SÉMINAIRE PAUL KRÉE

PAUL KRÉE

Méthode fonctionnelle en théorie des champs

Séminaire Paul Krée, tome 3 (1976-1977), exp. n° 5, p. 1-27
<http://www.numdam.org/item?id=SPK_1976-1977__3__A5_0>

Séminaire Paul KRÉE
(Equations aux dérivées partielles
en dimension infinie)
3e année, 1976/77, n° 5, 27 p.

MÉTHODE FONCTIONNELLE EN THÉORIE DES CHAMPS

par Paul KRÉE

Soit un champ quantique de bosons ou de fermions. Pour adopter un langage commun concernant ces deux cas, on dit qu'un tel champ consiste de particules du type $\sigma = S$ s'il s'agit de bosons, et du type $\sigma = A$ s'il s'agit de fermions. L'objet de base est un triplet conucléaire avec conjugaison $\mathcal{T} = ({}'E \subset Z \subset E)$, voir l'exposé 1 si $\sigma = S$. On a construit dans l'exposé 4 un triplet conucléaire s'écrivant en réalisation holomorphe

$$F\mathcal{T} = (F(\bar{E}) \subset F(\bar{Z}) \subset F({}'\bar{E})) .$$

L'espace $Op\mathcal{T}$ des opérateurs linéaires continus $\hat{Q} : F(\bar{E}) \longrightarrow F({}'\bar{E})$ est muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties équicontinues de $F(\bar{E})$. Le principe des méthodes fonctionnelles en théorie des champs consiste à représenter tout élément $\hat{Q} \in Op\mathcal{T}$ par des formes σ-symétriques $\tilde{Q}(\bar{z} , z')$, $Q(\bar{z} , z')$ sur ${}'\bar{E} \times {}'E$ (appelées respectivement forme noyau et forme normale de l'opérateur $\hat{Q}$) ou par une coforme sur $E \times \bar{E}$ (appelée conoyau). Puis l'on cherche à remplacer les opérations à effectuer sur ces opérateurs (composition, calcul de trace, ...) par des opérations sur ces formes et coformes associées biunivoquement à tout opération $\hat{Q} \in Op\mathcal{T}$. Cette méthode élaborée par SCHWINGER, FEYNMAN, K. O. FRIEDRICHS [5], F. A. BEREZIN [1], ..., permet aujourd'hui encore la découverte de phénomènes physiques importants (voir les références de [4]), même si ses fondements mathématiques ne sont pas rigoureux. Un but de ce travail est de commencer à établir ces fondements et de faire le lien entre ces méthodes de physiciens, avec les méthodes de la théorie constructive des champs. Les premiers résultats ont été exposés à ce séminaire en octobre 1975. Ils concernaient seulement les bosons, les techniques étant cylindriques [7]. Ils ont été exposés aussi à Marseille (janvier 1976), au séminaire J. Leray (février 1976) et à Bordeaux (mai 1976). Les techniques nucléaires ont été introduites dans [8], puis perfectionnées dans [9], [10]. Un autre but de ce travail est de dégager des notions mathématiques nouvelles nécessaires au développement de l'analyse en dimension infinie.

1. Introduction heuristique.

L'idée de départ de la méthode fonctionnelle est de noter que $F({}'\bar{E})$ et $F(\bar{E})$ sont isomorphes à des espaces de suites vectorielles, voir l'exposé 3. Par conséquent, tout opérateur linéaire continu $\hat{Q}$ de $F(\bar{E})$ dans $F({}'\bar{E})$ est caractérisé par une matrice infinie. Pour mieux faire apparaître cette idée, nous examinons d'abord le cas d'un oscillateur harmonique, soit $\sigma = S$, $P = P_H$, $\mathcal{T} = \mathcal{T}_0 = (\underset{\sim}{C} \subset \underset{\sim}{C} \subset \underset{\sim}{C})$, voir [13]. Donc,

$$(1.1) \qquad F_S\, \mathcal{C}_0 = (\mathrm{Exp}(\underset{\sim}{\bar{C}}) \subset F_S(\underset{\sim}{\bar{C}}) \subset H(\underset{\sim}{\bar{C}})) \; .$$

En effet, dans ce cas, les suites vectorielles sont en fait des suites de <u>scalaires</u>. L'espace central est la réalisation holomorphe du Fock de $\underset{\sim}{C}$

$$(1.2) \qquad F_S(\underset{\sim}{\bar{C}}) = \{f(\bar{z}) = \sum f_k\, \bar{z}^k \; ; \; \|f\|^2 = \sum |f_k|^2\, k! < \infty\} \; .$$

Le grand espace $H(\underset{\sim}{\bar{C}})$ est l'espace des fonctions entières sur $\underset{\sim}{\bar{C}}$, muni de la topologie de la convergence compacte. L'application "série de Taylor" montre que $H(\underset{\sim}{\bar{C}})$ est isomorphe à un espace de Frechet nucléaire de suites numériques $(f_k)_k = f$.

$$(1.3) \qquad H(\underset{\sim}{\bar{C}}) \sim \{\sum f_k\, \bar{z}^k = f \; ; \; \forall\, n \, , \; \sum_{k=0}^{\infty} n^k\, |f_k| < \infty\} \; .$$

L'antidual de $H(\underset{\sim}{\bar{C}})$ est isomorphe à

$$\{g = \sum g_k\, \bar{z}^k \; ; \; \exists\, n, \sup n^{-k}\, k!\, |f_k| < \infty\} \; ,$$

et l'on voit que c'est l'espace $\mathrm{Exp}(\underset{\sim}{\bar{C}})$ des fonctions entières de type exponentiel sur $\underset{\sim}{\bar{C}}$. Comme $H(\underset{\sim}{\bar{C}})$ est réflexif, c'est l'antidual de $\mathrm{Exp}\,\underset{\sim}{\bar{C}}$, l'antidualité étant donnée par

$$(1.4) \qquad (g \, , \, f) = \sum_{k=0}^{\infty} k!\, \bar{g}_k\, f_k \; .$$

Cette antidualité prolonge le produit scalaire de $F_S(\underset{\sim}{\bar{C}})$. Notons la propriété importante des exponentielles $\exp(z) : \bar{z}' \longrightarrow \exp(z\bar{z}')$:

$$(1.5) \qquad \forall\, f \quad H(\underset{\sim}{\bar{C}}) \; , \quad (\exp(z) \, , \, f) = \sum k!\, \frac{\bar{z}^k}{k!}\, f_k = \sum f_k\, \bar{z}^k = f(\bar{z}) \; .$$

<u>L'application</u> $f \longrightarrow f^* = \bar{f}$ <u>et les dualités</u>.

On veut appliquer la propriété (2.14) de l'exposé 2 aux éléments de

$$\mathrm{Op} = L(\mathrm{Exp}(\underset{\sim}{\bar{C}}) \, , \, H(\underset{\sim}{\bar{C}})) \; .$$

Il faut donc remplacer les antidualités par des dualités. L'espace

$$E = H(\underset{\sim}{C}) = \{f^* = \bar{f} \; ; \; f \in H(\underset{\sim}{\bar{C}})\}$$

a pour dual $E' = \mathrm{Exp}\,\underset{\sim}{\bar{C}}$, la dualité entre E et E' étant

$$(1.6) \qquad \langle f^*(u) \, , \, g(\bar{u}) \rangle = \langle f^* \, , \, g \rangle = \overline{(g \, , \, f)} \; , \text{ avec } f \in H(\underset{\sim}{\bar{C}}) \; , \quad g \in \mathrm{Exp}\,\underset{\sim}{\bar{C}} \; .$$

De même, $F = H(\underset{\sim}{\bar{C}})$ a pour dual $F' = \mathrm{Exp}(\underset{\sim}{C}) = \{g^* \, , \; g \in \mathrm{Exp}(\underset{\sim}{\bar{C}})\}$, la dualité entre F et F' étant

$$(1.7) \qquad \langle f(\bar{u}) \, , \, g^*(u) \rangle = \langle f \, , \, g^* \rangle = (g \, , \, f) \; , \text{ avec } f \in H(\underset{\sim}{\bar{C}}) \; , \quad g \in \mathrm{Exp}\,\underset{\sim}{\bar{C}} \; .$$

La propriété (1.5) s'écrit alors

$$(1.8) \qquad \forall\, \Phi \in H(\underset{\sim}{C}) \; , \quad \langle \exp z\bar{u} \, , \, \Phi(u) \rangle = \Phi(z) \; ,$$

$$(1.9) \qquad \forall\, \Psi \in H(\underset{\sim}{\bar{C}}) \; , \quad \langle \exp \bar{z}u \, , \, \Psi(\bar{u}) \rangle = \Psi(\bar{z}) \; .$$

Pour la dualité entre $E \mathbin{\widehat{\otimes}} F = H(\underset{\sim}{\bar{C}} \times \underset{\sim}{C})$ et $E' \otimes F'$ définie canoniquement par les dualités $E - E'$ et $F - F'$, on a donc, pour $\Phi \in H(\underset{\sim}{\bar{C}} \times \underset{\sim}{C})$, $\Psi \in \mathrm{Exp}(\underset{\sim}{C})$ et $\Psi' \in \mathrm{Exp}(\underset{\sim}{\bar{C}})$,

$$(1.10) \qquad \langle \Psi \otimes \Psi' \, , \, \Phi \rangle = \langle \Psi(u)\, \Psi'(\bar{u}') \, , \, \Phi(\bar{u} \, , \, u') \rangle \; .$$

En particulier, pour $\Psi = \exp \bar{z}u$ et $\Psi'(u') = \exp z'\bar{u}'$,

$$\langle \exp(\bar{z}u + z'\bar{u}') , \Phi(\bar{u} , u') \rangle = \Phi(\bar{z} , z') .$$

<u>Noyau</u> $\tilde{Q}$ <u>de</u> $\hat{Q} \in \mathrm{Op} = L(E' , F)$.

