André Unterberger

Sur la continuité sur $L2$ des opérateurs pseudo-différentiels

Séminaire Paul Krée, tome 4 (1977-1978), exp. n° 4, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SPK_1977-1978__4__A5_0>

Séminaire Paul KRÉE
(Equations aux dérivées partielles
en dimension infinie)
4e année, 1977-1978, n° 4, 12 p.

SUR LA CONTINUITÉ SUR L^2 DES OPÉRATEURS PSEUDO-DIFFÉRENTIELS

par André UNTERBERGER (*)

1. Introduction.

On considère l'espace $\mathbb{R}^\nu$, l'espace de phase $\mathbb{R}^{2\nu}$ muni de la forme symplectique définie par

$$[(x , \xi) , (y , \eta)] = - \langle x , \eta\rangle + \langle y , \xi\rangle ,$$

et la quantification de Weyl $\mathrm{Op}_{\frac{1}{2}}$ définie, pour $a \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2\nu})$ et $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu)$, par

(1.1) $$\mathrm{Op}_{\frac{1}{2}}(a)\, u(x) = \iint a\left(\frac{x + y}{2} , \xi\right) \exp(2i\pi\langle x - y , \xi\rangle)\, u(y)\, dy\, d\xi .$$

On sait que, pour tout $a \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2\nu})$, l'opérateur $\mathrm{Op}_{\frac{1}{2}}(a)$ continue à être défini de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^\nu)$. On a aussi, pour $u , v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu)$,

(1.2) $$(\mathrm{Op}_{\frac{1}{2}}(a)u , v) = \iint a(x , \xi)\, H(u , v , x , \xi)\, dx\, d\xi ,$$

où $H(u , v)$ est la fonction de Wigner définie par

(1.3) $$H(u , v , x , \xi) = 2^\nu \int u(x + z)\, \bar{v}(x - z) \exp(-4i\pi\langle z , \xi\rangle\, dz .$$

Les grandes lettres $X , Y , Z , \ldots$ désigneront toujours des points de l'espace de phase $\mathbb{R}^{2\nu}$. Une base symplectique est une base dont la matrice de passage, relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^{2\nu}$, est une matrice symplectique, c'est-à-dire une matrice S vérifiant l'identité $[SX , SY] = [X , Y]$. Une norme sur $\mathbb{R}^{2\nu}$ ser dite symplectique si elle est euclidienne et admet une base orthonormale qui soit en même temps une base symplectique.

Rappelons (formule de I. Segal) qu'il existe un homomorphisme $M \longmapsto \tilde{M}$ du groupe métaplectique $Mp(\nu)$ sur le groupe symplectique $Sp(\nu)$ tel que, pour tout $a \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2\nu})$, on ait

(1.4) $$M\, \mathrm{Op}_{\frac{1}{2}}(a)\, M^{-1} = \mathrm{Op}_{\frac{1}{2}}(a \circ \tilde{M}^{-1}) .$$

Il est équivalent de dire que, quels que soient u et $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^\nu)$, on a

(1.5) $$H(Mu , Mv) = H(u , v) \circ \tilde{M}^{-1} .$$

Si $Z = (z , \zeta) \in \mathbb{R}^{2\nu}$, et $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^\nu)$, posons

(1.6) $$\tau_Z\, u(x) = u(x - z) \exp(2i\pi\langle x - \frac{z}{2} , \zeta\rangle) .$$

Ces transformations τ_Z ("translations de phase") vérifient les identités

(1.7) $$(\tau_Z)^* = \tau_{-Z} = \tau_Z^{-1} , \quad \tau_{Z_1} \tau_{Z_2} = \exp(i\pi[Z_1 , Z_2])\, \tau_{Z_1+Z_2}$$

(*) Texte reçu en Janvier 1979.

André UNTERBERGER, Département de Mathématiques, Université de Reims, Moulin de la Housse, B. P. 347, 51062 REIMS CEDEX.

et

(1.8) $$H(\tau_Z u , \tau_Z v , X) = H(u , v , X - Z) ,$$

la dernière identité permettant de prolonger l'homomorphisme $M \longmapsto \tilde{M}$ en un homomorphisme d'un groupe de transformations unitaires de $L^2(\underset{\sim}{R}^\nu)$ sur le groupe des transformations symplectiques affines de $\underset{\sim}{R}^{2\nu}$. On se servira également de la formule

(1.9) $$H(\tau_{-Z} u , \tau_Z v , X) = \exp(4i\pi[X , Z]) H(u , v , X) ,$$

dont la vérification est immédiate.

L'ingrédient essentiel de notre étude sera un champ $Y \longmapsto \| \ \|_Y$ de normes symplectiques de $\underset{\sim}{R}^{2\nu}$. On supposera toujours la condition (i) suivante vérifiée :

Il existe $C > 0$ telle que, quels que soient $X , Y , Z \in \underset{\sim}{R}^{2\nu}$, l'inégalité $\|Y - X\|_X \leq C^{-1}$ entraine $\|Z\|_Y \leq C \|Z\|_X$. (noter qu'alors, en augmentant C au besoin, on a aussi $\|Z\|_X \leq C \|Z\|_Y$ dans les mêmes conditions.)

Pour tout entier $k \geq 0$, on appellera symbole d'ordre 0 et de classe C^k toute fonction $a \in C^k(\underset{\sim}{R}^{2\nu})$ vérifiant la condition suivante :

Quel que soit $p = 0 , 1 , \dots , k$, il existe $C > 0$ tel que, quel que soit $X \in \underset{\sim}{R}^{2\nu}$, et quels que soient les vecteurs $V_1 , \dots , V_p$ vérifiant $\|V_j\|_X \leq 1$, on ait

$$|(\Pi_{j=1}^p V_j(D)) \ a(X)| \leq C .$$

On a également une notion évidente d'ensemble borné de symboles d'ordre 0 et de classe C^k.

