Séminaire Paul Krée

Bernard Lascar

Noyaux d'une classe d'opérateurs pseudo-différentiels sur l'espace de Fock, et applications

Séminaire Paul Krée, tome 3 (1976-1977), exp. n° 6, p. 1-43
<http://www.numdam.org/item?id=SPK_1976-1977__3__A6_0>

Séminaire Paul KRÉE
(Equations aux dérivées partielles
en dimension infinie)
3e année, 1976/77, n° 6, 43 p.

NOYAUX D'UNE CLASSE D'OPÉRATEURS PSEUDO-DIFFÉRENTIELS SUR L'ESPACE DE FOCK, ET APPLICATIONS

par Bernard LASCAR

Dans [9], nous avons introduit un formalisme qui permettait d'étudier des opérateurs pseudo-différentiels qui opèrent dans des espaces de Sobolev relatifs à la mesure de Gauss d'un espace hilbertien. L'étude de ces propriétés, en particulier l'énoncé d'une condition nécessaire et suffisante d'ellipticité pour les opérateurs différentiels, se faisait dans l'espace de Fock, grâce à la transformation de Fourier-Gauss ([1], [6], [9]). Nous introduisons ici une classe d'opérateurs pseudo-differentiels, plus restreinte que celle de [9], mais pour laquelle nous avons un calcul symbolique complet, et pour laquelle nous savons, sans transformation de Fourier-Gauss, étudier le noyau. Ceci nous permet d'étudier des propriétés de régularité höldérienne.

Le cadre choisi est celui de [9], rappelons-le. Nous avons 3 espaces de Hilbert $E' \xhookrightarrow{i'} X' \simeq X \xhookrightarrow{i} E$, i et i' sont injectives à image dense et de Hilbert-Schmidt. E' est le dual de E , tandis que X est identifié à son dual. Nous noterons $\|x\|'$, $|x|$, $\|x\|$, les normes respectivement de E' , X , E , et $(x|y)$ le produit de dualité entre E' et E , ou encore le produit scalaire dans X . On appelle ν la mesure de Radon sur E , image par i de la mesure cylindrique gaussienne canonique de X . Sous les hypothèses précédentes, on a

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "j"'] & E \\ X \arrow[ur, "\ell"'] & \end{tikzcd}$$

où j est symétrique, Hilbert-Schmidt, et positive, ℓ est isométrique. On désigne alors par $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de X telle que $j(e_n) = (1/a_n)e_n$ avec $\sum_n 1/a_n^2 = 1$, $\tilde{e}_n \in E'$. On désigne par $E\hat{\otimes}F$ le complété, pour la topologie de Hilbert-Schmidt, du produit tensoriel de deux Hilberts E et F , et $\widehat{\odot}_j E$ le complété du sous-espace des tenseurs symétriques d'ordre j de E . On note $E^{\mathbb{C}}$, $X^{\mathbb{C}}$, $E'^{\mathbb{C}}$ les complexifiés de ces espaces, $\|\zeta\|$, $|\zeta|$, $\|\zeta\|'$ les normes respectives, $\nu(\zeta)$ l'image dans $E^{\mathbb{C}}$ de la mesure cylindrique gaussienne de variance 1/2 sur $X^{\mathbb{C}}$. On utilisera également $\nu_t'(\zeta)$, la mesure image par $i'^{\mathbb{C}}$ de la mesure gaussienne de variance $t/2$ de $E'^{\mathbb{C}}$.

Nous allons introduire une classe $T_\delta^m(X , E)$ d'opérateurs pseudo-différentiels, caractérisés par les propriétés de leurs symboles d'anti-Wick ([9], [2]). Le calcul symbolique va nous permettre d'obtenir des paramétrix pour des opérateurs elliptiques de T_δ^m .

Il faut se représenter les classes T^m_δ comme des classes d'opérateurs pseudo-différentiels à "coefficients polynômes", nous aurons, par exemple, dans T^{-2}_δ une paramétrix de l'opérateur

$$P = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)$$

où $\partial/\partial x_i$ désigne la dérivation dans la direction e_i. Nous montrerons pour des opérateurs elliptiques dans ces classes, la régularité lipschitzienne ainsi que la possibilité de résoudre l'équation dans des espaces de fonctions lipschitziennes. Il faut noter que la meilleure régularité que l'on peut obtenir, dans ces conditions, pour l'équation $Pu = f$, est du type : Pour ν presque tout x de E, la fonction $h \in E' \longmapsto u(x+h)$ est $E'C^\infty$. En effet, considérons l'exemple

$$P = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) , \quad u = \sum_{i=1}^{\infty} x_i - \alpha_i$$

avec $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2 < +\infty$ et $\alpha = \sum \alpha_i e_i \notin E'$. On a $Pu = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \, \alpha_i/a_i^2 = f$. f est C^∞-Fréchet dérivable sur E, et u n'est pas continue pour la topologie de E. Nous serons donc amenés à définir des espaces C^ρ qui tiennent compte de ce phénomène, spécifique à la dimension infinie et au type de problèmes.

Dans le paragraphe 1, nous introduisons des classes de symboles de nos opérateurs. Ces symboles sont des fonctions $A°(\bar{z}, z)$ définies sur l'espace $E^{\underset{\sim}{C}}$ qui jouissent de propriétés convenables. Ces classes seront appelées $T^m_\delta(E)$, $m \in \underset{\sim}{R}$, $0 < \delta \leqslant 1$.

On considère ainsi des opérateurs à domaine dans l'espace de Fock, de la forme

$$\Phi \longmapsto (A\Phi)(z) = \int A°(\bar{\zeta}, \zeta) \, \Phi(\zeta) \, \exp(z\bar{\zeta}) \, d\nu_{\underset{\sim}{C}}(\zeta)$$

par l'intermédiaire de l'application

$$\theta : \quad u \longmapsto (\theta u)(z) = \int \exp(-ixz + \tfrac{1}{2}z^2) u(x) \, d\nu(x)$$

qui réalise une isométrie de l'espace $L^2_\nu(E)$ sur l'espace de Fock

$$F(X^{\underset{\sim}{C}}) = "\mathcal{H}(X^{\underset{\sim}{C}}) \cap L^2_{\nu_{\underset{\sim}{C}}}(E^{\underset{\sim}{C}})"$$

($\mathcal{H}$ désigne l'espace des fonctions entières sur $X^{\underset{\sim}{C}}$). Ces opérateurs déterminent des opérateurs $u \longmapsto (\theta^{-1} A\theta)u$ (que nous noterons encore A), à domaine dans l'espace $L^2_\nu(E)$. C'est sous cette dernière forme que nous étudierons le problème de la régularité C^ρ, et c'est pour avoir une description explicite du noyau de l'opérateur à domaine dans $L^2_\nu(E)$ que nous faisons, sur le symbole $A°(\bar{z}, z)$, des hypothèses plus restrictives que celles de [9], et qui ressemblent à celles que fait M. I. VIŠIK pour les symboles de ces opérateurs pseudo-différentiels ([3], [14]). Nous introduisons ainsi une classe d'opérateurs $T^m_\delta(X, E)$ pour lesquels on montre, en particulier, le théorème suivant :

THÉORÈME (<u>paramétrix d'un opérateur elliptique de</u> T^m_δ) : <u>Les propositions suivantes sont équivalentes</u> :

(i) $p^\circ(\bar{z}, z) \in T^m_\delta(E)$, $\exists\, q^\circ \in T^{-m}_\delta(E)$ tel que $p^\circ(\bar{z}, z)\, q^\circ(\bar{z}, z) - 1 \in T^r_\delta(E)$, $r < 0$,

(ii) $\forall\, N \in \underset{\sim}{N}$, il existe des opérateurs

$$Q_N \in T^{-m}_\delta \quad \text{et} \quad R_N \in T^{-N}_\delta$$

(resp. $Q'_N \in T^{-m}_\delta$ et $R'_N \in T^{-N}_\delta$) tels que

$$Q_N \circ P = I + R_N \quad (\mathrm{mod}\ \mathcal{R}^{-\infty})$$

(resp. $P \circ Q'_N = I + R'_N \quad (\mathrm{mod}\ \mathcal{R}^{-\infty})$), (théorème 1.2),
où $\mathcal{R}^{-\infty}$ désigne une algèbre d'opérateurs régularisants que l'on introduira.

Dans le paragraphe 2, on introduira les espaces $C^\rho_R(X, E)$, et on montrera le théorème suivant :

THÉORÈME. - Soit $P \in T^m_\delta$ $(m \leq 0)$, alors P applique $C'^\rho_R(X, E) \longmapsto C^{\rho+m}_R(X, E)$ $(\rho > 0$ si $m \in \underset{\sim}{Z}^-)$.

Le R qui figure ici joue un rôle technique. L'espace $C'^\rho_R(X, E)$ est un sous-espace de $C^\rho_R(X, E)$ qui correspond à une condition restrictive analogue à celle que l'on trouve également dans le travail de L. GROSS, [4].

Dans le paragraphe 3, on utilise les résultats du § 1 et du § 2 pour prouver les théorèmes suivants.

THÉORÈME 3.1. - Soit $A \in T^m_\delta$ avec $m \in \underset{\sim}{R}^+$, $\rho > 0$, tel que $m + \rho \notin \underset{\sim}{N}$. A applique continûment $\tilde{C}'^\rho_R(X, E) \longrightarrow C^{\rho+m}_R(X, E)$.

THÉORÈME 3.2. - Soit P elliptique dans T^m_δ $(m \in \underset{\sim}{R}^+)$, et soit $f \in C'^\rho_R(X, E)$. Alors, $\forall\, x \in E$, il existe un voisinage V de x , et il existe $u \in C^{m+\rho}_R(V)$ tels que : $Pu = f$ sur V si $m + \rho \notin \underset{\sim}{N}$.

Dans le paragraphe 4, enfin, nous montrerons comment ces méthodes peuvent s'appliquer à l'opérateur $A = \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{a_i^2} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ qui est le laplacien de l'espace E' , pour lequel nous prouvons le théorème 3.2. Ceci nous permet de voir que nos résultats sont liés à ceux obtenus pour l'opérateur $A = \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{a_i^2} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ par L. GROSS dans [4], cette relation ne peut cependant, dans le cadre de cet article, s'exprimer en termes d'inclusion ni dans un sens, ni dans l'autre ! En effet, L. GROSS considère l'équation $Au = f$ lorsque u et f sont des fonctions continues sur l'espace X $(E' \subset X \subset E)$, tandis que nous étudions cette équation lorsque u et f sont des fonctions de $L^2_\nu(E)$, c'est-à-dire des fonctions mesurables sur E pour lesquelles on a, pour ν presque tout x de E , des conditions de continuité de la fonction $h \in X \longmapsto u(x + h)$ ou de dérivabilité de la fonction $h \in E' \longmapsto u(x + h)$. Il ne faut pas oublier que, X étant ν-négligeable dans E , prendre la restriction à X d'un élément de $L^2_\nu(E)$ n'a guère de sens. Nous pouvons ainsi étudier :

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i^2} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} , \quad u = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i (x_i^2 - 1)$$

où $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2 < \infty$ (mais où $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$ diverge), et on a

$$Au = 2 \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha_i / a_i^2) = \text{cte} .$$

Cependant dans un travail ultérieur, nous montrerons comment une modification de la classe d'opérateurs pseudo-différentiels, introduits par M. I. VIŠIK, permet d'améliorer les résultats de L. GROSS [4], et de les étendre à une classe d'opérateurs elliptiques.

1. Les classes T^m de symboles.

Nous allons introduire, ici, une classe de symboles d'opérateurs pseudo-différentiels pour lesquels nous aurons un calcul symbolique complet, et pour lesquels nous savons décrire le noyau, ce qui nous permettra d'étudier des questions de régularité lipschitzienne. On verra que nos classes sont voisines de celles de M. I. VIŠIK ([3], [14]).

DÉFINITION 1.1. - Soit $A°(\bar{z} , z)$ une fonction définie sur $E^{\underset{\sim}{C}}$. On suppose que $A°(\bar{z},z)$ est la transformée de Fourier d'une mesure cylindrique $\mu = (\mu_i)$ de $E'^{\underset{\sim}{C}}$. On pose, alors,

$$\|A°\|_0 = \sup_i \|\mu_i\| ,$$

ce sup pouvant être éventuellement infini. On note $\mu(\alpha , \bar{\alpha}) = \mathfrak{F}^{-1}(A°(\bar{z} , z))$.

DÉFINITION 1.2.

1° Soit $A°(\bar{z} , z)$ une fonction C^{∞}-Fréchet différentiable sur E , soit $m \in \underset{\sim}{R}$. On dit que $A°(\bar{z} , z) \in T^m(E)$ si

$$\forall\ j \in \underset{\sim}{N} , \quad \forall\ h \in E , \quad D^j\, A°(\bar{z} , z).h(1 + \|z\|^2)^{-(m/2)+(j/2)}$$

est la transformée de Fourier d'une mesure cylindrique sur $E'^{\underset{\sim}{C}}$ telle que

$$N_j(A°) = \sup_{\|h\|\leqslant 1} \|D^j\, A°(\bar{z} , z).h(1 + \|z\|^2)^{-(m/2)+(j/2)}\|_0 < + \infty .$$

2° Soit $0 < \delta \leqslant 1$; on définit $T^m_\delta(E)$ en supposant cette fois que

$$N^\delta_j(A°) = \sup_{\|h\|\leqslant 1} \|D^j\, A°(\bar{z} , z).h(1 + \|z\|^2)^{-(m/2)+(\delta j/2)}\|_0 < + \infty .$$

PROPOSITION 1.1. - Soit $A°(\bar{z} , z) \in T^0_\delta(E)$, et $\mu(\alpha , \bar{\alpha}) = \mathfrak{F}^{-1}(A°(\bar{z} , z))$, alors l'image, par l'injection $i'^{\underset{\sim}{C}}$ de $E'^{\underset{\sim}{C}}$ dans $X^{\underset{\sim}{C}}$, de μ est une mesure de Radon que nous noterons encore μ .

Démonstration. - On sait que $i'(\mu)$ est une mesure cylindrique sur $X^{\underset{\sim}{C}}$ dont la transformée de Fourier est la restriction de $A°(\bar{z} , z)$ à l'espace $X^{\underset{\sim}{C}}$. Soient X_j , $j \in J$, les quotients de $X^{\underset{\sim}{C}}$ que nous identifions à des sous-espaces de dimension finie de $X^{\underset{\sim}{C}}$, et soit μ_j la mesure sur $E'/X_j^{\perp}$ dont la transformée de Fourier est $A°(\bar{z} , z)_{|X_j}$. Nous notons encore μ_j la mesure sur X_j qui est

$i'(\mu_j)$. Pour vérifier les conditions du théorème de Prokhorov, il suffit de montrer que

$$\sup_j \int |\alpha^j|^2 \, d|\mu_j|(\bar{\alpha}, \alpha) < +\infty .$$

en notant $\alpha^j = s_j(\alpha)$. Or $\alpha_i \bar{\alpha}_i \mu_j$ est la transformée de Fourier de $-\partial_{z_i} \partial_{\bar{z}_i} A^\circ(\bar{z}, z)$ et ainsi

$$\int |\alpha^j|^2 \, d|\mu_j| \leq \sum_i \|\partial_{z_i} \partial_{\bar{z}_i} A^\circ(\bar{z}, z)\|_0 ,$$

or

$$\|\partial_{z_i} \partial_{\bar{z}_i} A^\circ(\bar{z}, z)\|_0 \leq \frac{1}{a_i^2} N_2^\delta(D^2 A^\circ)\|(1 + \|z\|^2)^{-(\delta j/2)}\|_0 ,$$

et ainsi,

$$\sup_j \int |\alpha^j|^2 \, d|\mu_j|(\bar{\alpha}, \alpha) < +\infty$$

à cause du lemme suivant.

LEMME 1.1.

1° $\|fg\|_0 \leq \|f\|_0 \|g\|_0$,

2° Soit $s \in \mathbb{R}_*^+$, alors $\|(1 + \|z\|^2)^{-s/2}\|_0 < +\infty$.

Démonstration du lemme.

1° Soient $\mu = \mathcal{F}^{-1}(f)$, $\nu = \mathcal{F}^{-1}(g)$. Alors $\mu * \nu = \mathcal{F}^{-1}(fg)$, et comme $|\mu * \nu| \leq |\mu| * |\nu|$, on a

$$\|\mu * \nu\| \leq \|\mu\| \|\nu\| .$$

2° Soit ν_t' la mesure gaussienne de variance $t/2$ de $E'^{\mathbb{C}}$. On a

$$(1 + \|z\|^2)^{-s/2} = \frac{1}{\Gamma(s/2)} \int_0^{+\infty} \exp(-t) \, t^{-1+(s/2)} \exp(-t\|z\|^2) \, dt ;$$

$$\mathcal{F}^{-1}((1 + \|z\|^2)^{-s/2}) = g_s(\bar{\alpha}, \alpha) \quad \text{(noyau de Bessel)}$$

vérifie : $g_s \geq 0$ et $\|g_s\| \leq 1$.

$$g_s(\bar{\alpha}, \alpha) = \frac{1}{\Gamma(\frac{s}{2})} \int_0^{+\infty} \exp(-t) \, t^{-1+(s/2)} \, d\nu_t'(\bar{\alpha}, \alpha) \, dt .$$

On rappelle les résultats suivants dont la preuve est identique à celle de [10].

PROPOSITION 1.2. - $T_\delta^m(E)$ est un espace de Fréchet. Si $m \leq m'$, $T_\delta^m \subset T_\delta^{m'}$.

PROPOSITION 1.3.

1° Soit

$$p(\bar{z}, z) = \sum_{|\rho|+|\delta|=j} C_{\rho,\delta} \frac{z^\rho}{a^\rho} \frac{\bar{z}^\delta}{a^\delta}$$

un polynôme de Hilbert-Schmidt de degré au plus j sur E , c'est-à-dire qui véri- $\|p\|^2 = \sum_{\rho,\delta} |C_{\rho,\delta}|^2 < +\infty$. Soit $m \in \mathbb{R}$ tel que $j < m$. On pose $s = m - j$; on définit une mesure de Radon bornée sur $X^{\mathbb{C}}$ par $\mathcal{F}(\mu)(\bar{z}, z) = p(\bar{z}, z)/(1+\|z\|^2)^{m/2}$.

En outre, si $f(\bar{\alpha}\ ,\ \alpha) \in C_b^0(X^{\underset{\sim}{C}})$ on a

$$\left|\int f(\alpha\ ,\ \bar{\alpha})\ d\mu(\alpha\ ,\ \bar{\alpha})\right| \leq C\|p\|\left(\int |f(\alpha\ ,\ \bar{\alpha})|^2\ dg_s(\alpha\ ,\ \bar{\alpha})\right)^{1/2}$$

2° $p(\bar{z}\ ,\ z) \in T^{-m}(E)$ si $j < m$, et $N_j(p(\bar{z}\ ,\ z)) \leq C\|p\|$.

PROPOSITION 1.4.

1° Si $A^\circ \in T_\delta^m(E)$ et $B^\circ \in T_{\delta'}^{m'}(E)$, alors $A^\circ B^\circ \in T_{\inf(\delta,\delta')}^{m+m'}(E)$;

2° $(1 + \|z\|^2)^{s/2} \in T^s(E)$ pour tout $\delta < 1$, et $(t + \|\zeta\|^2)^{s/2} \in T^\sigma(E)$ si $s < \sigma$;

3° Soit $\lambda \in \underset{\sim}{C}$, $\mathrm{Re}\ \lambda > 0$, alors $(\lambda + \|\zeta\|^2)^{s/2} \in T_\delta^s$, pour tout $\delta < 1$;

4° Soit $k \in \underset{\sim}{N}$, $\|z\|^{2k} \in T^m$ si $2k < m$, et $\|z\|^{2k} \in T_\delta^{2k}$ si $\delta < 1$;

5° Soit $s \in \underset{\sim}{R}^+$, alors $\mathfrak{F}^{-1}(\|z\|^s/(1 + \|z\|^2)^{s/2}) \in M'(X^{\underset{\sim}{C}})$ et s'écrit

$$\mathfrak{F}^{-1}\left(\frac{\|z\|^s}{1 + \|z\|^2)^{s/2}}\right) = \delta_0 + \sum_{m=1}^\infty A_{m,s}\ g_{2m}$$

où $\sum_{m=1}^\infty |A_{m,s}| < +\infty$.

PROPOSITION 1.5. - Soit $A^\circ \in T_\delta^m(E)$ et $a_j \in \mathfrak{L}(P_j(E \times E)\ ,\ \underset{\sim}{C})$, où $P_j(E \times E)$ désigne l'espace des polynômes (non holomorphes) sur E^C , homogène, de degré j . Alors, $a_j . D^j\ A(\bar{z}\ ,\ z) \in T_j^{m-\delta j}$.

Démonstration. - Il est clair que, $\forall\ z \in E^C$, $D^j\ A^\circ(\bar{z}\ ,\ z) \in P_j(E \times E)$, et donc $a_j . D^j\ A(\bar{z}\ ,\ z)$ a un sens. On prouve le lemme suivant.

LEMME 1.2. - L'application $f \in C_b^0(X) \longmapsto \{t \in \widehat{\bigodot}_j^\pi E^2 \longrightarrow \int_{X^c} f\ d(t\mu_j)\}$ avec $t\mu_j = \mathfrak{F}^{-1}(D^j\ A^\circ(\bar{z}\ ,\ z).t(1 + \|z\|^2)^{-(m/2)+(\delta j/2)})$ est continue pour la topologie stricte à valeurs dans $P_j(E \times E)$.

La démonstration du lemme résulte de ce que les $t\mu_j$ sont uniformément, en t dans la boule unité de $\widehat{\bigodot}_j^\pi E^2$, concentrés sur les compacts

$$K_\rho = \{x \in X^c ;\ \sum_{j=1}^\infty c_j^2 |x_j|^2 \leq \rho^2\}$$

(c_j doit être choisi convenablement).

Par transposition, on obtient une application de $(P_j(E \times E))' \longmapsto M^1(X^c)$. A $a_j \in (P_j(E \times E))'$ on associe une mesure bornée sur X^c dont la transformée de Fourier est bien $a_j\ D^j\ A^\circ(\bar{z}\ ,\ z)(1 + \|z\|^2)^{-(m/2)+(\delta j/2)}$, $z \in X^c$. On montre de la même manière que, $\forall\ h \in E^c$, $\forall\ k \in \underset{\sim}{N}$,

$$a_j(D^{k+j}\ A^\circ(\bar{z}\ ,\ z).(.\ ,\ h^k))(1 + \|z\|^2)^{-(m/2)+\delta(j+k)/2}$$

est la transformée de Fourier d'une mesure bornée sur X^c . On en déduit alors que $a_j\ D^j\ A^\circ(\bar{z}\ ,\ z) \in T^{m-(\delta j/2)}$.

COROLLAIRE 1.1. - Si $A^\circ \in T_\delta^m$, alors $\partial_z^\lambda\ \partial_{\bar{z}}^\mu\ A^\circ \in T_\delta^{m-\delta(|\lambda|+|\mu|)}$ et

$$\|\partial_z^\lambda\ \partial_{\bar{z}}^\mu\ D^j\ A^\circ(\bar{z}\ ,\ z)\ h(1 + \|z\|^2)^{-(m/2)+((j+|\lambda|+|\mu|)\delta/2)}\|_0 \leq \frac{C}{a^\lambda\ a^\mu} .$$

<u>Si</u> $A^o \in T^m_\delta$,

$$\Delta^\ell A^o = \sum_{|\rho|=\ell} \frac{\ell!}{\rho!} \partial^\rho_z \partial^\rho_{\bar z} A^o(\bar z , z) \in T^{m-2\ell\delta}_\delta .$$

Nous en venons, maintenant, à un résultat qui sera très utile pour obtenir un calcul symbolique sur les opérateurs représentés par des symboles d'anti-Wick appartenant aux classes T^m .

PROPOSITION 1.6. - <u>Soit</u> $A^o \in T^{m'}_\delta(E)$, $m' < 0$, <u>on peut trouver</u> $A^o_1(\bar z,z) \in T^{m'}_\delta(E)$, <u>et</u> $A^o_2(\bar z , z) \in T^{-\infty}(E)$ <u>avec</u> $A^o(\bar z , z) = A^o_1(\bar z , z) + A^o_2(\bar z , z)$; et si $\mu = \mathfrak{F}^{-1}(A^o)$, $\mu_1 = \mathfrak{F}^{-1}(A^o_1)$, $\mu_2 = \mathfrak{F}^{-1}(A^o_2)$, <u>on a</u>

$$\operatorname{supp} \mu_1 \subset \{\alpha \in X^{\underset{\sim}{C}} , \ |\alpha| \leqslant 2\} .$$

<u>Démonstration</u>. - On a vu, dans la proposition 1.1, que μ appartient à $M^1(X^{\underset{\sim}{C}})$. On considère une fonction $\varphi(\bar\alpha , \alpha) = \Phi(|\alpha|^2)$, où $\Phi \in C^\infty(\underset{\sim}{R})$, et vérifie

$$\Phi = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } t \geqslant \sqrt{2} \end{cases} .$$

On pose alors $\mu_1 = (1 - \varphi)\mu$ et $\mu_2 = \varphi\mu$. Il est clair que μ_1 et μ_2 sont dans $M^1(X^{\underset{\sim}{C}})$. Soit $A^o_1 = \mathfrak{F}(\mu_1)$ et $A^o_2 = \mathfrak{F}(\mu_2)$. Montrons tout d'abord que A^o_1 et A^o_2 sont des fonctions C^∞-Fréchet différentiables sur $E^{\underset{\sim}{C}}$.

