Jacques Vauthier

Finitude d’espaces d’états liés pour certains systèmes quantiques

Séminaire Paul Krée, tome 4 (1977-1978), exp. n° 9, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SPK_1977-1978__4__A10_0>

Séminaire Paul KRÉE
(Equations aux dérivées partielles
en dimension infinie)
4e année, 1977-1978, n° 9, 9 p.

FINITUDE D'ESPACES D'ÉTATS LIÉS POUR CERTAINS SYSTÈMES QUANTIQUES

par Jacques VAUTHIER (*)

On propose une nouvelle approche dans l'étude des états liés de l'hamiltonien $-\frac{1}{2}\Delta + V$, où l'on ne se soucie plus des classiques problèmes d'extension auto-adjointe de cet opérateur (cf. [3]). Les hypothèses que l'on fait sur le potentiel V sont de nature asymptotique : V peut être très pathologique dans un compact où, éventuellement, on ne peut donner de sens convenable à l'expression

$$-\frac{1}{2}\Delta\varphi + V\varphi = \lambda\varphi ,$$

φ étant une fonction propre dans un espace L^r . On ne peut donc espérer obtenir l'annulation de certains espaces propres. On prouve ici que leur dimension est finie en utilisant une approche probabiliste où l'on stoppe le processus gouverné par l'hamiltonien en dehors du compact exceptionnel. Plus précisément, on étudie le cas où $V(x) \geqslant - C(1 + |x|)^a$, pour x assez grand. L'idée est analogue à celle de [9] : On prouve que l'espace des fonctions propres qui sont dans un espace L^r à poids est localement compact, et on utilise le théorème de Riesz qui assure la finitude de la dimension. Dans [9], on utilise un principe de pertubation valable pour un opérateur elliptique d'ordre quelconque. Il est à noter qu'un contre-exemple à la finitude de sous-espaces propres est donné pour un opérateur d'ordre 4 . Ici, pour obtenir la compacité de la boule unité, on doit étudier la fonction de Green associée à l'hamiltonien et, pour ce faire, étudier une condition portant sur les zéros des solutions d'une équation différentielle [11]. Il est à noter que dans l'article de synthèse de SIMON [10], lorsque V est à symétrie sphérique, une borne de la dimension du sous-espace propre est donnée à partir du nombre de zéros des solutions d'une équation différentielle de second ordre. Des bornes explicites de la dimension de l'espace des fonctions propres de carré sommable sont données dans [5]. La méthode exposée ici ne permet pas d'obtenir des résultats aussi précis.

Enfin, dans le cas où $a = 1 - \epsilon$, $\epsilon > 0$, on trouve des résultats analogues à ceux de S. AGMON [1]. L'espace des états liés qui sont dans $L^r((1 + |x|)^{(-1+\epsilon)r})$ est de dimension finie.

Je remercie P. MALLIAVIN de m'avoir suggéré cette application au scattering des résultats exposés dans [11].

(*) Texte reçu le 14 mars 1979.

Jacques VAUTHIER, Institut Henri Poincaré, 11 rue Pierre et Marie Curie, 75231 PARIS CEDEX 05

1. Etude de la fonction de Green associée à $-\frac{1}{2}\Delta + V$.

1.0. Soit K un compact de $\underset{\sim}{R}^n$. On note Δ le laplacien euclidien, $\Delta = \sum \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ et V une fonction de classe C^1 sur le complémentaire de K satisfaisant

(1.0.1) $$V(x) \geqslant - C(1 + |x|)^a , \quad x \in \underset{\sim}{R}^n \setminus K .$$

On remarque que, pour tout λ réel, $V + \lambda$ vérifie des conditions analogues.

Soit R tel que K soit inclus dans $\{|x| < R\}$ et $R > 1$.

1.1. Définition. - Soit x_ω^R le processus sur $\{|x| \geqslant R\}$, stoppé sur $\{|x| = R\}$ et de générateur infinitésimal $+\frac{1}{2}\Delta - V$.

On note $p^R(t , x , y)$ la loi de x_ω^R et $G^R(x , y)$ la fonction de Green associée (qui peut être éventuellement infinie)

$$G^R(x , y) = \int_0^{+\infty} p^R(t , x , y)\, dt .$$

On va montrer que G^R définit un opérateur continu entre des espaces L^r avec poids.