Le but de cet exposé est d'obtenir des conditions aussi générales que possible concernant le champ $Y \longmapsto \| \ \|_Y$ permettant d'affirmer que, pour tout symbole a d'ordre 0 et de classe C^k, avec k suffisamment grand, l'opérateur $Op_{\frac{1}{2}}(a)$ s'étend en un opérateur borné de $L^2(\underset{\sim}{R}^\nu)$ dans lui-même. Cette étude a été faite, dans divers degrés de généralités, par BEALS [1], HÖRMANDER [3], UNTERBERGER [6], ainsi que, dans ces cas plus particuliers, dans des travaux plus anciens. Dans le cadre exact que nous venons de définir, le présent travail fournit à notre connaissance les meilleurs résultats ; il n'en est plus ainsi si l'on sort de ce cadre, par exemple dans des directions suivantes :

(a) Etude de la continuité de $Op_{\frac{1}{2}}(a)$ sur d'autres espaces que $L^2(\underset{\sim}{R}^\nu)$ ou des espaces liés à $L^2(\underset{\sim}{R}^\nu)$;

(b) Appelons norme sous-symplectique toute norme moindre qu'une certaine norme symplectique : Il est clair que tout symbole d'ordre 0, en un sens évident, relativement à un champ de normes sous-symplectiques, est aussi un symbole d'ordre 0 relativement à certains champs de normes symplectiques. En ce sens, les présents résultats contiennent ceux de BEALS [1] relatifs à la continuité L^2 ; mais ils ne sont pas toujours comparables à ceux de HÖRMANDER [3], qui a tenu compte du fait que l'on peut, dans le cas sous-symplectique, affaiblir dans une certaine direction les hypothèses sur le champ de normes ;

(c) Dans des cas (d'ailleurs sous-symplectiques) très particuliers, par exemple celui des symboles classiques (classe $S^0_{1,0}$ avec une notation traditionnelle dûe à Hörmander), on peut, comme on sait, affaiblir considérablement les hypothèses de régularité sur les symboles : encore faut-il remarquer que ces résultats sont valables (à notre connaissance) pour la quantification Op plutôt que celle de Weyl $\mathrm{Op}_{\frac{1}{2}}$, le passage de l'une à l'autre n'étant nullement évident pour des symboles peu différentiables.

Depuis le travail fondamental de CALDERON-VAILLANCOURT [2], la méthode employée pour prouver la continuité sur L^2 d'un opérateur $\mathrm{Op}_{\frac{1}{2}}(a)$ se déploie en général, avec des variantes, suivant le plan que voici :

On écrit $a = \sum \varphi_j\, a$ à l'aide d'une partition de l'unité, discrète ou non ; on montre ensuite qu'il y a "intersection faible" entre les opérateurs $A_j = \mathrm{Op}_{\frac{1}{2}}(\varphi_j a)$ au sens que les opérateurs $A_j A_k^*$ et $A_j^* A_k$ ont une norme faible, en un sens qui est défini avec précision par le lemme de Cotlar. Le point essentiel consiste à évaluer la norme de $A_j A_k^*$ et $A_j^* A_k$, ce à quoi l'on parvient pourvu que l'on ait fait précéder l'étude de la continuité L^2 de l'étude de la composition des symboles, celle-ci se faisant commodément, dans le cadre défini plus haut, si l'on suppose (voir § 3) une hypothèse du genre

$$\|Z\|_Y \leq C\, \|Z\|_X\, (1 + \|Y - X\|_X)^N .$$

Dans le présent travail, nous éliminons ce qui nous paraît superflu dans cette hypothèse, en découpant plus finement les opérateurs de façon à se ramener à une somme de projecteurs (non orthogonaux) ; on utilise également quelques formules relatives à l'oscillateur harmonique, qui permettront peut-être au lecteur de mieux comprendre le rôle que jouent les normes symplectiques ; enfin, on raffine un peu le lemme de Cotlar, dans deux situations directement adaptées à notre problème. La méthode de régularisation que nous avons employée dans [6], qui rejoint la présente méthode sur la partie "calculatoire" du chemin, nécessitait des hypothèses spécifiques de différentiabilité des symboles plutôt que des conditions plus faibles qui apparaîtront plus loin, mais présentait l'avantage de fournir en même temps l'inégalité de Garding ou même, éventuellement, des raffinements de celle-ci.

2. De diverses formes du lemme de Cotlar.

LEMME 2.1. - *Soient* A_Y *des opérateurs bornés sur* $L^2(\mathbb{R}^\nu)$ *dépendant continûment de* $Y \in \mathbb{R}^p$. *Si l'opérateur sur* $L^2(\mathbb{R}^p)$ *de noyau* $k(Y, Y') = \|A_Y A_{Y'}^*\|$ *est borné de norme* N, *alors l'opérateur* $A = \int A_Y^* A_Y \, dY$ *sur* $L^2(\mathbb{R}^\nu)$ *est borné de norme* $\leq N$.