La fonction $z \in X^c \longmapsto \exp(i(z\bar\alpha + \bar z\alpha))$ se prolonge par continuité en une fonction continue de E^c dans $L^p_{|\mu|}(X^c)$, $\forall$ p , car l'application

$$(h_1 , \dots , h_j) \in X^c \longmapsto (h_1 \bar\alpha)\dots(h_j \bar\alpha)$$

se prolonge, par continuité de $(E^c)^j \longmapsto L^p_{|\mu|}(X^c)$, $\forall$ p . On en déduit aisément que la fonction $\int \exp(i(z\bar\alpha + \bar z\alpha))(1 - \varphi(\alpha , \bar\alpha)) \, d\mu(\alpha , \bar\alpha)$ est C^∞-Fréchet différentiable sur E^c . On a

$$D^j A^o_1(\bar z , z) h = \int \exp(i(z\bar\alpha + \bar z\alpha))(1 - \varphi)(\bar\alpha h + \alpha\bar h)^j \, d\mu .$$

Il en est de même de $A^o_2(\bar z , z)$, et

$$\mathfrak{F}^{-1}((\alpha\bar h + \bar\alpha h)^j \mu) = D^j A^o(\bar z , z) h \in T^m_\delta .$$

On va montrer que, $\forall$ $m \in \underset{\sim}{N}$, $\|z\|^{2m} D^j A^o_2(\bar z , z) h$ est la transformée de Fourier d'une mesure dont la masse est au plus $C\|h\|^j$. On pose $\mu_h = (\alpha\bar h + \bar\alpha h)^j \mu$. Alors

$$\|z\|^{2m} D^j A^o_2(\bar z , z) h = C\|z\|^{2m} \int \exp(i(z\bar\alpha + \bar z\alpha)) \varphi \, d\mu_h(\alpha) = \mathfrak{F}(\tilde\Delta^m \varphi\mu_h)(z , \bar z) ,$$

pour $z \in X^c$, où $\tilde\Delta^m(\varphi\mu_h)$ désigne la forme linéaire suivante sur $C^\infty_b(X^c)$, $f \longmapsto \int \tilde\Delta^m f \, \varphi \, d\mu_h$. On constate que

$$\tilde\Delta^m(\varphi\mu_h) = \sum_{j+k+|\mu|+|\nu|=m} \frac{m!}{j!\,k!\,\mu!\,\nu!} \frac{\partial^\mu_{\bar\alpha} \partial^\nu_\alpha \tilde\Delta^j \varphi}{a^{\mu+\nu}} \cdot \frac{\partial^\nu_{\bar\alpha} \partial^\mu_\alpha \tilde\Delta^k \mu_h}{a^{\mu+\nu}} ,$$

ce qui signifie que, pour toute $f \in C^\infty_b(X^c)$,

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{j,k,\mu,\nu\in J_n} \frac{(\ )}{a^{(\ )}} \int \partial^\nu_{\bar\alpha} \partial^\mu_\alpha \tilde\Delta^k (f \, \partial^\mu_{\bar\alpha} \partial^\nu_\alpha \tilde\Delta^j \varphi) \, d\mu_h = \int \tilde\Delta^m f \, \varphi \, d\mu_h .$$

Or

$$\partial_{\bar\alpha}^{\mu}\,\partial_{\alpha}^{\nu}\,\tilde\Delta^{j}\,\varphi(\bar\alpha\;,\;\alpha) = \alpha^{\pi}\,\bar\alpha^{u}\sum_{|\rho|=j}\frac{j!}{\rho!}\,\frac{1}{a^{2\rho}}$$
$$\sum_{\eta\leqslant \inf(\mu,\nu)+\rho} C_{\mu,\nu,\rho,\eta}\,|\alpha|^{2(\inf(\mu,\nu)+\rho-\eta)}\,\Phi^{(|\mu|+|\nu|+2|\rho|-|\eta|)}\,(|\alpha|)^{2}\;,$$

où l'on a posé $\mu = u + \inf(\mu\;,\;\nu)$ et $\nu = \pi + \inf(\mu\;,\;\nu)$. Donc,

$$\partial_{\bar\alpha}^{\mu}\,\partial_{\alpha}^{\nu}\,\tilde\Delta^{j}\,\varphi(\alpha\;,\;\bar\alpha) = \bar\alpha^{\pi}\,\alpha^{u}\,\Psi_{\mu,\nu,j}(\alpha\;,\;\bar\alpha)$$

où $|\Psi_{\mu,\nu,j}(\alpha\;,\;\bar\alpha)| \leqslant C\chi_{(1\leqslant|\alpha|)}$. La somme précédente devient

$$\sum_{j,k,\mu,\nu}(\ldots)\Psi_{\mu,\nu,j}(\alpha\;,\;\bar\alpha)\;\frac{\bar\alpha^{\pi}\,\alpha^{u}}{a^{\mu+\nu}}\;\frac{\partial_{\bar\alpha}^{\nu}\,\partial_{\alpha}^{\mu}\,\tilde\Delta^{k}\,\mu_h}{a^{\mu+\nu}}\;.$$

Comme

$$|\alpha|^{2\ell'}\,\bar\alpha^{\pi}\,\alpha^{u}\,\frac{\partial_{\bar\alpha}^{\nu}\,\partial_{\alpha}^{\mu}\,\tilde\Delta^{k}\,\mu_h}{a^{\mu+\nu}} = \mathfrak{F}^{-1}(\Delta^{\ell'}\,\partial_z^{\pi}\,\partial_{\bar z}^{\mu}((\tfrac{\bar z}{a})^{\nu}(\tfrac{z}{a})^{\mu}\,\|z\|^{2k}\,D^{j}\,A^{\circ}(\bar z\;,\;z).h)) = \mu_{h,\mu,\nu}\;.$$

On constate que $\|\mu_{h,\mu,\nu}\| \leqslant (C\|h\|^{j}/a^{\pi}\,a^{u})$ si ℓ' a été choisi assez grand.

De plus,

$$\int \tilde\Delta^{m}\,f\varphi\,d\mu_h = \lim_{n\to\infty}\sum_{j,k,\rho,\nu\in\mathfrak{I}_n}(\;)\int \frac{f}{a^{\mu+\nu}}\,\frac{\Psi_{\mu,\nu,j}(\alpha)}{|\alpha|^{2\ell'}}\,d\mu_{h,\mu,\nu}(\alpha)\;,$$

pour toute $f \in C_b^{\infty}(X^c)$. Comme la norme de la mesure

$$(\Psi_{\mu,\nu,j}(\alpha))/(a^{\mu+\nu}\,|\alpha|^{2\ell'})\;\mu_{h,\mu,\nu}$$

est au plus $(C\|h\|^{j})/(a^{\mu+\nu}\,a^{\pi}\,a^{u})$ et que $\sum_{\mu,\nu}(1/a^{\pi+u+\mu+\nu}) < +\infty$, on en déduit que $\tilde\Delta^{m}(\varphi\mu_h)$ est une mesure de Radon dont la norme est bornée par $C\|h\|^{j}$. Il est alors facile de conclure que $A_2^{\circ}(\bar z\;,\;z) \in T^{-\infty}$. Ce qui prouve la proposition 1.6.

Soit $\mu(\alpha)$ une mesure de Radon sur X^c dont la transformée de Fourier est continue sur E^c . On introduit, comme dans [9], l'opérateur τ_α par

$$\tau_\alpha\,u(x) = u(x + 2\alpha')\,\exp(-\,x\bar\alpha - \tfrac{1}{2}\,\bar\alpha^{2} - |\alpha|^{2})$$

qui est déduit par l'application

$$\theta\;:\;\mathfrak{L}^{s} \longrightarrow \Lambda^{s}\;\;;\;\;\theta(u)(z) = \widehat{u\nu}(z)\,\exp(\tfrac{1}{2}\,z^{2})\;;$$

de l'opérateur $\Phi \in \Lambda^{s} \longrightarrow \pi(\exp(i(z\bar\alpha + \bar z\,\alpha))\Phi)(z) \in \Lambda^{s}$. Il est facile de voir que l'application $\alpha \in X^{c} \longmapsto \tau_\alpha\,u$ est continue, et bornée $X^{c} \longmapsto \mathfrak{L}^{s}$, $\forall$ u fixé dans $\mathfrak{L}^{s}$. Il est, en effet, facile de prouver que l'application

$$\alpha \in X^{c} \longmapsto \exp(i(z\bar\alpha + \bar z\alpha))\;g \in L^{2}_{\nu(1+\|z\|^{2})^{s}}(E^{c})$$

est continue, pour toute $g \in L^{2}_{\nu(1+\|z\|^{2})^{s}}$.

On peut donc définir l'opérateur $Au = \int_{X^c}\tau_\alpha\,u\,d\mu(\alpha\;,\;\bar\alpha)$ qui est continu $\mathfrak{L}^{s} \longrightarrow \mathfrak{L}^{s}$, l'intégrale étant convergente au sens de Bochner.

$$A\Phi = \theta(A)\theta^{-1}\,\Phi = \pi(\int_{X^c}\exp(i(z\bar\alpha + \bar z\alpha))\;\Phi\;d\mu(\alpha\;,\;\bar\alpha))\;,\quad\forall\;\Phi \in \Lambda^{s}\;.$$

Notons $\lambda(z\;,\;\alpha)$ une fonction $(\nu_c \otimes |\mu|)$-mesurable telle que, $|\mu|$ – presque-partout, la fonction $z \longrightarrow \lambda(z,\alpha)$ soit dans la classe modulo ν_c de la fonction $z\bar{\alpha} + \bar{z}\alpha \in L^2_{\nu_c}(E^c)$ (ce qui est possible, voir par exemple le lemme 2.1).

La fonction $(\alpha, z) \longmapsto \tilde{\Phi}(z)e^{i\lambda(z,\alpha)}$ (où $\tilde{\Phi}$ est une fonction ν_c-mesurable de la classe de Φ) est $(\nu_c \otimes |\mu|)$-mesurable, et $|\mu|$-presque-partout, la fonction $z \longrightarrow \tilde{\Phi}(z) \exp(i\lambda(z , \alpha))$ est dans la classe de $\Phi \exp(i(z\bar{\alpha} + \bar{z}\alpha))$. Donc, $\int \tilde{\Phi}(z) \exp(i\lambda(z , \alpha))\, d\mu(\alpha) = \tilde{\Phi}(z) \int \exp(i\lambda(z , \alpha))\, d\mu(\alpha)$, qui est définie ν_c-presque-partout, est dans la classe de $\int_{X^c} \Phi \exp(i(z\bar{\alpha} + \bar{z}\alpha))\, d\mu(\alpha) \in L^2_{\nu_c}(\ )^s$.

Par ailleurs, $\int \exp(i(z\bar{\alpha} + \bar{z}\alpha))\, d\mu(\alpha , \bar{\alpha}) = \lim_{L^p_{\nu_c}} \int \exp(i(z\overline{s_n(\alpha)} + \bar{z}s_n(\alpha))\, d\mu$ (par le théorème de Lebesgue pour $1 \leqslant p < \infty$). Comme

$$\int \exp(i(z\overline{s_n(\alpha)} + \bar{z}s_n(\alpha))\, d\mu(\alpha) = \hat{\mu}(s_n(z)) ,$$

donc

$$\text{classe de } \hat{\mu}(z) = \int_{X^c} \exp(i(z\bar{\alpha} + \bar{z}\alpha))\, d\mu(\alpha) ;$$

puis, $\int \exp(i\lambda(z , \alpha)\, d\mu(\alpha) = \hat{\mu}(z)$, presque partout relativement à ν_c . Ainsi

$$A\Phi = \pi(\Phi A^o(\bar{z} , z)) \quad \text{avec} \quad A^o(\bar{z} , z) = \hat{\mu}(z) .$$

On a donc prouvé que l'on pouvait représenter l'opérateur associé à une fonction A^o de la classe T^m_δ , $m \leqslant 0$, sous la forme $Au = \int \tau_\alpha u\, d\mu(\alpha , \bar{\alpha})$.

On peut donc calculer $B(Au) = \int d\nu(\bar{\beta}, \beta)\, \tau_\beta \int \tau_\alpha u\, d\mu = \iint \tau_{\alpha+\beta} u\, e^{\bar{\beta}.\alpha}\, d\mu\, d\nu$.

En effet, $(\alpha , \beta) \longmapsto \tau_\beta(\tau_\alpha u) = \tau_{\alpha+\beta} u \exp(\bar{\beta}.\alpha)$ est continue et bornée $X^c \times X^c \longrightarrow \mathcal{E}^s$, pour $u \in \mathcal{E}^s$. Mais si on veut associer un symbole à $B \circ A$, on doit considérer le cas où $(\alpha , \beta) \longrightarrow \exp(\bar{\beta}.\alpha)$ est $(|\mu| \otimes |\nu|)$-intégrable, et aussi où la fonction

$$z \in X^c \longrightarrow \rho(\bar{z} , z) = \iint \exp(i(z(\bar{\alpha} + \bar{\beta}) + \bar{z}(\alpha + \beta)))\exp(\bar{\beta}.\alpha)\, d\mu\, d\nu$$

est continue sur E^c , auquel cas on a $B(A\Phi) = \pi(\rho\Phi)$. Donc, $B \circ A$ a pour symbole d'anti-Wick la fonction ρ . On voit donc maintenant que l'intérêt de la proposition précédente est justement de se ramener au cas où μ et ν ont leurs supports contenus dans la boule $|\alpha| \leqslant 2$, ce qui fait qu'alors ρ est bien définie (la condition de continuité est alors également satisfaite lorsque A^o et $B^o \in T_\delta$).

DÉFINITION 1.3. - <u>On appelle</u> $\mathcal{R}^{-\infty}(X , E)$ <u>l'algèbre engendrée par les opérateurs de</u> $\mathcal{E}^{-\infty}(X , E) \longmapsto \mathcal{E}^{+\infty}(X , E)$ <u>qui sont de la forme</u> $B \circ A$, <u>où</u> $B^o \in T^m_\delta$ <u>avec</u> $m \in \underline{R}$, $\delta > 0$ <u>et</u> $A^o \in T^{-\infty}(E)$, <u>ou encore de la forme</u> $A \circ B$, <u>avec</u> $A^o \in T^{-\infty}$ <u>et</u> $B^o \in T^m_\delta$.

Cette algèbre $\mathcal{R}^{-\infty}$ va jouer pour nous le rôle que jouent habituellement, dans la théorie des opérateurs pseudo-différentiels, les opérateurs à noyaux C^∞ .

Nous dirons généralement que $A \in T^m_\delta$ si $A = op(A^o)$ avec $A^o \in T^m_\delta(E)$.

THÉORÈME 1.1. - Si $A \in T^m_\delta$ et $B \in T^{m'}_\delta$ avec m et $m' \in \underset{\sim}{R}$, il existe $R \in \mathcal{R}^{-\infty}$ tel que $C = B \circ A - R$ appartienne à $T^{m+m'}_\delta$. On a, en outre, le développement asymptotique

$$C^\circ(\bar z , z) = \sum_{|\lambda|<N} \frac{(-1)^\lambda}{\lambda!} \partial_z^\lambda B^\circ(\bar z , z) \partial_{\bar z}^\lambda A^\circ(\bar z , z) + R_N(\bar z , z)$$

avec $R_N(\bar z , z) \in T^{m+m'-2N\delta}_\delta$, pour tout $N \in \underset{\sim}{N}$.

Démonstration du théorème. - On remarque tout d'abord que

$$\sum_{|\lambda|=j} \frac{(-1)^\lambda}{\lambda!} \partial_z^\lambda B^\circ(\bar z , z) \partial_{\bar z}^\lambda A^\circ(\bar z , z)$$

appartient à $T^{m+m'-2j\delta}_\delta$, à cause du corollaire 1.1 et des propositions 1.2 et 1.4.

Traitons d'abord le cas où m et m' sont négatifs. On écrit $A^\circ = A^\circ_1 + A^\circ_2$ et $B^\circ = B^\circ_1 + B^\circ_2$, à l'aide de la proposition 1.6, avec

$$\operatorname{supp} \mathfrak{F}^{-1}(A^\circ_1) \subset \{|\alpha| < 2\} , \quad \operatorname{supp} \mathfrak{F}^{-1}(B^\circ_1) \subset \{|\alpha| < 2\} , \quad A^\circ_2 \text{ et } B^\circ_2 \in T^{-\infty} .$$

On pose

$$R = B_2 \circ A_1 + B_1 \circ A_2 + B_2 \circ A_2 ,$$

et il est clair que $R \in \mathcal{R}^{-\infty}$. On a donc à composer A_1 et B_1 ; on pose

$$\mu = \mathfrak{F}^{-1}(B^\circ_1) , \quad \nu = \mathfrak{F}^{-1}(A^\circ_1) , \quad \operatorname{supp} \mu \text{ et } \operatorname{supp} \nu \subset \{|\alpha| < 2\} .$$

Ainsi $B_1 \circ A_1 \in S^\circ$, et $C_1 = B_1 \circ A_1$ s'écrit $C_1 = \mathrm{op}(C^\circ_1)$ avec

$$C^\circ_1(\bar z , z) = \iint \exp(iz(\bar\alpha + \bar\beta) + i\bar z(\alpha + \beta)) \exp(\bar\beta.\alpha)\, d\mu(\beta)\, d\nu(\alpha) .$$

On écrit

$$\exp(\bar\beta.\alpha) = \sum_{|\lambda|<N} \frac{\bar\beta^\lambda \alpha^\lambda}{\lambda!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{N-1}}{(N-1)!} (\bar\beta|\alpha)^N \exp(t(\bar\beta|\alpha))\, dt ,$$

d'où

$$C^\circ_1(\bar z , z) = \sum_{|\lambda|<N} \frac{(-1)^\lambda}{\lambda!} \partial_z^\lambda B^\circ_1(\bar z , z) \partial_{\bar z}^\lambda A^\circ_1(\bar z , z) + R_N(\bar z , z)$$

avec

$$R_N(\bar z , z) = \int_0^1 \frac{(1-t)^{N-1}}{(N-1)!} \times \iint \exp(iz(\bar\alpha + \bar\beta) + i\bar z(\alpha + \beta))(\bar\beta|\alpha)^N \exp(t\bar\beta.\alpha)\, d\mu(\bar\beta , \beta)\, d\nu(\bar\alpha , \alpha)\, dt .$$

Nous allons étudier

$$(-1)^k \|z\|^{2k} R_N(\bar z , z) = \mathfrak{F}\Big(\sum_{|\rho|=k} \frac{1}{a^{2\rho}} \frac{k!}{\rho!} \partial_\gamma^\rho \partial_{\bar\gamma}^\rho R_N(\bar\gamma , \gamma)\Big)$$

où $R_N(\bar\gamma , \gamma)$ est la mesure

$$\varphi \longrightarrow \int_0^1 \frac{(1-t)^{N-1}}{(N-1)!}\, dt \int \varphi(\alpha + \beta)\, e^{\bar\beta\alpha}(\bar\beta\alpha)^N\, d\mu(\bar\beta , \beta)\, d\nu(\bar\alpha , \alpha) .$$

Or $\sum_{|\rho|=k} \frac{k!}{\rho!} \frac{1}{a^{2\rho}} \partial_\gamma^\rho \partial_{\bar\gamma}^\rho R_N$ est donnée par

$$\varphi \in C_b^\infty(X^c) \longrightarrow \int_0^1 \frac{(1-t)^{N-1}}{(N-1)!}\, dt \iint \tilde\Delta^k \varphi(\alpha + \beta) \exp(t\bar\beta\alpha)(\bar\beta\alpha)^N\, d\mu(\beta)\, d\nu(\alpha) ,$$

Or

$$\tilde{\Delta}^k\ \varphi(\alpha+\beta)\ \exp(t\bar{\beta}\alpha)(\bar{\beta}\alpha)^N = \sum_{\substack{j+|\eta|=k\\ p+q=|\eta|}} (\ )\ \frac{\partial^\eta_\alpha\ \tilde{\Delta}^j_{\alpha,\bar{\alpha}}}{a^\eta}\ (\varphi(\alpha+\beta)\ \bar{\beta}^\eta\ \frac{\exp(t\bar{\beta}\alpha)(\bar{\beta}\alpha)^{N-p}\ t^q}{a^\eta}) \ .$$

Puis

$$\int_{X^c} \tilde{\Delta}^k\ \varphi(\alpha+\beta)\ \exp(t\bar{\beta}\alpha)\ (\bar{\beta}\alpha)^N\ d\nu(\alpha\ ,\ \bar{\alpha})$$
$$= \sum_{j,\eta,p,q} \int \zeta(\alpha)\ \varphi(\alpha+\beta)\ \frac{\exp(t\bar{\beta}\alpha)}{a^\eta}\ t^q\ \bar{\beta}^\eta(\bar{\beta}\nu^{\eta,j}_{N-p}\ (d\alpha))\ ,$$

où $\zeta(\alpha)\equiv 1$ au voisinage du support de ν , et où

$$\bar{\beta}\nu^{\eta,j}_{N-p}(d\alpha) = \mathfrak{F}^{-1}(D^{N-p}_{\bar{z}}(B^o_1(\bar{z}\ ,\ z)(\tfrac{z}{a})^\eta\|z\|^{2j}).\bar{\beta}^{N-p})$$

qui est une mesure si N est assez grand devant k . D'ailleurs,

$$\bar{\beta}\nu^{\eta,j}_{N-p}(d\nu) = \textstyle\sum_{|\lambda|=N-p}\ \bar{\beta}^\lambda\ \nu^{\eta,j}_\lambda(d\alpha)$$

avec $\|\nu^{\eta,j}_\lambda\| \leqslant C/a^\lambda$. Donc

$$\int_0^1 \int d\mu \int \tilde{\Delta}^k\ \varphi(\alpha+\beta)\ e^{t\bar{\beta}\alpha}(\bar{\beta}\alpha)^N\ d\nu$$
$$= \sum_{\substack{|\lambda|=N-p\\ 0\leqslant p\leqslant k}} \int_0^1 \int \zeta(\alpha) \sum_{\substack{j,\eta,q\\ j+|\eta|=k,\ |\eta|=p+q}} \nu^{\eta,j}_\lambda(d\alpha) \int t^q\ \frac{\bar{\beta}^\eta}{a^\eta}\,\zeta(\beta)\ \bar{\beta}^\lambda\ e^{t\bar{\beta}\alpha}\ \varphi(\alpha+\beta)\ d\mu \ .$$

Ce qui est bien une mesure, car la norme de la mesure

$$\zeta(\alpha)\ \zeta(\beta) \sum_{j,\eta,q} t^q(1-t)^{N-1}\ \frac{|\bar{\beta}^\eta|}{a^\eta}\ |\exp(t\bar{\beta}\alpha)|\,|\nu^{\eta,j}_\lambda\ (d\alpha)|\ \otimes\ |\bar{\beta}^\lambda\ d\mu(\beta)|$$

est bornée par $C/a^{2\lambda}$, car $\|\beta^{\lambda+\eta}\ \mu\| \leqslant (C/a^{\lambda+\eta})$. Donc $\|z\|^{2k}\ R_N(\bar{z}\ ,\ z)$ est la transformée de Fourier d'une mesure bornée sur X^c .

Ceci suffit d'ailleurs à prouver que, pour tout N ,

$$\|(1+\|z\|^2)^{(-(m+m')+2N\delta)/2}\ R_N(\bar{z}\ ,\ z)\|_0 < +\infty \ .$$

Il suffit, en effet, d'appliquer ce que l'on vient de montrer à l'ordre N' , où N' est choisi assez grand, pour que $[\delta N'/2] > -((m+m')/2)+N\delta$. Il nous reste à étudier les dérivées de $R_N(\bar{z}\ ,\ z)$.

Soit

$$D^j\ R_N(\bar{z}\ ,\ z).h = \textstyle\sum_{j=j'+j''}(j!/j'!\ j''!)\ R_N\{D^{j''}\ B^o_1(\bar{z}\ ,\ z).h\ ,\ D^{j'}\ A^o_1(\bar{z}\ ,\ z).h\}(\bar{z}\ ,\ z)$$

où $R_N\{B^o\ ,\ A^o\}(\bar{z}\ ,\ z)$ est le reste d'ordre N obtenu dans la composition des opérateurs B et A . Mais, comme $D^{j'}\ A^o_1(\bar{z}\ ,\ z).h$ appartient à $\Gamma^{m'-\delta j'}_\delta$, et vérifie $N^\delta_N(D^{j'}\ A^o_1.h) \leqslant C\|h\|^{j'}\ N^{-\delta}_{N+j'}(A^o_1)$, on voit que

$$\|(1+\|z\|^2)^{(-(m+m')/2)+(\delta j/2)+N\delta}\ D^j\ R_N(\bar{z}\ ,\ z).h\|_0 < +\infty\ ,\quad \forall\ N\ ,\quad \forall\ j\ .$$

Donc $R_N(\bar{z}\ ,\ z) \in T^{m+m'-2N\delta}_\delta$.

Soit

$$C^o_1(\bar{z}\ ,\ z) = \textstyle\sum_{|\lambda|<N} \frac{(-1)^\lambda}{\lambda!}\ \partial^\lambda_z\ B^o_1\ \partial^\lambda_{\bar{z}}\ A^o_1 + R_N \quad \text{avec} \quad R_N \in T^{m+m'-2N\delta}_\delta \ .$$

Mais, comme $A^o - A^o_1 \in T^{-\infty}$ et que $B^o - B^o_1 \in T^{-\infty}$, on voit que

$$C_1^o(\bar{z}\ ,\ z) = \sum_{|\lambda|<N} \frac{(-1)^\lambda}{\lambda !}\ \partial_z^\lambda\ B^o\ \partial_{\bar{z}}^\lambda\ A^o + R_N^{\prime}\ ,\quad R_N^{\prime} \in T_\delta^{m+m'-2N\delta}\ .$$

Et, finalement, $B \circ A = C_1 + R$, où $R \in \mathcal{R}^{-\infty}$, et $C_1 = \mathrm{op}(C_1^o)$ qui vérifie le développement asymptotique ci-dessus. On a donc prouvé le théorème 1.1 dans le cas où m et m' sont < 0.