C'est l'élément $\tilde{Q} \in E \hat{\otimes} F = H(\bar{\underset{\sim}{C}} \times \underset{\sim}{C})$ tel que $\forall\ \Psi \in \mathrm{Exp}\,\bar{\underset{\sim}{C}}$, $\forall\ \Phi \in \mathrm{Exp}\,\bar{\underset{\sim}{C}}$, on a

$$(\Psi , \hat{Q}\Phi) = \langle \Psi^* , \hat{Q}\Phi \rangle = \langle \Psi^* \otimes \Phi , \tilde{Q} \rangle ,$$

soit

$$(1.11) \qquad (\Psi , \hat{Q}\Phi) = \langle \overline{\Psi(\bar{u})}\ \Phi(\bar{u}') , \tilde{Q}(\bar{u} , u') \rangle .$$

(1.12) <u>Cas particuliers</u>.

(a) Prenant $\Psi(\bar{u}) = \exp z\bar{u}$ et $\Phi(\bar{u}') = \exp z'\bar{u}'$, il vient

$$(\exp z , \hat{Q} \exp z') = \langle \exp(\bar{z}u + z'\bar{u}') , \hat{Q}(\bar{u} , u') \rangle = \tilde{Q}(\bar{z} , z') .$$

(b) Prenant $\Psi(\bar{u}) = \exp z\bar{u}'$ et $\Phi(\bar{u}') \in \mathrm{Exp}(\bar{\underset{\sim}{C}})$, il vient

$$(\exp z , \hat{Q}\Phi) = (\hat{Q}\Phi)(\bar{z}) = \langle \exp \bar{z}u\ \Phi(\bar{u}') , \tilde{Q}(\bar{u} , u') \rangle .$$

<u>Forme normale ou symbole</u>.

On pose

$$(1.13) \qquad Q(\bar{z} , z') = \tilde{Q}(\bar{z} , z') \exp(- \bar{z}z') .$$

Comme la multiplication par $\exp(- \bar{z}z')$ est un isomorphisme de l'e. l. c. s. $H(\bar{\underset{\sim}{C}} \times \underset{\sim}{C})$, l'application qui à $\hat{Q}$ fait correspondre sa forme normale $Q(\bar{z} , z')$ est un isomorphisme de l'e. l. c. s. Op sur $H(\bar{\underset{\sim}{C}} \times \underset{\sim}{C})$. Et vu (1.12 (b)) il vient

$$(\hat{Q}\Phi)(\bar{z}) = \langle \exp z\bar{u}\ \Phi(\bar{u}') , Q(\bar{u} , u') \exp \bar{u}u' \rangle$$
$$= \sum k!^{-1} \langle \exp z\bar{u}\ \Phi(\bar{u}') , Q(\bar{u} , u')\ \bar{u}^k\ u'^k \rangle .$$

Comme le transposé de l'opérateur de multiplication par $\bar{u}^k\ u'^k$ dans $H(\bar{\underset{\sim}{C}} \times \underset{\sim}{C})$ est l'opérateur $(\partial/\partial\bar{u})^k\ (\partial/\partial u')^k$ dans $\mathrm{Exp}(\underset{\sim}{C} \times \bar{\underset{\sim}{C}})$, il vient

$$(1.14) \qquad (\hat{Q}\Phi)(\bar{z}) = \langle \Phi(\bar{u}' + \bar{z}) \exp \bar{z}u , Q(\bar{u} , u') \rangle .$$

<u>Matrice infinie d'un opérateur</u> Q .

Cette matrice a pour coefficients les nombres $\ell!\ Q_{k\ell}$, où les $Q_{k\ell}$ sont les coefficients du developpement de Taylor du noyau $\tilde{Q}(\bar{z} , z')$ de Q :

$$(1.15) \qquad \tilde{Q}(\bar{z} , z') = \textstyle\sum_{k \text{ et } \ell=0}^{\infty} Q_{k\ell}\ \bar{z}^k\ z'^\ell .$$

Pour $\Phi = \sum \Phi_k\ \bar{z}^k \in \mathrm{Exp}(\bar{\underset{\sim}{C}})$, il vient, vu (1.12 (b)),

$$(1.16) \qquad (\hat{Q}\Phi)(\bar{z}) = \textstyle\sum_{k \text{ et } \ell=0}^{\infty} \ell!\ Q_{k\ell}\ \Phi_\ell\ \bar{z}^k .$$

D'où

$$(1.17) \qquad \forall\ k ,\quad (\hat{Q}\Phi)_k = \textstyle\sum_{\ell=0}^{\infty} \ell!\ Q_{k\ell}\ \Phi_\ell .$$

Cette dernière relation montre que, si l'on considère $\hat{Q}$ comme un opérateur linéaire entre espaces de suites, la famille des nombres $\ell!\ Q_{k\ell}$ (k et ℓ entiers $\geqslant 0$) est la matrice de cet opérateur. Deux opérateurs quelconques de Op ne sont pas toujours composables. D'autre part, les physiciens théoriciens prêtent une attention particulière aux opérateurs non bornés de l'espace de Fock. Il est donc important de caractériser les noyaux des opérateurs $\hat{Q} \in \mathrm{Op}$ qui appartiennent aux deux sous-classes suivantes.

(1.18) Définition.

(a) Soit Opi l'espace des opérateurs linéaires équicontinus de $\mathrm{Exp}(\bar{\mathbb{C}})$ dans $\mathrm{Exp}(\bar{\mathbb{C}})$.

(b) Soit Opφ l'espace des opérateurs linéaires continus de $\mathrm{Exp}(\bar{\mathbb{C}})$ dans $F_S(\bar{\mathbb{C}})$.

Comme $H(\bar{\mathbb{C}})$ est réflexif, tout borné de son dual est équicontinu. Donc, Opi est l'espace des opérateurs linéaires continus de $\mathrm{Exp}\,\bar{\mathbb{C}}$.

(1.19) THÉORÈME. - Soit $\hat{Q} \in \mathrm{Op}$. Alors :

(a) $$\hat{Q} \in \mathrm{Opi} \Longleftrightarrow \forall\ z' \in \mathbb{C}\ ,\quad \tilde{Q}(.\ ,\ z') \in \mathrm{Exp}\,\bar{\mathbb{C}}\ ,$$

et lorsque z' décrit un borné de $\mathbb{C}$, $\tilde{Q}(.\ ,\ z')$ décrit une partie équicontinue de $\mathrm{Exp}\,\bar{\mathbb{C}}$.

(1.20) $$\hat{Q} \in \mathrm{Opi} \Longleftrightarrow \forall\ n\ ,\ \exists\ n'\ \text{ et }\ C > 0\ ,\quad |Q_{k\ell}| \leqslant C k!^{-1}\, n'^{k}\, n^{-\ell}\ .$$

(b) $$\hat{Q} \in \mathrm{Op}\varphi \Longleftrightarrow \forall\ z' \in \mathbb{C}\ ,\quad \tilde{Q}(.\ ,\ z') \in F_S(\bar{\mathbb{C}})\ ,$$

et $\tilde{Q}(.\ ,\ z')$ décrit un borné de $F_S(\bar{\mathbb{C}})$ quand z' décrit un borné de $\mathbb{C}$.

(1.21) $$\hat{Q} \in \mathrm{Op}\varphi \Longleftrightarrow \forall\ n\ ,\quad \sup_\ell \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} |Q_{k\ell}|^2\, n^{2\ell}\, k! < \infty\ .$$

Démonstration.