Preuve.

$$\|Au\|^2 = \iint (A_Y^* A_Y A_{Y'}^* A_{Y'} u , u) \, dY \, dY'$$
$$\leq \iint k(Y , Y') \|A_{Y'} u\| \|A_Y u\| \, dY \, dY'$$
$$\leq N \int \|A_Y u\|^2 \, dY = N(Au , u) \leq N \|Au\| \|u\| .$$

Remarque. - Le lemme de Cotlar traditionnel est en un sens plus général puisqu'ici $A_Y^* A_Y$ est autoadjoint ≥ 0 ; en revanche, il est moins précis puisqu'il fournit une comparaison avec l'opérateur de noyau $\|A_Y^* A_Y A_{Y'}^* A_{Y'}\|^{1/2}$. Or on a

$$\begin{aligned}
\|A_Y A_{Y'}^*\| &= \|A_{Y'} A_Y^* A_Y A_{Y'}^*\|^{1/2} \\
&= \|(A_{Y'}^* A_{Y'})^{1/2} A_Y^* A_Y A_{Y'}^*\|^{1/2} \\
&= \|A_{Y'} A_Y^* A_Y (A_{Y'}^* A_{Y'})^{1/2}\|^{1/2} \\
&= \|(A_{Y'}^* A_{Y'})^{1/2} A_Y^* A_Y (A_{Y'}^* A_{Y'})^{1/2}\|^{1/2} \\
&\leq \|A_Y^* A_Y A_{Y'}^* A_{Y'}\|^{1/4} \|A_{Y'}^* A_{Y'} A_Y^* A_Y\|^{1/4} ,
\end{aligned}$$

la dernière inégalité provenant d'un argument d'interpolation classique (cf. [5], p. 33).

LEMME 2.2. - Soient φ_Y et $\psi_Y \in L^2(\underset{\sim}{R}^\nu)$ des fonctions dépendant continûment de $Y \in R^p$. Soient K_1 et K_2 les opérateurs sur $L^2(\underset{\sim}{R}^p)$ de noyaux

$$k_1(Y , Y') = (\varphi_{Y'} , \varphi_Y) \quad \text{et} \quad k_2(Y , Y') = (\psi_{Y'} , \psi_Y) .$$

Si K_1 et K_2 sont bornés, ils sont alors autoadjoints positifs, et l'opérateur A sur $L^2(\underset{\sim}{R}^\nu)$ défini par

$$Au = \int (u , \varphi_Y) \, \psi_Y \, dY$$

est borné. De plus, $\|A\| = \|K_1^{1/2} K_2^{1/2}\| \leq \|K_1 K_2\|^{1/2}$.

Preuve. - Soit $L : L^2(\underset{\sim}{R}^\nu) \longrightarrow L^2(\underset{\sim}{R}^p)$ défini par $(Lu)(Y) = (u , \varphi_Y)$; on a alors, pour $\beta \in L^2(\underset{\sim}{R}^p)$, $(L^* \beta)(x) = \int \varphi_Y(x) \, \beta(Y) \, dY$.

On pose de même $(Mu)(Y) = (u , \psi_Y)$.

On a alors $A = M^* L$, $LL^* = K_1$ et $MM^* = K_2$.

Comme, pour tout $\beta \in L^2(\underset{\sim}{R}^p)$, on a $\|L^* \beta\|_{L^2(\underset{\sim}{R}^\nu)} = \|K_1^{1/2} \beta\|_{L^2(\underset{\sim}{R}^p)}$, on peut écrire

$$\|A\| = \|A^* A\|^{1/2} = \|L^* K_2 L\|^{1/2} = \|K_1^{1/2} K_2 L\|^{1/2}$$
$$= \|L^* K_2 K_1^{1/2}\|^{1/2} = \|K_1^{1/2} K_2 K_1^{1/2}\|^{1/2} = \|K_1^{1/2} K_2^{1/2}\| .$$

3. Oscillateur harmonique et méthode des projecteurs.

Voici quelques formules plus développées dans [6]. Soit $\| \ \|_1$ une norme symplectique : L'oscillateur harmonique associé est, par définition, l'opérateur

$Op_{\frac{1}{2}}(\pi\|X\|_1^2)$, dont la résolution spectrale (cf. (1.4) et, pour la norme canonique, la théorie des fonctions d'Hermite) est donnée par

$$(3.1)\qquad \begin{cases} 1 = \sum_{j\geq 0} B_j \\ Op_{\frac{1}{2}}(\pi\|X\|_1^2) = \sum_{j\geq 0} (\frac{\nu}{2} + j)B_j \end{cases},$$

où le rang du projecteur B_j est le nombre de multi-indices sur $\underset{\sim}{R}^\nu$ de longueur j . Un élément normalisé de l'image de B_0 s'appellera un état fondamental de l'oscillateur harmonique. Voici comment on peut l'obtenir, en se servant du livre de MAASS [4]. On écrit $\|X\|_1^2 = (T^{-1} X , X)$, avec $T = \begin{pmatrix} A & B \\ B' & C \end{pmatrix} \in P_\nu$, espace des matrices symplectiques symétriques > 0 .

On pose alors $\mu(T) = \Lambda = A^{-1} - iA^{-1} B \in \mathfrak{S}_\nu$, espace des matrices symétriques de la forme $X + iY$, avec $X > 0$. On peut voir que $i\overline{\mu(T)}$ est la matrice associée à T^{-1} dans la représentation de Siegel.

D'après [6], un état fondamental de l'oscillateur $Op_{\frac{1}{2}}(\pi\|X\|_1^2)$ est, à normalisation près, la fonction $\exp(-\pi(\Lambda x , x))$.

Revenant au cas d'un champ $Y \longmapsto \| \|_Y$ de normes symplectiques, on appellera ψ_Y un état fondamental de l'oscillateur harmonique $Op_{\frac{1}{2}}(\pi\|X\|_Y^2)$; la fonction $\varphi_Y = \tau_Y \psi_Y$ (cf. (1.6)) est alors un état fondamental de l'opérateur $Op_{\frac{1}{2}}(\pi\|X-Y\|_Y^2)$. On a aussi la formule, valable pour $\zeta > 0$,

$$(3.2)\qquad Op_{\frac{1}{2}}(\exp(-2\pi)\ \mathrm{th}\ \tfrac{\zeta}{2}\|X - Y\|_Y^2) = (\mathrm{ch}\ \tfrac{\zeta}{2})^\nu \exp(-\pi\ \zeta\ Op_{\frac{1}{2}}(\|X - Y\|_Y^2)) .$$

Faisant $\zeta = \infty$ et utilisant (3.1), on retrouve la formule

$$(3.3)\qquad 2^\nu \exp(-2\pi\|X - Y\|_Y^2) = H(\varphi_Y , \varphi_Y , X)$$

qui exprime que le membre de gauche est le symbole de l'opérateur de projection orthogonale sur $\{\varphi_Y\}$.