Supposons d'abord que $m \geqslant 0$ et $m' < 0$. On pose

$$A^{o\prime}(\bar{z}\ ,\ z) = (1 + \|z\|^2)^{-k}\ A^o(\bar{z}\ ,\ z)\ ,$$

$k \in \underset{\sim}{\mathbb{N}}$ choisi assez grand de sorte que $A^{o\prime} \in T_{\delta'}^{m_1}$ avec $m_1 < 0$ et $\delta' < 1$ ($\delta' = \delta$ si $\delta < 1$). On détermine ensuite un opérateur $A_N^{\prime} \in T_{\delta'}^{m_1}$ tel que

$$A = A_N^{\prime} \circ \Pi_{2k} + R_N\ ,\ \text{avec}\ R_N \in T_{\delta'}^{m-N}\ ,\ \text{où}\ \Pi_{2k} = \mathrm{op}((1 + \|z\|^2)^k)$$

ce qui est possible à cause du calcul symbolique de [9]. On écrit comme ci-dessus

$$A_N^{\prime} = A_N^{\prime 1} + A_N^{\prime 2}\ ,\quad R_N = R_N^{\prime 1} + R_N^{\prime 2}\ \text{ et }\ B = B_1 + B_2\ ,$$

et donc

$$B \circ A = C + \mathcal{R}^{-\infty}\ ,\ \text{avec}\ C = B_1 \circ A_N^{\prime 1} \circ \Pi_{2k} + B_1 \circ R_N^{\prime 1}\ ,\quad B_1 \circ R_N^{\prime 1} \in T_{\delta'}^{m+m'-N}\ .$$

On applique le résultat montré ci-dessus à $B_1 \circ A_N^{\prime 1}$, soit

$$C^o(\bar{z}\ ,\ z) = \sum_{|\lambda|<N'} \frac{(-1)^\lambda}{\lambda !}\ (\partial_z^\lambda\ B^o\ \partial_{\bar{z}}^\lambda\ A_N^{o\prime}) \circ \Pi_{2k} + R_1\ ,$$

où $R_1 = R_{N'} \circ \Pi_{2k} + B_1 \circ R_N^{\prime 1} \in T_{\delta'}^{m+m'-N}$ si N' est assez grand. Mais

$$\sum_{|\lambda|<N'} \frac{(-1)^\lambda}{\lambda !}\ (\partial_z^\lambda\ B^o\ \partial_{\bar{z}}^\lambda\ A_N^{o\prime}) \circ \Pi_{2k}\ \text{ coïncide avec }\ \sum_{|\lambda|<N'} \frac{(-1)^\lambda}{\lambda !}\ \partial_z^\lambda\ B^o\ \partial_{\bar{z}}^\lambda(A_N^{o\prime} \circ \Pi_{2k})$$

modulo un symbole de $T_{\delta'}^{m+m'-2(N'-k)\delta'} \subset T_{\delta'}^{m+m'-N}$, si N' assez grand. Donc

$$C^o(\bar{z}\ ,\ z) = \sum_{|\lambda|<N'} \frac{(-1)^\lambda}{\lambda !}\ \partial_z^\lambda\ B^o\ \partial_{\bar{z}}^\lambda\ A^o + R_1^{\prime}\ ,\quad R_1^{\prime} \in T_{\delta'}^{m+m'-N}\ ,\ \text{si}\ 2\delta' N' > N + 2k\ .$$

Ceci implique que

$$\|(C^o(\bar{z}\ ,\ z) - \sum_{|\lambda|<N'} \frac{(-1)^\lambda}{\lambda !}\ \partial_z^\lambda\ B^o\ \partial_{\bar{z}}^\lambda\ A^o)(1 + \|z\|^2)^{-((m+m')/2)+\delta' N' - k - (1/2)}\|_0 < +\infty\ ,$$

avec N' arbitraire et $\delta' = \delta$ si $\delta < 1$, sinon $\delta' < 1$ arbitraire. On a vu précédemment que cela est suffisant pour conclure.

Si m et m' > 0, on se ramène par une méthode analogue au cas précédent, et on a le résultat dans tous les cas. Ceci permet de poser la définition suivante.

DÉFINITION 1.4. - <u>Nous dirons que</u> $P \in T_\delta^m(E)$ <u>est elliptique s'il existe</u> $q^o \in T_\delta^{-m}(E)$ <u>tel que</u> $p^o\ q^o - 1 \in T_\delta^r$, <u>où</u> $r < 0$.

On a donc la proposition suivante.

PROPOSITION 1.7. - <u>Soit</u> $P \in T_\delta^m(E)$ <u>un opérateur elliptique, alors</u>, $\forall\ N \in \underset{\sim}{\mathbb{N}}$, <u>il existe des opérateurs</u> $Q_N \in T_\delta^{-m}$ <u>et</u> $R_N \in T_\delta^{-N}$ (<u>resp.</u> $Q_N^{\prime} \in T_\delta^{-m}$ <u>et</u> $R_N^{\prime} \in T_\delta^{-N}$) <u>qui vérifient</u> $Q_N \circ P = I + R_N$ (mod $\mathcal{R}^{-\infty}$) (<u>resp.</u> $P \circ Q_N^{\prime} = I + R_N^{\prime}$ (mod $\mathcal{R}^{-\infty}$)).

On peut également formuler un calcul symbolique sur le symbole de Wick des générateurs. En effet, si $A = \int \tau_\alpha \, d\mu(\alpha , \bar{\alpha})$ on montre que

$$A(z , \bar{\zeta}) = \int \exp(i(z\bar{\alpha} + z\alpha)) \exp(- |\alpha|^2) \, d\mu(\alpha , \bar{\alpha}) .$$

On voit donc, ce qui est normal, que le symbole de Wick du produit de deux opérateurs des classes T^m_δ est toujours bien défini.

PROPOSITION 1.8.

1° Soit $A \in T^m_\delta$, alors la fonction $A(z , \bar{z})$ appartient également à $T^m_\delta(E)$, et on a

$$A(z , \bar{z}) = \sum_{|\lambda|<N} \frac{1}{\lambda !} \partial^\lambda_z \partial^\lambda_{\bar{z}} A^\circ(\bar{z} , z) + R_N(z , \bar{z}) , \text{ avec } R_N \in T^{m-2\delta N}_\delta ,$$

et également

$$A^\circ(\bar{z} , z) = \sum_{|\lambda|<N} \frac{(-1)^\lambda}{\lambda !} \partial^\lambda_z \partial^\lambda_{\bar{z}} A(z , \bar{z}) + R'_N , \text{ où } R'_N \in T^{m-2\delta N}_\delta .$$

2° Si $A \in T^m_\delta$ et $B \in T^{m'}_\delta$, si on désigne par $C(z , \bar{z})$ le Wick-symbole de l'opérateur $B \circ A$, on a

$$C(z , \bar{z}) = \sum_{|\lambda|<N} \frac{1}{\lambda !} \partial^\lambda_{\bar{z}} B(z , \bar{z}) \, \partial^\lambda_z A(z , \bar{z}) + R''_N , \text{ où } R''_N \in T^{m+m'-2\delta N}_\delta .$$

Démonstration.

1° On sait ([9]) que

$$A(z , \bar{z}) = \exp(- |z|^2) \int A^\circ(\bar{w} , w) \exp(z\bar{w} + \bar{z}w) \, d\nu(w) ,$$

soit

$$A(z , \bar{z}) = \int A^\circ(\bar{z} + \bar{w} , z + w) \, d\nu(\bar{w}) .$$

Ce qui prouve, alors, que $A(z , \bar{z}) \in C^\infty(E^c)$. La formule de Taylor donne

$$\begin{aligned} A(z , \bar{z}) = & \sum_{|\lambda|<N} \frac{1}{\lambda !} \partial^\lambda_z \partial^\lambda_{\bar{z}} A^\circ(\bar{z} , z) \\ & + \int_0^1 \frac{(1-t)^{N-1}}{(N-1)!} \int D^N A^\circ(\bar{z} + t\bar{w} , z + tw).w \, d\nu(w) \, dt . \end{aligned}$$

Or $D^N A^\circ(\bar{z} , z).h \in T^{m-\delta N}_\delta$, et si $k \in \underset{\sim}{N}$ avec $2k \leq - m + \delta N$, alors

$$\|(1 + \|z\|^2)^k D^N A^\circ(\bar{z} , z).h\|_0 \leq C\|h\|^N .$$

Or

$$\begin{aligned} & \mathfrak{F}^{-1}_{z\to\alpha}((1 + \|z + tw\|^2)^k D^N A^\circ(\bar{z} + t\bar{w} , z + tw).h) \\ & \qquad = \exp(it(\alpha\bar{w} + \bar{\alpha}w)) \, \mathfrak{F}^{-1}((1 + \|z\|^2)^k D^N A^\circ(\bar{z} , z).h)) , \end{aligned}$$

pour tout $w \in E^c$, l'égalité étant une égalité de mesures cylindriques sur E'^c. D'où

$$\|(1 + \|z\|^2)^{+k} D^N A^\circ(\bar{z} + t\bar{w} , z + tw).h\|_0 \leq C \|h\|^N (1 + \|w\|^2)^k , \text{ si } 2k \leq - m + \delta N.$$

Ainsi

$$\|(1 + \|z\|^2)^{+k} \int_0^1 \frac{(1-t)^{N-1}}{(N-1)!} \int D^N A^\circ(\bar{z} + t\bar{w} , z + tw).w \, d\nu(w) \, dt\|_0 < + \infty .$$

Ceci permet d'obtenir la 1re partie du 1°, la 2e partie résulte directement de la 1re partie.

2° On considère d'abord le cas où m et m' sont < 0 . Alors

$C(z\ ,\ \bar{z}) =$

$$\iint \exp(-\ |\alpha|^2 - |\beta|^2 - \beta\bar{\alpha})\ \exp(iz(\bar{\alpha} + \bar{\beta}) + i\bar{z}(\alpha + \beta))\ d\mu(\beta\ ,\ \bar{\beta})\ d\nu(\alpha\ ,\ \bar{\alpha})\ ,$$

il suffit d'écrire

$$\exp(-\ \beta.\bar{\alpha}) = \sum_{|\lambda|<N}(-\ 1)^{|\lambda|}\ \frac{\beta^\lambda\ \bar{\alpha}^\lambda}{\lambda!} + \int_0^1 \frac{(1\ -\ t)^{N-1}}{(N\ -\ 1)!}\ (-\ 1)^N.(\beta|\bar{\alpha})^N\ \exp(-\ t(\beta.\bar{\alpha}))\ dt\ .$$

On considère également l'application :

$$\varphi \in C_b^\infty(X^c) \longrightarrow \int_0^1 \frac{(1\ -\ t)^{N-1}}{(N\ -\ 1)!}\ dt$$
$$\times \iint \tilde{\Delta}^k\ \varphi(\alpha + \beta)(\beta\bar{\alpha})^N\ \exp(-\ |\alpha|^2 - |\beta|^2 - t\beta\bar{\alpha})\ d\mu(\beta)\ d\nu(\alpha)\ dt\ .$$

On utilise une identité de la forme

$$\tilde{\Delta}^k\ \varphi(\alpha + \beta)(\beta\bar{\alpha})^N\ e^{-|\alpha|^2 - t\beta\bar{\alpha}} = \sum_{\substack{k=j+\ell+|\eta|+|\theta|+|\lambda| \\ \theta=\theta'+\theta'' \\ |\lambda|+|\theta''|=p+q}} (\ )$$
$$\times \frac{\partial_{\bar{\alpha}}^{\eta}\ \partial_{\alpha}^{\theta}\ \tilde{\Delta}^j(\varphi(\alpha + \beta)}{a^{\eta+\theta}}\ \frac{\tilde{\Delta}^\ell\ \partial_\alpha^{\eta+\lambda}\ \partial_{\bar{\alpha}}^{\theta'}(e^{-|\alpha|^2})}{a^{\eta+\lambda+\theta'}}\ e^{t\beta\bar{\alpha}}\ t^q(\beta\bar{\alpha})^{N-p}\ \frac{\beta^{\lambda+\theta''}}{a^{\lambda+\theta''}})\ .$$

Mais

$$\tilde{\Delta}^\ell\ \partial_\alpha^{\eta+\lambda}\ \partial_{\bar{\alpha}}^{\theta'}\ \exp(-\ |\alpha|^2)$$
$$= \sum_{|\rho|=\ell} \frac{\ell!}{\rho!}\ \frac{1}{a^{2\rho}} \sum_{\varepsilon\leqslant\rho+\inf(\eta+\lambda,\theta')} c(\ )\ \alpha^{\theta'+\rho-\varepsilon}\ \bar{\alpha}^{\eta+\lambda+\rho-\varepsilon}\ \exp(-\ |\alpha|^2)\ .$$

On écrit

$$\begin{cases} \theta' = \pi + \inf(\theta'\ ,\ \eta + \lambda) \\ \eta + \lambda = \sigma + \inf(\theta'\ ,\ \eta + \lambda) \end{cases}$$

d'où

$$\exp(|\alpha|^2/2)\ \tilde{\Delta}^\ell\ \partial_\alpha^{\eta+\lambda}\ \partial_{\bar{\alpha}}^{\theta'}\ \exp(-\ |\alpha|^2) = \alpha^\pi\ \bar{\alpha}^\sigma\ g_{\theta',\eta,\lambda,\ell}(\alpha)$$

avec $|g_{\theta,\eta,\lambda,\ell}(\alpha)| \leqslant C$, $g \in C_b^\infty$. Puis

$$\int_{X^c} \tilde{\Delta}^k\ \varphi(\alpha + \beta)(\beta\bar{\alpha})^N\ \exp(-\ |\alpha|^2\ -\ t\beta\bar{\alpha})\ d\nu(\alpha)$$
$$= \sum_{(\ )} \int \varphi(\alpha + \beta)\ \exp(-\ \frac{|\alpha|^2}{2})t^q\ \exp(t\beta\bar{\alpha})\ \frac{g_{\theta,\eta,\lambda,\ell}(\alpha)}{a^{\eta+\lambda+\theta'}}\ \frac{\beta^{\lambda+\theta''}}{a^{\lambda+\theta''}}\ \beta\nu_{N-p}^{\eta,\theta,j}(d\alpha)\ .$$

avec $\beta.\nu_{N-p}^{\eta,\theta,j}(d\alpha) = \mathfrak{F}^{-1}(D_z^{N-p}\ \partial_z^\sigma\ \partial_{\bar{z}}^\pi\ (B^\circ(z/a)^\eta\ (\bar{z}/a)^\theta\ \|z\|^{2j}).\beta)$ qui est une mesure que l'on écrit également $\sum_{|\rho|=N-p} \beta^\rho\ \nu_\rho^{\eta,\theta,j}(d\alpha)$ avec $\|\nu_\rho^{\eta,\theta,j}\| \leqslant C/a^{\rho+\pi+\sigma}$. Donc

$$\int_0^1 dt \int d\mu \int \tilde{\Delta}^k\ \varphi(\alpha + \beta)\ e^{t\beta\bar{\alpha}}\ (\beta\bar{\alpha})^N\ e^{-|\alpha|^2 - |\beta|^2}\ d\nu$$
$$= \sum_{j,\ell,\eta,\theta',\theta'',\lambda,\rho} \int_0^1\iint \varphi(\alpha + \beta)e^{(-|\alpha|^2/2)-|\beta|^2}\ e^{t\beta\bar{\alpha}}\ \frac{g_{\theta,\eta,\lambda,\ell}(\alpha)}{a^{\eta+2\lambda+\theta}}\ \beta^{\lambda+\theta''+\rho}\ d\mu\nu_\rho^{\eta,\theta,j}\ dt.$$

Ce qui est bien une mesure car $\|\beta^{\lambda+\theta''+\rho}\ \mu\| \leqslant C/a^{\lambda+\theta''+\rho}$ et $\|\nu_\rho^{\eta,\theta,j}\| \leqslant C/a^{\pi+\sigma+\rho}$ et que

$$\sum_{\eta,\theta',\theta'',\lambda,\rho} \frac{1}{a^{2\lambda}} \frac{1}{a^{2\theta''}} \frac{1}{a^{2\rho}} \frac{1}{a^{\pi+\sigma+\lambda+\theta'+\eta}} < +\infty .$$

Nous avons donc établi le résultat cherché quand m et $m' < 0$. Dans les autres cas, on raisonne comme dans la démonstration du théorème 1.1, en utilisant le résultat de la proposition 1.8, 2° où $A(z , \bar{z})$ ou $B(z , \bar{z})$ est un polynôme, résultat qu'il est simple de prouver directement.

COROLLAIRE 1.2. - Si $A \in T^m_\delta(E) \cap \mathcal{R}^{-\infty}$, alors $A \in T^{-\infty}$.

La proposition 1.8, 2° prouve que si $A \in \mathcal{R}^{-\infty}$, alors $A(z , \bar{z}) \in T^{-\infty}$, et il suffit d'appliquer la proposition 1.8, 1° pour voir que $A^\circ(\bar{z} , z) \in T^{-\infty}$. D'où le théorème suivant.

THEOREME 1.2. - Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $p^\circ(\bar{z} , z) \in T^m_\delta(E)$, $\exists\ q^\circ \in T^{-m}_\delta(E)$ tel que $p^\circ q^\circ - 1 \in T^r_\delta$ où $r < 0$;

(ii) $\forall\ N \in \underset{\sim}{N}$, il existe des opérateurs $Q_N \in T^{-m}_\delta$ et $R_N \in T^{-N}_\delta$ (resp. $Q'_N \in T^{-m}_\delta$ et $R'_N \in T^{-N}_\delta$) tels que

$$Q_N \circ P = I + R_N \pmod{\mathcal{R}^{-\infty}} \quad (\text{resp. } P \circ Q'_N = I + R'_N \pmod{\mathcal{R}^{-\infty}}).$$

Démonstration. - Nous avons prouvé, à la proposition 1.7, que (i) implique (ii). Supposons donc (ii) démontrée. Le théorème 1.1 prouve qu'il existe $R \in \mathcal{R}^{-\infty}$ tel que

$$Q_N \circ P = \mathrm{op}(q^\circ_N(\bar{z} , z) \times p^\circ(\bar{z} , z)) + R' + R , \quad R' \in T^{-2\delta}_\delta \text{ et } R \in \mathcal{R}^{-\infty} .$$

On déduit donc de l'hypothèse qu'il existe $R'' \in \Sigma^{-2\delta}_\delta$ et $R_1 \in \mathcal{R}^{-\infty}$ tels que

$$\mathrm{op}(q^\circ_N(\bar{z} , z)\ p^\circ(\bar{z} , z) - 1 - r^{\circ\prime\prime}(\bar{z} , z)) \in \mathcal{R}^{-\infty} , \text{ où } \mathrm{op}(r^{\circ\prime\prime}) = R'' .$$

Le corollaire 1.2 montre que

$$q^\circ_N(\bar{z} , z)\ p^\circ(\bar{z} , z) - 1 \in T^{-2\delta}_\delta ,$$

ce qui prouve (i).

Nous allons donner maintenant quelques exemples d'opérateurs elliptiques.

Exemples.

1° Soit $s \in \underset{\sim}{R}$. L'opérateur $A = (1 + \|z\|^2)^{s/2} + R(\bar{z} , z)$, où $R \in T^{s'}_\delta$, $s' < s$, est elliptique dans la classe T^s_δ . Ceci s'applique, en particulier, aux laplaciens.

$$A = \|z\|^{2k} + R(\bar{z} , z) , \quad R \in T^{s'}_\delta , \quad s' < 2k ,$$

est elliptique dans T^{2k}_δ , $\delta < 1$.

2° Soit $\lambda \in \underset{\sim}{C}$, $\mathrm{Re}\ \lambda > 0$. L'opérateur

$$A = (\lambda + \|z\|^2)^{s/2} + R(\bar{z} , z) , \quad R \in T^{s'}_\delta , \quad s' < s$$

est elliptique dans T^s_δ .

La proposition suivante va nous fournir, en suivant M. I. VIŠIK ([3], [14]), d'autres exemples.

PROPOSITION 1.9. - Soient $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$, et $\lambda_0 \in \underset{\sim}{R}^+$. Soit

$$\Omega_{\lambda_0,\varphi} = \{\lambda \in \underset{\sim}{C} \ ; \quad |\arg(\lambda - \lambda_0)| < \varphi\} \ .$$

Soit $P(\lambda)$ une fonction analytique dans $\Omega_{\lambda_0,\varphi}$, continue dans $\bar{\Omega}_{\lambda_0,\varphi}$, qui vérifie

$$\forall\, q \in \underset{\sim}{N} \ , \quad |\partial_\lambda^q\, P(\lambda)| \leqslant C(1 + |\lambda|)^{m-q} \quad \text{sur } \bar{\Omega}_{\lambda_0,\varphi} \ .$$

Soit $\mu \in \underset{\sim}{C}$, $\operatorname{Re} \mu > \lambda_0 > 0$. Alors

$$P(\mu + \|z\|^2) \in T^{m'}(X\ ,\ E) \quad \text{dès que} \quad 2m' > m \ .$$

Démonstration. - Posant $\Gamma = \partial\Omega_{\lambda_0,\varphi}$, la formule de Cauchy donne :

$$(\partial^q\, P)(\mu + \|z\|^2) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{\partial^q\, P(\lambda)}{\lambda - (\mu + \|\zeta\|^2)}\, d\lambda \ .$$

Or

$$D^j(P(\mu + \|\zeta\|^2).h) = \sum_{p+2q=j} \frac{j\,!}{p\,!\ q\,!}\, \partial^{p+q}\, P(\mu + \|\zeta\|^2)\ \|h\|^{2q}\ ((\bar{z}(h)_E + (z|\bar{h})_E)^p \ .$$

Comme

$$\|(\partial^q\, P)(\mu + \|z\|^2)(1 + \|z\|^2)^{-(m'/2)+q}\|_0 \leqslant C\|\partial^q\, P(\mu + \|z\|^2)(\mu + \|z\|^2)^{-(m'/2)+q}\|_0$$

à cause de 1.4, 3°, et que

$$\partial^q\, P(\mu + \|z\|^2)(\mu + \|z\|^2)^{-(m'/2)+q} = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{\partial^q\, P(\lambda)}{\lambda - (\mu + \|z\|^2)}\, \lambda^{-(m'/2)+q} \ ;$$

donc

$$\|\partial^q\, P(\mu + \|z\|^2)(\mu + \|z\|^2)^{-(m'/2)+q}\|_0 \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \frac{(1 + |\lambda|)^{m-q}}{|\operatorname{Re}(\mu - \lambda)|}\, |\lambda|^{-(m'/2)+q}\, d\lambda \ .$$

Or sur Γ , $|\operatorname{Re}(\mu - \lambda)| \geqslant C(1 + |\lambda|)$, et comme $m'/2 > m$, on a bien

$$\|\partial^q\, P(\mu + \|z\|^2)(1 + \|z\|^2)^{-(m'/2)+q}\|_0 < +\infty \quad \text{si} \quad m'/2 > m \ .$$

D'où l'on peut déduire que

$$\|D^j(P(\mu + \|\zeta\|^2)).h\ (1 + \|z\|^2)^{-(m'/2)+(j/2)}\|_0 < C\|h\|^j \quad \text{si} \quad (m'/2) > m \ .$$

Nous désignons, comme VIŠIK, cet espace de fonctions analytiques par $\mathcal{O}^m_{\lambda_0,\varphi}$. Nous avons le corollaire suivant.

COROLLAIRE 1.3. - Si $P(\lambda) = \sum_{j=0}^m a_j\, \lambda^j$ n'a pas de racines dans $\operatorname{Re} \lambda \geqslant 0$, alors il existe λ_0 et φ tels que $1/P(\lambda) \in \mathcal{O}^{-m}_{\lambda_0,\varphi}$, et donc $P(\mu + \|\zeta\|^2)$ a une paramétrix dans $T^{-2m'}$ dès que $m' < m/2$.

2. Espaces de fonctions lipschitziennes.

Nous allons introduire des espaces de fonctions sur E qui permettront d'obtenir la régularité lipschitzienne des solutions de l'équation $Pu = f$, où $P \in T^m_\delta$.

On rappelle que, dans [9], on a introduit

$$\mathcal{E}^k(X\,,\,E) = \{f \in L^2_\nu\ ;\ D^j f \in L^2_\nu(E\,,\widehat{\odot}_j E)\,,\ \ 0 \leq j \leq k\}\ .$$

Définition 2.1. - Soit $R > 0$ fixé. On désigne par $B_R = \{h \in X\ ;\ |h| \leq R\}$. Soit

$$N_j = \{f\ :\ E \longrightarrow \widehat{\odot}_j E\ ;\ f \text{ est nulle } \nu\text{-presque-partout}\}\ .$$

Soit $\tilde{\mathcal{C}}_j$ l'espace des $f\ :\ E \longrightarrow \widehat{\odot}_j E$ ν-Lusin mesurables, telles que, pour ν-presque tout x de E, l'application $h \in X \longrightarrow f(x+h)$ soit continue et bornée sur B_R. On note, alors,

$$P^j_R(f)(x) = \sup_{|h|\leq R} \|f(x+h)\|_{\widehat{\odot}_j E}$$

la fonction réelle définie presque-partout. On suppose enfin que

$$\tilde{\pi}_j(f) = \int^* P^j_R(f)^2(x)\ d\nu(x) < +\infty\ .$$

Soit $\mathcal{C}_j = \tilde{\mathcal{C}}_j/(\tilde{\mathcal{C}}_j \cap N_j)$. $\mathcal{C}_j$ s'identifie à un sous-espace vectoriel de $L^2_\nu(E\,,\widehat{\odot}_j E)$.

On définit donc

$$C^k_R(X\,,\,E) = \{f \in \mathcal{E}^k\ ;\ 0 \leq j \leq k\,,\ D^j f \in \mathcal{C}_j\}\ .$$

On constate que la semi-norme $\tilde{\pi}_j(f)$ sur $\tilde{\mathcal{C}}_j$ s'annule sur $\tilde{\mathcal{C}}_j \cap N_j$. En effet, soient $f \in \tilde{\mathcal{C}}_j \cap N_j$, et N un ensemble ν-négligeable tel que $f(x) \neq 0 \Longrightarrow x \in N$. Soient $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable dense de points de X, et $N' = \bigcup_n N - h_n$

$$\nu^*(N') = 0 \quad \text{et} \quad x \notin N' \Longrightarrow f(x+h_n) = 0\,,\quad \forall\, n \in \mathbb{N}\ .$$

Comme $h \longrightarrow f(x+h)$ est continue sur B_R, ν-presque-partout, on déduit aisément que $P^j_R(f)(x) = 0$, ν-presque-partout.

Par passage au quotient, on obtient une norme n_j sur $\mathcal{C}_j$. On définit ainsi une norme $P_{R,k}(f) = \sum_{j=0}^k n_j(D^j f)$ sur C^k_R.

PROPOSITION 2.1. - L'espace $C^k_R(X\,,\,E)$ est un espace de Banach muni de la norme $P_{R,k}$.

