a}, \tau)$, Φ est une isométrie de $L^p(\mathfrak{a}, \tau)$ dans $C \cup B_p$. Montrons que Φ est surjective si $p \in]1 , +\infty[$.

Soit $(a_\alpha)_{\alpha\in I}$ dans $C \cup B_p$. C'est une famille bornée d'éléments de $L^p(\mathfrak{a}, \tau)$, elle est donc $\sigma(L^p , L^q)$-relativement compacte ($p^{-1} + q^{-1} = 1$) car $L^p(\mathfrak{a}, \tau)$ est réflexif. Soit $(a_i)_{i\in J}$ une sous-famille convergeant faiblement vers $a \in L^p(\mathfrak{a}, \tau)$. Soit $\alpha \in I$, $\forall j \in J$ tel que $j > \alpha$, $E_{\alpha j}(a_j) = a_\alpha = E_\alpha(a_j)$. Donc $E_\alpha(a) = a_\alpha$, $\forall \alpha \in I$, car E_α , fortement continu, est donc faiblement continu. Cela implique que a est la seule valeur d'adhérence de $(a_\alpha)_{\alpha\in I}$, donc $(a_\alpha)_{\alpha\in I}$ converge faiblement vers a . En fait, $(a_\alpha)_{\alpha\in I}$ converge fortement vers a car la famille filtrée d'opérateurs $(E_\alpha)_{\alpha\in I}$ converge fortement vers l'identité de $L(L^p(\mathfrak{a}, \tau))$ sur $\bigcup_{\alpha\in I} \mathfrak{a}_\alpha$, partie dense de $L^p(\mathfrak{a}, \tau)$. Donc, puisque $(E_\alpha)_{\alpha\in I}$ est équicontinue car $\sup_\alpha \|E_\alpha\|_\infty = 1 < +\infty$, elle converge fortement vers l'identité de $L^p(\mathfrak{a}, \tau)$, c'est-à-dire

$$\lim_\alpha \|E_\alpha(a) - a\|_p = 0 , \quad \forall a \in L^p(\mathfrak{a}, \tau) .$$

Remarques. - Si $p = 2$, les E_α sont les projections orthogonales sur les sous-espaces de Hilbert $L^2(\mathfrak{a}_\alpha , \tau_\alpha)$ de $L^2(\mathfrak{a}, \tau)$.

Si $p = 1$, une famille cohérente bornée n'est pas en général faiblement relativement compacte mais $\bigcup_{\alpha\in I} \mathcal{a}_\alpha$ est encore dense dans $L^1(\mathcal{a}, \tau)$. Donc si l'on prend pour $C \cup B_1$ l'espace des familles cohérentes faiblement relativement compactes de $L^1(\mathcal{a}, \tau)$, $L^1(\mathcal{a}, \tau)$ sera encore isométriquement isomorphe à $C \cup B_1$.

Un cadre particulièrement intéressant pour appliquer ce théorème est celui où l'algèbre de V-N finie $\mathcal{a}$ admet une famille croissante $(\mathcal{a}_\alpha)_{\alpha\in I}$ de sous-algèbres de V-N de dimension finie telle que $\bigcup_{\alpha\in I} \mathcal{a}_\alpha$ engendre $\mathcal{a}$ (cela implique que $\mathcal{a}$ est injective, et même approximativement de dimension finie si $\mathcal{a}$ est à prédual séparable, voir [2]), car alors sur $\mathcal{a}_\alpha$ toutes les normes sont équivalentes et $\mathcal{a}_\alpha$ est complet pour toutes les normes L^p . Donc $L^p(\mathcal{a}_\alpha, \tau_\alpha) = \mathcal{a}_\alpha$, et un opérateur de $L^p(\mathcal{a}, \tau)$ se représente comme une famille cohérente d'opérateurs bornés. Ce cas se présente dans l'étude des champs quantiques de fermions, et ce sera l'objet du paragraphe suivant.

3. Application du théorème à la théorie des champs.

Soit H un espace de Hilbert de dimension infinie, muni d'une conjugaison J , c'est-à-dire que J est une involution ($J^2 = 1_H$) anti-linéaire et anti-unitaire ($(Jx, Jy) = (y, x)$). On note ΛH l'espace de Fock anti-symétrique, c'est-à-dire l'espace de Hilbert défini par $\Lambda H = \bigoplus_{n=0}^{+\infty} \bar{\Lambda}^n H$, somme hilbertienne des $\bar{\Lambda}^n H$ (où $\bar{\Lambda}^0 H = \mathbb{C}$, $\bar{\Lambda}^n H$ désignant le complété du préhilbertien $\Lambda^n H$ muni du produit scalaire canonique $\langle u_1 \wedge \dots \wedge u_n , v_1 \wedge \dots \wedge v_n\rangle = \det[(u_i , v_j)]$, $\bar{\Lambda}^n H$ est aussi l'image de $\hat{\otimes}^n H$ (produit tensoriel hilbertien de n copies de H) par le projecteur orthogonal d'anti-symétrisation $e = (1/n!) \sum_{\sigma\in G_n} \epsilon(\sigma)\, \pi(\sigma)$, où G_n est le groupe des permutations d'ordre n , $\epsilon(\sigma)$ la signature de σ et $\pi(\sigma)$ l'opérateur de $\hat{\otimes}^n H$ défini par

$$\forall \sigma \in G_n , \quad \pi(\sigma)(x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_n) = x_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes x_{\sigma(n)} .$$

Pour tout x dans H , on définit un opérateur C_x de ΛH par

$$\forall u \in \bar{\Lambda}^n H , \quad C_x(u) = \sqrt{n+1}\; x \wedge u = \sqrt{n+1}\; e(x \otimes u) .$$

C_x s'appelle un opérateur de création. On démontre que C_x est borné et que $\|C_x\| = \|x\|$ (voir [3]).