On suppose maintenant la condition (i), relative au champ de normes symplectiques, vérifiée. On choisit alors $g \in \mathcal{D}(\underset{\sim}{R})$ à support dans $]-\infty , C^{-1}[$, réelle, avec $g \geq 0$ et $g(0) \neq 0$, et l'on pose

$$(3.4)\qquad f_Y(X) = (\int g(\|X - T\|_T^2) \exp(-2\pi\|X - T\|_T^2)\ dT)^{-1}\ g(\|X - Y\|_Y^2) ,$$

de sorte qu'on a l'identité

$$(3.5)\qquad \int f_Y(X) \exp(-2\pi\|X - Y\|_Y^2)\ dY = 1 .$$

Compte tenu de (i), les fonctions $X \longmapsto f_Y(X)$ constituent, pour tout entier $k \geq 0$, un ensemble borné de symboles d'ordre 0 et de classe C^k .

Etant donné un symbole $a \in \mathcal{S}'(\underset{\sim}{R}^{2\nu})$, posons

$$(3.6)\qquad K(Y , Z) = 2^\nu \int a(X)\ f_Y(X) \exp(-4i\pi[X , Z])\ dX .$$

D'après ce qui précède et une intégration par parties triviale, on voit que, si a est un symbole d'ordre 0 et de classe C^k , il existe une constante $C > 0$

telle que, quels que soient Y et $Z \in \underset{\sim}{R}^{2\nu}$, on ait $K(Y , Z) \leq C(1 + \|Z\|_Y)^{-k}$.

Par ailleurs, grâce à (3.5) et (1.8), on a, ainsi que le montre un calcul immédiat l'identité valable, pour $u \in \mathcal{S}(\underset{\sim}{R}^{\nu})$,

$$(3.7) \qquad \mathrm{Op}_{\frac{1}{2}}(a)\, u = \iint K(Y , Z)(u , \tau_Z\, \varphi_Y)\, \tau_{-Z}\, \varphi_Y\, dY\, dZ \,.$$

On a utilisé ici le fait bien connu (et dont la vérification est d'ailleurs immédiate) que $H(\varphi , \psi)$ est le symbole du projecteur $u \longmapsto (u , \psi)\varphi$. Si l'on fait opérer $S \in Sp(\nu)$ sur l'espace P_ν des matrices symplectiques symétriques > 0 par $T \longmapsto STS'$, on voit, d'après [4], p. 39, qu'étant données deux normes symplectiques il est possible de trouver une base symplectique dans laquelle la première s'écrit $\sum x_j^2 + \xi_j^2$ et la seconde $\sum \lambda_j\, x_j^2 + \lambda_j^{-1}\, \xi_j^2$ ($\lambda_j > 0$) (cf. [6]).

Si Y et Y' sont deux points quelconques de $\underset{\sim}{R}^{2\nu}$, on peut donc noter $\{\lambda_1 , \ldots , \lambda_\nu , \lambda_1^{-1} , \ldots , \lambda_\nu^{-1}\}$ l'ensemble des valeurs propres de la forme quadratique $\| \|_{Y'}^2$ relativement à $\| \|_Y^2$, les λ_j étant des fonctions de (Y , Y') ; on pose $\mu_j = \lambda_j^{1/2} + \lambda_j^{-(1/2)} \geq 2$.

Définissons la norme euclidienne (non symplectique) $\| \|_{Y,Y'}$ par

$$(3.8) \qquad \|Z\|_{Y,Y'}^2 = \inf_{Z_1+Z_2=Z} \{\|Z_1\|_Y^2 + \|Z_2\|_{Y'}^2\} \,.$$

Soit $\det_{Y,Y'}$ le déterminant de la matrice de cette forme quadratique relativement à une base symplectique de $\underset{\sim}{R}^{2\nu}$ (on a, ainsi qu'on le verra plus loin, $\det_{Y,Y'} = \prod_1^\nu \mu_j^{-2}$). Une conséquence du paragraphe suivant est l'égalité

$$(3.9) \qquad |(\tau_{Z'}\, \varphi_{Y'} , \tau_Z\, \varphi_Y)| = 2^{\nu/2}\, (\det_{Y,Y'})^{1/4} \exp(-\pi\|Y + Z - Y' - Z'\|_{Y,Y'}^2) \,.$$

Cette formule, jointe au lemme 2.2 et à l'expression (3.7) de $\mathrm{Op}_{\frac{1}{2}}(a)$ comme somme de projecteurs, fournit un critère de continuité L^2 de $\mathrm{Op}_{\frac{1}{2}}(a)$ que nous laissons au lecteur le soin d'expliciter. Notons qu'il y intervient le noyau, fonction de Y , Z , Y' , Z', d'un opérateur sur $L^2(\underset{\sim}{R}^{4\nu})$, alors qu'il serait plus agréable de se débarrasser de Z et Z' qui semblent jouer un rôle plus auxiliaire. On y parvient, moyennant une hypothèse plus spécifique sur $K(Y , Z)$, au prix de laborieux calculs (cf. section suivante) qui peuvent d'ailleurs être considérablement réduits si l'on se contente d'une précision moindre.