1.2. Fonction d'exhaustion.

On pose $q(x) = \exp(1 + |x|)^b$ avec $b > 0$ et $b \geqslant \frac{a}{2} + 1$. On a alors par un calcul direct

(1.2.1) $$|\overrightarrow{\text{grad}}\, q|^2 = q^2\, b^2(1 + |x|)^{2b-2} = \alpha(q) ,$$
$$\Delta q \geqslant q b^2(1 + |x|)^{2b-2} = \beta(q) .$$

Donc $(\Delta q/|\overrightarrow{\text{grad}}\, q|^2) \geqslant \frac{1}{q} = \frac{\beta}{\alpha}(q)$.

(1.2.2) $$\sup_{q(x) \geqslant \xi} \frac{- V(x)}{|\overrightarrow{\text{grad}}\, q|^2} \leqslant \frac{2C}{b^2\, \xi^2} = \frac{k}{\xi^2} , \quad \text{si} \quad \xi > 1 .$$

On pose $\tilde{V}(\xi) = \frac{k}{\xi^2}$ avec $k = \frac{2C}{b^2}$.

Pour obtenir un opérateur entre deux espaces L^r à poids, on peut (cf. [11]) essayer, pour des fonctions A convenables définies sur $\underset{\sim}{R}^+$, d'obtenir une majoration du type

$$\int G^R(x , y)\, A(q(y))\, dy \leqslant B(q(x)) ,$$

puisque G^R est un noyau symétrique positif.

1.3. Définition. - On note $\underset{\sim}{b}_\omega$ le brownien usuel sur $\underset{\sim}{R}^n$ de générateur infinitésimal $\frac{1}{2}\Delta$. On pose

$$S = \inf\{t \; ; \; |\underset{\sim}{b}_\omega| = R\}$$

(premier temps de sortie).

1.4. LEMME. - <u>Avec les notations précédentes, on a, pour toute fonction</u> A <u>et tout</u> x tel que $|x| > R$, l'égalité

$$\int G^R(x\,,\,y)\ A(q(y))\ dy = E_x \int_0^S \exp(\int_0^t - V(\underset{\sim}{b}_\omega)\ ds)\ A(q(\underset{\sim}{b}_\omega))\ dt\ .$$

<u>Preuve</u>. - Elle se démontre par définition de G^R et S en utilisant l'exponentielle de Kac.

Nous aurons besoin du lemme de comparaison suivant (voir P. MALLIAVIN [6], [7], [8] pour un lemme de comparaison général).

1.5. LEMME ([4], p. 120). - <u>Soit</u> $\underset{\sim}{b}_\omega$ <u>le brownien sur</u> $\underset{\sim}{R}$, <u>et soient</u> ξ_1 <u>et</u> ξ_2 <u>des solutions sur</u> $\underset{\sim}{R}$ <u>de</u>

$$d\xi_i = a_i(t\,,\,\xi_i)\ dt + d\underset{\sim}{b}_\omega \qquad (i = 1\,,\,2)$$

<u>satisfaisant</u> $\xi_1(0) = \xi_2(0) = x$. <u>Si, pour tout</u> $t \geqslant 0$ <u>et</u> x , <u>on a</u>

$$a_1(t\,,\,x) < a_2(t\,,\,x)\ ,$$

<u>alors</u> $\xi_1(t) < \xi_2(t)$ <u>p. s., pour</u> $t > 0$.

1.6. <u>Définition</u>. - Soit l'opérateur différentiel sur $]R\,,\,+\infty[$

$$L = \frac{\alpha}{2}\frac{d^2}{d\xi^2} + (\eta - 1)\beta\,\frac{d}{d\xi} + \alpha\tilde{V}\ .$$

On suppose qu'il existe une fonction de Green g associée à L correspondant aux conditions aux limites suivantes :

- $g(\xi\,,\,\eta)$ tend vers 0 , si ξ tend vers $+\infty$;
- $\frac{\partial}{\partial\xi}\, g(\xi\,,\,\eta)|_{\xi=R} = 0$.

On peut alors démontrer le lemme suivant.