On définit de même un opérateur d'annihilation A_x qui est l'adjoint de C_x . On a donc également $\|A_x\| = \|x\|$. Remarquons que l'application $x \longmapsto C_x$ de H dans $L(\Lambda H)$ est linéaire, mais que, par contre, $x \longrightarrow A_x$ est anti-linéaire, car $A_{\lambda x} = (\lambda C_x)^* = \bar{\lambda} A_x$.

Considérons la sous-algèbre $\mathcal{C}_1$ de $L(\Lambda H)$ engendrée par les opérateurs $B_x = C_x + A_{\bar{x}}$ ($\bar{x} = Jx$) , où x parcourt H . C'est une sous-algèbre involutive de $L(\Lambda H)$ car $B_x^* = B_{\bar{x}}$ et elle contient l'identité I de $L(\Lambda H)$ car

$$B_x B_y + B_y B_x = 2(x , \bar{y})I , \quad \forall x , y \in H .$$

(voir [5]). Soit $\mathcal{C}$ l'adhérence faible de $\mathcal{C}_1$ dans $L(\Lambda H)$: $\mathcal{C}$ est une algèbre de V-N. Pour tout B de $\mathcal{C}$, posons $\tau(B) = (B\Omega, \Omega)$, où Ω désigne le vecteur vide, c'est-à-dire l'élément 1 de $\Lambda^0 H = \underset{\sim}{C}$. On démontre que τ est une trace fidèle, normale et finie (les seules propriétés non triviales à démontrer étant la normalité, c'est-à-dire $\tau(AB) = \tau(BA)$; pour tout A et B de $\mathcal{C}$ et la fidélité, voir L. GROSS [5]). On montre que $\Lambda H \simeq L^2(\mathcal{C}, \tau)$ [5]. Soit $(H_\alpha)_{\alpha\in I}$ une famille filtrée croissante de sous-espaces de dimension finie de H, H_α étant stable par conjugaison, pour tout α, et telle que $\bigcup_{\alpha\in I} H_\alpha = H$.

Considérons les sous-algèbres $\mathcal{C}_\alpha$ de $\mathcal{C}$ engendrées par les ensembles $\{B_x ; B_x \in L(\Lambda H), x \in H_\alpha\}$, ces algèbres sont involutives, contiennent toutes les identités I et sont de dimension finie (si $\dim H_\alpha = n_\alpha$, $\dim \mathcal{C}_\alpha = 2^{n_\alpha}$). Elles forment donc une famille filtrée croissante de sous-algèbres de V-N de dimension finie.

De plus, chaque $\mathcal{C}_\alpha$ laisse stable H_α et $\bigcup_{\alpha\in I} \mathcal{C}_\alpha = \mathcal{C}_1$ est bien $\sigma(L(\Lambda H), L(\Lambda H)_*)$-dense dans $\mathcal{C}$. Donc $\bigcup_{\alpha\in I} \mathcal{C}_1$ engendre $\mathcal{C}$ comme V-N algèbre, et l'on peut appliquer le théorème précédent. Donc

$$\text{pour tout } p \in]1, +\infty[, \quad L^p(\mathcal{C}, \tau) \simeq C \cup B_p,$$

avec

$$C \cup B_p = \{(B_\alpha)_{\alpha\in I} ; B_\alpha \in \mathcal{C}_\alpha, E_{\alpha\beta}(B_\beta) = B_\alpha \text{ si } \alpha < \beta \text{ et } \sup_\alpha \|B_\alpha\|_p < +\infty\}.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] CONNES (A.). - Quelques aspects de la théorie des algèbres d'opérateurs, IRMA Strasbourg, R. C. P. 25, vol. 24, p. 13-87. - Strasbourg, Institut de Recherche Mathématique Avancée, 1977.

[2] CONNES (A.). - Classification of injective factors, Ann. of Math., t. 104, 1976, p. 73-115.

[3] COOK (J. M.). - The mathematics of second quantization, Trans. Amer. math. Soc., t. 74, 1953, p. 222-245.

[4] DIXMIER (J.). - Formes linéaires sur un anneau d'opérateurs, Bull. Soc. math. France, t. 81, 1953, p. 9-39.

[5] GROSS (L.). - Physical ground state, J. of funct. Analysis, t. 10, 1972, p. 52-109.

[6] NELSON (E.). - A note on non commutative integration, J. of funct. Analysis, t. 15, 1974, p. 103-116.

[7] SAKAI (S.). - C^*- and W^*-algebras. - Berlin, Springer-Verlag, 1971 (Ergebnisse der Mathematik, 60).

[8] SEGAL (I. E.). - A non commutative extension of abstract integration, Ann. of Math., t. 57, 1953, p. 401-457.

[9] STINESPRING (W.). - Integration theorems for gages and duality of unimodular groups, Trans. Amer. math. Soc., t. 90, 1959, p. 15-56.

[10] TOMIYAMA (J.). - On the projection of norm one in W^*-algebras, Proc. Japan Acad., t. 33, 1957, p. 608-612.

Référence ajoutée à la correction des épreuves :

[11] KUNZE (R. A.). - L_p Fourier transforms on locally compact unimodular groups, Trans. Amer. math. Soc., t. 89, 1958, p. 519-540.