THÉORÈME 3.1. – <u>Avec les notations développées dans cette section, supposons qu'il existe</u> $C > 0$, $N \geq \nu/2$ <u>et</u> $N' > N$ <u>tels qu'on ait d'une part l'inégalité</u>

$$|K(Y , Z)| \leq C(1 + \|Z\|_Y^2)^{-N'} \,,$$

<u>et que d'autre part</u>

$$(1 + \|Y' - Y\|_{Y,Y'}^2)^{-N+(\nu/2)} \prod_{j=1}^{\nu} (\mu_j + \|Y' - Y\|_{Y,Y'}^2)^{-(1/2)}$$

<u>soit le noyau d'un opérateur borné sur</u> $L^2(\underset{\sim}{R}^{2\nu})$. <u>Alors</u> $\mathrm{Op}_{\frac{1}{2}}(a)$ <u>est borné sur</u> $L^2(\underset{\sim}{R}^{\nu})$.

Preuve. - D'après (3.7), on a

$$|(\mathrm{Op}_{\frac{1}{2}}(a)\ u\ ,\ u)| \leqslant \|A_1\ u\|\ \|A_2\ u\|\ ,$$

avec $\|A_1\ u\|^2 = \iint |K(Y\ ,\ Z)|\ |(u\ ,\ \tau_Z\ \varphi_Y)|^2\ dY\ dZ$ et $\|A_2\ u\|^2$ ayant une forme analogue.

On écrit alors

$$(3.10)\qquad \|A_1\ u\|^2 \leqslant C \int_0^1 \epsilon^{N'-1}\ (K_\epsilon\ u\ ,\ u)\ d\epsilon\ ,$$

avec

$$(3.11)\qquad (K_\epsilon\ u\ ,\ u) = \iint \exp(-\ 2\pi\epsilon\|Z\|_Y^2)\ |(u\ ,\ \tau_Z\ \varphi_Y)|^2\ dY\ dZ\ .$$

L'opérateur K_ϵ a pour symbole

$$2^\nu \iint \exp(-\ 2\pi\epsilon\|Z\|_Y^2)\ \exp(-\ 2\pi\|X - Y - Z\|_Y^2\ dY\ dZ$$
$$= (1 + \epsilon)^{-\nu} \int \exp(-\ \frac{2\pi\epsilon}{1 + \epsilon}\ \|X - Y\|_Y^2)\ dY\ ,$$

et il s'agit de prouver que la norme de $\epsilon^N\ K_\epsilon$ est bornée pour $\epsilon \longrightarrow 0$.

On peut remplacer, d'ailleurs, K_ϵ par

$$(3.12)\qquad K'_\epsilon = \int \mathrm{Op}_{\frac{1}{2}}(2^\nu\ \exp(-\ 2\pi\epsilon\|X - Y\|_Y^2)\ dY$$

que l'on peut écrire

$$(3.13)\qquad K'_\epsilon = \int L^2_{\epsilon,Y}\ dY\ ,$$

avec $\epsilon = 2\delta(1 + \delta^2)^{-1}$ et

$$(3.14)\qquad L_{\epsilon,Y} = \mathrm{Op}_{\frac{1}{2}}(2^{\nu/2}\ (1 + \delta^2)^{\nu/2}\ \exp(-\ 2\pi\delta\|X - Y\|_Y^2))\ .$$

La preuve de (3.13) résulte par exemple de (3.2).

D'après le résultat de la section suivante, on a

$$(3.15)\qquad \|L_{\epsilon,Y}\ L_{\epsilon,Y'}\| = 2^\nu\ \prod(\mu_j\ \epsilon + (\mu_j^2\ \epsilon^2 + (\epsilon^2 - 1)^2)^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}\ \exp(-\ \pi\epsilon\|Y' - Y\|^2_{Y,Y'})\ ,$$

une expression moindre que

$$C\ \prod(1 + \mu_j\ \epsilon)^{-(1/2)}\ \exp(-\ \pi\epsilon\|Y' - Y\|^2_{Y,Y'})$$
$$\leqslant C(1 + \epsilon\|Y' - Y\|^2_{Y,Y'})^{-N+(\nu/2)}\ [\prod_j\ (1 + \mu_j\ \epsilon)(1 + \epsilon\|Y' - Y\|^2_{Y,Y'})]^{-(1/2)}$$
$$\leqslant C\ \epsilon^{-N}(1 + \|Y' - Y\|^2_{Y,Y'})^{-N+(\nu/2)}\ \prod_j\ (\mu_j + \|Y' - Y\|^2_{Y,Y'})^{-(1/2)}\ .$$

L'hypothèse du théorème 3.1 et le lemme 2.1 permettent alors de conclure.

4. Calcul de $\|L_{\epsilon,Y} L_{\epsilon,Y'}\|$.

On a

(4.1) $$\|L_{\epsilon,Y} L_{\epsilon,Y'}\| = 2^{\nu} (1+\delta^2)^{\nu} \|Op_{\frac{1}{2}}(b)\| ,$$

avec

(4.2) $b(X)$
$$= 2^{2\nu} \iint \exp(-2\pi\delta\|Z_1 - Y\|_Y^2) \exp(-2\pi\delta\|Z_2 - Y'\|_{Y'}^2) \exp(-4i\pi[Z_1 - X , Z_2 - X]) \, dZ_1 \, dZ_2$$

Remplaçant b par $b_1(X) = b(X + \frac{Y+Y'}{2})$ et posant

$$Z_1 = 2^{-(1/2)} S + \frac{T}{2} + \frac{Y+Y'}{2} , \quad Z_2 = 2^{-(1/2)} S - \frac{T}{2} + \frac{Y+Y'}{2} ,$$

on obtient

(4.3) $$b_1(X) = 2^{\nu} \int b_2(T) \exp(-4i\pi[X , T]) \, dT$$

avec

(4.4) $$b_2(X) = \int \exp(-\pi\delta\|2^{-(1/2)}(X + Y' - Y) + S\|_Y^2) \times \exp(-\pi\delta\|2^{-(1/2)}(X + Y' - Y) - S\|_{Y'}^2) \exp(4i\pi\, 2^{-(1/2)} [S , X]) \, dS .$$

On a $\|Op_{\frac{1}{2}}(b)\| = \|Op_{\frac{1}{2}}(b_1)\| = \|Op_{\frac{1}{2}}(b_2)\|$, la deuxième égalité provenant du fait que (4.3) peut aussi s'écrire sous la forme $b_1 = b_2 \# 2^{-\nu} \delta$ ($\#$ étant la composition des symboles), le deuxième facteur étant le symbole d'une transformation unitaire.