(a) Supposons $\hat{Q} \in \mathrm{Opi}$. La relation

$$\tilde{Q}(\bar{z}\ ,\ z') = (\exp z\ ,\ \hat{Q} \exp z') = (\hat{Q} \exp z')(\bar{z})$$

montre que, pour tout $z' \in \mathbb{C}$, $\tilde{Q}(.\ ,\ z') \in \mathrm{Exp}\,\bar{\mathbb{C}}$. Si z' décrit un borné de $\mathbb{C}$, $\exp z'$ décrit une partie équicontinue de $\mathrm{Exp}\,\bar{\mathbb{C}}$. Donc, $\hat{Q} \exp z' = \tilde{Q}(.\ ,\ z')$ décrit une partie équicontinue de $\mathrm{Exp}\,\bar{\mathbb{C}}$.

$$\forall\ r' > 0\ ,\ \exists\ m\ \text{ et }\ C\ ,\quad |Q(\bar{z}\ ,\ z')| \leqslant C \exp(m|\bar{z}|)\ ,$$

pour $|z'| \leqslant r'$. En utilisant alors les relations de Cauchy

$$Q_{k\ell} = (2\pi i)^{-2} \iint_{\substack{|\bar{z}|=r \\ |z'|=r'}} \frac{Q(\bar{z}\ ,\ z')}{\bar{z}^{k+1}\ z'^{\ell+1}}\, d\bar{z}\, dz'\ ,$$

on en déduit (1.20). Pour montrer (1.19 (a)), il reste à montrer que (1.20) entraine $\hat{Q} \in \mathrm{Opi}$. Prenons Φ décrivant une partie équicontinue B de $\mathrm{Exp}\,\bar{\mathbb{C}}$:

$$\exists\ C\ \text{ et }\ m_0\ \text{ avec }\ |\Phi(z)| \leqslant C \exp(m_0|.z|)\ .$$

Donc, toutes les $\Phi = \sum \Phi_\ell\, \bar{z}^\ell \in B$ vérifient

$$\forall\ \ell\ ,\quad |\Phi_\ell| \leqslant C_B\, m_0^\ell\, \ell!^{-1}\ .$$

Vu (1.17), il vient

$$|(\hat{Q}\Phi)_k| = |\sum_{\ell=0}^{\infty} \tilde{Q}_{k\ell}\ \varphi_\ell\ \ell\,!| \leq CC_B \sum_{\ell=0}^{\infty} m^k(\frac{e}{k})^k\ r'^{-\ell}\ m_0^\ell\ .$$

Prenant $r' > m_0$, cette somme converge, et on a la relation suivante :

$$|(\hat{Q}\Phi)_k| \leq CC'C_B\ m^k(e/k)^k\ ,$$

et $\hat{Q}$ définit un opérateur équicontinu de $\operatorname{Exp} \underset{\sim}{\bar{C}}$.

(b) En raisonnant comme au point (a), on voit que l'inclusion $\hat{Q} \in \mathrm{Op}\varphi$ entraine : si z' décrit un borné de $\underset{\sim}{C}$, $\hat{Q}(.\ ,\ z') = \sum_k Q_{k\ell}\ \bar{z}^k\ z'^\ell$ décrit un borné de $F_S(\underset{\sim}{\bar{C}})$. Cette dernière condition entraîne (1.21). On montre ensuite que (1.21) entraîne $\hat{Q} \in \mathrm{Op}\varphi$. D'ailleurs ceci est un cas très particulier de la proposition (4.17) de l'exposé 4.

(1.22) PROPOSITION. - <u>Pour</u> $\hat{L} \in \mathrm{Opi}$ <u>et</u> $\hat{Q} \in \mathrm{Op}$, <u>alors</u> $\hat{C} = \hat{Q}\hat{L} \in \mathrm{Op}$ <u>a pour symbole</u>

$$C(\bar{z}\ ,\ z') = \sum_{k=0}^{\infty} k!^{-1}(\frac{\partial}{\partial z'})^k\ Q(\bar{z}\ ,\ z')(\frac{\partial}{\partial \bar{z}})^k\ L(\bar{z}\ ,\ z')\ .$$

D'ailleurs, si Q et L sont polynômiaux, on a

$$\tilde{C}(\bar{z}\ ,\ z') = \langle \tilde{Q}(\bar{z}\ ,\ u)\ ,\ \tilde{L}(\bar{u}\ ,\ z')\rangle_u\ .$$

D'où

$$\begin{aligned} C(\bar{z}\ ,\ z') &= \exp(-\ \bar{z}z')\ \langle \exp(\bar{z}u')\ Q(\bar{z}\ ,\ u)\ ,\ \exp(\bar{u}z')\ L(\bar{u}\ ,\ z')\rangle_u \\ &= \exp(-\ \bar{z}z')\ \langle Q(\bar{z}\ ,u)\ ,\ \exp((\bar{u}+\bar{z})z')\ L(\bar{u}+\bar{z}\ ,\ z')\rangle_u \\ &= \langle Q(\bar{z}\ ,\ u+z')\ ,\ L(\bar{u}+\bar{z}\ ,\ z')\rangle_u\ , \end{aligned}$$

d'où le résultat par développement de Taylor. On peut alors en déduire (1.22), en approchant $Q(\bar{z}\ ,\ z')$ et $L(\bar{z}\ ,\ z')$ par des polynômes (exercice).

<u>Noyau de l'adjoint.</u>

Tout $\hat{Q} \in \mathrm{Op}$ définit un opérateur linéaire continu de $E = \operatorname{Exp} \underset{\sim}{\bar{C}}$ dans $G = H(\underset{\sim}{\bar{C}})$ On note que l'antidualité entre G et $'G \simeq \operatorname{Exp} \underset{\sim}{C}$ s'écrit $(\overline{g\ ,\ f})$, pour $g \in \operatorname{Exp} \underset{\sim}{C}$ et $f \in H(\underset{\sim}{\bar{C}})$. Donc, l'adjoint $\hat{Q}^*$ de Q est tel que, $\forall\ \Phi$ et $\Psi \in E$

$$(\Psi\ ,\ \hat{Q}^*\ \Phi) = (\hat{Q}\Psi\ ,\ \Phi)_{G\times 'G} = (\overline{\Phi\ ,\ Q\Psi})\ .$$

D'où

$$\tilde{Q}^*(\bar{z}\ ,\ z') = (\exp z\ ,\ \hat{Q}^*\ \exp z') = (\overline{\exp z'\ ,\ Q\ \exp z})\ .$$

(1.23) Et le noyau de $\hat{Q}^*$ est $\tilde{Q}^*(\bar{z}\ ,\ z'') = \overline{\tilde{Q}(\bar{z}'\ ,\ z)}$.

Ceci joint à (1.19 (a)) donne une caractérisation des noyaux des $\hat{Q} \in \mathrm{Ope}$, espace des opérateurs $L \in \mathrm{Op}$ se prolongeant en des opérateurs linéaires continus de $H(\underset{\sim}{\bar{C}})$.

On cherche à étendre des résultats en dimension infinie pour les bosons et pour les fermions, en utilisant les techniques d'espaces collectivement localement convexes (exposé 2) et la théorie des formes (exposé 3).

2. Les dualités.

Soit σ fixé appartenant à $\{S , A\}$. On fixe aussi une famille P de poids sur $\underset{\sim}{N} = \{0 , 1 , 2 , \ldots\}$ vérifiant les conditions C1 , C2 , et C3 de l'exposé 3 et la condition C4 de l'exposé 4. Partant de $\mathfrak{C}$ décrivant une σ-particule, je construis le triplet $F\mathfrak{C}$ dont les éléments sont des formes σ-symétriques.

(2.1) Application $\Phi \longrightarrow \Phi^*$.