1.7. LEMME. - <u>Pour toute fonction</u> A <u>décroissante sur</u> $\underset{\sim}{R}^+$, <u>on a la majoration suivante</u>

$$E_x \int_0^S \exp(-\int_0^t V(\underset{\sim}{b}_\omega(s))\ ds)\ A(q(\underset{\sim}{b}_\omega(t)))\ dt \leqslant \int_R^{+\infty} g(q(x)\,,\,\eta)\ A(\eta)\ d\eta\ .$$

<u>Preuve</u>. - Le changement d'horloge

$$t^* = r_\omega^{-1}(t) = \int_0^t |\overrightarrow{\text{grad}}\ q|^2\ (\underset{\sim}{b}_\omega(s))\ ds$$

transforme

$$\mathcal{E} = E_x \int_0^S \exp(-\int_0^t V(b_\omega(s))\ ds)\ A(q(\underset{\sim}{b}_\omega(t)))\ dt$$

en

$$\mathcal{E} = E_x \int_0^{S^*} \exp(-\int_0^{t^*} \frac{V(\underset{\sim}{b}_\omega(s^*))}{|\overrightarrow{\text{grad}}\ q(\underset{\sim}{b}_\omega)|^2}\ ds^*)\ \frac{A(q(\underset{\sim}{b}_\omega(\tau_\omega(t^*))))}{|\overrightarrow{\text{Grad}}\ q(\underset{\sim}{b}_\omega(t^*)))|^2}\ dt^*\ .$$

On note $r_\omega = |\underset{\sim}{b}_\omega|$ le processus de Bessel défini par l'équation différentielle stochastique

$$dr_\omega = d\underset{\sim}{b}_\omega + \frac{n-1}{r}\,dt\ .$$

Le lemme d'Ito ([4], p. 24) permet de calculer la différentielle stochastique de $q(\underset{\sim}{b})$

$$dq(\underset{\sim}{b}_\omega) = b(1+r)^{b-1}\, q(d\underset{\sim}{b}_\omega + \frac{n-1}{r}\,dt) + \frac{1}{2}[b(b-1)(1+r)^{b-2}\, q(r) + b^2(1+r)^{2b-2}\, q(r)]\, dt\ .$$

Le changement d'horloge τ_ω donne alors

$$dq(\underset{\sim}{b}_\omega(\tau_\omega)) = d\underset{\sim}{b}_\omega + (\frac{n-1}{r_\omega} + \frac{1}{2}\frac{b-1}{1+r_\omega} + \frac{1}{2}\, b(1+r)^{b-1})\, dt\ .$$

Comme $\frac{b-1}{1+r} + b(1+r)^{b-1} > 0$, quel que soit r, le lemme 1.5 s'applique, et on a

$$q(\underset{\sim}{b}_\omega(\tau_\omega)) \geqslant u_\omega(t) = q(x) + \underset{\sim}{b}_\omega(t) + \int_0^t \frac{n-1}{u_\omega(s)}\, ds\ .$$

On observera que l'on peut minorer, a fortiori, en remplaçant $n-1$ par 1. Cette remarque servira dans la suite. L'expression $\mathcal{E}$ est majorée par (A décroît)

$$\mathcal{E} \leqslant E_{q(x)} \int_0^{s^*} \exp(\int_0^{t^*} \tilde{V}(u_\omega(s)\ ds)\ \frac{A(u_\omega(t^*))}{\inf_{q(\underset{\sim}{b}_\omega)\geqslant u_\omega(t^*)} |\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ q(\underset{\sim}{b}_\omega)|^2}\, dt^*\ .$$

Un nouveau changement d'horloge

$$t' = \sigma_\omega^{-1}(t) = \int_0^t \frac{dt}{\alpha(u_\omega)}\ .$$

donne en posant $v_\omega = u_\omega(\sigma_\omega(t'))$, $S' = \sigma_\omega^{-1}(S^*)$,

$$\mathcal{E} < E_{q(x)} \int_0^{S'} \exp(\int_0^{t'} \tilde{V}(v_\omega(s))\ \alpha(v_\omega)\ ds)\ \frac{A(v_\omega(t'))\ \alpha(v_\omega)}{\inf_{q(\underset{\sim}{b}_\omega)\geqslant v_\omega(t')} |\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ q(\underset{\sim}{b}_\omega)|^2}\ .$$

On remarque enfin que $(\alpha(v_\omega)/(\inf_{q(\underset{\sim}{b}_\omega)\geqslant v_\omega} |\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ q(\underset{\sim}{b}_\omega)|^2)) \leqslant 1$ et ceci termine la démonstration du lemme, v_ω étant gouvernée par $\frac{\alpha}{2}\frac{d^2}{d\xi^2} + (n-1)\beta\frac{d}{d\xi}$.