Définissant l'isomorphisme $\sigma : \underset{\sim}{R}^{2\nu} \longrightarrow \underset{\sim}{R}^{2\nu}$ par l'identité

(4.5) $$[S , X] = -\langle S , \sigma^{-1} X\rangle ,$$

on peut écrire b_2 comme une fonction de Wigner :

(4.6) $$b_2(X) = 2^{-2\nu} H(e^{-\pi\delta\| \|_Y^2} , e^{-\pi\delta\| \|_{Y'}^2} , 2^{-\frac{1}{2}}(X + Y' - Y) , 2^{-\frac{1}{2}} \sigma^{-1} X) .$$

Il s'agit de prouver (3.15). Par une diagonalisation (cf. [4], p. 39), on se ramène au cas où

$$\|x , \xi\|_Y^2 = \sum x_j^2 + \xi_j^2 , \quad \|x , \xi\|_{Y'}^2 = \sum \lambda_j x_j^2 + \lambda_j^{-1} \xi_j^2 .$$

Jusqu'à apparition du contraire, on omettra dans ce qui suit les indices j et les signes $\prod$ de produit, mais on conservera ν : Une expression telle que $\prod_j (\delta(1+\lambda_j))^{-(1/2)}$ sera donc notée $\delta^{-(\nu/2)} (1+\lambda)^{-(1/2)}$.

En posant $X = (x , \xi)$, $Y = (y , \eta)$, $Z = (z , \zeta)$, et

(4.7) $$F(X , Z) = H(\exp(-\pi\delta\| \|_Y^2) , \exp(-\pi\delta\| \|_{Y'}^2) , X , \sigma^{-1} X) ,$$

on a

$$(4.8)\qquad F(X\ ,\ Z) = F_1(x\ ,\ \zeta)\ F_2(z\ ,\ \xi)\ ,$$

avec

$$(4.9)\quad F_1(x,\ \zeta) = 2^\nu \int \exp(-\ \pi\delta|x+y|^2)\ \exp(-\ \pi\delta\lambda|x-y|^2)\ \exp(-\ 4i\pi\langle y\ ,\ \zeta\rangle)\ dy\ ,$$

et

$$(4.9)'\quad F_2(z\ ,\ \xi) = 2^\nu \int \exp(-\ \pi\delta|\xi+\eta|^2)\ \exp(-\ \pi\delta\ \lambda^{-1}\ |\xi-\eta|^2)\ \exp(4i\pi\langle z\ ,\ \eta\rangle)\ d\eta\ .$$

En développant,

$$(4.10)\quad F_1(x\ ,\ \xi) = 2^\nu\ \delta^{-(\nu/2)}\ (1+\lambda)^{-(1/2)} \times \exp(-\ \frac{4\pi}{\delta(1+\lambda)}\ |\zeta|^2)\ \exp(-\ \frac{4\pi\delta\lambda}{1+\lambda}\ |x|^2)\ \exp(4i\pi\ \frac{1-\lambda}{1+\lambda}\ \langle x\ ,\ \zeta\rangle)\ .$$

et

$$(4.10)'\quad F_2(z\ ,\ \xi) = 2^\nu\ \delta^{-(\nu/2)}\ (1+\lambda)^{-(1/2)}\ \lambda^{1/2} \times \exp(-\ \frac{4\pi\lambda}{\delta(1+\lambda)}\ |z|^2)\ \exp(-\ \frac{4\pi\delta}{\delta(1+\lambda)}\ |\xi|^2)\ \exp(4i\pi\ \frac{1-\lambda}{1+\lambda}\ \langle z\ ,\ \xi\rangle)\ .$$

D'où

$$(4.11)\quad b_2(x,\ \xi) = \delta^{-\nu}\ \frac{\lambda^{1/2}}{1+\lambda}\ \exp(2i\pi\ \frac{1-\lambda}{1+\lambda}\ \{\langle x+y'-y\ ,\ \xi\rangle + \langle x\ ,\ \xi+\eta'-\eta\rangle\}) \times \exp(-\ 2\pi\{\frac{\delta\lambda}{1+\lambda}\ |x+y'-y|^2 + \frac{1}{\delta(1+\lambda)}\ |\xi|^2 + \frac{\lambda}{\delta(1+\lambda)}\ |x|^2 + \frac{\delta}{1+\lambda}\ |\xi+\eta'-\eta|^2\})\ .$$

Rappelons que $\varepsilon = 2\delta(1+\delta^2)^{-1}$.