L'intérêt de cette application est qu'elle transforme les antidualités apparaissant dans $F\mathfrak{C}$ en des dualités. De plus, les dualités obtenues ont des propriétés remarquables relativement à $\exp \bar{x}u$. Par hypothèse, l'antidual de $F(\bar{E})$ est $F('\bar{E})$, l'antidualité prolongeant l'antidualité définie par le produit scalaire de $F(\bar{Z})$

$$(2.2)\qquad (\Psi , \Phi) = \sum k!\, (\Psi_k , \Phi_k)_{k,u} .$$

L'espace $F('E) = \{\Phi^* ; \Phi \in F('\bar{E})\}$ a pour dual $F(\bar{E})$, la dualité entre ces espaces étant

$$(2.3)\qquad \langle \Phi^*(u) , \Psi(\bar{u}) \rangle = \langle \Phi^* , \Psi \rangle = (\overline{\Psi , \Phi}) , \quad \Psi \in F(\bar{E}) .$$

De mêmes, $F('E)$, de point générique Φ, a pour dual $F(E)$, d'élément générique Ψ^*, $\Psi \in F(\bar{E})$, la dualité entre ces espaces étant

$$(2.4)\qquad \langle \Phi(\bar{u}) , \Psi^*(u) \rangle = \langle \Phi , \Psi^* \rangle = (\Psi , \Phi) .$$

La propriété fondamentale des exponentielles s'écrit

$$(2.5)\begin{cases} (a) & \forall\ \Phi \in F('E) , \quad \langle \exp z\bar{u} , \Phi(u) \rangle = \Phi(z) \\ (b) & \forall\ \Phi \in F('\bar{E}) , \quad \langle \exp \bar{z}u , \Phi(\bar{u}) \rangle = \Phi(\bar{z}) \end{cases} .$$

(2.6) On rappelle la signification de ces égalités de formes σ-symétriques. Si $\sigma = S$, et $P = P_H$, pour tout z fixé appartenant à $'E$, l'exponentielle $\bar{u} \longrightarrow \exp z\bar{u}$ appartient à $F(\bar{E})$, et, pour tout $z \in E$, $u \longrightarrow \exp \bar{z}u$ appartient à $F(E)$. Alors (2.5 (a) et (b)) sont des égalités de nombres. Si $\sigma = A$, P vérifiant (C1) à (C4), (2.5 (a)) signifie que, pour tout sous-espace $'E_j$ de dimension finie de $'E$, la restriction Φ_j de Φ à $'E_j$ vérifie

$$\langle \exp z\bar{u} , \Phi_j(u) \rangle = \Phi_j ,$$

où le premier membre doit être interprété comme l'accouplement partiel de $\Phi_j \in F_A('E_j)$ avec l'exponentielle de la forme symplectique sur $'E_j \times '\bar{E}_j$ (voir exposé 3). Et (2.5 (b)) a une signification analogue.

(2.7) Dualité produit.

D'après (3.11) de l'exposé 3, on a

$$F('\bar{E}) \hat{\otimes} F('E) \simeq F('\bar{E} \times 'E) ,$$

le dual de cet espace étant $F(E \times \bar{E}) \supset F(E) \otimes F(\bar{E})$. Vu (1.19) de l'exposé 3, on a, pour $\Phi \in F('E \times '\bar{E})$, $\Psi \in F(E)$ et $\Psi' \in F(\bar{E})$,

$$\langle \Psi \otimes \Psi' , \Phi \rangle = \langle \Psi'(\bar{u}') \Psi(u) , \Phi(\bar{u} , u') \rangle .$$

En particulier, pour $\Psi(u) = \exp \bar{z}u$ et $\Psi'(u') = \exp z'\bar{u}'$, on a

$$\langle \exp(\bar{z}u + z'\bar{u}') \, , \, \Phi(\bar{u} \, , \, u') \rangle = \Phi(\bar{z} \, , \, z') \, .$$

On notera que, pour $\sigma = A$, on a

$$\exp(z'\bar{u}') \wedge \exp(\bar{z}u) = \exp(\bar{z}u) \wedge \exp(z'\bar{u}') = \exp(\bar{z}u + z'\bar{u}') \, .$$

3. Calcul symbolique.

Soit $(\varepsilon_u)_{u \in U}$ une famille filtrante croissante de semi-normes préhilbertiennes définissant la topologie de $\dot{E}$. Pour étudier $\mathrm{Op}\mathcal{C} = L(F(\bar{E}) \, , \, F('E)) = L(X' \, , \, Y)$, nous appliquons les résultats du paragraphe 4 de l'exposé 2 avec

$$X = P(\underset{\sim}{N} \, , \, E^{\bullet}) = F(\bar{E}) = P(\underset{\sim}{N} \, , \, \bar{E}^{\bullet}_{\sigma}) \, ,$$

et

$$Y = P(\underset{\sim}{N} \, , \, G^{\bullet}) = F('\bar{E}) = P(\underset{\sim}{N} \, , \, E^{\bullet}_{\sigma}) \, .$$

(3.1) DÉFINITION. - Soit ESD l'espace des suites doubles :

$$(Q_{k\ell})_{k,\ell} \in P(\underset{\sim}{N} \times \underset{\sim}{N} \, , \, G^{\bullet} \,\widehat{\widehat{\otimes}}\, E^{\bullet}) = P(\underset{\sim}{N}^2 \, , \, E^{\bullet}_{\sigma} \,\widehat{\widehat{\otimes}}\, E^{\bullet}_{\sigma}) \, .$$

Plus explicitement, on a $Q_{k\ell} \in E^k_{\sigma} \,\widehat{\widehat{\otimes}}\, \bar{E}^{\ell}_{\sigma}$ et

(3.2) $$\forall \, (\varpi \, , \, u) \in P \times U \, , \quad \sum_{k \text{ et } \ell=0}^{\infty} \varpi(k) \, \varpi(\ell) \, \varepsilon_u^{k,\ell}(Q_{k\ell}) < \infty \, ,$$

avec $\varepsilon_u^{k,\ell} = \varepsilon(\varepsilon\sigma_u^k \, , \, \varepsilon\sigma_u^{\ell})$.

(3.3) PROPOSITION. - L'application $\Phi \otimes \Psi \longrightarrow \Phi(\bar{u}) \, \Psi(u')$ définit, par prolongement linéaire et continu des isomorphismes d'e. l. c. s.,

$$\mathrm{Op}\mathcal{C} \xrightarrow{I_1} F('\bar{E}) \,\widehat{\widehat{\otimes}}\, F('E) \xrightarrow{I_2} \mathrm{ESD} \xrightarrow{I_3} F('\bar{E} \times 'E) \, .$$

Démonstration. - L'isomorphisme I_1 résulte de (2.14) de l'exposé 2. Les isomorphismes I_2 et I_3 résultent du théorème (3.11) de l'exposé 3.

(3.4) DÉFINITION. - Soit $\hat{Q} \in \mathrm{Op}\mathcal{C}$, et soit $(Q_{k,\ell}) = (I_2 \circ I_1)(\hat{Q}) \in \mathrm{ESD}$.

(a) Alors la "matrice" infinie $(\ell ! \, Q_{k\ell})$ est appelée la matrice de l'opérateur $\hat{Q}$.

(b) La forme σ-symétrique $\tilde{Q} = (I_3 \circ I_2 \circ I_1)\hat{Q}$ est appelée la forme noyau de l'opérateur $\hat{Q}$.

(c) La forme suivante sur $'\bar{E} \times 'E$ est appelée la forme normale (ou symbole) de l'opérateur $\hat{Q}$

(3.5) $$Q(\bar{z} \, , \, z') = \exp(- \, \bar{z}z') \, \tilde{Q}(\bar{z} \, , \, z') \, .$$

Dans le cas particulier où $\sigma = A$, on a encore

(3.6) $$Q(\bar{z} \, , \, z') = \exp(- \, \bar{z} \vee z') \wedge \tilde{Q}(\bar{z} \, , \, z') = \tilde{Q}(\bar{z} \, , \, z') \wedge \exp(- \, \bar{z} \vee z') \, .$$

(3.7) THÉORÈME.

(a) Les applications $\hat{Q} \longrightarrow \tilde{Q} \longrightarrow Q$ réalisent des isomorphismes d'espaces nucléaires complets

$$Op\mathcal{C} \longrightarrow F('E \times 'E) \longrightarrow F('E \times 'E) .$$

(b) Les opérateurs $\hat{Q} \in Op\mathcal{C}$ dont les formes-noyaux (respectivement les formes-symboles) sont polynômiales cylindriques sur $'\bar{E} \times 'E$, sont denses dans $Op\mathcal{C}$.

Preuve. - (a) résulte de (3.3) et du fait que la multiplication à droite par $\exp(-\bar{z}z')$ est un isomorphisme de $F('\bar{E} \times 'E)$. En effet, l'inverse est la multiplication à droite par $\exp(+\bar{z}z')$. (b) résulte du fait que, pour tout espace nucléaire complet X, les formes polynômiales cylindriques sont denses dans $F(X')$, voir (2.16) de l'exposé 3.

(3.8) Formules fondamentales.

Soient $\hat{Q} \in Op$, Φ et $\Psi \in F(\bar{E})$. Alors

(3.9) $$(\hat{Q}\Phi)_k = \sum_{\ell=0}^{\infty} \ell ! \, \{Q_{k\ell} \; \Phi_\ell\} ,$$

où $\{Q_{k\ell} \; \Phi_\ell\} \in E_\sigma^k$ désigne le résultat de la contraction de $Q_{k\ell} \in E_\sigma^k \hat{\otimes} \bar{E}_\sigma^\ell$ avec $\Phi_\ell \in {'E}_\sigma^\ell$.