On est donc amené à calculer g . Pour cela, on transforme le terme de mort $\alpha\tilde{V}$ en dérive, en suivant [11] (lemme 2.4.5).

1.8. LEMME. - <u>Si</u> $k < (4n-7)/8$, <u>où</u> k <u>est défini en (1.2.2), posant</u> $\delta = \sqrt{(2n-3)^2 - 8k}$, <u>on a la majoration suivante, pour tout</u> $x > R$,

(1.8.1) $\int_{|y|\geqslant R} G^R(x\ ,\ y)\ A(q(y))\ dy$

$$\leqslant B(q(x)) = \frac{1}{\mu}\, q(x)^{(2n-5)/2} \int_R^{q(x)} A(\eta)\ \eta^{-n+\frac{7}{2}}\, d\eta + \frac{1}{\mu}\, q(x)^{-n+\frac{3}{2}+\delta} \int_{q(x)}^{+\infty} A(\eta)\ \eta^{n-\frac{1}{2}-\delta}\, d\eta.$$

Preuve. - Il suffit d'observer que l'équation $\frac{\alpha}{2} y'' + \beta(x-1)y' + \alpha\tilde{V}y = 0$ s'écrit en utilisant (1.2.1) et (1.2.2)

$$\frac{\xi^2}{2} y'' + (n-1)\xi y' + ky = 0 .$$

Cette équation admet pour solution $u(\xi) = \xi^{-n+(3/2)+(\delta/2)}$ avec $\delta = \sqrt{(2n-3)^2 - 8k}$ qui existe car $k < (4n-7)/4 \leqslant (2n-3)^2/8$, pour $n \geqslant 2$. On calcule alors g comme dans [11] (§ 2.4.4).

On peut maintenant choisir A dans une classe de fonctions qui assure que B définie en (1.8.1) existe.

1.9. Définition. - On appelle $\mathfrak{F}$ la classe de fonctions A telles que A soit décroissante sur $\underset{\sim}{R}^+$ et que l'intégrale suivante converge.

$$\int_R^{+\infty} A(\xi)\ \xi^{n-(1/2)-\delta}\ d\xi < +\infty .$$

1.10. THÉORÈME. - Pour toute A dans $\mathfrak{F}$, si $n \geqslant 2$ et si b majore à la fois $4\sqrt{C/(4n-7)}$ et $(a/2)+1$, G^R définit un opérateur continu de l'espace à poids $L^r(B(q)\ A^{1-r}(q))$ dans l'espace à poids $L^R(A(q)\ B^{1-r}(q))$, pour $1 < r < +\infty$, avec $q(x) = \exp(1+|x|)^b$.

Preuve. - La condition $k < (4n-7)/2$ se lit $b > 4\sqrt{C/(4n-7)}$, et un résultat standard d'analyse fonctionnelle donne le théorème à partir de

$$\int G^R(x\ ,\ y)\ A(q(y))\ dy \leqslant B(q(x))$$

démontré au lemme 1.8.

Remarque. - On peut prendre

$$B(\xi) = \left(\frac{1}{\mu}\int_R^{+\infty} A(\eta)\ \eta^{n-(1/2)-\delta}\ d\eta\right)\xi^{-n+(3/2)+\delta} ,$$

et utiliser la remarque faite au cours de la preuve du lemme 1.7, i. e. prendre $n = 2$, ce qui donne pour corollaire le corollaire suivant.

1.11. COROLLAIRE. - Si b majore à la fois $4\sqrt{C}$ et $(a/2)+1$, G^R définit un opérateur continu de $L^r(q(x)^{(r-1)(5/2)-(1/2)+\delta})$ dans $L^r(q(x)^{(r-1)(-1/2-\delta)-5/2})$, pour $1 < r < +\infty$.

Preuve. - Prendre $A(\xi) = \xi^{-5/2}$ et $B(\xi) = \xi^{-1/2+\delta}$.