On a $\|Op_{\frac{1}{2}}(b)\| = \|Op_{\frac{1}{2}}(b_3)\|$, avec

$$b_3(x\ ,\ \xi) = b_2(x - \frac{\varepsilon\delta}{2}\ (y'-y)\ ,\ \xi - \frac{\varepsilon\delta}{2}\ (\eta'-\eta))\ .$$

Utilisant les relations $\delta - \frac{\varepsilon\delta^2}{2} = \frac{\varepsilon}{2}$ et $1 - \frac{\varepsilon\delta}{2} = \frac{1}{1+\delta^2}$, ainsi que

$$(4.12)\qquad \|Y'-Y\|^2_{Y,Y'} = \frac{\lambda}{1+\lambda}\ (y'-y)^2 + \frac{1}{1+\lambda}\ (\eta'-\eta)^2$$

(qui résulte d'un calcul immédiat d'extremum), on obtient

$$(4.13)\qquad \|Op_{\frac{1}{2}}(b)\| = \exp(-\ \pi\varepsilon\|Y'-Y\|^2_{Y,Y'}\ \|Op_{\frac{1}{2}}(b_4)\|\ ,$$

avec

$$(4.14)\quad b_4(x\ ,\ \xi) = \delta^{-\nu}\ \frac{\lambda^{1/2}}{1+\lambda}\ \exp(-\ \frac{4\pi}{\varepsilon}(\frac{\lambda}{1+\lambda}\ |x|^2 + \frac{1}{1+\lambda}\ |\xi|^2)) \times \exp(4i\pi\ \frac{1-\lambda}{1+\lambda}\ \langle x\ ,\ \xi\rangle)\ \exp(2i\pi\ \frac{1-\delta^2}{1+\delta^2}\ \{\langle x\ ,\ \eta'-\eta\rangle + \langle y'-y\ ,\ \xi\rangle\})\ .$$

Posant $Z = \frac{1}{2}\frac{1-\delta^2}{1+\delta^2}\ (y'-y\ ,\ \eta'-\eta)$ et $b_4(X) = b_5(X)\ \exp(4i\pi[X\ ,\ Z])$, on a, d'après (1.9) et (1.2), $\|Op_{\frac{1}{2}}(b_4)\| = \|Op_{\frac{1}{2}}(b_5)\|$.

Egalement,

(4.15) $$b_5(x,\xi) = \delta^{-\nu}\,\frac{\lambda^{1/2}}{1+\lambda}\,\exp\!\Big(-\frac{4\pi}{\epsilon}\Big(\frac{\lambda}{1+\lambda}|x|^2+\frac{1}{1+\lambda}|\xi|^2\Big)\Big)\exp\!\Big(4i\pi\,\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\langle x,\xi\rangle\Big)\,.$$

Avec $c_1 = \overline{b_5} \# b_5$, on a

(4.16) $$\|Op_{\frac{1}{2}}(b)\| = \exp(-\pi\epsilon\|Y' - Y\|^2_{Y,Y'}\ \|Op_{\frac{1}{2}}(c_1)\|^{1/2})\,.$$

On explicite c_1 :

(4.17) $$c_1(x,\xi) = 2^{\nu}\,\delta^{-2\nu}\,\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2}\iiiint \exp\!\Big(-\frac{4\pi}{\epsilon}\Big(\frac{\lambda}{1+\lambda}(|z_1|^2+|z_2|^2)+\frac{I}{1+\lambda}(|\zeta_1|^2+|\zeta_2|^2)\Big)\Big)$$
$$\times \exp\!\Big(4i\pi\,\frac{1-\lambda}{1+\lambda}(-\langle z_1,\zeta_1\rangle+\langle z_2,\zeta_2\rangle)\Big)$$
$$\times \exp(4i\pi(\langle z_1,\zeta_2\rangle-\langle z_2,\zeta_1\rangle))$$
$$\times \exp(4i\pi(\langle z_2-z_1,\xi\rangle-\langle x,\zeta_2-\zeta_1\rangle))\,dz_1\,dz_2\,d\zeta_1\,d\zeta_2\,.$$

L'intégrale est $\mathfrak{F}(\exp(-\pi Q(z_1, z_2, \zeta_1, \zeta_2)))(2\xi, -2\xi, -2x, 2x)$, $\mathfrak{F}$ étant la transformation de Fourier et avec

(4.18) $$Q(z_1, z_2, \zeta_1, \zeta_2)$$
$$= \frac{4}{\epsilon}\frac{\lambda}{1+\lambda}(z_1^2+z_2^2) + \frac{4}{\epsilon}\frac{1}{1+\lambda}(\zeta_1^2+\zeta_2^2) - 4i\,\frac{1-\lambda}{1+\lambda}(-z_1\zeta_1+z_2\zeta_2) - 4i(z_1\zeta_2-z_2\zeta_1)\,.$$

La matrice A de cette forme quadratique peut s'écrire $A = \Omega^{-1}\begin{pmatrix}B & 0\\ 0 & C\end{pmatrix}\Omega$, avec

$$\Omega = 2^{-(1/2)}\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&-1\\1&-1&0&0\\0&0&1&1\end{pmatrix},\quad \Omega^{-1} = 2^{-(1/2)}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\1&0&-1&0\\0&1&0&1\\0&-1&0&1\end{pmatrix} = \Omega',$$

$$B = \begin{pmatrix}\frac{4}{\epsilon}\frac{\lambda}{1+\lambda} & \frac{4i}{1+\lambda}\\ \frac{4i}{1+\lambda} & \frac{4}{\epsilon}\frac{1}{1+\lambda}\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad C = \begin{pmatrix}\frac{4}{\epsilon}\frac{\lambda}{1+\lambda} & -\frac{4\lambda i}{1+\lambda}\\ -\frac{4\lambda i}{1+\lambda} & \frac{4}{\epsilon}\frac{1}{1+\lambda}\end{pmatrix}.$$

D'où $\det A = \det B.\det C = \dfrac{2^{8\nu}}{(1+\lambda)^4}(1+\lambda\epsilon^{-2})(\lambda^2+\lambda\epsilon^{-2})$.