Démonstration. - Soit u_n une suite de Cauchy dans C^k_R. On détermine une sous-suite (notée encore u_n) telle que $n_j(D^j u_{n+1} - D^j u_n) \leq 2^{-n}$ si $0 \leq j \leq k$. Choisissant des représentants arbitraires $\tilde{u}^j_n$ de $D^j u_n$ dans $\tilde{\mathcal{C}}_j$, on note alors

$$N^c = \{x \in E\ ;\ \textstyle\sum_1^\infty \sup_{|h|\leq R} \|\tilde{u}^j_n(x+h) - \tilde{u}^j_{n+1}(x+h)\|_j < +\infty\,,\ \ 0 \leq j \leq k\}\ .$$

Soit $\tilde{u}^j(x)$, défini par $\lim_{n\to\infty} \tilde{u}^j_n(x)$ lorsque cette limite existe, par zéro ailleurs. On constate que $\tilde{u}^j(x) \in \tilde{\mathcal{C}}_j$. Soit u^j la classe de $\tilde{u}_j$ dans $\mathcal{C}_j$. On a, pour $x \in N^c$,

$$\tilde{u}^j(x+h) = \textstyle\sum_n \tilde{u}^j_{n+1}(x+h) - \tilde{u}^j_n(x+h)\ ,$$

d'où

$$\Big(\int^* \sup_{|h|\leq R} \|\tilde{u}^j(x+h) - \tilde{u}^j_m(x+h)\|^2\ d\nu(x)\Big)^{1/2} \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} P^j_R(D^j u_{n+1} - D^j u_n) \leq 1/2^m\ .$$

On note $u^\circ = u$ et $u_j = D^j u$ car, si $0 \leqslant j \leqslant k$, $D^j u_n \longrightarrow u_j$ dans $L^2_\nu(E, \widehat{\odot}_j E)$. Donc $u_n \longrightarrow u$ dans C^k_R. On a construit ainsi une sous-suite convergente, et C^k_R est un espace de Banach.

Remarque. - Le nombre R de la définition 2.1 ne joue pas de rôle dans la régularité locale des fonctions de C^k_R. En effet, si $u \in \mathcal{C}_j$, on peut trouver un représentant $\tilde{u}$ de u tel que, pour ν-presque tout x de E, l'application $h \in X \longrightarrow \tilde{u}(x+h)$ soit continue. Soit $\tilde{v}$ arbitraire de la classe de u. on considère :

$$N'^c = \{x \in E \; ; \; h \longrightarrow \tilde{v}(x+h) \text{ est continue sur } X\} ,$$

$$N^c = \{x \in E \; ; \; h \longrightarrow \tilde{v}(x+h) \text{ est continue sur } B_R\}$$

Alors $N \subset N'$.

Soit encore (h_n) une suite dense de points de X. On prouve que $N' = \bigcup_n (h_n + N)$, donc N' est négligeable.

Soit

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} \tilde{v}(x) & \text{sur } N'^c \\ 0 & \text{sur } N' \end{cases} .$$

On constate que $\tilde{u}(x)$ convient, car N' est stable par translation dans X.

Définition 2.2. - Soit $k \in \underset{\sim}{N}$, $0 \leqslant \rho < 1$. On définit :

1° $\tilde{\mathcal{C}}^\rho_j = \{f \in \tilde{\mathcal{C}}_j \; , \; \tilde{n}^\rho_j(f) = \int^* P^{j+\rho}_R(f)^2 \, d\nu(x) < +\infty$, où

$$P^{j+\rho}_R(f)(x) = P^j_R(f)(x) + \sup_{|t| \leqslant R-1} \sup_{\substack{h \in E' - \{0\} \\ \|h\| \leqslant 1}} \frac{\|f(x+t+h) - f(x+t)\|_j}{\|h\|'^\rho} \} ;$$

2° $C^\rho_j = \tilde{\mathcal{C}}^\rho_j / \tilde{\mathcal{C}}^\rho_j \cap N_j$;

3° $C^{k+\rho}_R(X, E) = \{f \in C^k_R \; ; \; D^k f \in C^\rho_k\}$. Sur $C^{k+\rho}_R$, on a une norme

$$P_{R,k,\rho}(f) = P_{R,k}(f) + n^\rho_k(D^k f) .$$

On note que $C^{k+\rho}_R$ est un espace de Banach muni de la norme $P_{R,k+\rho}$. Il faut étudier comment les opérateurs dans T^m_δ opèrent dans les espaces C^k_R.

PROPOSITION 2.2. - Soient $m \in \underset{\sim}{R}$, $k \in \underset{\sim}{N}$, $A \in \underset{\sim}{T}^m_\delta$, $m + k < 0$ ou $m = 0$ et $k = 0$. Alors A opère continûment de $C^{\ell+\rho}_R \longrightarrow C^{\ell+k+\rho}_R$, $\forall \ell \in \underset{\sim}{N}$, $0 \leqslant \rho < 1$.

Démonstration. - Soit d'abord $\ell = m = k = 0 = \rho = 0$. On sait que l'opérateur A peut s'écrire sous la forme

$$Au = \int \tau_\alpha u \, d\mu(\alpha, \bar{\alpha}) \quad \text{pour} \quad u \in L^2_\nu ;$$

$$\tau_\alpha u(x) = u(x + 2\alpha') \exp(-(x, \bar{\alpha}) - |\alpha'|^2 + i\alpha'\alpha'' - \tfrac{1}{2}|\alpha|^2) .$$

Soient maintenant $u \in \mathcal{C}$ et $v \in \tilde{\mathcal{C}}$ de la classe de u dans L^2_ν. L'application $\alpha \longrightarrow (x.\bar{\alpha})$ est continue sur X^c à valeurs dans L^2_ν, donc il y a une fonction $(\nu \otimes \mu)$-mesurable $\lambda(x, \bar{\alpha})$ tel que, pour μ-presque tout α dans X^c, $x \longrightarrow \lambda(x, \bar{\alpha})$ soit de la classe $x.\bar{\alpha}$. La fonction

$$(x\ ,\ \alpha) \longrightarrow v(x + 2\alpha') \exp(-\lambda(x\ ,\ \bar{\alpha}) - \tfrac{1}{2}\bar{\alpha}^{\,2} - |\alpha|^2)$$

est $(\nu \otimes \mu)$-mesurable. Pour μ-presque tout α, la fonction

$$x \longrightarrow v(x + 2\alpha') \exp(-\lambda(x\ ,\ \bar{\alpha}) - \tfrac{1}{2}\bar{\alpha}^2 - |\alpha|^2)$$

est de carré sommable, sa classe dans L^2_ν étant alors $\tau_\alpha u$. Le théorème de Fubini assure que, pour ν-presque tout x,

$$\alpha \longmapsto v(x + 2\alpha') \exp(-\lambda(x\ ,\ \bar{\alpha}) - \tfrac{1}{2}\bar{\alpha}^2 - |\alpha|^2)$$

est μ-intégrable. On définit donc, ν-presque-partout, (lorsque l'intégrale converge).

$$Av(x) = \int v(x + 2\alpha') \exp(-\lambda(x\ ,\ \bar{\alpha}) - \tfrac{1}{2}\bar{\alpha}^2 - |\alpha|^2)\, d\mu(\alpha\ ,\ \bar{\alpha})\ ,$$

la classe dans L^2_ν de cette fonction étant $Au \in L^2_\nu$. Il suffit de prouver que la fonction $(Av)(x)$, définie par l'intégrale ci-dessus lorsque

$$\alpha \longrightarrow v(x + 2\alpha') \exp(-\lambda(x\ ,\ \bar{\alpha}) - \tfrac{1}{2}\bar{\alpha}^2 - |\alpha|^2)$$

est μ-intégrable, et par zéro lorsque ce n'est pas le cas, est encore dans $\tilde{\mathcal{C}}$. Pour cela, on considère $(Av)(x + h)$, et on a besoin du lemme suivant.

LEMME 2.1. - <u>Soit</u> μ <u>une mesurable de Radon sur</u> X^c, ν-<u>gaussienne. Il existe une fonction</u> $(\nu \otimes \mu)$-<u>mesurable</u> $\lambda(x\ ,\ \bar{\alpha})$ <u>telle que</u>

1° <u>Pour</u> μ-<u>presque tout</u> $\alpha \in X^c$, $x \longrightarrow \lambda(x\ ,\ \bar{\alpha})$ <u>appartient à la classe</u> $x.\bar{\alpha} \in L^2_\nu$;

2° $\exists\, N \subset E$, $\nu^*(N) = 0$ <u>tel que</u> $\forall\, x \notin N$, $\exists\, M_x \subset E$, $\mu^*(M_x) = 0$ <u>tel que</u>

$$x \notin N\ ,\ \alpha \notin M_x\ ,\ h \in X \Longrightarrow \lambda(x + h\ ,\ \bar{\alpha}) = \lambda(x\ ,\ \bar{\alpha}) + (h\ ,\ \bar{\alpha})\ .$$

<u>Démonstration du lemme</u>. - Soit s_n une suite de projecteurs hermitiens $X^c \longrightarrow E'^c$ tels que

$$\int |s_n(\alpha) - s_{n+1}(\alpha)|^2 \exp(-|\alpha|^2/2)\, d\mu(\alpha) \leqslant 1/2^{2n}\ .$$

Soit $R > 0$ tel que

$$\begin{aligned} g_n(x\ ,\ \bar{\alpha}) &= \exp(-|\alpha|^2/2) \sup_{|h| \leqslant R} |(x + h\ ,\ s_n(\alpha)) - (x + h, s_{n+1}(\alpha))| \\ &\leqslant \exp(-|\alpha|^2/2)(|(x, s_{n+1}(\alpha) - s_n(\alpha))| + R|s_{n+1}(\alpha) - s_n(\alpha)|\ . \end{aligned}$$

Donc

$$\iint |g_n(x\ ,\ \bar{\alpha})|^2\, d\mu(\alpha\ ,\ \bar{\alpha})\, d\nu \leqslant C_R/2^{2n}\ ,$$

soit $\sum_n |g_n(x\ ,\ \bar{\alpha})| < +\infty$, $(\mu \otimes \nu)$-presque-partout. Donc, il existe M_R avec $(\nu \otimes \mu)^*(M_R) = 0$ tel que

$$(x\ ,\ \alpha) \notin M_R \Longrightarrow \text{la suite } (x + h\ ,\ s_n(\alpha)) \text{ converge, } \forall\, h \in B_R\ .$$

Soit $N_R = \{x \in E\ ;\ \mu^*(\{\alpha \text{ tel que } (x\ ,\ \alpha) \in M_R\}) \neq 0\}$. Soit $R_n \longrightarrow +\infty$ et $N = \bigcup_n N_{R_n}$, $\nu^*(N) = 0$. On définit une fonction $\lambda(x\ ,\ \bar{\alpha})$ par

$$\lambda(x\ ,\ \bar{\alpha}) = \lim_{n\to\infty}(x\ ,\ \overline{s_n(\alpha)})$$

lorsque cette limite existe, $= 0$ sinon. Il est clair que $\lambda(x , \bar{\alpha})$ est $(\nu \otimes \mu)$-mesurable, comme limite sur $(\bigcup_q M_{R_q})^c$ des fonctions $(x , \overline{s_n(\alpha)})$. Mais, μ-presque-partout, $x \longrightarrow \lambda(x , \bar{\alpha})$ est la limite simple des fonctions $x \longrightarrow (x , \overline{s_n(\alpha)})$ qui convergent dans L^2_ν vers $(x.\bar{\alpha})$, donc le 1° est satisfait. Vérifions le 2°.

Si $(x , \alpha) \notin M$, $\forall\, h \in X$,

$$\lambda(x + h , \bar{\alpha}) = \lim_{n\to\infty}(x + h , \overline{s_n(\alpha)}) = \lambda(x , \bar{\alpha}) + (h , \bar{\alpha}) .$$

Donc, on a le 2°. La généralisation à μ quelconque est facile.

Si $\lambda(x , \bar{\alpha})$ est choisie, on adoptera les notations suivantes :

$$e(x , \alpha) = e^{-\lambda(x,\bar{\alpha})-\frac{1}{2}\bar{\alpha}^2-|\alpha|^2}$$

$$e'(x , \alpha) = e^{-\mathrm{Re}\lambda(x,\bar{\alpha})-|\alpha'|^2} .$$

On reprend la démonstration de la proposition 2.2 avec la fonction λ déterminée au lemme 2.1. La fonction $\alpha \longmapsto v(x + h + 2\alpha')\, e(x + h , \alpha)$, pour $x \notin N$, est μ-presque-partout égale à $\alpha \longmapsto v(x + h + 2\alpha')\, e(x , \alpha)\, e^{-(h,\bar{\alpha})}$, et est donc μ-mesurable, quel que soit $h \in B_R$, à condition que x évite un ensemble négligeable supplémentaire (tel que $\alpha \longrightarrow v(x + \alpha)$ soit continue). Mais, si $h \in B_R$

$$\int^* |v(x + h + 2\alpha')|\,|e(x , \alpha)\, e^{-(h,\bar{\alpha})}|\, d|\mu|(\alpha , \bar{\alpha})$$
$$\leq C_R \int^* P_R(v)(x + 2\alpha')\, e'(x , \alpha)\, d|\mu|(\alpha , \bar{\alpha}) ,$$

ce qui est presque partout fini, car

$$\int^* d\nu(x) \int^* P_R(v)^2(x + 2\alpha')\, e'^2(x , \alpha)\, d|\mu|(\alpha , \bar{\alpha})$$
$$\leq \iint^* P_R(v)^2(x + 2\alpha')\, e'^2(x , \alpha)\, d\nu\, d|\mu| = \int^* P_R(v)^2(x)\, d\nu(x) < + \infty .$$

Donc, pour ν-presque tout x, $\forall\, h \in B_R$, on a

$$(Av)(x + h) = \int v(x + h + 2\alpha')\, e(x , \alpha)\, e^{-(h,\bar{\alpha})}\, d\mu(\alpha , \bar{\alpha}) ,$$

et on a prouvé

$$\int^* |\sup_{|h|\leq R}(Av)(x + h)|^2\, d\nu(x) \leq C_R \int^* (P_R\, v)^2(x)\, d\nu(x) .$$

Il reste à vérifier la continuité de

$$(Av)(x + h) - (Av)(x + h_0)$$
$$\int (v(x + h + 2\alpha')\, e^{-(h,\bar{\alpha})} - v(x + h_0 + 2\alpha')\, e^{-(h_0,\bar{\alpha})})\, e(x , \alpha)\, d\mu(\alpha , \bar{\alpha}) ,$$

pour $x \notin \tilde{N}$ ($\tilde{N}$ négligeable).

On remarque que, pour $x \notin \tilde{N}$, $\alpha \longmapsto P_R(v)(x + 2\alpha')$ est également μ-mesurable (à cause de la continuité de $\alpha \longrightarrow v(x + \alpha')$ et de la séparabilité de B_R), donc, pour $x \notin \tilde{N}$, on peut déterminer, pour tout $\varepsilon > 0$, un compact $K \subset X^c$ tel que

$$\int_{K^c} P_R(v)(x + 2\alpha')\, e'(x , \alpha)\, d|\mu| < \varepsilon .$$

On a donc à étudier

$$\int_K (v(x + h + 2\alpha') \, e^{-(h,\bar\alpha)} - v(x + h_0 + 2\alpha') \, e^{-(h_0,\bar\alpha)}) \, e(x , \alpha) \, d\mu(\alpha , \bar\alpha)$$

que l'on majore par

$$(\sup_{\alpha\in K}|v(x + h + 2\alpha') \, e^{-h.\bar\alpha} - v(x + h_0 + 2\alpha') \, e^{-h_0.\bar\alpha}|) \int e'(x , \alpha) \, d|\mu|(\alpha , \bar\alpha) .$$

Il suffit, alors, de constater que les fonctions $h \longrightarrow v(x + h + 2\alpha') \, e^{-h.\bar\alpha}$ forment un ensèmble équicontinu lorsque $\alpha \in K$ compact.

La proposition est donc établie quand $\ell = 0$, $m = 0$, $k = 0$.

Quand $m \neq 0$, on note $t\mu_j$ la mesure de transformée de Fourier, $A°(\bar z , z)((i\bar z)^j , t)$ pour $t \in \widehat{\bigodot}_j E'$, et l'on pose

$$D^j(Au).t = \int \tau_\alpha u \, dt\mu_j(\alpha , \bar\alpha) .$$

On note $t\mu_j = t\nu_j * \mu'$, où $\nu_j = \mathfrak{F}^{-1}((t + \bar z)^j(1 + \|z\|^2)^{-s/2})$, et $\mu' = \mathfrak{F}^{-1}(A°(1 + \|z\|^2)^{s/2})$, où s est choisi convenablement. Il faut reprendre les arguments précédents, mais avec le paramètre t .

De l'inégalité $|(t\nu_j)(f) \leqslant C\|t\|(\int |f|^2 \, dg_{s-j})^{1/2}$, pour $f \in C_b^o(X^c)$, on déduit que

$$||t\nu_j|(f)| \leqslant C\|t\|(\int |f|^2 \, dg_{s-j})^{1/2}$$

puis, pour tout borélien A ,

$$|t\nu_j|(A) \leqslant C\|t\| \, g_{s-j}(A)^{1/2} ,$$

donc

$$t\nu_j = H_j(t)(\alpha) \, g_{s-j} , \text{ où } H_j(t) \in L^2_{g_{s-j}} .$$

Ceci permet de définir la fonction $\lambda(x , \bar\alpha)$ précédente, cette fonction étant $(\nu \otimes (g_{s-j} * |\mu'|))$-mesurable. On constate alors, que $\lambda(x , \bar\alpha)$ est $(\nu\otimes|(t\mu_j)|)$-mesurable, et qu'il existe une partie M , $(\nu \otimes (g_{s-j} * |\mu'|)$ négligeable, telle que

$$(x , \alpha) \notin M \Longrightarrow \forall \, h \in X , \quad \lambda(x + h , \bar\alpha) = \lambda(x , \bar\alpha) + (h\bar\alpha) .$$

Il existe donc une partie N , ν-négligeable, telle que

$x \notin N$ et $h \in X$

$$\Longrightarrow \lambda(x , \bar\alpha + \bar h) = \lambda(x , \bar\alpha) + (h\bar\alpha) , \quad (\nu \otimes |t\mu_j|)\text{-presque-partout}, \quad \forall \, t .$$

On définit donc

$$t.w_j(x) = \int v(x + 2\alpha') \, e(x , \alpha) \, d(t\mu_j)(\alpha) ,$$

pour $x \notin \tilde N$ avec $\tilde N = N \cup N' \cup N''$.

$N' = \{x \in E$; $\alpha \longrightarrow v(x + \alpha)$ n'est pas continue sur X ou tels que

$$\int^* P_R^2(v)(x + 2\alpha') \, e'^2(x , \alpha) \, d(g_{s-j} * |\mu'|) = + \infty\} .$$

$N'' = \{x \in E$; la fonction $\alpha \longrightarrow e(x , \alpha)$ n'est pas $(g_{s-j} * |\mu'|)$-intégrable$\}$, En effet, pour $x \notin \tilde{N}$, $\forall\, h \in B_R$, la fonction

$$\alpha \longrightarrow f(\alpha) = v(x + h + 2\alpha') \, e(x , \alpha) \exp(-(h , \bar{\alpha}))$$

est $|t\mu_j|$-intégrable, car il suffit que $(\alpha , \beta) \longrightarrow f(\alpha + \beta) \, H_j(t)(\alpha)$ soit $(g_{s-j} \otimes |\mu'|)$-intégrable, la mesurabilité est assurée, et

$$\iint^* |f(\alpha + \beta)| \, |H_j(t)|(\alpha) \, dg_{s-j}(\alpha) \, d|\mu'|(\beta)$$
$$\leqslant C_R \|t\|' [\int^* P_R(v)^2(x + 2\alpha') \, e'^2(x , \alpha) \, d(g_{s-j} * |\mu'|)]^{1/2} < +\infty .$$

On a donc bien l'inégalité

$$\int^* (\sup_{\|t\|' \leqslant 1} \sup_{|h| \leqslant R} |tw_j(x + h)|)^2 \, d\nu(x) \leqslant C_R \int^* P_R^2(v)(x) \, d\nu(x) .$$

Comme ci-dessus, on prouve la continuité de $h \longrightarrow w_j(x + h)$; $B_R \longrightarrow \widehat{\odot}_j E$ en $x \in \tilde{N}^c$, et on a donc prouvé $D^j(Au) \in \mathcal{C}_j$ et $P_{Rk}(Au) \leqslant C \, P_R(u)$.

Ce qui est la proposition quand $\ell = 0$. Soit maintenant $\ell \in \underset{\sim}{N}$. $t \in \widehat{\odot}_{k+\ell} E'$ que l'on écrit

$$t = \sum_{|p+q| = \ell} \frac{\ell!}{p! \, q!} \, t_{p+q} \otimes e_p \otimes e_q$$

(on peut supposer que seul un nombre fini de termes sont non nul), $t_{p+q} \in \widehat{\odot}_k E'$. Le calcul symbolique, développé plus haut, assure que

$$D^{k+\ell}(Au).t = \sum_{p,q;|p+q| = \ell} \frac{\ell!}{p! \, q!} \int \tau_\alpha(\partial^p u) \, d(t_{p+q} \, \nu_k) * d\mu'_q ,$$

où

$$t_{p+q} \, \nu_k = \mathcal{F}^{-1}((t_{p+q}(i\bar{z})^k) \times (1 + \|z\|^2)^{-s/2}) , \quad \mu'_q = \mathcal{F}^{-1}((i\partial_z)^q \, A^\circ \times (1 + \|z\|^2)^{s/2}) .$$

Prenons pour $v_p(x)$ la fonction $(v^{\ell'}(x) , e_p)$, où $v^{\ell'}(x) \in \mathcal{C}_{\ell'}$ de la classe de $D^{\ell'}u$, $|p| = \ell'$. Choisissant une mesure μ' positive bornée telle que quel que soit q , $|\mu'_q| \leqslant C_q \, \mu'$, par exemple $\mu' = \sum_{|q| \leqslant \ell} (|\mu'_q|/a^{2q}) \|\mu'_q\|$, on détermine une fonction $\lambda(x , \bar{\alpha})$ $(\nu \otimes (g_{s-k} * \mu'))$-mesurable satisfaisant au lemme 2.1. Hors, d'un ensemble négligeable (indépendant de t et de $h \in B_R$), on peut définir la fonction

$$w_{k+\ell}(x + h).t = \sum_{p,q} \frac{\ell!}{p! \, q!} \int v_p(x + h + 2\alpha') \, e(x , \alpha) \, e^{-(h,\bar{\alpha})} \, d(t_{p+q} \, \nu_k) * d\mu'_q .$$

En effet, si $x \notin N \cup N' \cup N''$, avec N et N'' définis précédemment, et où N' est l'ensemble des points $x \in E$ tels que $\alpha \longrightarrow v^{\ell'}(x + \alpha)$ ne soit pas continue sur X ou tels que

$$\int^* P_R(v^{\ell'})^2(x + 2\alpha') \, e'^2(x , \alpha) \, d(g_{s-k} * \mu') = +\infty ,$$

alors

$$\int^* |v_p(x + h + 2\alpha')| \, e^{-\mathrm{Re}\,\lambda(x,\bar{\alpha})} |e^{-(h,\bar{\alpha}) - \frac{1}{2}\bar{\alpha}^2 - |\alpha|^2}| \, d|(t_{p+q} \, \nu_k * \mu'_q)|$$
$$\leqslant C_R \int^* |v_p(x + h + 2\alpha')| \, e'(x, \alpha)(|H_r(t_{p+q})(\alpha)| \, dg_{s-k}) * |\mu'_q|$$
$$\leqslant C_R \, \|t_{p+q}\|' (\int^* (v_p(x + h + 2\alpha'))|^2 \, e'^2(x , \alpha) \, dg_{s-k} * |\mu'_q|)^{1/2} \|\mu'_q\|^{1/2} .$$

Or $\sum_{p,q} \|t_{p+q}\|'^2 \, a^{2(p+q)} = \|t\|'^2 < +\infty$. Donc

$$|w_{k+\ell}(x+h).t| \leqslant C_R\|t\|' \sum_{p,q} \frac{\|\mu'_q\|}{a^{2(p+q)}} \int^* |v_p(x+h+2\alpha)|^2 e'^2(x, \alpha)\, dg_{s-k} * |\mu'_q|$$
$$\leqslant C_R\|t\|' \int^* P_R(v^{\ell'})^2(x+2\alpha')\, e'^2(x, \alpha)\, dg_{s-k} * \mu' < +\infty .$$

On déduit, ensuite, aisément que $D^{k+\ell} Au \in C_{k+\ell}$, et que $P_{Rk+\ell}(Au) \leqslant C\, P_{R\ell}(u)$.

Soit maintenant $0 \leqslant \rho < 1$. Pour $x \notin N \cup N' \cup N'' \cup N'''$, et pour $|y| \leqslant R-1$, $\|h'\| \leqslant 1$, on doit calculer

$$w_{k+\ell}(x+y+h) - w_{k+\ell}(x+y)$$
$$= \sum_{p,q} (\ ) \int (v_p(x+2\alpha'+y+h)e^{-(\bar{\alpha}h)} - v_p(x+2\alpha'+y))e(x, \alpha)e^{-y\bar{\alpha}}\, d(t_{p+q}\ \nu_k) * d\mu'_q ,$$

où

$$N''' = \{x \in E ;\ \int^* P_R^{\ell'+\rho}(v^{\ell'})^2(x+2\alpha')\, e'^2(x, \alpha)\, dg_{s-k} * d\mu' = +\infty\} .$$

On obtient alors aisément $D^{k+\ell} Au \in C^{\rho}_{k+\ell}$, et la proposition 2.2 est démontrée. Pour obtenir un résultat de régularité plus précis (sans perte), on a besoin d'autres espaces $C^{k+\rho}$.