2. Théorème de finitude de sous-espaces propres de $-\frac{1}{2}\Delta + V$.

L'hypothèse faite sur le potentiel V en (1.0.1) est de nature asymptotique. On ne peut espérer prouver l'annulation de certains sous-espaces propres puisque ceci contredirait la situation dans le cas compact. On peut tout au plus prouver la finitude de sous-espaces propres.

On considère V satisfaisant (1.0.1) et on pose la définition suivante.

2.1. Définition. - Soit $V^*(\xi) = \sup_{q(x)=\xi} |V(x)|$, et pour $s > 1$, on définit la classe $\mathfrak{F}_s$ des fonctions ψ positives sur $\underset{\sim}{R}^+$ telles que $\Lambda = \psi(1 + (V^*)^s)$ est dans la classe $\mathfrak{F}$ définie dans la définition 1.9.

On fixe s tel que la classe $\mathfrak{F}_s$ ne soit pas vide. On prouve tout d'abord le lemme suivant.

2.2. LEMME. - Soit χ une fonction C^∞ à support compact dans $\{R < |x|\}$. Alors

$$\chi(x) = (-\frac{1}{2}\Delta + V) \int G^R(x , y)\, \chi(y)\, dy .$$

Preuve. - Par définition de $p^R(t , x , y)$, on peut écrire

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{R^n} p^R(t , x , y)\, \chi(y)\, dy = (-\frac{1}{2}\Delta + V) \int_{R^n} p^R(t , x , y)\, \chi(y)\, dy .$$

On intègre entre 0 et t

$$\int_{R^n} p^R(t , x , y)\, \chi(y)\, dy - \chi(x)$$
$$= (-\frac{1}{2}\Delta + V) \int_0^t ds \left(\int_{R^n} p^R(s , x , y)\, \chi(y)\, dy\right) .$$

On remarque que

$$\int_0^{+\infty} ds \int_{R^n} p^R(s , x , y)\, \chi(y)\, dy = \int_{R^n} G^R(x , y)\, \chi(y)\, dy$$

est finie grâce au lemme 1.4. Pour tout x fixé, on peut donc trouver une suite $\{t_j\}$ ayant $+\infty$ comme limite et telle que

$$\lim_{t_j \to \infty} \int_{R^n} p^R(t_j , x , y)\, \chi(y)\, dy = 0 ,$$

$$\lim_{t_j \to \infty} \int_0^{t_j} ds \left(\int_{R^n} p^R(s , x , y)\, \chi(y)\, dy\right) = \int_{R^n} G^R(x , y)\, \chi(y)\, dy .$$

L'opérateur $\frac{1}{2}\Delta - V$ est fermé dans l'espace des distributions sur R^n : On obtient le lemme 2.2 en passant à la limite en t_j .

On peut alors prouver le théorème suivant en utilisant le corollaire 1.11.

2.3. THÉORÈME. - Si V satisfait (1.0.1) avec $(8\sqrt{C}/\sqrt{3}) > (a/2) + 1$, il y a finitude de l'espace des fonctions propres qui sont dans L^r (sans poids) avec $r = \frac{1}{5}(6 - 2\delta)$ (δ est défini au lemme 1.8).

Preuve. - Ce théorème résulte du théorème 2.5 en prenant b dans l'intervalle $]1 + \frac{a}{2} , 8\sqrt{C}/\sqrt{3}[$ et $\psi(\xi) = \xi^{-5/2} (\mathrm{Log}\ \xi)^{(a/b)+h}$, $V^*(b) = (\mathrm{Log}\ \xi)^{a/b}$, avec h tel que $bh(1 - r) + a = 0$, si $a > 0$, et $bh + a = 0$, si $a < 0$. En effet, le poids est le suivant

$$(\mathrm{Log}\ \xi)^{(a/b)^r}\, \xi^{(5/2)(r-1)}\, (\mathrm{Log}\ \xi)^{((a/b)+h)(1-r)}\, \xi^{-(1/2)+\delta} , \text{ si } a > 0 ,$$

et

$$\xi^{(5/2)(1-r)} (\operatorname{Log} \xi)^{((a/b)+h)(1-r)} \xi^{-(1/2)+\delta} \text{ , si } a < 0 \text{ .}$$

2.4. THÉORÈME. - Sous les hypothèses du § 1.0, si $a = 1 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ et si $C > 27/256$, il y a finitude de l'espace des fonctions propres qui sont dans l'espace $L^r((1 + |x|)^{r(\varepsilon-1)})$, $r = (6 - 2\delta)/5 > 1$.