(3.10) $$(\Psi , \hat{Q}\Phi) = \langle \Psi^* , \hat{Q}\Phi \rangle = \langle \Phi(\bar{u}') \, \Psi^*(u) , \tilde{Q}(\bar{u} , u') \rangle .$$

La première formule résulte de (4.7 (b)) de l'exposé 2. La deuxième formule résulte de (4.6) de l'exposé 2 et de (3.16) de l'exposé 3. Noter que (3.10) redonne (1.11) dans le cas particulier où $\sigma = S$, $P = P_H$, $Z = \underset{\sim}{C}$, et que

$$\Phi(\bar{u}') \, \Psi^*(u) = \Psi^*(u) \, \Phi(\bar{u}') \quad \text{si} \quad \sigma = S .$$

Mais il n'en est plus de même dans le cas anticommutatif.

(3.11) PROPOSITION. - Notons $*$ la conjugaison dans $F('\bar{E} \times 'E)$ prolongeant par linéarité et continuité l'application

$$f(\bar{u}) \, g(u') \longrightarrow g^*(\bar{u}') \, f^*(u) ,$$

avec $f \in F('\bar{E})$, $g \in F('E)$. Alors, pour tout $Q \in Op\mathcal{C}$, la forme-noyau (respectivement la forme normale) de l'adjoint de $\hat{Q}$ est $\tilde{Q}^*(\bar{z} , z')$ (respectivement $Q^*(\bar{z} , z')$).

N. B. - Dans le cas particulier où $\sigma = S$, la conjugaison dans $F('\bar{E} \times 'E)$ prend la forme très simple

(3.12) $$Q^*(\bar{z} , z') = \overline{Q(\bar{z}' , z)} .$$

Dans le cas plus particulier où $P = P_H$, on peut prouver (3.11) en dimension quelconque, en raisonnant comme au paragraphe 1.

Preuve. - On a le schéma suivant

$$\begin{tikzcd} F('\bar{E}) \arrow[r, "*"] & F('E) \arrow[d, dotted] \\ F(E) \arrow[u, dotted] & F(\bar{E}) \arrow[l, "*"'] \arrow[ul, "\hat{Q}"'] \end{tikzcd} \ni \Phi \text{ et } \Psi$$

(*) On note que $\hat{Q} = f \otimes g : \; \Phi \longrightarrow \langle g(u') , \Phi(\bar{u}') \rangle \, f(\bar{u})$ a pour noyau $f(\bar{u}) \, g(u')$.

En effet,

$$(\Psi\ ,\ (f \otimes g)\Phi) = \langle g(u')\ ,\ \Phi(u')\rangle\langle f(\bar{u})\ ,\ \Psi^*(u)\rangle\ ,$$

et, par application de (1.19) de l'exposé 3, il vient

(**) $(\Psi\ ,\ (f \otimes g)\Phi) = \langle\Phi(\bar{u}')\ \Psi^*(u)\ ,\ f(\bar{u})\ g(u')\rangle$. Montrons que le noyau de $(f \otimes g)^*$ est $g^*(\bar{u})\ f^*(u')$. Par définition de l'adjoint de $f \otimes g$, on a les relations suivantes

$$\begin{aligned}(\Psi\ ,\ Q^*\ \Phi) &= \overline{(\Phi\ ,\ Q\Psi)} = \overline{\langle\Psi(\bar{u}')\ \Phi^*(u)\ ,\ \tilde{Q}(\bar{u}\ ,\ u')\rangle}\\ &= \overline{\langle\Psi(\bar{u}')\ \Phi^*(u)\ ,\ f(\bar{u})\ g(u')\rangle} = \overline{\langle\Phi^*(u)\ ,\ f(\bar{u})\rangle\langle\Psi(\bar{u}')\ ,\ g(u')\rangle}\\ &= \langle\Phi(\bar{u})\ ,\ f^*(u)\rangle\langle\Psi^*(u')\ ,\ g^*(\bar{u}')\rangle = \langle\Phi(\bar{u})\ \Psi^*(u')\ ,\ g^*(\bar{u}')\ f^*(u)\rangle\end{aligned}$$

et vu (**) le noyau de $(f \otimes g)^*$ est $g^*(\bar{u})\ f^*(u')$. Par prolongement linéaire continu, le noyau de l'adjoint de tout $\hat{Q} \in \mathrm{Op}$ est $\tilde{Q}^*(\bar{z}\ ,\ z')$. La forme normale de $\hat{Q}^*$ est

$$Q^*(\bar{z}\ ,\ z') = (\tilde{Q}\ \exp(-\ \bar{z}z'))^* = (\exp(-\ \bar{z}z'))^*\ \tilde{Q}^*(\bar{z}\ ,\ z')\ .$$

Pour terminer la démonstration, il suffit de montrer que $\exp(-\ \bar{z}z')$ est invariant par conjugaison. C'est clair pour $\sigma = S$. Pour $\sigma = A$, cela se vérifie à l'aide de coordonnées dans tout sous-espace vectoriel de dimension finie de $'\bar{E} \times {}'E$.

(3.13) PROPOSITION. - <u>Soit</u> $'E_j$ <u>un sous-espace complexe de dimension finie de</u> $'E$, <u>identifié à son anti-dual</u> E_j . <u>Alors, l'adjointe de l'injection canonique</u> $\alpha_j^*\ :\ 'E_j \subset {}'E$ <u>est la surjection</u> $\alpha_j\ :\ E \longrightarrow E_j$ <u>qui prolonge la projection orthogonale de</u> Z <u>sur son sous-espace</u> $'E_j$:

$$\begin{array}{ccc} 'E \subset Z \subset & E & \\ \alpha_j^* \cup & \downarrow \alpha_j & . \\ 'E_j \simeq & E_j & \end{array}$$

<u>Pour tout</u> $\hat{Q} \in \mathrm{Op}\mathcal{T}$, <u>on a le schéma suivant.</u>

$$\begin{array}{ccc} F('\bar{E}) & \xleftarrow{\hat{Q}} & F(\bar{E}) \\ F\alpha_j \downarrow & & \uparrow F\alpha_j^* \\ F('\bar{E}_j) & \xleftarrow{\hat{Q}_j} & F(\bar{E}_j) \end{array} .$$

<u>Alors, relativement au triplet</u> $\mathcal{T}_j = ('E_j = {}'E_j \simeq E_j)$, <u>l'opérateur</u> $\hat{Q}_j = F\alpha_j\ \hat{Q}F\alpha_j^*$ <u>a pour forme-noyau (respectivement normale) la restriction de</u> $\tilde{Q}$ <u>(respectivement</u> Q) <u>à</u> $'\bar{E}_j \times {}'E_j$.

<u>Preuve</u>. - Par application de (3.10), il vient, pour Φ_j et $\Psi_j \in F('\bar{E}_j)$,

$$(\Psi_j\ ,\ \hat{Q}\Phi_j) = \langle\Phi_j(\bar{u}')\ \Psi_j^*(u)\ ,\ \tilde{Q}_j(\bar{u}\ ,\ u')\rangle\ .$$

Or, le premier membre est égal à

$$\begin{aligned}(\Psi_j\ ,\ (F\alpha_j\ \hat{Q}F\alpha_j^*)\Phi_j) &= ((F\alpha_j^*)\Psi_j\ ,\ \hat{Q}(F\alpha_j^*\ \Phi_j))\\ &= \langle(F\alpha_j^*\ \Phi_j)(\bar{u}')(F\alpha_j^*\ \Psi_j)^*(u)\ ,\ \tilde{Q}(\bar{u}\ ,\ u')\rangle = \langle\Phi_j(\bar{u}')\ \Psi_j^*(u)\ ,\ (r\tilde{Q})(\bar{u}\ ,\ u')\rangle\ ,\end{aligned}$$

où $r\tilde{Q}$ désigne la restriction de $\tilde{Q}$. D'où, $r\tilde{Q} = \tilde{Q}_j$. On en déduit alors $rQ = Q_j$.