DÉFINITION 2.3. - <u>Soit</u> $k \in \underset{\sim}{N}$, $0 \leqslant \rho < 1$; <u>on définit</u> :

1° $$\tilde{C}'^{\rho}_j = \{f \in \tilde{C}_j ;\ \operatorname{ess\,sup}_{x\in E}[\sup_{t\in X}\|f(x+t)\| + \sup_{t\in X}\ \sup_{\substack{h\in X\setminus\{0\}\\ h\in B_R}} \frac{\|f(x+t+h) - f(x+t)\|}{|h|^{\rho}}] = \tilde{n}'_{\rho}(f) < +\infty\}$$

2° $C'^{\rho}_j = \tilde{C}'^{\rho}_j/(\tilde{C}'^{\rho}_j \cap N_j)$.

<u>On constate que</u> $\tilde{n}'_{\rho}(f)$ <u>détermine, par passage au quotient, une norme</u> $n'_{\rho}(f)$ <u>sur</u> C'^{ρ}_j.

3° $C'^{k+\rho}_R(X, E) = \{u \in C^k_R(X, E) ;\ D^k u \in C'^{\rho}_k$.

PROPOSITION 2.3. - <u>Soit</u> $A = (1+\|z\|^2)^{-s/2}$, <u>où</u> $s \notin \underset{\sim}{N}$. <u>Alors</u>, A <u>opère continûment de</u> $C'^{k+\rho}_R \longrightarrow C^{k+\rho+s}_R$ <u>sous la condition</u> $\rho + s \notin \underset{\sim}{N}$.

<u>Démonstration.</u>

1° Considérons d'abord le cas où $\rho + \sigma < 1$. On écrit

$$Au = \int_0^{+\infty} \exp(-\tau)\ \tau^{-1+(s/2)} \int \tau_\alpha\, u\, d\nu'_\tau .$$

On note $s = k + \sigma$, $k \in \underset{\sim}{N}$.

$$D^{k+\ell}(Au).t = \sum_{p,q,|p+q|=\ell} \frac{\ell!}{p!\,q!} \int_0^{+\infty} \exp(-\tau)\tau^{-1+(s-k)/2}\, d\tau$$
$$\times \int \tau_\alpha(\partial^p u)(\bar{\alpha}/\tau^{1/2} , t_{p+q})'_k\ \bar{\alpha}^q\, d\nu'_\tau ,$$

où

$$t = \sum_{|p+q|=\ell} \frac{\ell!}{p!\,q!}\, t_{p+q} \in \widehat{\bigodot}_{k+\ell} E' ,$$

et, où, pour $\theta \in \widehat{\bigodot}_k E'$, $(\bar{\alpha}, \theta)'_k$ désigne l'habituelle fonction de $L^2_{\nu'}(X^c)$ obtenue par la dualité mesurable (voir [4]). On considère, comme ci-dessus, la fonction $v^{\ell'}(x)$ et $v_p(x)$ pour $|p| = \ell'$. On désigne par $\lambda(x\ ,\ \bar{\alpha})$ une fonction $(\nu \otimes \nu')$-mesurable satisfaisant au lemme 1.1. On adoptera la notation

$$e(\tau\ ,\ x\ ,\ \alpha) = e^{-\tau^{1/2}\lambda(x,\bar{\alpha})-(\tau/2)\bar{\alpha}^2-\tau|\alpha|^2}$$

$$e'(\tau\ ,\ x\ ,\ \alpha) = e^{-\tau^{1/2}\mathrm{Re}\lambda(x,\bar{\alpha})-\tau|\alpha'|^2}\ .$$

On étudie

$$w_{k+\ell}(x) = \sum_{p,q} \frac{\ell!}{p!\ q!} \int_0^{+\infty} \exp(\ -\tau)\ \tau^{-1+(s-k)/2}\ d\tau$$

$$\times \int v_p(x + 2\tau^{1/2}\ \alpha')\ e(\tau\ ,\ x\ ,\ \alpha)\ \tau^{|q|/2}\ \bar{\alpha}^q(\bar{\alpha}\ ,\ t_{p+q})'_k\ d\nu'\ ,$$

pour $x \notin N \cup N' \cup N'' \cup N'''$, qui est négligeable. On a noté, N', l'ensemble des $x \in E$ tels que $\alpha \longrightarrow v^{\ell'}(x + \alpha)$ ne soit pas continue sur X ou tels que

$$\int_0^\infty \int^* (1 + P_R^{\ell'}(v^{\ell'}))^2(x + 2\tau^{1/2}\ \alpha'))$$

$$\times\ e'^2(\tau\ ,\ x\ ,\ \alpha)\ (1 + \tau)^\ell\ e^{-\tau}\ \tau^{-1+s-(k/2)}\ (1 + |\alpha|^2)^\ell\ d\tau\ d\nu' = \infty\ ,$$

si $\ell' \leqslant \ell$ ou si $\ell' = \ell$, et

$$\sup_{t\in X}\|v^\ell(x + t)\| + \sup_{t\in X}\ \sup_{\substack{h\in X\setminus\{0\}\\ h\in B_R}} \frac{\|v^\ell(x + t + h) - v^\ell(x + t)\|}{|h|^\rho} > n_\rho(D^\ell\ u)\ .$$

On a encore posé

$$N'' = \{x \in E\ ;\ \ \alpha \longrightarrow \lambda(x\ ,\ \bar{\alpha})\ \text{ n'est pas } (\nu')\text{-mesurable}\}\ ,$$

$$N''' = \{x \in E\ ;\ \ w_\varepsilon(\alpha) = \int^* \exp(\frac{1}{2}\ \frac{|\mathrm{Re}\ \lambda(x\ ,\ \bar{\alpha})|^2}{(1 + \varepsilon)|\alpha'|^2})\ d\nu' < \infty\}\ .$$

En effet, dans ces conditions, pour tout $h \in B_R$

$$|w_{k+\ell}(x + h).t| \leqslant C_R \sum_{p,q} \|t_{p+q}\|'[\iint^* |v_p(x + 2\tau^{1/2}\ \alpha' + h)|^2$$

$$\times\ e'^2(\tau\ ,\ x\ ,\ \alpha)\ \tau^{|q|}\ |\alpha|^{2q}\ e^{-\tau/2}\ \tau^{-1+s-(k/2)}\ d\tau\ d\nu']^{1/2}\ .$$

Soit

$$|w_{k+\ell}(x + h).t|^2 \leqslant C_R\|t'\|^2 \sum_{|q|\leqslant\ell} \int_0^\infty \int^* \|v^{\ell'}(x + 2\tau^{1/2}\ \alpha' + h)\|$$

$$\times\ e'^2(\tau\ ,\ x\ ,\ \alpha)\ \tau^{|q|}\ \frac{|\alpha|^{2q}}{\alpha^{2q}}\ e^{-\tau}\ \tau^{-1+s-(k/2)}\ d\tau\ d\nu\ .$$

On montre ainsi que $D^{k+\ell}\ Au \in \tilde{C}_{k+\ell}$. Il faut, en fait, estimer

$$(w_{k+\ell}(x + y + h) - w_{k+\ell}(x + y)).t\ .$$

On aura besoin d'utiliser le lemme suivant pour transformer l'intégrale.

LEMME 2.2. - <u>Soient</u> $\tau \in \underset{\sim}{R}^+$, $x \notin N$, $y \in X$. <u>Soit</u> $g(\alpha')$ <u>une fonction</u> $(\nu'(\alpha'))$-<u>mesurable telle que</u>

$$\int^* |g(\alpha')|^2\ e'^2(\tau\ ,\ x\ ,\ \alpha)\ d\nu'(\alpha\ ,\ \bar{\alpha}) < \infty\ .$$

<u>Alors, pour tout</u> $h \in E'$ <u>et tout</u> $t \in \widehat{\odot}_k\ E'$, <u>on a</u>

$$\int g\left(\alpha' + \frac{h}{2\tau^{1/2}}\right) e^{-\tau^{1/2}\lambda(x,\bar{\alpha})-\tau^{1/2}(h\bar{\alpha})-(\tau/2)\bar{\alpha}^2-|\bar{\alpha}|^2\tau}(\bar{\alpha}\ t)'_k e^{-\tau^{-1/2}y\bar{\alpha}}\, d\nu'(\alpha, \bar{\alpha})$$
$$= \int g(\alpha')\, e^{-\tau^{1/2}\lambda(x,\bar{\alpha})-\tau\bar{\alpha}^2-\tau|\alpha|^2}\, e^{-\tau^{1/2}y\bar{\alpha}}\, e^{(\bar{\alpha}h)'\tau^{-1/2}}\, (\bar{\alpha}t)'_k\, d\nu' .$$

<u>Démonstration du lemme</u>. - Pour tout $\tau \in \underset{\sim}{R}^+$, tout $x \notin N$, d'après la lemme 2.1, $\alpha \longmapsto \exp(-\tau^{1/2}\lambda(x, \bar{\alpha}))$ est la limite des fonctions $\exp(-\tau^{1/2}(x, \overline{s_n(\alpha)}))$, ν'-presque-partout. Comme, $\forall\ \tau$, $\forall\ \alpha$, ces fonctions convergent dans $L^2_{\nu'}(X^c)$, on en déduit que, $\forall\ \tau \in \underset{\sim}{R}^+$, $\forall\ x \notin N$, la fonction $\alpha \longrightarrow \exp(-\tau^{1/2}\lambda(x, \bar{\alpha}))$ est la limite dans $L^2_{\nu'}(X^c)$ des fonctions $\exp(-\tau^{1/2}(x, \overline{s_n(\alpha)}))$.

$\forall\ x \notin N$, on a une mesure, notée μ_x sur X , en prenant l'image par l'application $X^c \longrightarrow X$; $\alpha \longrightarrow \alpha'$ de la mesure bornée

$$e(\tau , x , \alpha) \exp(-\tau^{1/2}(y\bar{\alpha}))(t\bar{\alpha}_k) \exp(-\tau^{-1/2}(\bar{\alpha}h)')\nu' .$$

Soit $g \in C^o_b(X)$, on prouve que

$$\int g(\alpha' + (h/2\tau^{1/2}))\, d\mu_x = \int g(\alpha')\, d\tilde{\mu}_x ,$$

où $\tilde{\mu}_x$ est l'image par l'application $\alpha \longrightarrow \alpha'$ de la mesure bornée

$$e^{-\tau^{1/2}\lambda(x,\bar{\alpha})-\tau\bar{\alpha}^2/2-\tau|\alpha|^2-\tau^{1/2}(y\bar{\alpha})-\tau^{-1/2}(\bar{\alpha}h)'}\, (\bar{\alpha}t)'_k\, \nu' .$$

On exprime, en effet :

$$\int g(\alpha' + h/2\tau^{\frac{1}{2}})\, d\mu_x(\alpha') = \lim_{n\to\infty} \int e(\tau , x , s_n(\alpha))$$
$$\times\ e^{-\tau^{\frac{1}{2}}(y\overline{s_n(\alpha)})}\, (\bar{\alpha} , s_n(t))'_k\, e^{-\tau^{\frac{1}{2}}(\bar{\alpha}, s_n(h))'}\, g\left(\frac{s_n(\alpha') + s_n(h)}{2\tau^{\frac{1}{2}}}\right) d\nu'$$
$$= \lim_{n\to\infty} \int e(\tau, x, s_n(\alpha)) - e^{-\tau^{\frac{1}{2}}(s_n(h),\bar{\alpha})} e^{-\tau^{\frac{1}{2}}(y\overline{s_n(\alpha)})} (\bar{\alpha}, s_n(t))'_k\, g(s_n(\alpha'))\, d\nu'$$
$$= \int e(\tau , x , \alpha) - e^{-\tau^{\frac{1}{2}}(h,\bar{\alpha})}\, e^{-\tau^{\frac{1}{2}}y\bar{\alpha}}\, (\bar{\alpha} , t)'_k\, g(\alpha')\, d\nu' = \int g(\alpha')\, d\tilde{\mu}_x(\alpha') .$$

En effet, on note, que quand $t^n \longrightarrow t$ dans $\widehat{\bigodot}_k E'$, $(\bar{\alpha} , s_n(t))'_k \longrightarrow (\bar{\alpha} , t)$ dans $L^4_{\nu'}$, que $\exp(-(\bar{\alpha} , s_n(h))'\tau^{1/2}) \longrightarrow \exp(-\bar{\alpha} , h)'\tau^{1/2}$ dans $L^p_{\nu'}$, $\forall\ p < +\infty$, et que on est ramené à un calcul d'intégrales en dimension finie.

L'image par $\alpha' \longrightarrow \alpha' + (h/2\tau^{1/2})$ de μ est donc $\tilde{\mu}$, donc

$$g(\alpha' + (h/2\tau^{1/2})) \in L^1_{\mu_x} \Longleftrightarrow g(\alpha') \in L^1_{\tilde{\mu}_{x,h}}$$

et les intégrales sont égales. L'hypothèse du lemme 2.2 implique que $g(\alpha') \in L^1_{\tilde{\mu}_{xh}}$ si $x \notin N$, $\forall\ \tau \in \underset{\sim}{R}^+$, $t \in \widehat{\bigodot}_k E'$, $h \in E'$. On a donc prouvé le lemme 2.2 . $A_\tau(k) = \{\alpha ;\ |\alpha'_1| + \ldots + |\alpha'_q| \leqslant C_0\ \tau^{-1/2}\|k\|'\}$ avec $\alpha'_j = (\alpha' , \varepsilon_j)'$, $\varepsilon_1 = (k/\|k\|')$ (ε_2 , ... , ε_q forment une base orthonormée, dans E' , d'un sous-espace de E' , $q \in \underset{\sim}{N}$ convenable). On note que $(\tau , \alpha') \longrightarrow \chi_{A_\tau}(\alpha')$ est $(d\tau \otimes \nu')$-mesurable.

Soit, pour $x \notin N \cup N' \cup N''$, $y \in B_{R-1}$, $\|h\|' \leqslant 1$, $\|k\|' \leqslant 1$:

$$w_{k+\ell}(x+y+h+k) - w_{k+\ell}(x+y+h) - w_{k+\ell}(x+y+k) + w_{k+\ell}(x+y) = I(x , y , h , k) .$$

$$I = \sum_{\substack{p,q \\ p+q=\ell}} (\ ) \int_0^{+\infty} e^{-\tau}\ \tau^{-1+(s-k)/2}\, d\tau$$

$$\times \int v_p(x+y+h+k+2\tau^{\frac{1}{2}}\alpha')\ e^{-\tau^{\frac{1}{2}}(h+k,\bar\alpha)} - v_p(x+y+h+2\tau^{\frac{1}{2}}\alpha')\ e^{-\tau^{\frac{1}{2}}(h\bar\alpha)}$$

$$- v_p(x+y+k+2\tau^{\frac{1}{2}}\alpha')\ e^{-\tau^{\frac{1}{2}}(k\bar\alpha)} + v_p(x+y+2\tau^{\frac{1}{2}}\alpha')$$

$$\times e(\tau , x , \alpha)\ e^{-(\tau/2)\bar\alpha^2}\ \tau^{|q|/2}\ \bar\alpha^q\ (\bar\alpha , t_{p+q})'_k\ d\nu'(\alpha , \bar\alpha) .$$

On écrit d'abord

$I = \mathfrak{I} + K$, où $\mathfrak{I}$ correspond aux termes pour lesquels $|p| = \ell' = \ell$, $q = 0$.

$\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_1 + \mathfrak{I}_2 + \mathfrak{I}'_1 + \mathfrak{I}'_2$.

$$\mathfrak{I}_1 = \sum_p \int_0^{+\infty} e^{-\tau}\ \tau^{-1+(s-k)/2}\, d\tau$$

$$\times \int_{\alpha'\in A_\tau(k)} v_p(x+y+2\tau^{\frac{1}{2}}\alpha') - v_p(x+y+k+2\tau^{\frac{1}{2}}\alpha')\ e(\tau , x , \alpha)\ e^{-\tau^{\frac{1}{2}}y\alpha}\ (\bar\alpha t_p)'_k\ d\nu' .$$

$$\mathfrak{I}_2 = \sum_p \int_0^{+\infty} (\ ) \int_{\alpha'\in(A_\tau(k)-(k/2)\tau^{-\frac{1}{2}})} v_p(x + y + h + k + 2\tau^{\frac{1}{2}}\alpha)\ e^{-\tau^{\frac{1}{2}}(h+k)\bar\alpha}$$

$$- v_p(x + y + k + 2\tau^{\frac{1}{2}}\alpha')\ e(\tau , x , \alpha)\ e^{-\tau^{\frac{1}{2}}y\bar\alpha} \ldots d\nu' ,$$

où $A_\tau(k)$ a été défini plus haut.

$$\mathfrak{I}'_1 = \sum_p \int_0^{+\infty} (\ ) \int_{\alpha'\notin A_\tau(k)} v_p(x+y+2\tau^{\frac{1}{2}}\alpha') - v_p(x+y+h+2\tau^{\frac{1}{2}}\alpha')\ e^{-\tau^{\frac{1}{2}}h\bar\alpha} \ldots d\nu' .$$

$$\mathfrak{I}'_2 = \sum_p \int_0^{+\infty} (\ ) \int_{\alpha'\notin(A_\tau(k)-(k/2)\tau^{-\frac{1}{2}})} v_p(x + y + h + k + 2\tau^{\frac{1}{2}}\alpha')\ e^{-(\ )}$$

$$- v_p(x + y + h + 2\tau^{\frac{1}{2}}\alpha')\ e^{-(\ )}\ (\ )\ d\nu' .$$

$$\mathfrak{I}_1 = \sum_p \int_0^{+\infty} e^{-\tau}\ \tau^{-1+(s-k)/2}\, d\tau$$

$$\times \int_{\alpha'\in A_\tau} (v_p(x + y + h + 2\tau^{\frac{1}{2}}\alpha')\ e^{-\tau^{\frac{1}{2}}(h\bar\alpha)} - v_p(x + y + 2\tau^{\frac{1}{2}}\alpha'))$$

$$\times e(\tau , x , \alpha)\ e^{-\tau^{\frac{1}{2}}y\bar\alpha}\ (\bar\alpha t_p)'_k\ d\nu' .$$

Le changement de variable $\tau \longrightarrow \tau/\|k\|'^2$ donne :

$$\mathfrak{I}_1 = \sum_p \int_0^{+\infty} e^{-\tau\|k\|'^2}\ \|k\|'^{s-k}\ \tau^{-1+(s-k)/2}$$

$$\times \int_{\alpha'\in A_{\tau\|k\|'^2}} (v_p(x + y + h + 2\tau^{\frac{1}{2}}\|k\|'\alpha')\ e^{-\tau^{\frac{1}{2}}\|k\|'(h\bar\alpha)} - v_p(\ ))$$

$$e(\tau\|k\|'^2 , x , \alpha) \ldots d\nu' .$$

On peut estimer

$$\sum_p\ 1/a^{2p}|v_p(x + y + h + 2\tau^{\frac{1}{2}}\|k\|'\alpha')\ \exp(- \tau^{\frac{1}{2}}\|k\|'(h\bar\alpha)) - v_p(x+2y+2\tau^{\frac{1}{2}}\|k\|'\alpha')|^2$$

$$\times e(\tau\|k\|'^2 , x , \alpha)\ \exp(- \tau\|k\|'y\bar\alpha)^2$$

par

$$y \in B_{R-\frac{2}{3}} , \quad \|h\|' \leqslant \tfrac{1}{3} , \quad \|k\|' \leqslant \tfrac{1}{3} .$$

Comme

$$\sup_{\tau>0} e^{-\tau \mathrm{Re}(\lambda\ x,\bar{\alpha})-(1+\varepsilon)|\alpha'|^2\tau^2} \leqslant \exp(\frac{1}{4(1+\varepsilon)}\ \frac{|\mathrm{Re}\ \lambda(x\ ,\ \bar{\alpha})|^2}{|\alpha'|^2})\ ,$$

on a

$$|\mathfrak{I}_1| \leqslant C_R\|h\|'^{\rho}\|k\|'^{\sigma}\ \tilde{n}'_\rho(v^\ell)\int_0^{+\infty}\tau^{-1+(\sigma/2)}\ d\tau$$
$$\times\ (\nu'(A_{\tau\|k\|'2}))^{1/4}\ \|t\|'\ (\int \exp(\frac{1}{2}\frac{|\mathrm{Re}\ \lambda(x\ ,\ \bar{\alpha})|^2}{(1\ +\ \varepsilon)|\alpha'|^2})\ d\nu')^{1/2}\ .$$

Comme $\nu'(A_{\tau\|k\|'+2}) = \nu'(|\alpha'_1| + \dots + |\alpha'_q| \leqslant C_0\ \tau^{-\frac{1}{2}}) = O(\tau^{-q/2})$, pour $\tau \longrightarrow \infty$,

$$|\mathfrak{I}_1(x\ ,\ y\ ,\ h\ ,\ k)| \leqslant C_R\|h\|'^{\rho}\|k\|'^{\sigma}\ \tilde{n}'_\rho(v^\ell)\|t\|'(\int \exp(\frac{1}{2}\frac{|\mathrm{Re}\ \lambda(x\ ,\ \bar{\alpha})|^2}{(1\ +\ \varepsilon)|\alpha'|^2})\ d\nu')^{1/2}\ .$$

On a une majoration analogue pour $\mathfrak{I}_2$ en procédant de même.

Pour $\mathfrak{I}'_2$, on transforme l'intégrale en utilisant le résultat du lemme 2.2 pour les fonctions

$$(v_p(x+y+h+k+2\tau^{\frac{1}{2}}\ \alpha')(1-\chi_{A_\tau}(k)-(k/2\tau^{\frac{1}{2}}))\quad \text{et}\quad v_p(x+y+k+2\tau^{\frac{1}{2}}\ \alpha')(1-\chi_{(\ )})\ .$$

Ceci permet d'écrire

$$\mathfrak{I}'_1 + \mathfrak{I}'_2 = \sum_p \int_0^{+\infty} e^{-\tau}\ \tau^{-1+(\sigma/2)}$$
$$\times \int_{\alpha'\notin A_\tau} (v_p(x\ +\ y\ +\ h\ +\ 2\tau^{\frac{1}{2}}\ \alpha')\ e^{(h\bar{\alpha})\tau^{\frac{1}{2}}} - v_p(x\ +\ y\ +\ 2\tau^{\frac{1}{2}}\ \alpha'))$$
$$\times\ (1\ -\ e^{(\bar{\alpha}k)'\tau^{\frac{1}{2}}})\ e^{-\tau^{\frac{1}{2}}(\lambda(x,\bar{\alpha})+y\bar{\alpha})}\ e^{-(\ )}\ (t_p\ \bar{\alpha})'_k\ d\nu'\ .$$

On écrit

$$1\ -\ \exp(\bar{\alpha}k)'\tau^{-\frac{1}{2}}) = \int_0^1 \exp(\bar{\alpha}k)'\tau^{-\frac{1}{2}}\ \theta)\ (\bar{\alpha}k)'\tau^{-\frac{1}{2}}\ d\theta\ .$$

Le changement de variables $\tau \longrightarrow \tau/\|k\|'^2$ produit :

$$\mathfrak{I}'_1 + \mathfrak{I}'_2 = \|k\|'^{\sigma-1}\ \sum_p \int_0^{+\infty} e^{-\tau\|k\|'^2}\ \tau^{-1+(\sigma-1)/2}\ d\sigma$$
$$\times \int_{\alpha'\notin A_{\tau\|k\|'2}} (v_p(\ )\ e^{\|k\|'\tau^{\frac{1}{2}}h\bar{\alpha}} - v_p(\ ))e^{-\tau^{\frac{1}{2}}\|k\|'|\lambda(x,\bar{\alpha}),y\bar{\alpha}|}$$
$$\times\ (\bar{\alpha}k)'\int_0^1 e^{\theta((\bar{\alpha}k)'/\|k\|')\tau^{\frac{1}{2}}}\ d\theta\ d\nu'\ .$$

Majorant, comme plus haut, on obtient :

$$|\mathfrak{I}'_1 + \mathfrak{I}'_2| \leqslant C_R\ \|k\|'^{\sigma}\ \|h\|'^{\rho}\ \tilde{n}_\rho(v^\ell)\ \|t\|'\ \omega_\varepsilon^{1/2}(x)$$
$$\times \int_0^{+\infty}\tau^{-1+(\sigma-1)/2}\ (\int_{A^c_{\tau\|k\|'2}} \exp(4\ \frac{|(\bar{\alpha}k)'|}{\|k\|'}\ \tau^{-1/2})\ d\nu')^{1/4}\ d\tau\ .$$

On voit assez facilement que l'intégrale entre parenthèses est en $O(\exp(-\lambda\tau^{-1}))$ quand $\tau \longrightarrow 0$ (restant bornée par ailleurs quand $\tau \longrightarrow +\infty$).

$$|\mathfrak{I}'_1 + \mathfrak{I}'_2| \leqslant C\ \|k\|'^{\sigma}\ \|h\|'^{\rho}\ \|t\|'\ \omega_\varepsilon(x)^{\frac{1}{2}}\ \tilde{n}_\rho(v^\ell)\ .$$

On prend maintenant $k = -h$. Considérons le terme K , dans ces conditions,

$$K = \sum_{\substack{|p+q|=\ell\\|q|\neq 0}} (\ )\int_0^{+\infty} e^{-\tau}\tau^{-1+\sigma/2}\ d\tau \int (2v_p(x+y+2\tau^{\frac{1}{2}}\alpha') - v_p(x+y-h+2\tau^{\frac{1}{2}}\alpha')$$
$$\times\ e^{\tau^{\frac{1}{2}}(h\bar{\alpha})} + v_p(x+y+h+2\tau^{\frac{1}{2}}\alpha')\ e^{-\tau^{\frac{1}{2}}(h\bar{\alpha})})\ e(\tau,x,\alpha)\ \exp(-\tau^{\frac{1}{2}}y\bar{\alpha})\ \tau^{|q|/2}\ \bar{\alpha}^q(\bar{\alpha}t_{p+q})'_k\ d\nu'.$$

Utilisant, $d\tau$-presque-partout, le lemme 2.2 pour certains termes, on écrit

$$K = \sum_{|p+q|=\ell} (\ ) \int_0^{+\infty} e^{-\tau}\ \tau^{-1+(\sigma+|q|)/2}\ d\tau$$
$$\times \int v_p(x + y + 2\tau^{\frac{1}{2}}\ \alpha')\ (2 - e^{\tau^{-\frac{1}{2}}(\bar{\alpha}h)'} - e^{-\tau^{-\frac{1}{2}}(\bar{\alpha}h)'})$$
$$\times\ e(\tau\ ,\ x\ ,\ \alpha)\ e^{-\tau^{\frac{1}{2}}y\bar{\alpha}}\ \bar{\alpha}^q(\bar{\alpha}\ ,\ t_{p+q})'_k\ d\nu\ .$$