Preuve. - On choisit $\psi(\xi) = \xi^{-5/2} (\operatorname{Log} \xi)^{1-(\varepsilon/b)+h}$ avec b dans l'intervalle $]3/2 , 8(\sqrt{C}/\sqrt{3})[$, qui est non vide puisque $C > (27/256)$, et h tel que $bh(1 - r) + a = (-1 + \varepsilon)r$, $r = (6 - 2\delta)/5$.

Remarque. - Dans [1], on obtient la finitude dans l'espace $L^2((1 + |x|)^{-1+\varepsilon})$, lorsque $|V| \leqslant C(1 + |x|)^{1-\varepsilon}$ à l'infini.

On prouve le théorème général qui fournit les théorèmes 2.3 et 2.4.

On fixe s tel que la classe $\mathfrak{F}_s$ définie à la définition 1.3 ne soit pas vide et, pour toute fonction $\Lambda(x)$, on note $\tilde{\Lambda}(x) = \sup_{|x-y|\leqslant 1} \Lambda(y)$.

2.5. THÉORÈME. - On suppose que V satisfait le § 1.0, que r est le conjugué de s $((1/r) + (1/s) = 1)$. On choisit $b > \sup(\frac{a+1}{2} , 4\sqrt{C})$. Pour tout ψ dans $\mathfrak{F}_s$, le sous-espace de $L^r((1 + V^{*r})\tilde{\psi}^{1-r}(q)\ \tilde{B}_\psi(q))$ des fonctions propres de $-\frac{1}{2}\Delta + V$ relatives à toute valeur propre λ , est de dimension finie.

Preuve. - En posant $V_\lambda = V + \lambda$, on est ramené à l'étude du noyau de $-\frac{1}{2}\Delta + V$. Pour simplifier les notations, on posera

$$G(\chi)(x) = \int_{R^n} G^R(x , y)\ \chi(y)\ dy \text{ .}$$

Soit φ telle que $-\frac{1}{2}\Delta\varphi + V\varphi = 0$ en dehors du compact K , φ est alors de classe C^1 sur $\{|x| > R\}$, puisque V l'est par hypothèse. Soient R_1 et R_2 supérieurs à R . On peut écrire, pour toute fonction χ à support compact dans $\{R < |x|\}$, en utilisant le lemme 2.2 et $-\frac{1}{2}\Delta\varphi + V\varphi = 0$,

$$\begin{aligned}&\int_{R_1\leqslant|x|\leqslant R_2} \varphi(x)\ \chi(x)\ dx \\ &\qquad = \int_{R_1\leqslant|x|\leqslant R_2} (\tfrac{\Delta}{2} - V)\varphi(x)\ G(\chi)(x)\ dx - \int_{R_1\leqslant|x|\leqslant R_2} \varphi(x)(\tfrac{\Delta}{2} - V)G(\chi)(x)dx \text{ .}\end{aligned}$$

On utilise la formule de Stookes, en notant ds_i l'élément d'aire de $\{|x| = R_i\}$ et $\partial/\partial n$ la dérivation normale, pour écrire

$$(2.5.1)\quad \int_{R^n} \varphi(x)\ \chi(x)\ dx = \int_{|x|=R_i} [\frac{\partial\varphi}{\partial n}(x)\ G(\chi)(x) - \int \varphi(x)\ \frac{\partial}{\partial n}G(\chi)(x)\ ds_i] \text{ .}$$

Les estimés intérieurs elliptiques pour l'équation $\frac{\Delta}{2} g = Vg$, avec $g = \varphi$ ou $g = G(\chi)$ ([2], p. 78), donnent ici pour une constante C_r ne dépendant ni de x ni de g

$$(2.5.2)\qquad \int_{|x-y|\leqslant 1} |g|^r\ dy \leqslant C_r\ (\int_{|x-y|\leqslant 2} \quad{}^r\ dx + \int_{|x-y|\leqslant 2} |g|^r\ dx \text{ .}$$

On intègre l'équation (2.5.1) en dR_1 entre R'_1 et $R'_1 + 1$, et en dR_2 entre R'_2 et $R'_2 + 1$, avec $R + 4 < R'_1 < R'_2$. On utilise l'inégalité de Hölder en faisant intervenir les poids $\psi^{1-r} B_\psi$ et ψB_ψ^{1-r}, $\psi \in \mathfrak{F}_s$, B_ψ calculée au lemme 1.8. On a ainsi