(3.14) PROPOSITION. - Pour $P = P_H$ si $\sigma = S$, et, pour tout P vérifiant (C1) à (C4) si $\sigma = A$, on a pour $\Phi \in F(\bar{E})$,

(3.15) $$(\hat{Q}\Phi)(\bar{z}) = \langle \Phi(\bar{u}') \exp \bar{z}u \ , \ \tilde{Q}(\bar{u} \ , \ u')\rangle \ ,$$

(3.16) $$(\exp z \ , \ \hat{Q} \exp z') = \tilde{Q}(\bar{z} \ , \ z') = (\hat{Q}(\exp(.z')))(\bar{z}) \ .$$

Preuve. - Si $P = P_H$ et $\sigma = S$, on raisonne comme en dimension 1, voir le paragraphe 1. Ces relations sont, pour z et z' fixés dans $'E$, des égalités entre nombres. Il n'en est plus de même si $\sigma = A$, ces relations sont alors des égalités entre formes alternées définies sur des espaces de dimension finie. Précisons, par exemple, le sens de (3.15). Pour $z \in {}'E_j$, alors

$$\Phi(\bar{u}') \wedge \exp \bar{z}u \in F_A(\bar{E}_j \times E_j) \otimes F_A('\bar{E}_j) \ ,$$

et la contraction de cette forme alternée avec la forme alternée $\tilde{Q}(\bar{u} \ , \ u')$ donne une forme $\Psi_j \in F_A('\bar{E}_j)$, et (3.15) affirme que Ψ_j est la restriction de $\hat{Q}\Phi$ à $\bar{E}_j$. Montrons alors (3.15). Par continuité, on se ramène au cas où Φ est cylindrique. On peut supposer que Φ est basée sur $'\bar{E}_j$ et vu (3.13), on est ramené à démontrer (3.15) en dimension finie, ce qui se fait en utilisant des coordonnées. On interprête et on prouve de même (3.16) si $\sigma = A$.

Plus précisement, on a $\exp(\bar{u} \vee z') \in F_A(Z_{\bar{u}} \times Z_{z'}) = F_A(\bar{Z}) \otimes F_A(Z)$. Alors le produit tensoriel de l'opérateur $\hat{Q}$ du premier facteur, avec l'opérateur identique du deuxième facteur, transforme $\exp(\bar{u} \vee z')$ en le noyau $\tilde{Q}(\bar{z} \ , \ z')$ de $\hat{Q}$.

(3.17) Exemple.

Si Z est hilbertien complexe de dimension quelconque, à tout $f \in Z$ on associe classiquement les opérateurs suivants de $F_A(\bar{Z})$, appelés créateur et annihilateur respectivement

$$\Phi(\bar{z}) \xrightarrow{b^*f} f\bar{z} \wedge \Phi(\bar{z}) \ , \quad \Phi(\bar{z}) \xrightarrow{b\bar{f}} \partial_{\bar{f}} \Phi(\bar{z}) \ .$$

Alors (3.13) et (3.16) permettent de montrer que les symboles de ces opérateurs sont respectivement $f\bar{z}$ et $\bar{f}z'$. De même, si α est un morphisme de $\mathcal{C}$, $F\alpha$ a pour noyau $\exp(\bar{z} \vee \alpha z')$. Comme au paragraphe 1, on va lire la régularité d'un opérateur sur son noyau, mais les preuves directes ne sont plus possibles. On utilisera les résultats de l'exposé 2. On suppose fixé un triplet $\mathcal{C}$, P et σ , P vérifiant (C1), (C2) et (C4). On rappelle que (C1) $\cup$ (C2) $\Longrightarrow$ (C3) .

(3.18) DÉFINITION.

(a) Soit Opi l'espace des opérateurs linéaires $\hat{Q} \in$ Op , définissant des applications linéaires équicontinues de l'espace interne $F(\bar{E})$ dans lui-même , Opi est muni de sa famille naturelle de bornés.

(b) Soit Opφ , l'espace des opérateurs $\hat{Q} \in$ Op , définissant des applications linéaires continues de $F(\bar{E})$ dans $F(\bar{Z})$, Opφ est muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties équicontinues de $F(\bar{E})$.

(c) Soit Ope le sous-espace de Op , formé par les opérateurs $\hat{Q}$ admettant un prolongement linéaire continu dans $F('\bar{E})$.

(d) Noter que l'espace des morphismes du triplet $F\mathcal{T}$ est $\mathrm{Hor}\varphi = \mathrm{Opi} \cap \mathrm{Ope}$.

(3.19) THÉORÈME DES NOYAUX. - L'application noyau $\hat{Q} \longrightarrow \tilde{Q}(\bar{z} , z') = \sum Q_{k\ell}(\bar{z} , z')$ décrite explicitement par (3.4), (3.8), ... réalise une bijection bicontinue de l'espace Op des opérateurs relatifs au triplet $F\mathcal{T}$ sur l'espace $F('\bar{E} \times 'E)$ des formes σ-symétriques sur $'\bar{E} \times 'E$.

(a) Pour que $\hat{Q} \in \mathrm{Op}$ appartienne à Opi , il faut et il suffit que, $\forall$ u , $\exists$ v tel que $\forall$ (k , ℓ) , $Q_{k\ell}$ se prolonge en une forme (k + ℓ)-linéaire sur $^k('\bar{E}_v) \times {}^\ell(E_u)$, et que de plus, les normes de toutes ces formes vérifient la condition : $\forall\ (\varpi , u) \in P \times U$, $\exists\ C > 0$, $\exists\ (\varpi' , v) \in P \times U$

(3.20) $\quad (\forall\ k ,\ \forall\ \ell$ avec $\varpi(\ell) \neq 0\ ) \Longrightarrow \|Q_{k\ell}\|_{u,v} \leqslant C\ k!^{-1}\ \varpi(\ell)^{-1}\ \varpi'(k)$.

(b) Pour que $\hat{Q} \in \mathrm{Op}$ appartienne à $\mathrm{Op}\varphi$, il faut et suffit que, $\forall$ (k , ℓ) , $Q_{k\ell} \in L('E^\ell , Z^k)$, et que pour tout $(\varpi , u) \in P \times U$, il existe $C > 0$ avec

(3.21) $\quad (\forall\ \ell ,\ \ \varphi_\ell \in \sigma u^\ell) \Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \|Q_{k\ell}\ \varphi_\ell\|^2\ k!\ \varpi(\ell)^2 < C$.

(c) Pour que $\hat{Q} \in \mathrm{Op}$ appartienne à Ope (respectivement soit un morphisme du triplet $F\mathcal{T}$), il faut et il suffit que $\tilde{Q}^*$ vérifie (a) (respectivement que $\tilde{Q}$ et $\tilde{Q}^*$ vérifient la condition (a)).

Démonstration.

(a) Supposons $\hat{Q} \in \mathrm{Opi}$. Alors, d'après les résultats de l'exposé 2 paragraphe 4, $\forall\ (\varpi , u)$, $\exists\ C > 0$ et (ϖ' , v) tels que

(3.22) $\quad \forall\ k ,\ \forall\ \ell$ avec $\varpi(\ell) \neq 0$, $Q_{k\ell}(\sigma u^\ell) \subset C\ k!^{-1}\ \varpi(\ell)^{-1}\ \varpi'(k)\ \sigma v^k$.

Donc, $Q_{k\ell}$ est linéaire continu de $'E_u^\ell$ dans $'\bar{E}_v^k$, et

$$\|Q_{k\ell}\| \leqslant C\ k!^{-1}\ \varpi(\ell)^{-1}\ \varpi'(k) .$$

Comme la norme π sur $'\bar{E}_v^k$ est plus grande que la norme ε , on en déduit (3.20). Réciproquement, supposons que le noyau de $\hat{Q} \in \mathrm{Op}$ vérifie (3.20). D'après la propriété universelle de la norme π , $\forall$ (k , ℓ) , $Q_{k\ell}$ définit un opérateur linéaire de $'E_u^\ell$ dans $(\bigcirc_{k,\pi} E_v)' = Y$, dont la norme est majorée par $C\ k!^{-1}\ \varpi(\ell)^{-1}\ \varpi'(k)$ si $\varpi(\ell) \neq 0$. Introduisons $v_1 \supset v$, tel que la surjection $s : E_{v_1} \longrightarrow E_v$ soit nucléaire, la norme de cette surjection étant notée ρ . On sait (voir [14]) que la transposée de $\bigcirc_k s$ envoie Y dans $\hat{\bigcirc}_k E'_{v_1}$, la norme de cette injection étant majorée par ρ^k . D'autre part, il existe un poids ϖ'' de P majorant $\varpi(k)\ \rho^k$. Donc $\hat{Q}$ vérifie (3.22). le couple (ϖ' , v) étant remplacé par (ϖ'' , v_1) . Par conséquent, vu les résultats de l'exposé 2, $\hat{Q} \in \mathrm{Opi}$.

(b) résulte du paragraphe 4 de l'exposé 2, (c) se déduit de (a) en utilisant (3.11).

(3.23) COROLLAIRE. - Si $P = P_H$ et $\sigma = S$, alors l'application noyau est une bijection bicontinue de Op relatif au triplet $('E \subset Z \subset E)$ sur l'espace

$H^{HO}('\bar{E} \times 'E)$ des fonctions hypoholomorphes sur $'\bar{E} \times 'E$, telles qu'elles sont définies dans l'exposé 3.

(a) Pour que $\hat{Q} \in Op$ appartienne à Opi , il faut et il suffit que, lorsque z' décrit une partie équicontinue λu de l'anti-dual $'E$ de E , les fonctions $\tilde{Q}(. \, , z')$ se prolongent par continuité en des fonctions entières de type exponentiel sur $\bar{E}$, ces fonctions décrivant une partie équicontinue de $\operatorname{Exp} E$.