On écrit, comme précédemment, $1 - \exp((\bar{\alpha}h)'\tau^{-\frac{1}{2}}$ sous forme intégrale, et

$$|K| \leqslant C_R \sum_{\substack{|q|\neq 0\\ |p|=\ell}}$$
$$\times \int_0^{+\infty} e^{-\tau}\ \tau^{-1+(\sigma+|q|-1)/2}(\int P_R^2(v^{\ell'})(x+ 2\tau^{\frac{1}{2}}\ \alpha')\ e'(\tau, x, \alpha)^2\ d\nu')^{\frac{1}{2}}\ \|h\|'\ \|t\|'\ d\tau\ ,$$

car

$$K = \sum_{p+q=\ell} \int_0^{+\infty} e^{-\tau}\ \tau^{-1+(\sigma+|q|-1)/2} \int_0^1 d\theta$$
$$\times \int (\bar{\alpha}h)'\ v_p(x+ y+ \theta h+ 2\tau^{\frac{1}{2}}\ \alpha')\ e^{\tau^{\frac{1}{2}}\theta(h\bar{\alpha})}\ e(\tau\ ,x\ ,\alpha)\ e^{-\tau^{\frac{1}{2}}y\bar{\alpha}}\ \bar{\alpha}^q(\bar{\alpha}t_{p+q})'_q\ d\nu'.$$

$$|K| \leqslant C_R\ \|h\|'\ \|t\|'$$
$$\times \sum_{\ell'<\ell} (\int_0^{+\infty} e^{-\tau}\ \tau^{-1+\sigma/2}(1+\tau)^{\ell}\ d\tau \int P_R^2(v^{\ell})^2(x+ 2\tau^{\frac{1}{2}}\ \alpha')\ e'(\tau, x, \alpha)^2\ d\nu')\ .$$

Soit, au total, $x \notin N \cup N' \cup N'' \cup N'''$, $\forall\ y \in B_{R-\frac{2}{3}}$, $\|h\|' < \frac{1}{3}$, $(k = - h)$,

$$|I| \leqslant C_R\|t\|'\ \|h\|^{\alpha}(\omega_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(x)\ n_\rho(D^{\ell}\ u)$$
$$+ \sum_{\ell'\leqslant\ell} (\int_0^{+\infty} \int^{*} P_R(v^{\ell})^2(x + 2\tau^{\frac{1}{2}}\ \alpha')\ e^{-2\tau^{\frac{1}{2}}(\ )}\ e^{-\tau}\ \tau^{-1+\sigma/2}(1 + \tau)^{\ell}\ d\nu'\ d\tau)^{\frac{1}{2}})\ .$$

On déduit alors aisément avec l'aide de [13] que :

$$P_{Rk+\alpha}(Au) \leqslant C(n_\rho(D^{\ell}\ u) + P_{R\ell}(u))\ .$$

2° Cependant lorsque $\rho + \sigma = 1 + \alpha$, $\alpha > 0$, il faut procéder autrement. L'opérateur $D^{k+\ell+1}(Au).t$, où $t \in \widehat{\bigodot}_{\ell+k+1} E'$, a pour symbole $(i\bar{z}^{\ell+k+1}, t)(1+ \|z\|^2)^s$. On écrit

$$A(\bar{z}\ ,\ z) = \int_0^{+\infty} \exp(- \tau)\ \tau^{-1+(\sigma+k)/2}\ \exp(- \tau\|z\|^2)\ d\tau\ ,$$

et

$$A_\varepsilon(\bar{z}\ ,\ z) = \int_\varepsilon^{+\infty} \exp(- \tau)\ \tau^{-1+(\sigma+k)/2}\ \exp(- \tau\|z\|^2)\ d\tau\ .$$

Ce qui fait que :

$$D^{k+\ell+1}(A_\varepsilon\ u).t = \sum_{|p+q|=\ell} \frac{\ell!}{p!\ q!} \int_\varepsilon^{+\infty} \exp(- \tau)\ \tau^{-1+(\sigma-1)/2}\ d\tau$$
$$\times \int \tau_\alpha(\partial^p\ u)(\frac{\bar{\alpha}}{\tau^{1/2}}\ ,\ t_{p+q})'_{k+1}\ \bar{\alpha}^q\ d\nu'_\tau\ .$$

Soit

$$w^\varepsilon_{k+\ell+1}(x).t = \sum_{|p+q|=\ell} \frac{\ell!}{p!\ q!} \int_\varepsilon^{+\infty} \exp(- \tau)\ \tau^{-1+(\sigma-1)/2}\ d\tau$$
$$\times \int v_p(x + 2\tau^{\frac{1}{2}}\ \alpha')\ e(\tau\ ,\ x\ ,\ \alpha)\ \tau^{|q|/2}\ \bar{\alpha}^q(\bar{\alpha}\ ,\ t_{p+q})'_{k+1}\ d\nu'\ .$$

On sépare les termes correspondants à $p = 0$ et $q \neq 0$. Soit

$$w^{\varepsilon}(x).t = \tilde{w}^2(x).t + \tilde{\tilde{w}}^2(x).t$$

qui est bien défini (ainsi que $w^{\varepsilon}_{k+\ell+1}(x + h)$, $\forall\, h \in B_R$), $\forall\, \varepsilon > 0$, $\forall\, t$, si $x \notin N \cup N' \cup N''$, où N, N' et N'' sont définis comme dans le 1°.

$$N' = \{x \in E \; ; \; \alpha \longrightarrow v^{\ell'}(x + \alpha) \text{ n'est pas continue sur } X \text{ ou tels que } \int_0^{+\infty} \int^* (1 + P_R^{\ell'}(v^{\ell'})(x + 2\tau^{\frac{1}{2}} \alpha'))^2 \, e'(\tau, x, \alpha)^2 \, (1 + \tau)^{\ell} \times e^{-\tau} \, \tau^{-(1+s-k)/2} \, (1 + |\alpha|^2)^{\ell} \, d\tau \, d\nu' = +\infty\} .$$

En effet,

$$\tilde{w}^{\varepsilon}_{k+\ell+1}(x).t \quad \sum_{|p|=\ell} \frac{\ell!}{p!} \int_{\varepsilon}^{+\infty} e^{-\tau} \, \tau^{-1+(\sigma-1)/2} \int v_p(x + 2\tau^{\frac{1}{2}} \alpha') \times e(\tau, x, \alpha) \, (\bar{\alpha} t_p)' \, d\nu'$$

peut s'écrire

$$\tilde{w}^2(x).t = \sum_{|p|=\ell} \frac{\ell!}{p!} \int_{\varepsilon}^{+\infty} e^{-\tau} \, \tau^{-1+(\sigma-1)/2} \times \int (v_p(x + 2\tau^{\frac{1}{2}} \alpha') - v_p(x)) \, e(\tau, x, \alpha) \, (\bar{\alpha} t_p)' \, d\nu' .$$

Car ν-presque-partout, $\forall\, y \in X$, $\forall\, \tau \in \underset{\sim}{R}^+$, $\forall\, t \in \widehat{\bigodot}_{k+1} E'$,

$$h_{y,t,\tau}(x) = \int e^{-\tau^{\frac{1}{2}}\lambda(x,\bar{\alpha}) - \tau^{\frac{1}{2}} y\bar{\alpha} - \tau\bar{\alpha}^2/2 - \tau|\alpha|^2} \, (\bar{\alpha} t_p)' \, d\nu' = 0 .$$

En effet, $h_{y\tau t}(x) = \tilde{h}_{\tau,t}(x + y)$, avec

$$\tilde{h}_{\tau,t}(x) = \int e^{-\tau^{\frac{1}{2}}\lambda(x,\bar{\alpha}) - \tau\bar{\alpha}^2/2 - \tau|\alpha|^2} \, (\bar{\alpha} t_p)' \, d\nu' .$$

Tout d'abord, $\forall\, \tau \in \underset{\sim}{R}^+$, $\forall\, t \in \widehat{\bigodot}_{k+1} E'$, $\tilde{h}_{\tau,t}(x)$ est nulle presque partout, car $\tilde{h}_{\tau,t}$ est une fonction de la classe de

$$\int \tau_{\alpha}(1)\left(\frac{\bar{\alpha}}{\tau^{\frac{1}{2}}}, t\right)' \, d\nu'_{\tau} = \theta^{-1}(\pi((t\bar{z})_{k+1} \, e^{-\tau\|z\|^2})) .$$

Un calcul simple montre que, $\forall\, z \in X^c$, $\int e^{z\bar{\zeta}} \, (t\bar{\zeta})_{k+1} \exp(-\tau\|\zeta\|^2) \, d\nu(\zeta) = 0$, car la fonction $z \longrightarrow \int e^{z\bar{\zeta}} \exp(-\tau\|\zeta\|^2) \, d\nu(\zeta)$ est constante.

On voit ensuite que hors d'un ensemble ν-négligeable, $\forall\, \tau \in \underset{\sim}{R}^+$, $t \in \widehat{\bigodot}_{k+1} E'$, $\tilde{h}_{\tau,t}(x) = 0$ (il suffit d'utiliser la continuité de $(\tau, t) \longrightarrow \tilde{h}_{\tau,t}(x)$, x fixé en dehors de la réunion de N'' et de l'ensemble négligeable des x tels que $\omega_{\varepsilon}(x) = +\infty$). On a donc trouvé un ensemble $\tilde{N}_0$, $\nu^*(\tilde{N}_0) = 0$, tel que $x \notin \tilde{N}_0$ entraine, $\forall\, (\tau, t) \in \underset{\sim}{R}^+_* \times \widehat{\bigodot}_{k+1} E'$, $\tilde{h}_{\tau,t}(x)$ est nulle et telle que, pour $x \notin \tilde{N}_0$, $\forall\, (\tau, t)$, $y \longrightarrow h_{y,\tau,t}(x)$ est continue. Donc, hors d'un ensemble négligeable N_0, $\forall\, (\tau, t, y) \in \underset{\sim}{R}^+_* \times \widehat{\bigodot}_{k+1} E' \times X$, $h_{y\tau,t}(x) = 0$.

Pour $x \notin N \cup N' \cup N'' \cup N_0$, on a

$$\sum_p \frac{\ell!}{p!} \int_{\varepsilon}^{+\infty} e^{-\tau} \, \tau^{-1+(\sigma-1)/2} \int (v_p(x + 2\tau^{\frac{1}{2}} \alpha') - v_p(x)) \, e(\tau, x, \alpha) \, (\bar{\alpha} t)' \, d\nu'$$

converge vers

$$\sum_{|p|=\ell} \frac{\ell!}{p!} \int_0^{+\infty} e^{-\tau} \, \tau^{-1+(\sigma-1+\rho)/2} \int \left(\frac{v_p(x + 2\tau^{\frac{1}{2}} \alpha') - v_p(x)}{\tau^{\frac{1}{2}}}\right) e(\tau, x, \alpha) \, (\bar{\alpha} t_p)' \, d\nu' ,$$

la différence étant majorée par

$$n_\rho(D^\ell u)\|t\|' \int_0^\varepsilon e^{-\tau}\, \tau^{-1+\alpha/2}\, d\tau\, \left(\int e'(\tau\,,\,x\,,\,\alpha)^2\, d\nu'\right)^{\frac{1}{2}} ,$$

soit par

$$n_\rho(D^\ell u)\|t\|' \left(\int_0^{+\infty} e^{-\tau}\, \tau^{-1+(\alpha/2)}\, d\tau \int e'(\tau\,,\,x\,,\,\alpha)^2\, d\nu'\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\varepsilon e^{-\tau}\, \tau^{-1+\alpha/2}\, d\tau\right)^{\frac{1}{2}} .$$

Donc, $\tilde{w}_\varepsilon(x) \longmapsto \tilde{w}(x)$ dans $L^2_\nu(E\,,\,\widehat{\odot}_{k+\ell+1} E)$. Par ailleurs,

$$\tilde{\tilde{w}}^2(x).t \longrightarrow \tilde{\tilde{w}}(x).t = \sum_{\substack{|p+q|=\ell \\ |q|\neq 0}} \frac{\ell!}{p!\,q!} \int_0^{+\infty} e^{-\tau}\, \tau^{-1+(\sigma-1+|q|)/2}\, d\tau$$
$$\times \int v_p(x + 2\tau^{\frac{1}{2}}\alpha')\, e(\tau\,,\,x\,,\,\alpha)\, \bar{\alpha}^q\, (\bar{\alpha} t_{p+q})'\, d\nu' ,$$

dans $L^2_\nu(E\,,\,\widehat{\odot}_{k+\ell+1} E)$, ce qui est facile à voir.

La limite $w(x) = \tilde{w}(x) + \tilde{\tilde{w}}(x)$ est nécessairement une fonction de la classe de $D^{k+\ell+1}(Au)$, car les $D^{k+\ell+1}(A_\varepsilon u) \longmapsto D^{k+\ell+1}(Au)$ dans $\mathcal{E}^{-(k+\ell+1)} \hat{\otimes} \widehat{\odot}_{\ell+k+1} E$, car $A_\varepsilon(\bar{z}\,,\,z)\Phi \longrightarrow A(\bar{z}\,,\,z)\Phi$ dans L^2_ν pour $\Phi \in L^2_\nu$.

Hors de $N \cup N' \cup N'' \cup N_0$, on a

$$\tilde{w}(x + y).t = \sum_p \frac{\ell!}{p!} \int_0^{+\infty} e^{-\tau}\, \tau^{-1+(\sigma-1)/2}$$
$$\times \int (v_p(x + y + 2\tau^{\frac{1}{2}}\alpha') - v_p(x + y))\, e(\tau\,,\,x\,,\,\alpha)\, \exp(-\,\tau^{\frac{1}{2}}\, y\bar{\alpha})\, (t_p\,\bar{\alpha})'\, d\nu' .$$

On étudie donc $I = \tilde{w}(x + y + h).t - \tilde{w}(x + y).t$.

$$I(x\,,\,y\,,\,h\,,\,t) = \sum_p \int_0^{+\infty} e^{-\tau}\, \tau^{-1+(\sigma-1)/2} \int (v_p(x+ 2\tau^{\frac{1}{2}}\alpha' + y+ h)$$
$$- v_p(x + y + e^{-\tau/\|h\|'^2} h))\, e(\tau\,,\,x\,,\,\alpha)\, \exp(-\,\tau^{\frac{1}{2}}\, y\bar{\alpha} - \tau^{\frac{1}{2}}\, h\bar{\alpha})\, (t_p\,\bar{\alpha})'\, d\nu'$$
$$- \sum_p \int_0^{+\infty} e^{-\tau}\, \tau^{-1+(\sigma-1)/2} \int (v_p(x+ 2\tau^{\frac{1}{2}}\alpha' + y) - v_p(x+y))\, e^{-\tau^{\frac{1}{2}}\lambda(\ )}\, (t_p\,\bar{\alpha})'\, d\nu' .$$

Soient

$$I_1 = \sum_p \int_0^{+\infty} e^{-\tau}\, \tau^{-1+(\sigma-1)/2}\, d\tau \int_{\alpha' \in (A_\tau - \frac{h}{2}\tau^{\frac{1}{2}})} (v_p(x+2\tau^{\frac{1}{2}}\alpha'+y+h) - v_p(x+y+e^{-\tau/\|h\|'^2}h))$$
$$\times\, e^{-\tau^{\frac{1}{2}}\lambda(\ )}\, e^{-\tau^{\frac{1}{2}} h\bar{\alpha}}\, (t_p\,\bar{\alpha})'\, d\nu' ,$$

$$I_2 = \sum_p \int_0^{+\infty} e^{-\tau}\, \tau^{-1+(\sigma-1)/2}\, d\tau \int_{\alpha' \in A_\tau} (v_p - v_p(\ ))\, e^{-\tau^{\frac{1}{2}}\lambda(\ )}\, (t_p\,\bar{\alpha})'\, d\nu' ,$$

et $I = I_1 - I_2 + I_3$.

On a

$$|I_1| \leqslant \sum_p \int_0^{+\infty} e^{-\tau\|h\|'^2}\, \tau^{-1+(\sigma-1)/2} \|h\|'^{(\sigma-1)/2}$$
$$\times \int_{\alpha' \in (A_{\tau\|h\|'^2} - h/2\|h\|'\tau^{\frac{1}{2}})} |v_p(x+2\tau^{\frac{1}{2}}\|h\|'\alpha'+y+h) - v_p(x+y+e^{-\tau}h)|\, |e^{-\tau^{\frac{1}{2}}\|h\|'\lambda(\ )\cdots}|\, |(t_p\bar{\alpha})'|\, d\nu'$$

et $A_{\tau\|h\|'^2} - h/2\|h\|'\tau^{\frac{1}{2}} \subset \{\alpha\ ;\ |\alpha'_1| + \ldots + |\alpha'_q| \leqslant (C_0 + \frac{1}{2})\tau^{-\frac{1}{2}}\}$ à un ensemble négligeable (qui dépend de h) près. D'où

$$|I_1| \leqslant C_R \int_0^{+\infty} \tau^{-1+(\sigma/2)} \|h\|'^{\alpha}\, \|t\|' n_\rho(D^\ell u)$$
$$\times \left[\nu'(A_{\tau\|h\|'^2} - h/2\|h\|'\tau^{\frac{1}{2}})\right]^{1/8} \left(\int (1 + |\alpha|)^{8\rho}\, d\nu'\right)^{1/8} \omega_\varepsilon^{1/2}(x)\, d\tau .$$

$$|I_1| \leqslant C_R \|h\|'^{\alpha}\, \|t\|'\, n_\rho(D^\ell u)\, \omega_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(x) ,$$

si q est assez grand.

De même, on a une majoration analogue pour I_2 .

On écrit donc I_3 sous la forme :

$$I_3 = \sum_p \int_0^{+\infty} e^{-\tau}\ \tau^{-1+(\sigma-1)/2}\ d\tau \int_{\alpha'\notin A_\tau} \sum_p (v_p(x+y+2\tau^{\frac{1}{2}}\alpha') - v_p(x+y))\ e^{-\tau^{\frac{1}{2}}\lambda\cdots}$$

$$- \sum_p \int_0^{+\infty} e^{-\tau}\ \tau^{-1+(\sigma-1)/2} \int_{\alpha'\notin A_\tau} (v_p(x+2\tau^{\frac{1}{2}}\alpha'+y) - v_p(x+y+e^{-\tau/\|h\|'^2}.h))$$

$$\times\ e^{(\bar{\alpha}h)'/t}\ e^{-(\dots)}\ (t_p\ \bar{\alpha})'\ d\nu' .$$

Ce que l'on peut écrire $I_3 = I_3' + I_3''$, avec

$$I_3' = \sum_p \int_0^{+\infty} e^{-\tau}\ \tau^{-1+(\sigma-1)/2}\ d\tau \int_{\alpha'\notin A_\tau} (v_p(x+y+2\tau^{\frac{1}{2}}\alpha') - v_p(x+y))$$

$$\times\ e(\tau, x, \alpha)\ \exp(-\tau^{\frac{1}{2}}\ y\bar{\alpha})\ (-e^{\tau^{\frac{1}{2}}(\bar{\alpha}h)'}\ (t_p\ \bar{\alpha})\ d\nu' - \sum_p \int_0^{+\infty} e^{-\tau}\ \tau^{-1+(\sigma-1)/2}\ d\tau$$

$$\times \int_{\alpha'\notin A_\tau} (v_p(x+y) - v_p(x+y+e^{-\tau/\|h\|'^2}\ h))$$

$$\times\ e(\tau\ , x\ , \alpha)\ \exp(-\tau^{\frac{1}{2}}\ y\bar{\alpha})\ e^{(\bar{\alpha}h)'/t}\ (t_p\ \bar{\alpha})'\ d\nu' .$$

Soit

$$|I_3'| \leqslant C_R \int_0^{+\infty} \tau^{-1+(\sigma-1)/2}\ \|h\|'^{\alpha}\ n_\rho(D^{\ell}\ u)$$

$$\times\ \omega_\varepsilon^{1/2}(x)\ \nu'(A^c_{\tau\|h\|'^2})^{1/8}\ \|t\|\ \|1 - e^{\tau^{\frac{1}{2}}(\bar{\alpha}h)'/\|h\|'}\|_{L^8_\nu}\ d\tau ,$$

comme

$$\|1 - e^{\pm\tau^{-\frac{1}{2}}(\bar{\alpha}h)'/\|h\|'}\|_{L^8_{\nu'}} \leqslant C\ \tau^{-\frac{1}{2}}\ \exp(L^8\ \tau^{-1})$$

et que

$$\nu'(A^c_{\tau\|h\|'^2}) = \int_{|\alpha_1'|+\dots+|\alpha_q'|\geqslant C_0\tau^{-\frac{1}{2}}} d\nu' \leqslant C\ \inf(1\ ,\ \exp(-\tfrac{1}{2}\ C_0^2\ q^{-1}\ \tau^{-1}))\ ,\ q \geqslant 2,$$

il suffit donc de choisir C_0 assez grand.

$$|I_3'| \leqslant C_R\ \|t\|'\ \|h\|'^{\alpha}\ n_\rho(D^{\ell}\ u)\ \omega_\varepsilon^{1/2}(x) .$$

$$I_3'' = \sum_p \int_0^{+\infty} \tau^{-1+(\sigma-1)/2}\ e^{-\tau\|h\|'^2}\ \|h\|'^{\sigma-1}$$

$$\times \int_{\alpha'\notin A_{\tau\|h\|'^2}} (v_p(x+y) - v_p(x+y+e^{-\tau}\ h))\ e^{-\|h\|'\tau^{\frac{1}{2}}\lambda\cdots}(t_p\ \bar{\alpha})'\ d\nu' .$$

Soit

$$|I_3''| \leqslant C_R\ \|h\|'^{\alpha}\ \|t\|' \int_0^{+\infty} \tau^{-1+(\sigma-1)/2}\ e^{-\rho\tau}\ \nu'(A^c_{\tau\|h\|'^2})^{1/4}\ \omega_\varepsilon^{1/2}(x)\ d\tau .$$

Donc

$$|I| \leqslant C_R\ \|h\|'^{\alpha}\ \|t\|'\ n_\rho(D^{\ell}\ u)\ \omega_\varepsilon^{1/2}(x) .$$

Pour les termes $\tilde{\tilde{w}}(x+y+h).t - \tilde{\tilde{w}}(x+y).t$,

$$|I| = \sum_{\substack{|p+q|=\ell \\ q\neq 0}} \frac{\ell!}{p!\,q!} \int_0^{+\infty} e^{-\tau}\, \tau^{-1+(\sigma-1+|q|)/2}\, d\tau \int (v_p(x + 2\tau^{\frac{1}{2}}\,\alpha' + y + h)$$

$$\times\, e^{\tau^{\frac{1}{2}} h\bar{\alpha}} - v_p(x+y+2\tau^{\frac{1}{2}}\,\alpha'))\, e^{(\ )}\cdots\, \bar{\alpha}^q\, (t_{p+q}\,\bar{\alpha})'\, d\nu' .$$

Si $|q| > 1$, il n'y a pas de problèmes, et on répète la preuve de la majoration de K pour trouver une estimation par :

$$C_R\, \|h\|'\, \|t\|' \int_0^{+\infty} \int^* e^{-\tau}\, \tau^{-1(\sigma-2+|q|)/2}\, P_R(v^{\ell\prime})^2\, (x + 2\tau^{\frac{1}{2}}\,\alpha')$$

$$\times\, e'^2(\tau\,,\, x\,,\, \alpha)\, d\tau\, d\nu' .$$

On considère les termes pour lesquels $q = 1$.

$$H = \sum_{\substack{|p|=\ell-1 \\ |q|=1}} \frac{\ell!}{p!\,q!} \int_0^{+\infty} e^{-\tau}\, \tau^{-1+(\sigma/2)}$$

$$\times \int (v_p(x + 2\tau^{\frac{1}{2}}\,\alpha' + y + h)\, e^{(\bar{\alpha}h)\tau^{\frac{1}{2}}} - v_p(x + y + 2\tau^{\frac{1}{2}}\,\alpha'))\, e^{-\tau^{\frac{1}{2}}\lambda(x,\bar{\alpha})}\cdots$$

On note que, comme $\rho + \sigma = 1 + \alpha < 1 + \sigma \Longrightarrow \sigma > \alpha$, on écrit $H = H_1 + H_2$ avec

$$H_1 = \sum_{\substack{|p|=\ell-1 \\ |q|=1}} \frac{\ell!}{p!\,q!} \int_0^{\|h\|'^2} e^{-\tau}\, \tau^{-1+(\sigma-\alpha)/2}\, \tau^{\alpha/2}\, d\tau \int (v_p(\ )\, e^{(\bar{\alpha}h)\tau^{\frac{1}{2}}} - v_p(\ )\, e^{-}\cdots$$

$$H_2 = \sum_{\substack{|p|=\ell-1 \\ |q|=1}} \frac{\ell!}{p!\,q!} \int_{\|h\|'^2}^{+\infty} e^{-\tau}\, \tau^{-1+(\sigma-\alpha)/2+(\alpha-1)/2} \int_0^1 d\theta$$

$$\times \int (\bar{\alpha}h)'\, v_p(x + y + \theta h + 2\tau^{\frac{1}{2}}\cdot\alpha')\, e^{\tau^{\frac{1}{2}}\theta h\bar{\alpha}}\, e^{-\tau^{\frac{1}{2}}\lambda(\ )}\cdots\bar{\alpha}^q\, (t_{p+q}\,\bar{\alpha})\, d\nu' .$$

Pour H_1, on majore par

$$|H_1| \leqslant 2C_R\, \|h\|'^{\alpha} \int_0^{+\infty} e^{-\tau}\, \tau^{-1+(\sigma-\alpha)/2}\, d\tau \int P_R^2(v^{\ell-1})(x + 2\tau^{\frac{1}{2}}\,\alpha')\, e'^2(\tau\,,\, x\,,\, \alpha)\, d\nu' .$$

Pour H_2, on majore par

$$|H_2| \leqslant C_R\, \|h\|'^{\alpha} \int_0^{+\infty} e^{-\tau}\, \tau^{-1+(\sigma-\alpha)/2}\, d\tau \int P_R^2(v^{\ell-1})(x + 2\tau^{\frac{1}{2}}\,\alpha')\, e'^2(\tau\,,\, x\,,\, \alpha)\, d\nu' .$$

Pour achever, il reste à prouver la continuité, pour ν-presque tout x, de l'application

$$h \in B_R \longrightarrow \tilde{w}(x + h).t = \sum_p \frac{\ell!}{p!} \int_0^{+\infty} e^{-\tau}\, \tau^{(\sigma-1)/2}\, d\tau$$

$$\times \int (v_p(x + 2\tau^{\frac{1}{2}}\,\alpha' + h) - v_p(x + h))\, e(\tau\,,\, x\,,\, \alpha)\, e^{-\tau^{\frac{1}{2}}(h\bar{\alpha})}\, (t_p\,\bar{\alpha})'\, d\nu' ,$$

qui est continue à valeur dans $\widehat{\bigodot}_{\ell+k+1} E$.

$$|\tilde{w}(x+h).t - \tilde{w}(x+h_0).t| \leqslant \|t\|' \int_0^{+\infty} e^{-\tau}\, \tau^{-1+(\alpha/2)}\, d\tau$$

$$\times \int \|(v^{\ell}(x + 2\tau^{\frac{1}{2}}\,\alpha' + h) - v^{\ell}(x + h))$$

$$\times\, e^{\tau^{\frac{1}{2}} h\bar{\alpha}} - (v^{\ell}(x+ 2\tau^{\frac{1}{2}}\,\alpha' + h_0) - v^{\ell}(x+h_0))\, e^{\tau^{\frac{1}{2}} h_0\bar{\alpha}}\|^2\, e'^2(\tau, x, \alpha)\, e^{-\tau|\alpha|^2/2}\, \tau^{-\rho} .$$

Le théorème de Lebesgue permet de conclure.