(2.5.3)
$$\left|\int_{R^n} \varphi\chi(x)\, dx\right|$$
$$\leq \sum_{i=1}^{2} \left(\int_{R'_i \leq |x| \leq R'_i+1} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|^r \psi^{1-r} B_\psi(x)\, dx\right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_{R'_i \leq |x| \leq R'_i+1} |G(\chi)|^s \psi B_\psi^{1-s}\, dx\right)^{\frac{1}{s}}$$
$$+ \left(\int_{R'_i \leq |x| \leq R'_i+1} |\varphi|^r \psi^{1-r} B_\psi(x)\, dx\right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_{R'_i \leq |x| \leq R'_i+1} \left|\frac{\partial}{\partial n} G(\chi)\right|^s \psi B_\psi^{1-s}\, dx\right)^{\frac{1}{s}} .$$

On remarque que (cf. [11], lemme 3.2.10), pour toute fonction f positive, intégrable, σ_n désignant la masse de la boule unité, on a les inégalités suivantes.

(2.5.4)
$$\sigma_n \int_{R'_i \leq |x| \leq R'_i+1} f(x)\, dx$$
$$\leq \int_{R'_i-1 \leq |x| \leq R'_i+2} dx \left(\int_{|x-y| \leq 1} f(y)\, dy\right) \leq \sigma_n \int_{R'_i-2 \leq |x| \leq R'_i+3} f(x)\, dx .$$

Ceci permet d'obtenir, pour toute fonction γ de classe C^1 et toute fonction u positive continue en utilisant (2.5.2), (2.5.4),

(2.5.5)
$$\int_{R'_i \leq |x| \leq R'_i+1} \left|\frac{\partial\gamma}{\partial n}\right|^r u(y)\, dy$$
$$\leq \frac{1}{\sigma_n} \int_{R'_i-1 \leq |x| \leq R'_i+2} dx \int_{|x-y| \leq 1} \left|\frac{\partial\gamma}{\partial n}\right|^r u(y)\, dy$$
$$\leq \frac{1}{\sigma_n} \int_{R'_i-1 \leq |x| \leq R'_i+2} \tilde{u}(x)\, dx \left(\int_{|x-y| \leq 1} \left|\frac{\partial\gamma}{\partial n}\right|^r dy\right)$$
$$\leq \frac{1}{\sigma_n} \int_{R'_i-1 \leq |x| \leq R'_i+2} \tilde{u}(x)\, dx \int_{|x-y| \leq 2} (1 + V^r)(y)\, |\gamma|^r(y)\, dy$$
$$\leq \frac{1}{\sigma_n} \int_{R'_i-3 \leq |x| \leq R'_i+4} \tilde{u}(x)(1 + V^r)(x)\, |\gamma|^r(x)\, dx .$$

On déduit alors de (2.5.3) et de (2.5.5), en prenant successivement $\gamma = \varphi$, $u = \psi^{1-r} B_\psi$ et $\gamma = G(\chi)$, $u = B_\psi^{1-s} \psi$ et en notant que $V \leq V^*$, avec $C_0 = \sup(C_r, C_s)$,

$$\left|\int_{R^n} \varphi\chi(x)\, dx\right|$$
$$\leq C_0 \sum_{i=1}^{2} \int_{R'_i-4 \leq |x| \leq R'_i+4} |\varphi|^r (1 + V^{*r}) (\widetilde{\psi^{1-r}}) \tilde{B}_\psi)^{\frac{1}{r}} \left(\int_{R'_i \leq |x| \leq R'_i+1} |G(\chi)|^s \psi B_\psi^{1-s}\right)^{\frac{1}{s}}$$
$$+ \int_{R'_i \leq |x| \leq R'_i+1} |\varphi|^r \psi^{1-r} B_\psi)^{\frac{1}{r}} \left(\int_{R'_i-4 \leq |x| \leq R'_i+4} |G(\chi)|^s (1 + V^{*s}) \tilde{\psi} (\widetilde{B_\psi^{1-s}})\right)^{\frac{1}{s}} .$$