Par ailleurs

$$(2\xi\ \ -2\xi\ \ -2x\ \ 2x)\ A^{-1}\begin{pmatrix}2\xi\\-2\xi\\-2x\\2x\end{pmatrix} = 2^{-1}\,(0\ \ -4x\ \ 4\xi\ \ 0)\begin{pmatrix}B^{-1} & 0\\ 0 & C^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-4x\\4\xi\\0\end{pmatrix}$$
$$= 2^3\Big\{(0\ \ -x)\,B^{-1}\begin{pmatrix}0\\-x\end{pmatrix} + (\xi\ \ 0)\,C^{-1}\begin{pmatrix}\xi\\0\end{pmatrix}\Big\}\,.$$

Il résulte de tout cela que l'on a

$$(4.19)\quad c_1(x\,,\,\xi) = 2^{-2\nu}\,\delta^{-2\nu}\,\lambda(1 + \lambda\varepsilon^{-2})^{-(1/2)}\,(\lambda^2 + \lambda\varepsilon^{-2})^{-(1/2)}$$
$$\times \exp\Big(-\,2\pi\Big\{\frac{\lambda(1+\lambda)}{\varepsilon(1 + \lambda\varepsilon^{-2})}\,x^2 + \frac{1+\lambda}{\varepsilon(\lambda^2 + \lambda\varepsilon^{-2})}\,\xi^2\Big\}\Big)\;.$$

Moyennant une transformation symplectique, on peut écrire aussi

$$(4.20)\qquad \|\mathrm{Op}_{\frac{1}{2}}(b)\| = \exp(-\pi\varepsilon\|Y' - Y\|^2_{Y,Y'}\;\|\mathrm{Op}_{\frac{1}{2}}(c_2)\|^{1/2})\;,$$

avec

$$(4.21)\quad c_2(x\,,\,\xi) = 2^{-2\nu}\,\delta^{-2\nu}\,\lambda(1 + \lambda\varepsilon^{-2})^{-(1/2)}\,(\lambda^2 + \lambda\varepsilon^{-2})^{-(1/2)}$$
$$\times \exp\Big(-\,2\pi\,\frac{\lambda^{1/2}\,(1+\lambda)}{\varepsilon(1 + \lambda\varepsilon^{-2})^{1/2}\,(\lambda^2 + \lambda\varepsilon^{-2})^{1/2}}\,(|x|^2 + |\xi|^2)\Big)\,.$$

Dans le cas où $\nu = 1$, et si l'on pose

$$R = \frac{\lambda^{1/2}\,(1+\lambda)}{\varepsilon(1 + \lambda\varepsilon^{-2})^{1/2}\,(\lambda^2 + \lambda\varepsilon^{-2})^{1/2}} = \frac{1+\lambda}{\varepsilon(1 + \lambda\varepsilon^{-2})^{1/2}\,(\lambda + \varepsilon^{-2})^{1/2}} = \operatorname{th}\frac{r}{2}$$

(noter que $R < 1$ parce que $(1 + \lambda)^2 < (\varepsilon + \lambda\varepsilon^{-1})(\varepsilon\lambda + \varepsilon^{-1}) = \varepsilon^2\,\lambda + 1 + \lambda^2 + \lambda\varepsilon^{-2}$, inégalité équivalente à $2\lambda < \lambda(\varepsilon^2 + \varepsilon^{-2})$), on voit que $\exp(-\,2\pi R(|x|^2 + |\xi|^2))$ est le symbole de

$$\operatorname{ch}\frac{r}{2}\,\exp(-\,\pi r\,\mathrm{Op}_{\frac{1}{2}}(\|X\|^2)) = (1 - R^2)^{-(1/2)}\,\exp(-\,\pi r\,\mathrm{Op}_{\frac{1}{2}}(\|X\|^2))\;,$$

opérateur qui a pour norme $(1 - R^2)^{-(1/2)}\,\exp(-\,\frac{r}{2}) = (1 + R)^{-1}$.

D'où, revenant au cas général :

$$(4.22)\qquad \|\mathrm{Op}_{\frac{1}{2}}(c_2)\| = 2^{-2\nu}\,\delta^{-2\nu}\;{}_j\,\frac{\lambda_j^{1/2}\,\varepsilon}{1 + \lambda_j}\,\frac{R_j}{1 + R_j}$$

et

$$(4.23)\qquad \|\mathrm{Op}_{\frac{1}{2}}(b)\| = 2^{-\nu}\,\delta^{-\nu}\,\varepsilon^{\nu/2}\,\Big({}_j\,\frac{\lambda_j^{1/2}\,R_j}{(1 + \lambda_j)(1 + R_j)}\Big)^{1/2}\;.$$

En écrivant

$$R_j^2 = \frac{(1 + \lambda_j)^2}{1 + \lambda_j^2 + \lambda_j(\varepsilon^2 + \varepsilon^{-2})}\;,$$

on obtient

$$(4.24)\qquad \frac{1 + R_j}{R_j} = 1 + R_j^{-1} = 1 + \mu_j^{-1}(\mu_j^2 + (\varepsilon - \tfrac{1}{\varepsilon})^2)^{1/2}\;,$$

ce qui fournit enfin (3.15) compte tenu de (4.1).

BIBLIOGRAPHIE

[1] BEALS (R.). - A general calculus of pseudo-differential operators, Duke math. J., t. 42, 1975, p. 1-42.

[2] CALDERON (A.) and VAILLANCOURT (R.). - A class of bounded pseudo-differential operators, Proc. nat. Acad. Sc., U. S. A., t. 69, 1972, p. 1185-1187.

[3] HÖRMANDER (L.). - The Weyl calculus of pseudo-differential operators (à paraître).

[4] MAASS (H.). - Siegel's modular forms and Dirichlet Series. - Berlin, Springer-Verlag, 1971 (Lecture Notes in Mathematics, 216).

[5] REED (M.) and SIMON (B.). - Methods of modern mathematical physics. Vol. 2 : Fourier analysis, self-adjointness. - New York, Academic Press, 1975.

[6] UNTERBERGER (A.). - Oscillateur harmonique et opérateurs pseudo-différentiels (à paraître).