PROPOSITION 2.4. – <u>Soit</u> $A = (1 + \|z\|^2)^{-k/2}$, $k \in \underset{\sim}{N}$. <u>Alors, A opère continûment de</u> $C_R'^{\rho} \longrightarrow C_R^{\rho+k}$ <u>si</u> $\rho \notin \underset{\sim}{N}$.

La preuve est analogue à celle que l'on a fait dans le cas $\rho + \sigma > 1$ ci-dessus.

Nous avons jusqu'à présent utiliser le symbole D pour la dérivée au sens des distributions, il s'agit de voir maintenant à quel sens les éléments de C_R^ℓ sont des classes de fonctions différentiables. On prouve alors la proposition suivante.

PROPOSITION 2.5. - Soit R'_ε l'opérateur $\int \tau_\alpha\, \varphi(\alpha')\, d\nu'_\varepsilon(\alpha, \bar{\alpha})$, où

$$\varphi(\alpha') = \Phi(|\alpha'|) \quad \text{avec} \quad \Phi(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < u/2 \\ 0 & \text{si } |t| > u \end{cases}.$$

1° Si $u \in C_R^0$, si $v \in \tilde{C}_0$ est une fonction de la classe de u, il existe un ensemble ν-négligeable en dehors duquel la fonction $h \in E' \longmapsto (R'_\varepsilon v)(x + h)$ est $(E' - C^\infty)$ à dérivées de Hilbert-Schmidt.

2° Si $u \in C_R^\ell$, si $v \in \tilde{C}_0$ est une fonction de la classe de u, v_ℓ une fonction de $\tilde{C}_\ell$ de la classe de $D^\ell u$, il existe un ensemble ν-négligeable $\tilde{N}$ et une suite $\varepsilon_j \longrightarrow 0$ tels que

$$x \notin \tilde{N} \Longrightarrow \lim_{\varepsilon_j \to 0} \sup_{\|h\|' \leq R'} \|D^\ell (R'_{\varepsilon_j} v)(x + h) - v_\ell(x + h)\| = 0 \quad \text{si } R' + 2u \leq R.$$

Démonstration.

1° A cause du lemme 2.1, on peut écrire, pour $\|h\|' \leq R$, $x \notin N \cup N'_\varepsilon \cup N''$, où N est relatif à la fonction $\lambda(x, \bar{\alpha})$ $(\nu \otimes \nu')$-mesurable, avec

$$N'_\varepsilon = \{x \in E \; ; \int^* |P_R(v)(x + 2\varepsilon^{\frac{1}{2}} \alpha')|^2\, e^{-2\varepsilon^{\frac{1}{2}} \mathrm{Re}\, \lambda(x,\bar{\alpha}) - 2\varepsilon|\alpha|'^2}\, d\nu' = +\infty$$
$$\text{ou tels que } \alpha \longrightarrow v(x + \alpha) \text{ n'est pas continue.}\}$$

$$N'' = \{x \in E \; ; \; \alpha \longrightarrow \lambda(x, \bar{\alpha}) \text{ n'est pas } \nu'\text{-mesurable}\}.$$

$$R'_\varepsilon v(x + h) - R'_\varepsilon v(x) = \int v(x + 2\varepsilon^{\frac{1}{2}} \alpha')$$
$$\times \left(e^{(\bar{\alpha}h)' \varepsilon^{-\frac{1}{2}}} \varphi(\varepsilon^{\frac{1}{2}} \alpha' - \tfrac{h}{2}) - \varphi(\varepsilon^{\frac{1}{2}} \alpha')\right) e^{-\varepsilon^{\frac{1}{2}} \lambda(x,\bar{\alpha}) \ldots - \varepsilon|\alpha|^2}\, d\nu'.$$

Au moins pour h dans une partie dense de E', on peut écrire :

$$e^{\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(\bar{\alpha}h)'} \varphi(\varepsilon^{\frac{1}{2}} \alpha' - \tfrac{h}{2}) - \varphi(\varepsilon^{\frac{1}{2}} \alpha')$$
$$= \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{\ell+k=j} \frac{(-1)^k}{\ell!\, k!} (D^\ell \varphi)(\varepsilon^{\frac{1}{2}} \alpha') \frac{h}{2} \frac{(\bar{\alpha}h)'^\ell}{\ell!} \varepsilon^{-\ell/2}$$
$$+ \int_0^1 \frac{(1-s)^{N-1}}{(N-1)!} \sum_{\ell+k=N} \frac{N!}{\ell!\, k!} (-1)^k (D^k \varphi)(\varepsilon^{\frac{1}{2}} \alpha' - sh/2) \frac{h}{2}\, e^{s(\bar{\alpha}h)' \varepsilon^{-\frac{1}{2}}} \frac{(\bar{\alpha}h)'^\ell}{\ell!} \varepsilon^{-\ell/2}\, ds.$$

Ce qui donne

$$(R'_\varepsilon v)(x + h) - (R'_\varepsilon v)(x) = \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{\ell+k=j} \int v(x + 2\varepsilon^{\frac{1}{2}} \alpha')$$
$$\times (-1)^k \frac{(D^k \varphi)}{k!} (\varepsilon^{\frac{1}{2}} \alpha') . \frac{h}{2} (\bar{\alpha}h)'^\ell \frac{\varepsilon^{-\ell/2}}{\ell!} e^{-(\;)}\, d\nu' + R_N^\varepsilon(x, h),$$

avec

$$R_N^{\varepsilon}(x\ ,\ h) = \int_0^1 \frac{(1-s)^{N-1}}{(N-1)!} \int v(x + 2\varepsilon^{\frac12}\ \alpha' + sh)\ e^{-\varepsilon^{\frac12}\lambda(x,\bar\alpha)-\varepsilon^{\frac12}s(h\bar\alpha)-\cdots}$$
$$\times \sum_{\ell+k=N} \frac{N!}{\ell!\ k!} (-1)^k\ (\bar\alpha h)'^{\ell}\ \varepsilon^{-\ell/2}\ D^k\ \varphi(\varepsilon^{\frac12}\ \alpha')\ \frac{h}{2}\ d\nu'\ .$$

Cette fois avec h quelconque dans $\|h\|' \leqslant R$, cette expression est encore valable pour $x \notin N \cup N' \cup N''$, avec x remplacé par $x + y$, $y \in B_{R-1}$ et $\|h\|' \leqslant 1$. On aura alors

$$|R_N^{\varepsilon}(x\ ,y\ ,h) \leqslant C_R\ \|h\|'^N\ \varepsilon^{-N/2}\ (\int P_R^2(v)(x + 2\varepsilon^{\frac12}\ \alpha')\ e^{-2\varepsilon^{\frac12}\mathrm{Re}\ \lambda(x,\bar\alpha)-2\varepsilon|\alpha'|^2}\ d\nu')^{\frac12}\ .$$

Cette majoration étant uniforme en y et h tels que $\|y + h\|' \leqslant R$ et vraie quel que soit N , on déduit que, pour $x \notin N \cup N' \cup N''$, la fonction $h \in E' \longrightarrow (R'_{\varepsilon}\ v)(x + h)$ est C^{∞} , pour $\|h\|' < R$. Par ailleurs, on prouve que les dérivées sont de type Hilbert-Schmidt. Il est alors facile de déduire le 1°.

2° On introduit $R_{\varepsilon} = \int \tau_{\alpha}\ d\nu'_{\varepsilon}$ pour constater que $R_{\varepsilon}(1) = \prod_j (1 + \varepsilon/a_j^2)^{-1/2}$, d'où $\lim_{\varepsilon\to 0} R_{\varepsilon}(1) = 1$. Mais, ν-presque-partout,

$$|R_{\varepsilon}(1)(x) - R'_{\varepsilon}(1)(x)| \leqslant C\varepsilon \int |\alpha'|^2\ e^{-\varepsilon^{\frac12}\mathrm{Re}\ \lambda(x,\bar\alpha)-\varepsilon|\alpha'|^2}\ d\nu' \leqslant C\ \varepsilon\ e^{1/4\|x\|^2}\ ,$$

pour $\varepsilon < 1/2$. Si $\varepsilon_j \longrightarrow 0$, on en déduit que, ν-presque-partout,

$$\lim_{\varepsilon_j\to 0} R'_{\varepsilon_j}(1)(x) = 1$$

et même, ν-presque-partout,

$$\lim_{\varepsilon_j\to 0} \sup_{|h|\leqslant R} |R'_{\varepsilon_j}(1)(x + h) - R_{\varepsilon_j}(1)| = 0\ .$$

Reprenant la preuve du 1°, on a construit, quel que soit ℓ , une fonction définie, presque partout sur E , à valeurs dans $\widehat{\bigodot}_j\ E$, par

$$x \notin \tilde N \longrightarrow D^{\ell}(R'_{\varepsilon}\ v)(x) = \int v(x + 2\varepsilon^{1/2}\ \alpha')\ e^{-\varepsilon^{1/2}\lambda(x,\bar\alpha)\ldots-\varepsilon|\alpha|^2}$$
$$\times \sum_{p+q=\ell} \frac{\ell!}{p!\ q!} (-1)^p\ \frac{(D^p\ \varphi)}{2^p}(\varepsilon^{1/2}\ \alpha')(\bar\alpha\ ,\ .)'^q\ \varepsilon^{-q/2}\ d\nu'\ .$$

Par ailleurs, l'opérateur $D^{\ell} \circ R'_{\varepsilon}$ ayant pour symbole $(i\bar z)^{\ell}\ R'_{\varepsilon}(\bar z\ ,\ z)$, pour $z \in X^c$, on a

$$(i\bar z)^{\ell}\ R'_{\varepsilon}(\bar z\ ,\ z)$$
$$= \int e^{i\varepsilon^{\frac12}(z\bar\alpha+\bar z\alpha)} \sum_{p+q=\ell} \frac{\ell!}{p!\ q!}\ \frac{(-1)^p}{2^p}\ (D^p\ \varphi)(\varepsilon^{\frac12}\ \alpha')(\bar\alpha,\ .)'^q\ \varepsilon^{-q/2}\ d\nu'\ ,$$

égalité que l'on prouve, d'abord en faisant agir chacun des 2 membres sur e_{λ} , $|\lambda| = \ell$, et en intégrant par parties, on prouve que l'application

$$t \in \widehat{\bigodot}_p\ E'\ \hat\otimes \widehat{\bigodot}_q\ E' \longrightarrow (D^p\ \varphi)(\varepsilon^{\frac12}\ \alpha')(\bar\alpha\ ,\ .)'^q$$

est continue à valeurs dans $L^2_{\nu'}$, puis par prolongement continu, pour $\forall\ z \in E^c$. Donc, $D^{\ell}(R'_{\varepsilon}\ v)(x)$ est une fonction de la classe de $D^{\ell}(R'_{\varepsilon}\ u)$. Ceci permet donc de calculer $D^{\ell}(R'_{\varepsilon}\ v)(x).t$ sous la forme

$$\sum_{|p+q|=\ell} \frac{\ell!}{p!\ q!}\ t_{p+q} \int v_p(x + 2\alpha'\ \varepsilon^{\frac12})\ e^{-\varepsilon^{\frac12}\lambda(x,\bar\alpha)\ldots}\ \varepsilon^{|q|/2}\ \bar\alpha^q\ d\nu'\ .$$

Soit

$$\|D^{\ell}(R'_\varepsilon v)(x+h) - R'_\varepsilon(v^{\ell})(x+h)\|$$
$$\leqslant C_R\, \varepsilon^{\frac12} \sum_{\ell'=0}^{\ell-1} \int |P_R(v^{\ell'})(x + 2\varepsilon^{\frac12}\alpha')|^2\, e^{-2\varepsilon^{\frac12}\mathrm{Re}\,\lambda(x,\bar\alpha)-2\varepsilon|\alpha'|^2}\, d\nu' ,$$

ν-presque-partout pour $\forall\, h\ \|h\|' \leqslant R$, et donc

$$\int^* (\sup_{\|h\|'\leqslant R} \|D^{\ell}(R'_\varepsilon v)(x+h) - R'_\varepsilon(v^{\ell})(x+h)\|)^2\, d\nu(x)$$
$$\leqslant C_R\, \varepsilon \sum_{\ell'=0}^{\ell} \int^* P_R(v^{\ell'})^2(x)\, d\nu(x) .$$

On va étudier maintenant

$$R'_\varepsilon(v^{\ell})(x+h) - v^{\ell}(x+h)$$
$$= R'_\varepsilon\, v^{\ell}(x+h) - v^{\ell}(x+h)\, R'_\varepsilon(1)(x+h) + v^{\ell}(x+h)(R'_\varepsilon(1)(x+h) - 1)$$

$$I_\varepsilon = \int (v^{\ell}(x+h+2\varepsilon^{\frac12}\alpha')\, e^{-\varepsilon^{\frac12}\lambda(x,\bar\alpha)-\varepsilon^{\frac12}h\bar\alpha\ldots} - v^{\ell}(x+h)\, e^{-\varepsilon^{\frac12}\lambda(x,\bar\alpha)\ldots})\,\varphi\, d\nu' .$$

Coupons l'intégrale en deux :

$$I'_\varepsilon = \int_{|\alpha'|<\rho} (v^{\ell}(x+h+2\varepsilon^{\frac12}\alpha') - v^{\ell}(x+h))\exp(-\varepsilon^{\frac12}\lambda(x\,,\,\bar\alpha) - \varepsilon^{\frac12}h\bar\alpha\ldots)\,\varphi\, d\nu' .$$

$$I''_\varepsilon = \int_{|\alpha'|>\rho} v^{\ell}(x+h+2\varepsilon^{\frac12}\alpha')\, e^{-\varepsilon^{\frac12}h\bar\alpha}\, e^{-(\ )}\,\varphi\, d\nu'$$
$$+ \int_{|\alpha'|>\rho} v^{\ell}(x+h)\, e^{-\varepsilon^{\frac12}\lambda(\ )}\,\varphi\, d\nu' .$$

Pour majorer I'_ε , on utilise le fait que $\alpha \longrightarrow v^{\ell}(x+h)$ est continue pour obtenir

$$\forall\, \eta > 0\ ,\ \exists\, \eta_0\ ,\ \rho\varepsilon^{\frac12} \leqslant \eta_0\ ,$$
$$\Longrightarrow \forall\, h\ ,\ \|h'\| \leqslant R\ ,\ I'_\varepsilon(x\,,\,h) \leqslant C_R\, \eta \int e^{-\varepsilon^{\frac12}\mathrm{Re}\,\lambda(x,\bar\alpha)-\varepsilon|\alpha'|^2}\, d\nu' .$$

Quant à I''_ε , on a une majoration ν-presque-partout : pour $\|h\|' \leqslant R'$

$$|I''_\varepsilon(x\,,\,h)| \leqslant C_R\, P_R(v^{\ell})(x)\, \frac{1}{\rho}\, (\int e^{-2\varepsilon^{\frac12}\lambda(x,\bar\alpha)-2\varepsilon|\alpha'|^2}\, d\nu')^{\frac12}$$
$$\leqslant C_R\, P_R(v^{\ell})(x)\, \frac{1}{\rho}\, e^{\frac12\|x\|^2} .$$

Au total donc, ν-presque-partout,

$$\lim_{\varepsilon_j\to 0} (\sup_{\|h\|'\leqslant R'} \|R'_{\varepsilon_j}\, v^{\ell}(x+h) - v^{\ell}(x+h)\, R'_{\varepsilon_j}(1)(x+h)\|) = 0 .$$

Et, comme $\|v^{\ell}(x+h)\| \leqslant P_R(v^{\ell})(x) \in L^2_\nu$, on en déduit

$$\lim_{j\to\infty} \int (\sup_{\|h\|'\leqslant R} \|v^{\ell}(x+h)\, R'_{\varepsilon_j}(1)(x+h) - v^{\ell}(x+h)\|)^2\, d\nu(x) = 0 .$$

Considérant éventuellement une sous-suite, on voit que, ν-presque-partout,

$$\sup_{\|h\|'\leqslant R'} \|D^{\ell}(R'_{\varepsilon_j} v)(x+h) - v_{\ell}(x+h)\| \longrightarrow 0 .$$

COROLLAIRE 2.1.

1° _Si_ $u \in C^{\ell}_R$, _il existe une fonction_ v _de la classe de_ u _telle que_, ν-_presque-partout, la fonction_ $h \in E' \longrightarrow v(x+h)$ _est_ ℓ _fois_ E'-_différentiable. De plus, la fonction_ $D^{\ell}\, v(x)$ _définie ainsi_, ν-_presque-partout, appartient à_ $\tilde C_{\ell}$, et est de la classe de $D^{\ell} u$.

2° On a donc $C_R^{\ell+1} \subset C_R^{\ell+\rho} \subset C_R^{\ell}$, $0 \leqslant \rho < 1$. Soit $u \in C_R^{\ell+1}$. Soit en effet $\tilde{N}$ tel que $x \notin \tilde{N} \Longrightarrow v(x + .)$ est $(E' - C^{\ell})$, et $D^j v(x + .)$ est X-continue. $x \notin \bigcup_n \tilde{N} - t_n$ entraine alors

$$\sup_{|t|\leqslant R-1} \sup_{\|h\|'\leqslant 1} \frac{\|D^{\ell} v(x + t + h) - D^{\ell}(v(x + t)\|}{\|h\|'^{\rho}} \leqslant C \sup_{|t|<R} \|D^{\ell+1} v(x + t)\| .$$

Ceci permet de prouver le théorème suivant.

THÉORÈME 2.1. - Soit $A \in T_{\delta}^{m}$ avec $m \in \underset{\sim}{R}^{-}$. Alors, A applique $C_R'^{\alpha} \longrightarrow C_R^{\alpha+m}$ si $\alpha \in \underset{\sim}{R}^{+}$ et $\alpha + m \notin \underset{\sim}{N}$.

La démonstration se fait comme dans [10].

3. Applications à l'existence et à la régularité lipschitzienne des solutions d'équations pseudo-différentielles elliptiques.

Soit P un opérateur elliptique de la classe T_{δ}^{m} , $m \in \underset{\sim}{R}^{+}$. Nous allons étudier l'équation $Pu = f$, lorsque $f \in C'^{\ell+\rho}(X , E)$.

THÉORÈME 3.1. - Soit P elliptique de la classe T_{δ}^{m} , $m \in \underset{\sim}{R}^{+}$. Soit $u \in C_R^o(X,E)$ tel que $Pu \in C_R'^{\ell+\rho}(X , E)$, alors $u \in C_R^{\ell+m+\rho}(X , E)$, $\ell \in \underset{\sim}{N}$, $\rho > 0$ si $m \in \underset{\sim}{N}$.

THÉORÈME 3.2. - Soit P elliptique dans la classe T_{δ}^{m} , $m \in \underset{\sim}{R}^{+}$. Soit $f \in C_R^o(X , E)$, alors $\forall x \in E$, il existe un voisinage de x , V , et il existe $u \in C_R^o(X , E)$ tel que $Pu = f$ sur V . De plus, si $f \in C_R'^{\ell+\rho}$ dans un voisinage de x , alors $u \in C_R^{\ell+\rho+m}$ dans V .

Démonstration du théorème. - Nous allons d'abord prouver que si $f \in C_R^o(X , E)$, il existe, $\forall x_0 \in E$, V_{x_0} et $u \in C_R^o$ tels que $Pu = f$ sur V . On dit que $u \in C_R^{\ell+\rho}$ dans l'ouvert V si $u \in \mathcal{E}^{k+\rho}$, et si, $\forall \psi \in C_b^{\infty}(E)$, $\mathrm{supp}(\psi) \subset V$, alors $\psi u \in C_R^{\ell+\rho}(X , E)$.

A l'aide du théorème 1.2, nous savons qu'il existe Q_N' , R_N' et R tels que

$$P \circ Q_N' = I + R_N' + R , \quad Q_N' \in T_{\delta}^{-m} , \quad R_N' \in T_{\delta}^{-N} \text{ et } R \in \mathcal{R}^{-\infty} .$$

Soit $\varphi \in C_b^{\infty}(E)$, $\varphi \equiv 1$ sur un voisinage de x_0 et à support dans la boule $\{x \in E ; \|x - x_0\| < \eta\}$.

$$\varphi(P \circ Q') = \varphi + \varphi R' + \varphi R$$

(on abandonne les indices N), ce qui s'écrit

$$\varphi(P \circ Q') = 1 + \varphi R' + \varphi R + \varphi - 1 .$$

Nous allons prouver le lemme suivant.

LEMME 3.1. - Soit $A \in T_{\delta}^{-m'}$ avec $m' > 0$. Si $\varphi \in C_b^{\infty}(E)$, $\varphi \leqslant 1$, $\mathrm{supp}\, \varphi \subset B(x_0 , \eta)$, et si $u \in C_R^o$ avec $\mathrm{supp}\, u \subset B(x_0 , \eta)$, alors

$$P_R(\varphi A(u)) \leqslant C(\eta)\; P_R(u) \;,$$

<u>et</u> $\lim_{\eta \to 0} C(\eta) = 0$.

<u>Démonstration du lemme</u>. - On exprime $\varphi A u = \int_{X^c} \varphi \tau_\alpha\, u\, d\mu$. On prétend que, si $\operatorname{supp} u \subset B(x_0\; \eta)$, $\varphi A u = \int_{\|\alpha'\| \leqslant \eta} \varphi \tau_\alpha\, u\, d\mu$, car $\|\alpha'\| > \eta$ entraine $\varphi \tau_\alpha\, u = 0$, car $\operatorname{supp} \tau_\alpha\, u \subset \operatorname{supp} u - 2\alpha'$. Donc

$$P_R(\varphi A u) \leqslant C_R\; P_R(u)\; |\mu|(\{\|\alpha'\| \leqslant \eta\}) \;.$$

On conclut alors, comme dans [10]. Si on note que, pour tout entier N fixé, l'algèbre $\mathcal{R}^{-\infty}$ est également engendrée par les produits $A \circ B$ et $B \circ A$, avec $B \in T_\delta^{-N}$, $A \in T^{-\infty}$, il est facile de voir que le résultat du lemme est valable également pour un élément de $\mathcal{R}^{-\infty}$.

Revenons à la démonstration du théorème 3.1. Le lemme 3.1 et la remarque précédente prouvent que la norme de l'opérateur $R_1 = \varphi(R + R')\psi$, comme opérateur de $C_R^o \longrightarrow C_R^o$, tend vers zéro lorsque $\eta \longrightarrow 0$, si ψ désigne une fonction de $C_b^\infty(E)$ bornée par 1 qui vaut 1 sur un voisinage de x_0 et qui a son support dans $\{x \in E \;;\; \varphi(x) = 1\}$. Comme on a prouvé à la proposition 2.1 que C_R^o est un espace de Banach, on en déduit que, pour η assez petit, $(1 + R_1)^{-1} \;:\; C_R^o \longmapsto C_R^o$. On voit que

$$\varphi P \circ Q'\psi(1 + R_1)^{-1} = (\psi - 1)(1 + R_1)^{-1} + 1 \;.$$

Il suffit de poser

$$u = Q'\psi(1 + R_1)^{-1}\, f \;,$$

on a $u \in C_R^o$ et $Pu = f$ sur un voisinage de x_0 . Prouvons maintenant le deuxième point. Quitte à restreindre encore V , on peut supposer que

$$V \subset B(x_0\;,\; r) \subset B(x_0\;,\; r') \subset W \;,\quad r' > r \;,$$

et $f \in C_R^{\prime \ell+\rho}$ sur W . Soit $\psi \in C_b^\infty(E)$, avec $\operatorname{supp} \psi \subset V$. On détermine $\varphi \in C_b^\infty(E)$: $\varphi \equiv 1$ sur le support de ψ , $\operatorname{supp} \varphi \subset W$, on a donc $\varphi(Pu) \in C_R^{\prime \ell+\rho}$. On prend Q_N , R_N , R , comme au théorème 3.1, et on a

$$\psi Q_N(\varphi P) = \psi[Q_N\; \varphi]P + \psi Q_N\; P = \psi[Q_n\;,\; \varphi]P + \psi(I + R_N + R') \;,$$

$$\psi[Q_N\;,\; \varphi] = \psi Q_N(\varphi - 1) \;,$$

donc

$$\psi Q_N(\varphi P u) = \psi u + \psi R_N\; u + \psi R'_u + \psi Q_N(\varphi - 1)\; Pu \;.$$

$R_N \in T_\delta^{-N}$, $R' \in T^{-\infty}$, $\psi(R_N + R')u$ sera dans $C_R^{\ell+m+\rho}(X\;,\; E)$. Comme $\varphi P u \in C^{\prime \ell+\rho}$ par hypothèse, il suffit de prouver que $\psi Q_N(\varphi - 1)(Pu) \in C_R^{\ell+\rho+m}$, ce qui est l'objet de la proposition suivante.