G opère de $L^s(\psi^{1-s}(1 + V^{*s})^{1-s}) B_\psi$ dans $L^s(\psi(1 + V^{*s}) B_\psi^{1-s})$ et φ appartient à $L^r((1 + V^{*r})(\widetilde{\psi^{1-r}})\tilde{B})$ qui est inclus dans $L^r(\psi^{1-r} B)$. Donc, lorsque R'_2 tend vers l'infini, le terme correspondant a une limite nulle. Il reste donc

$$
\begin{aligned}
(2.5.6)\quad & \left|\int_{R^n} \varphi\chi(x)\, dx\right| \\
& \leq 2C_0 \int_{R_1'-4\leq|x|\leq R_1'+4} |\varphi|^r (1 + V^{*r}) \widetilde{(_\psi{}^{1-r}) u_\psi})^{1/r} \\
& \qquad \times \left(\int_{R_1'-4\leq|x|\leq R_1'+4} |G(\chi)|^s (1 + V^{*s}) \tilde{\psi}(\widetilde{U^{1-s}})\right)^{\frac{1}{s}} .
\end{aligned}
$$

On montre maintenant que l'espace des fonctions propres considérées est de dimension finie en utilisant le théorème de Riesz. Soit B la boule unité de l'espace des fonctions qui sont dans le noyau de $\frac{1}{2}\Delta - V$ et dans $L^r((1 + V^{*r})\widetilde{_\psi{}^{1-r}\tilde{_\psi}})$. Soit f_n une suite d'éléments de B de $\|f_n\| \leq 1$, on en déduit l'existence d'une suite extraite qui converge faiblement. Puis, comme f_n est dans le noyau de $\frac{1}{2}\Delta - V$, cette suite extraite converge uniformément sur tout compact vers une fonction f , élément du noyau de $\frac{1}{2}\Delta - V$. De plus, $\|f\| \leq 1$, grâce au lemme de Fatou. Si $\varphi_n = f - f_n$ (en notant toujours f_n la suite extraite), on déduit de (2.5.6) que φ_n tend vers 0 dans $L^r((1 + V^{*r})\tilde{U}_\psi(\tilde{\psi}^{1-r}))$, puisque G est un opérateur continu.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AGMON (S.). - Résultats spectraux dans les opérateurs non différentiels. Exposés au Collège de France en Octobre 1978 (non publiés).

[2] AGMON (S.), DOUGLIS (A.) and NIREMBERG (L.). - Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions, II, Comm. in pure and applied Math., t. 17, 1964, p. 35-92.

[3] GAVEAU (B.). - Fonctions propres et non existence absolue d'états liés pour certains systèmes quantiques (à paraître).

[4] GIKMAN (I. I.) and SKOROKHOD (A. V.). - Stochastic differential equations. - Berlin, Springer-Verlag, 1972 (Ergebnisse der Mathematik, 72).

[5] GLASER (V.), MARTIN (A.), GROSSE (H.) ... - A family of optimal conditions for the absence of bound states in a potential, "Studies in mathematical Physics. Essays in honor of V. Bargmann", p. 169-194. - Princeton, Princeton University Press, 1976 (Princeton Series in Physics).

[6] MALLIAVIN (P.). - Asymptotic of the Green's function of a riemannian manifold and Ito's stochastic integrales, Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 71, 1974, p. 381-383.

[7] MALLIAVIN (P.). - Géométrie stichastique. Cours au C. I. M. E., 1976.

[8] MALLIAVIN (P.). - Géométrie différentielle stochastique. - Montréal, Les Presses de l'Université de Montréal, 1978 (Séminaire de Mathématiques Supérieures. Eté 1977).

[9] NIREMBERG (L.) and WALKER (H. F.). - The null spaces of elliptic partial differential operators in $\underset{\sim}{R}^n$, J. math. Analysis and appl., t. 42, 1973, p. 272-301.

[10] SIMON (B.). - On the number of bound states of two body Schrödinger operators. A review, "Studies in mathematical Physics. Essays in honor of V. Bargmann", p. 305-326. - Princeton, Princeton University Press, 1976 (Princeton Series in Physics).

[11] VAUTHIER (J.). - Théorèmes d'annulation et de finitude d'espaces de 1-formes harmoniques sur une variété de Riemann ouverte, Bull. Sc. math., t. 103, 1979, p. 129-177.