(b) Pour que $\hat{Q} \in Op$ appartienne à $Op\varphi$, il faut et il suffit que, lorsque z' décrit une partie équicontinue u de $'E$, les fonctions correspondantes $\tilde{Q}(. \, , z')$ du premier argument, se prolongent par continuité en des fonctions de $F_S(\bar{Z})$, et y décrivent une partie bornée.

Démonstration.

(a) Pour montrer que les conditions indiquées sont nécessaires, on interprète (3.16) comme une égalité entre nombres complexes, et on l'écrit sous la forme

$$\tilde{Q}(\bar{z} \, , z') = (\hat{Q} \exp z')(\bar{z}) \; .$$

Quand z' décrit u , l'exponentielle $\exp z' = \sum_{j=0}^{\infty} j!^{-1} \otimes_j z'$ décrit une partie équicontinue de $\operatorname{Exp} \bar{\bar{E}}$. Donc, si $\hat{Q} \in Opi$ (respectivement $Op\varphi$), les fonctions $\tilde{Q}(. \, , z')$ décrivent une partie équicontinue de $H^{HO}('\bar{E})$ (respectivement bornée de $F_S(\bar{Z})$.

(b) Soit $\hat{Q} \in Op$ dont le noyau vérifie la condition (3.23 (a)). Pour h et $h' \in {'E}$, la formule de Cauchy donne

$$\tilde{Q}_{mn}(\bar{h}^m \, , h'^n) = (2\pi i)^{-2} \iint \frac{\tilde{Q}(\bar{t}\bar{h} \, , t'h)}{\bar{t}^{m+1} \; t'^{n+1}} \, d\bar{t} \; dt' \; ,$$

l'intégrale étant prise pour t et t' , nombres complexes tels que $|t| = r$ et $|t'| = r'$. Par hypothèse, $\forall \; u \in U$ et $r' > 0$, il existe $v \in U$ et $\lambda > 0$ tels que

$$\forall \; z' \in r'u \; , \quad |\tilde{Q}(\bar{z} \, , z')| \leqslant C \exp(\lambda \varepsilon_v(\bar{z})) \; .$$

Ces deux dernières relations entraînent

$$\forall \; h' \in u \; , \quad Q_{k\ell}(\bar{h}^k \, , h'^{\ell}) \leqslant C \; \lambda^k \; \varepsilon_v(\bar{h})^k (\tfrac{e}{k})^k \leqslant C' \; \lambda'^k \; \varepsilon_v(\bar{h})^k \; k!^{-1} \; .$$

Vu la propriété universelle des normes π , les $Q_{k\ell}$ vérifient la condition (3.20), pour $P = P_H$. Donc, vu le théorème des noyaux, $\hat{Q} \in Opi$.

(c) Examinons finalement le cas de $Op\varphi$. Soit Q tel que $\tilde{Q}(. \, , z')$ appartienne à la boule de rayon $C = C(\lambda \, , u) > 0$ du Fock lorsque z' décrit la partie équicontinue λu de $'E$, λ et u quelconque. Sous ces hypothèses,

$$\forall \; \ell \geqslant 0 \; , \quad \sum_{k=0}^{\infty} \|Q_{k\ell}(. \, , z'^{\ell})\|^2 \; k! \leqslant C^2 \; .$$

On a donc des applications linéaires $Q_{k\ell} \; : \; 'E_H^{\ell} \longrightarrow Z_S^k$ dont les normes vérifient

$$\forall \; \lambda > 0 \; , \; \forall \; \ell \geqslant 0 \; , \quad \sum_{k=0}^{\infty} \|Q_{k\ell}\|^2 \; \lambda^{2\ell} \; k! \leqslant C^2 \; .$$

Donc $\hat{Q}$ vérifie (3.21), et $\hat{Q} \in \mathrm{Op}\varphi$, d'après le théorème des noyaux.

Pour calculer le noyau et le symbole du composé de deux opérateurs, nous complétons d'abord le paragraphe 4 de l'exposé 2 en introduisant une troisième suite $H^\bullet = (H^k)_k$ d'espaces collectivement nucléaires complets, les topologies de ces espaces étant définies par les familles $(\varepsilon_w^k)_w$ des semi-normes habituelles. Posant $Z = P(\underset{\sim}{N} , H^\bullet)$, il vient $Z' = P^\vee(\underset{\sim}{N} , H'^\bullet)$ et le schéma suivant.

$$
(3.24) \qquad
\begin{array}{ccccc}
Z = P(\underset{\sim}{N} , H'^\bullet) & & Y = P(\underset{\sim}{N} , G^\bullet) & & X = P(\underset{\sim}{N} , E^\bullet) \\
& \nwarrow^{\hat{Q}} & & & \\
Z' = P^\vee(\underset{\sim}{N} , H'^\bullet) & & Y' = P^\vee(\underset{\sim}{N} , G'^\bullet) & \xleftarrow{\hat{L}} & X' = P^\vee(\underset{\sim}{N} , E'^\bullet)
\end{array}
$$

(3.25) PROPOSITION. - Pour $\hat{L} \in L^E(X' , Y')$ et $\hat{Q} \in L(Y' , Z)$, on pose $\hat{A} = \hat{Q}\hat{L} \in L(X' , Z)$. Soient $(\ell ! \, Q_{k\ell})$ et $(\ell ! \, L_{k\ell})$ les matrices des opérateurs $\hat{Q}$ et $\hat{L}$ avec

$$L_{mk} \in L^E(E'^k , G'^m) \quad \text{et} \quad Q_{km} \in L(G'^m , H^k) \simeq H^k \hat{\otimes} G^m .$$

Le composé de ces opérateurs appartient à $L(E'^k , H^m)$. Alors

$$A_{k\ell} = \sum_{m=0}^{\infty} m! \, Q_{km} \circ L_{m\ell}$$

converge dans $L(E'^\ell , H^k) \simeq H^k \hat{\otimes} E^\ell$, et $(\ell ! \, A_{k\ell})$ est la matrice de $\hat{A}$. De plus pour $\hat{L}$ fixé, l'application suivante est continue :

$$L(Y' , Z) \ni \hat{Q} \longrightarrow (A_{k\ell})_{k,\ell} \in Z \hat{\otimes} X .$$

Démonstration.

$$\forall u \in U , \forall w \in W , \quad |A_{k\ell}|_{u,w} = \sup\{ | \langle A_{k\ell} \, \xi_\ell , \zeta_k \rangle | \; ; \quad \xi_k \in u^k , \quad \zeta_k \in w^k \}$$
$$\leqslant \sum_{m=0}^{\infty} m! \, \sup\{ | \langle Q_{km} \circ L_{m\ell} \, \xi_\ell , \zeta_k \rangle | \; ; \quad \zeta_k \in w^k , \quad \xi_\ell \in u^\ell \} .$$

Dans un premier temps, puisque le sous-espace Δ engendré par les suites doubles finies, est dense dans $Z \hat{\otimes} Y$, on aura une somme finie de termes non nuls dans cette somme en prenant $\hat{Q}$ dans ce sous-espace. D'après l'exposé 2, paragraphe 4, pour tout $(\varpi , u) \in P \times U$, il existe $(\varpi' , v) \in P \times V$ et $C > 0$ tel que $L_{m\ell} \, u^\ell \subset C \, m!^{-1} \, \varpi(\ell)^{-1} \, \varpi'(m) \, v^m$, pour tout entier $\ell \geqslant 0$. On peut supposer $\varpi' \geqslant \varpi$. Donc,

$$|A_{k\ell}|_{u,w} \leqslant C \, \varpi(\ell)^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} \varpi'(m) \, \sup\{ | \langle Q_{km} \, \eta_m , \zeta_k \rangle | \; ; \quad \eta_m \in v^m \quad \text{et} \quad \zeta_k \in w^k \} .$$

Comme $\hat{Q} \in L(Y' , Z) \simeq Z \hat{\otimes} Y$; on a, dans cet espace, la semi-norme :

$$\sum_{k,m} \varpi'(m) \, \varpi'(k) \, |Q_{km}|_{v,w} = |\hat{Q}|_{\varpi',v,w} ,$$
$$\forall (\ell , k) \; ; \quad \varpi(\ell) \, \varpi'(k) \, |A_{k\ell}|_{v,w} \leqslant C \, |\hat{Q}|_{\varpi',v,w} .$$