PROPOSITION 3.1 (<u>caractère pseudo-local</u>). - <u>Soient</u> φ <u>et</u> $\psi \in C_b^\infty(E)$ <u>avec</u> $\varphi \equiv 1$ <u>sur le support de</u> ψ , $Q \in T_\delta^{m'}(E)$ <u>avec</u> $m' \leqslant 0$, <u>et</u> $P \in T_\delta^m$, <u>alors l'opérateur</u> $\psi Q(1 - \varphi)P$ <u>opère de</u> $C_R^o(X\;,\; E)$ <u>dans</u> $C_R^N(X\;,\; E)$, $\forall\, N \in \underset{\sim}{N}$.

Démonstration.

$$\psi Q(1-\varphi)u = \int g(x\,,\,\alpha').\tau_{\alpha}\, u\, d\mu(\alpha)\ ,$$

avec $g(x\,,\,\alpha') = \psi(x)(1-\varphi(x+2\alpha')) \in C_b^{\infty}(E\times E)$. Comme g est nulle au voisinage de $\alpha = 0$, en remplaçant g par $(g/|\alpha|^{2N})$ et μ par $|\alpha|^{2N}\mu$, on pourra supposer que $\mu \in T_{\delta}^{-N}$, où N est assez grand.

L'application $\alpha \in X^c \longrightarrow g(x\,,\,\alpha)$ est C^{∞} à valeur dans $\mathcal{L}(\mathcal{E}^s)$, $\forall\, s \in \underset{\sim}{R}$. Pour $u \in B^{\infty}_{cyl}(E)$, $\alpha \longrightarrow \tau_{\alpha} u$ est $(E'^c - C^{\infty})$ sur X^c à valeurs dans $\mathcal{E}^s$, $\forall\, s \in \underset{\sim}{R}$. On va d'abord exprimer $\varphi Q(1-\varphi)\circ \mathrm{op}(\|z\|^{2k})(u)$ pour $u \in B^{\infty}_{cyl}(E)$. On constate que

$$(\tau_{\alpha^n} \circ \mathrm{op}(\|z^n\|^{2k}))(u) \xrightarrow{n\to\infty} \tau_{\alpha}\circ(\mathrm{op}(\|z\|^{2k})u)$$

dans $\mathcal{E}^s$, $\forall\, s$, pour u fixée dans $B^{\infty}_{cyl}(E)$, la convergence étant uniforme en α sur les parties bornées de X^c .

Par ailleurs,

$$\tau_{\alpha^n}\circ \mathrm{op}(\|z^n\|^{2k})(u) = \sum_{\substack{\lambda,\mu\in\mathfrak{I}_n\\ 2|\mu|+|\lambda|=k}} (\ )\ \frac{\bar{\alpha}^{\lambda}}{a^{2\lambda}}\ \frac{\partial_{\bar{\alpha}}^{\lambda+\mu}\ \partial_{\alpha}^{\lambda}(\tau_{\alpha^n} u)}{a^{2\mu}} = \sum_{\substack{2p+|\lambda|=k\\ \lambda\in\mathfrak{I}_n}} (\ )\ \frac{\tilde{\Delta}_n^k\ \partial_{\bar{\alpha}}^{\lambda}(\tau_{\alpha^n} u)}{a^{\lambda}}\ \frac{\bar{\alpha}^{\lambda}}{a^{\lambda}}\ .$$

Donc

$$Au = \psi Q(1-\varphi)\circ \mathrm{op}(\|z\|^{2k})(u) = \sum_{\substack{2p+|\lambda|=k\\ \lambda\in\mathfrak{I}_n}} \int g(x\,,\,\alpha')\ \tilde{\Delta}_n^k\ \partial_{\bar{\alpha}}^{\lambda}(\tau_{\alpha^n} u)\ \frac{\bar{\alpha}^{\lambda}}{a^{2\lambda}}\, d\mu\ .$$

Intégrant par parties avec une identité, on obtient

$$\sum_{\lambda,p} g(x\,,\,\alpha')\ \tilde{\Delta}_n^k\ \partial_{\bar{\alpha}}^{\lambda}(\tau_{\alpha^n} u)\ \frac{\bar{\alpha}^{\lambda}}{a^{2\lambda}} = \sum_{I_n} (\ )\ \frac{\partial_{\bar{\alpha}}^{\nu+\lambda''}\ \partial_{\alpha}^{\rho+\eta}\ \tilde{\Delta}^{j'}}{a^{\nu+\lambda''+\rho+\eta}}\ (\tau_{\alpha^n} u\ \frac{\partial_{\bar{\alpha}}^{\rho+\lambda'}\ \partial_{\alpha}^{\mu+\nu}\ \tilde{\Delta}^j\ g}{a^{\rho+\mu+\nu}}\ \frac{\bar{\alpha}^{\lambda'+\lambda''-\mu-\eta}}{a^{\mu+\eta}\ a^{2(\lambda'+\lambda''')+\lambda''}})\ ,$$

$$I = \{i = (j,j,\rho,\nu,\eta,\mu,\lambda',\lambda'',\lambda'''), 2(j+j'+|\rho|+|\nu|+|\eta|+|\mu|)+|\lambda'|+|\lambda''|+|\lambda'''| = k\ ;\ \mu+\eta \leq \lambda'+\lambda''\}\ ,$$

$$I_n = I\cap \mathfrak{I}_n\ .$$

Posant

$$\mu_i = \mathcal{F}^{-1}(D_z^{\lambda'+\lambda''-(\mu+\eta)}\ (B\circ(\bar{z}\,,\,z)\ \|z\|^{2j'}(\frac{z}{a})^{\nu+\lambda''}\ (\frac{\bar{z}}{a})^{\rho+\eta}))\times\frac{1}{a^{2(\rho+\nu)}\ a^{2(\lambda'+\lambda''')+\lambda''}\ a^{\eta+\mu}}\ ,$$

$$g_i(x\,,\,\alpha) = a^{\nu}\, a^{\rho}\ \partial_{\bar{\alpha}}^{\rho+\lambda'}\ \partial_{\alpha}^{\mu+\nu}\ \tilde{\Delta}_g^j\ ,$$

on constate que

$$\|\mu_i\| \leq \frac{1}{a^{2\rho}\ a^{2\nu}\ a^{\lambda'+\lambda''-(\mu+\eta)+2(\lambda'+\lambda''')+\lambda''+\eta+\mu}} \leq \frac{1}{a^{2(\rho+\nu)+2(\lambda'+\lambda''+\lambda''')}}\ .$$

Soit $\sum_i \|\mu_i\| < +\infty$, les g_i forment un ensemble borné de fonctions de $C_b^\infty(E\times E)$, les $B_i = \mathcal{F}^{-1}(\mu_i)$ une famille absolument sommable de $T_\delta^{-N'}$.

Après passage à la limite, on obtient

$$Au = \psi Q(1-\varphi) \circ \mathrm{op}(\|z\|^{2k})u = \sum_{i\in I} \int g_i(x\ ,\ \alpha)\ \tau_\alpha\, u\, d\mu_i\ .$$

Posant $A_i\, u = \int g_i(x\ ,\ \alpha).\tau_\alpha\, u\, d\mu_i$, on prouve que l'on peut écrire

$$D^\ell(A_i\, u).t = \sum_{\left\{\substack{p,q\\ |p|+|q|+r=\ell}\right.} \int \partial_x^p\, \partial_{\bar\alpha}^q\, g(x\ ,\ \alpha).\tau_\alpha\, u\, d(t_{p+q}\ \mu_i)\ ,\ \text{avec}\ \ t_{p+q} \in \widehat{\odot}_r\, E\ .$$

Utilisant ce qui précède : $t_{p+q}\ \mu_i = H(t_{p+q})\ g_{\rho-j} * \tilde\mu_i$, on prouve que $D^\ell(A_i\, u) \in C_\ell$ si $u \in C_R^o$ et on a également une inégalité :

$$n_\ell(A_i\, u) \leqslant C\ \|\tilde\mu_i\|\ .$$

Comme $\sum_i \|\tilde\mu_i\| < +\infty$, il est clair que $Au \in C_R^\ell$ si $u \in C_R^o$.

Si, maintenant, P est quelconque, on écrit

$$P = \mathrm{op}((1+\|z\|^2)^k) \circ P'_N + R_N \quad \text{avec} \quad P'_N \in T_\delta^{m-2k}\ ,\quad R_N \in T_\delta^{-N}\ .$$

Pour $u \in C_R^o$, $P'_N\, u \in C_R^o$ et $R_N\, u \in C_R^o$ (si k est choisi assez grand), et on a le résultat.

<u>Remarque</u>. - Les résultats des théorèmes 3.1 et 3.2 sont valables dès que P a une paramétrix dans une classe T_δ^{-m} , et s'appliquent donc à l'exemple du corollaire 1.9.

4. <u>Le cas de l'opérateur</u> $A = \sum_i \dfrac{1}{a_i^2}\dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}$.

On écrit $A = P + A'$ avec

$$P = \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{a_i^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - x_i\,\frac{\partial}{\partial x_i}\right) \quad \text{et} \quad A' = \sum_{i=1}^\infty \frac{x_i}{a_i^2}\,\frac{\partial}{\partial x_i}\ .$$

On notera $Q_0 = \mathrm{op}((1+\|z\|^2)^{-1})$.

PROPOSITION 4.1. - $\forall\ N \in \underset{\sim}{N}$, $\exists\ Q_N \in T_\delta^{-2}$ <u>et</u> $R_N \in T_\delta^{-N-1}$ <u>tels que</u>

$$Q_N \circ A = I + R_N + A' \circ Q_N$$

(δ <u>désigne un nombre arbitraire</u> < 1 <u>et</u> $\delta > 1/2$).

<u>Démonstration</u>. - On raisonne par récurrence sur N .

1° $N = 0$.

$$Q_0 \circ A = Q_0 \circ P + Q_0 \circ A' = I + R'_0 + Q_0 \circ A' \quad \text{avec} \quad R_0 \in T_\delta^{-2\delta}\ ,$$

et on utilise le lemme suivant pour montrer que $[Q_0\ ,\ A'] \in T_\delta^{-1}$.

LEMME 4.1. - <u>Si</u> $Q \in T_\delta^m$, $[Q\ ,\ A'] = Q \circ A' - A' \circ Q \in T_\delta^{m+1}$.

<u>Démonstration du lemme</u>. - $A^{o\prime}(\bar z\ ,\ z) = (\bar\zeta|\zeta)_{E\times E} - \|\zeta\|^2$.

$$Q \circ A' = QA' + \sum_{i=1}^{\infty}(-1)\, \partial_{\zeta_i} Q(2 \frac{\bar{\zeta}_i}{a_i^2} - 2 \frac{\zeta_i}{a_i^2}) + \sum_{i=1}^{\infty} \partial_{\zeta_i}^2 \frac{Q}{2} \frac{2}{a_i^2} .$$

$$A' \circ Q = QA' + \sum_i 2 \frac{\bar{\zeta}_i}{a_i^2} \partial_{\bar{z}_i} Q .$$

Donc

$$Q \circ A' - A' \circ Q = \sum_i \frac{1}{a_i^2} \partial_{z_i}^2 Q + 2 \sum_i \frac{\bar{\zeta}_i}{a_i^2} (\partial_{\bar{z}_i} Q - \partial_{z_i} Q) - 2 \sum_i \partial_{z_i} Q \frac{\zeta_i}{a_i^2} ,$$

avec , $\forall\, \varepsilon > 0$,

$$\sum_i \frac{1}{a^2} \partial_{\zeta_i}^2 Q \in T_\delta^{m-2\delta} , \quad \sum_i \frac{\bar{\zeta}_i}{a_i^2}(\partial_{\zeta_i} Q - \partial_{\zeta_i} Q) \in T_\delta^{m-\delta+1+\varepsilon} , \quad 2 \sum_i \partial_{\zeta_i} Q \frac{\bar{\zeta}_i}{a_i^2} \in T_\delta^{m-\delta+1+\varepsilon} ,$$

Donc, on a bien $[Q , A'] \in T_\delta^{m+1}$.

2° Supposons la propriété prouvée jusqu'à $N - 1$. On pose $Q_{N+1} = Q_N - R_N Q_0$, d'où

$$\begin{aligned} Q_{N+1} \circ A &= I + R_N + A' \circ Q_N - (R_N Q_0) \circ A \\ &= I + R_N + A' \circ Q_N - (R_N Q_0) \circ P - (R_N Q_0) \circ A' \\ &= I + R'_N + [R_N Q_0 , A'] + A' \circ Q_N - A' \circ (R_N Q_0) , \end{aligned}$$

avec $[R_N Q_0 , A'] \in T_\delta^{-N}$, et $A' Q_N - A' \circ (R_N Q_0) \in A' \circ Q_{N+1}$.

On a posé $(R_N Q_0) \circ P = R_N + R'_N$ avec $R'_N \in T_\delta^{-N-2\delta} \subset T_\delta^{-N-1}$.

On a donc bien prouvé la proposition 4.1.

PROPOSITION 4.2. - $\forall\, j \in \underset{\sim}{N}$, $\forall\, N \in \underset{\sim}{N}$, <u>il existe des opérateurs</u> $R_N \in T_\delta^{-N-1}$, $Q_j^N \in T_\delta^{-2}$, $R_{j+1}^{N,j}$, ... , $R_{2j}^{N,j} \in T_\delta^{-(j+1)}$, ... , T_δ^{-2j} <u>tels que</u>

$$Q_j \circ A = I + R_N + A' \circ R_{1+j}^{N,j} + \dots + A'^j \circ R_{2j}^{N,j} + (A' , \dots , A'^j) \circ \mathcal{R}^{-\infty} .$$

$(A' , \dots , A'^j) \circ \mathcal{R}^{-\infty}$ <u>désigne un opérateur de la forme</u> $A'^{\ell} \circ R$, <u>où</u> $R \in \mathcal{R}^{-\infty}$.

<u>Démonstration</u>. - On raisonne par récurrence sur j , N étant fixé (on abandonne cet indice). Pour $j = 1$, on a vu (proposition 4.1) que $Q^N \circ A = I + R_N + A' \circ Q^N$, ce qui est ce que l'on voulait.

Supposons donc la proposition prouvée jusqu'à j .

On pose

$$Q_{j+1} = Q_j - (A' \circ R_{1+j} + \dots + A'^j \circ R_{2j}) \circ Q_0$$

et

$$\begin{aligned} Q_{j+1} \circ A = I + R_N + (A' \circ R_{j+1} + \dots + A'^j \circ R_{2j}) + (A' \dots A'^j) \circ \mathcal{R}^{-\infty} \\ - (A' \circ R_{1+j} + \dots + A'^j \circ R_{2j}) \circ (I + R_0 + A' \circ Q_0) . \end{aligned}$$

On obtient des termes de la forme

$$A'^k \circ R_{j+k} \circ R_0 = A'^k \circ R_{k+j+1}^1 + A'^k \circ \mathcal{R}^{-\infty} , \text{ avec } d^\circ R'_{k+j+1} = k + j + 1 ,$$

et également de la forme

$$A'^k \circ R_{k+j} \circ A' \circ Q_0 = A'^{k+1} \circ (R_{j+k} \circ Q_0) + A'^k[R_{j+k} , A'] \circ Q_0$$

avec $(R_{j+k} \circ Q_0) \in T_\delta^{-k-j-2} + \mathcal{R}^{-\infty}$, et $[\ldots] \in T_\delta^{-k-j+1} \circ Q_0 \subset T_\delta^{-k-j-1} + \mathcal{R}^{-\infty}$. Ceci est conforme à ce que l'on voulait, on a donc prouvé la proposition 4.2.

On montre le lemme suivant.

LEMME 4.2. - Soit $R' = A' \circ Q_0$, $\varphi \in C_b^\infty(E)$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant 1)$ $\operatorname{supp} \varphi \subset B(x_0 , \eta)$, $\operatorname{supp} u \subset B(x_0 , \eta)$, alors

$$P_R(\varphi R'u) \leqslant C(\eta)\, C_R\, P_R(u) \quad \text{avec} \quad \lim_{\eta\to 0} C(\eta) = 0 .$$

Démonstration. - $\varphi(x)\, A'$ est l'opérateur $(\varphi(x)\, x.Du)_E$ de $\mathcal{E}^s \longrightarrow \mathcal{E}^{s-1}$.

$$DQ_0\, u = \int_0^{+\infty} \exp(-t)\, t^{-1+\frac{1}{2}}\, dt \int \tau_\alpha\, u\, \frac{\bar\alpha}{t^{\frac12}}\, a^2\, d\nu_t' .$$

Donc,

$$\varphi(x)\, A'Q_0\, u = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \frac{\varphi(x)}{a_i^2} \int_0^{+\infty} \exp(-t)\, t^{-1+\frac12}\, dt \int \tau_\alpha\, u\, \frac{\bar\alpha}{t^{\frac12}}\, a_i^2\, d\nu_t' ,$$

où la convergence a lieu dans L_ν^2 , pour $u \in L_\nu^2$. Si le support de u est contenu dans $B(x_0 , \eta)$, on a vu qu'on peut écrire

$$\varphi(x)\, A'Q_0\, u = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{a_i^2}\, \varphi(x) \int_0^{+\infty} \exp(-t)\, t^{-1+\frac12}\, dt \int_{\|\alpha'\|\leqslant\eta} \tau_\alpha\, u\, \frac{\bar\alpha_i}{t^{\frac12}}\, a_i^2\, d\nu_t' .$$

Si $v(x) \in \tilde{\mathcal{C}}$ est une fonction de la classe de $u \in \mathcal{C}$, on obtient la fonction, définie ν-presque-partout,

$$\varphi(x)\, A'(Q_0\, v) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{a_i^2}\, \varphi(x) \int_0^{+\infty} \exp(-t)\, t^{-1+\frac12}\, dt$$
$$\times \int_{\|\alpha'\|\leqslant\eta t^{-\frac12}} v(x+2t^{\frac12}\alpha')\exp(-t^{\frac12}\lambda(x, \bar\alpha))\, \frac{\bar\alpha_i}{t^{\frac12}}\, a_i^2\, d\nu' ,$$

$$\varphi(x)\, A'(Q_0\, v)(x) = \varphi(x) \int_0^{+\infty} \exp(-t)\, t^{-1+\frac12}\, dt$$
$$\times \int_{\|\alpha'\|\leqslant\eta t^{-\frac12}} v(x + 2t^{\frac12}\alpha')\, \exp(-t^{\frac12}\lambda(x , \bar\alpha))\, (\frac{x}{a^2} , \bar\alpha)'\, d\nu' ,$$

car les $\sum_{i\in\mathfrak{I}} x_i\, \bar\alpha_i$ convergent, $\forall\, x \in E$, dans $L_{\nu'}^2$ vers $(x/a^2 , \bar\alpha)'$. On peut maintenant déduire que

$$\sup_{|h|\leqslant R} |(\varphi(x)\, A'Q_0\, v)(x + h)| \leqslant C_R \Big(\int_0^{+\infty} \exp(-t)\, t^{-\frac12}\, dt$$
$$\times \int P_R^2(v)(x + 2t^{\frac12}\alpha')\, d\nu'\Big)^{\frac12} \Big(\int_0^{+\infty} \exp(-t)\, t^{-\frac12}\, dt \int_{\|\alpha'\|\leqslant\eta} d\nu_t'\Big)^{1/4} .$$

On a ainsi le résultat du lemme.

THÉORÈME 4.1. - Soit $A = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i^2} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, alors $f \in C_R'^{\ell+\rho}(X , E)$, $\forall\, x \in E$, il existe un voisinage de x , V , et il existe $u \in C_R^{\ell+m+\rho}(V)$ tel que $Au = f$ sur V .

Démonstration. - La démonstration suit celle du théorème 3.2. On détermine d'abord u , solution de $Au = f$, $u \in C_R^o$ par

$$A \circ Q_0 = I + R_1 + A' \circ Q_0 \text{ , avec } I + R_1 = P_0'\, Q_0 \text{ , } R_1 \in T_\delta^{-2\delta} .$$

En effet, il suffit d'appliquer le lemme 3.1 à R_1 et le lemme 4.2 à $R' = A' \circ Q_0$. Il faut ensuite prouver que u est $C_R^{\ell+\rho+m}$ sur V. On utilise la proposition 4.2 pour écrire

$$Q_j \circ A = I + R_N + A' \circ R_{1+j} + \dots + A'^j \circ R_{2j} + (A' , \dots , A'^j) \circ \tilde{R} ,$$

$\tilde{R} \circ \mathcal{R}^{-\infty}$, j et N assez grands. On choisit φ et ψ comme dans la démonstration du théorème 3.2 et on a

$$\psi Q_j \varphi A u = - \psi Q_j (1 - \varphi) A u + \psi u + \psi R_N u + \psi A' \circ R_{1+j} u$$
$$+ \dots + \psi A'^j \circ R_{2j} u + \psi(A' \dots A'^j) \circ \tilde{R} u$$

à cause de l'hypothèse $\psi Q_j(\varphi A u) \in C_R^{\ell+\rho+m}$. D'autre part,

$$\psi Q_j (1 - \varphi) A = \psi Q_j (1 - \varphi) P + \psi Q_j (1 - \varphi) A' ,$$

$\psi Q_j (1 - \varphi) P$ est régularisant d'après la proposition 3.1.

On étudie donc

$$\psi Q_j (1 - \varphi) A' = \psi A' Q_j (1 - \varphi) + \psi [A' , Q_j](1 - \varphi) + \psi Q_j \lambda_\varphi ,$$

où λ_φ est la fonction de C_b^∞ : $\lambda_\varphi(x) = \sum_{i=1}^\infty (x_i / a_i^2)(\partial\varphi/\partial x_i)$.

Comme $[A' , Q_j] \in \Sigma_0^{-1}$, $\psi[A' , Q_j](1 - \varphi)$ envoie $C_R^o \longrightarrow C_R^N$, quel que soit N.

$$\psi Q(1 - \varphi) A' = \psi [A' , Q](1 - \varphi) + A' \psi Q (1 - \varphi) + \psi Q \lambda_\varphi - \lambda_\psi Q(1 - \varphi) .$$

Or $\varphi \equiv 1$ sur le support de ψ , donc $\lambda_\varphi \equiv 0$ sur le support de ψ . Donc $\psi Q \lambda_\varphi$ est régularisant $C_R^o \longrightarrow C_R^N$, quel que soit N . De même,

$$\lambda_\psi Q(1 - \varphi) : C_R^o \longrightarrow C_R^N .$$

On vérifie, d'autre part directement, que $A'^j \psi$ ou $\psi A'^j$ opère de $C_R^{\ell+j} \longrightarrow C_R^\ell$, si supp ψ est borné. Donc l'opérateur

$$A' \psi Q(1 - \varphi) \text{ envoie } C_R^o \text{ dans } C_R^N , \ \forall N .$$

On voit donc que $\psi Q_j (1 - \varphi) A u \in C_R^N$, quel que soit N . Et si on a choisit j assez grand, on a $\psi(A'^\ell \circ R_{\ell+j} u) \in C_R^{j-1}$, donc $\psi(A'^\ell \circ R_{\ell+j}) u \in C_R^{\ell+\rho+m}$, et le théorème 4.1 est prouvé.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BARGMANN (V.). - On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform, II, Comm. pure and appl. Math., t. 20, 1967, p.1-101.

[2] BEREZIN (F. A.). - Wick and anti-Wick operator symbols, Math. of USSR-Sbornik, t. 15, 1971, p. 577-606 ; et, [en russe] Mat. Sbornik, t. 86, 1971, p. 578-610.

[3] BLEHER (P. M.) and VIŠIK (M. I.). - On a class of pseudo differential operators with an infinite number of variables, and applications, Math. of USSR-Sbornik, t. 15, 1971, p. 443-491 ; et [en russe] Mat. Sbornik, t. 86, 1971, p. 446-494.

[4] GROSS (L.). - Potential theory on Hilbert space, J. funct. Analysis, t. 1, 1967, p. 123-181.

[5] HÖRMANDER (L.). - Fourier integral operators, I, Acta Math., Uppsala, t. 127, 1971, p. 79-183.

[6] KRÉE (P.). - Triplets conucléaires en théorie des champs, Séminaire Paul Krée: Equations aux dérivées partielles en dimension infinie, 2e année, 1976/77, n° 4, 11 p.

[7] KRÉE (P.) and RACZKA (R.). - Kernels of integral operators in quantum fields theory, Ann. Inst. Henri Poincaré (à paraître).

[8] LASCAR (B.). - Propriétés locales d'espaces de type Sobolev en dimension infinie, Comm. in partial diff. Equations, t. 1, 1976, p. 561-584.

[9] LASCAR (B.). - Une condition nécessaire et suffisante d'ellipticité pour une classe d'opérateurs différentiels en dimension infinie, Comm. in partial di diff. Equations, t. 2, 1977, p. 31-67.

[10] LASCAR (B.). - Opérateur pseudo-différentiels en dimension infinie, J. Analyse math., Jérusalem (à paraître).

[11] SCHWARTZ (L.). - Radon measures on arbitrary topological spaces and cylindrical measures. - Oxford, Oxford University Press, 1973 (Tata Institute of fundamental Research, Studies in Mathematics, 6).

[12] STEIN (E. M.). - Singular integrals and differentiability properties of functions. - Princeton, Princeton University Press, 1970 (Princeton mathematical Series, 30).

[13] TREVES (F.). - Topological vector spaces, distributions and kernels. - New York, Academic Press, 1967 (Pure and applied Mathematics, Academic Press, 25).

[14] VIŠIK (M. I.) and MARČENKO (A. V.). - Boundary value problems for second-order elliptic and parabolic operators on infinite-dimensional manifolds with boundary, Math. of USSR-Sbornik, t. 19, 1973, p. 325-364 ; et [en russe] Mat. Sbornik, t. 90, 1973, p. 331-371.

Bernard LASCAR
36 rue du Pré-Saint-Gervais
93500 PANTIN