Cette inégalité montre que l'application linéaire $\beta : \hat{Q} \longmapsto (A_{k\ell})_{k,\ell}$ est continue dans Δ , muni de la topologie induite par $Z \hat{\otimes} Y$ dans $(P \otimes P)(\underset{\sim}{N}^2 , H^\bullet \hat{\otimes} E^\bullet)$. On sait que cet e. v. t. est isomorphe à $Z \hat{\otimes} X = L(X' , Z)$. Donc, β se prolonge par continuité en une application $\hat{\beta}$ de $L(Y' , Z)$ dans $L(X' , Z)$. Par ailleurs, l'application $\gamma : \hat{Q} \longrightarrow \hat{A} = \hat{Q}\hat{L}$ est linéaire continue entre ces mêmes espaces car

$$|\hat{A}|_{\varpi,u,w} = \sup\{|\langle \hat{Q}\hat{L}\xi\ ,\ \zeta\rangle|\ ;\ \xi \in d_{\varpi,u}\ ;\ \zeta \in d_{\varpi,w}\}\ .$$

L'opérateur $\hat{L}$ étant équicontinu, il existe $C > 0$, $\varpi' > \varpi$ et $v \in V$ tels que $\hat{L}d_{\varpi,u} \subset Cd_{\varpi',v'}$, et par conséquent

$$|\hat{A}|_{\varpi,u,w} \leq C\ \sup\{|\langle \hat{Q}\eta\ ,\ \zeta\rangle|\ ;\ \eta \in d_{\varpi',w}\ ,\ \zeta \in d_{\varpi,w}\} = C\ |\hat{Q}|_{\varpi',v,w}\ .$$

Comme les applications $\hat{\beta}$ et γ coïncident sur Δ , elles coïncident partout, et la matrice $(\ell !\ A_{k\ell})$ est bien la matrice de $\hat{Q}\hat{L}$.

(3.26) <u>Remarque.</u>

Si, dans l'énoncé (3.25), l'hypothèse $\hat{Q} \in L(Y'\ ,\ Z)$ est remplacé par l'hypothèse $\hat{Q} \in L^E(Y'\ ,\ Z')$, la conclusion de cet énoncé est ainsi modifié. $A_{k\ell} \in L^E(E'^{\ell}\ ,\ H'^{k})$ et $(\ell !\ A_{k\ell})$ est la matrice de $\hat{A} = \hat{Q}\hat{L}$.

En appliquant (3.25) à la situation envisagée dans cet exposé, on obtient la proposition suivante.

(3.27) PROPOSITION. - <u>Soient</u> $\hat{L} \in \mathrm{Opi}$ <u>et</u> $\hat{Q} \in \mathrm{Op}$ <u>dont les matrices</u> $(\ell !\ L_{k\ell})$ <u>et</u> $(\ell !\ Q_{k\ell})$ <u>vérifient respectivement les conditions</u> (3.20) <u>et</u>

$$\forall\ (\varpi\ ,\ u) \in P \times U\ ,\ \sum_{k,\ell} \varpi(k)\ \varpi(\ell)\ \|Q_{k\ell}\|_u < \infty\ .$$

Posons

$$A_{k\ell} = \sum_{m=0}^{\infty} m!\ Q_{km} \circ L_{m\ell}\ . \tag{3.28}$$

(a) <u>Alors cette somme converge dans</u> $E^k \hat{\hat{\otimes}} \bar{E}^{\ell}$, et $(\ell !\ A_{k\ell})$ <u>est la matrice de l'opérateur</u> $\hat{A}$ <u>composé de</u> $\hat{L}$ <u>et</u> $\hat{Q}$.

(b) <u>De plus, pour</u> $\hat{L}$ <u>fixé dans</u> Opi , <u>l'opérateur linéaire</u> $\hat{Q} \longrightarrow \hat{Q}\hat{L}$ <u>est continu dans</u> Op .

Notons que le noyau $\tilde{A}(\bar{z}\ ,\ z')$ de $\hat{A} = \hat{Q}\hat{L}$ s'exprime aussi sous forme d'un produit σ-symétrique contracté

$$\tilde{A}(\bar{z}\ ,\ z') = \sum_{k=0}^{\infty} i!^{-1}[D_u^i\ \tilde{Q}(\bar{z}\ ,\ u)\ D_{\bar{u}}\ L(\bar{u}\ ,\ z')]_u\ . \tag{3.29}$$

(3.30) <u>Principe de la démonstration.</u>

(a) Montrer que le second membre II est défini comme élément de $F('\bar{E} \times 'E)$ et que l'application $Q \longrightarrow$ II est continu.

(b) Montrer la formule (3.29) dans le cas particulier où $\tilde{Q}(\bar{z}\ ,\ z')$ est défini par une somme finie de tenseurs décomposables de $'E \times '\bar{E}$. Dans ce cas il existe un sous-espace $'E_j$ de dimension finie de $'E$ dont l'algèbre tensorielle contient cette somme. Alors, $\forall\ (k\ ,\ m\ ,\ \ell)$, le tenseur contracté $Q_{km} \circ L_{m\ell}$ peut être calculé dans $F('E_j \times E_j)$, $L_{m\ell}$ étant remplacé par sa projection canonique sur cet espace. Vu (3.13), on est ramené à démontrer (3.29) en dimension finie, dans ce cas particulier. Ceci s'effectue en prenant une base orthonormée dans $'E_j$ et par un calcul explicite utilisant les formules du paragraphe 6 de l'exposé 3.

(c) Les applications $\hat{Q} \longrightarrow$ II et $\hat{Q} \longrightarrow \tilde{A}(\bar{z}\ ,\ z')$ sont donc continues et coïncident sur un sous-espace dense. Elles coïncident donc sur tout l'espace Op , et la formule (3.29) est démontrée.

Le noyau du composé de $\hat{L} \in$ Opi et $\hat{Q} \in$ Op est encore noté

(3.31) $$\tilde{L}(\bar{z}\ ,\ z') = \langle\tilde{Q}(\bar{z}\ ,\ u)\ ,\ \tilde{L}(\bar{u}\ ,\ z')\rangle\ ,$$

car $\tilde{L}$ s'obtient par une contraction de $\tilde{Q}$ et $\tilde{L}$ portant sur la deuxième variable de $\tilde{Q}$ et sur la première variable de $\tilde{L}$. Au second membre, la lettre u répétée deux fois symbolise donc une contraction. On démontre, à présent, une formule de [1] donnant la trace (usuelle) d'un opérateur à trace de $F(\bar{Z})$, pour $\sigma = S$ ou A .

(3.32) PROPOSITION. - Soit (Z_j) une famille filtrante croissante de sous-espaces complexes de dimension finie de Z , dont la réunion contient une base orthonormée de Z . Pour toute forme Φ sur $\bar{Z} \times Z$, Φ_j désigne la restriction de Φ à $\bar{Z}_j \times Z_j$.

(a) Pour tout couple $(\hat{A}, \hat{B})$ d'opérateurs de Hilbert-Schmidt de $F(\bar{Z})$, on a

(3.33) $$\mathrm{Tr}\ \hat{A}\hat{B} = \lim_j \iint \tilde{A}_j(\bar{z}\ ,\ z') \circ \tilde{B}_j(\bar{z}'\ ,\ z)\ \nu_j'(\bar{z}'\ ,\ z')\ \nu_j'(\bar{z}\ ,\ z)\ .$$

(b) Pour tout opérateur à trace $\hat{C}$ de $F(\bar{Z})$, on a

(3.34) $$\mathrm{Tr}\ \hat{C} = \lim_j \int \tilde{C}_j(\bar{z}\ ,\ z)\ \nu_j(\bar{z}\ ,\ z)\ .$$

Principe de la démonstration. - L'espace $L_2(F(\bar{Z}))$ des opérateurs de Hilbert-Schmidt de $F(\bar{Z})$ est isométrique, par l'application noyau, à

$$F(\bar{Z})\ \hat{\otimes}\ (F(\bar{Z}))^* = F(\bar{Z} \times Z)\ .$$

Le produit scalaire dans $L_2(F(\bar{Z}))$ est

$$(\hat{A}\ ,\ \hat{B}) = \mathrm{tr}(\hat{B}\hat{A}^*) = \mathrm{tr}(\hat{A}^*\ \hat{B})\ .$$

En appliquant le théorème (3.7) de l'exposé 4 aux formes $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$, on obtient

$$\mathrm{tr}(\hat{A}^*\ \hat{B}) = (\tilde{A}\ ,\ \tilde{B}) = \lim_j \iint \tilde{A}_j(\bar{z}\ ,\ z')^* \circ \tilde{B}_j(\bar{z}\ ,\ z')\ \nu_j'(\bar{z}\ ,\ z)\ \nu_j'(z'\ ,\ z')\ .$$

Remplacant $\hat{A}$ par son adjoint dans cette formule, et en utilisant la formule (3.11) donnant le noyau de l'adjoint en fonction du noyau de $\hat{A}$, on obtient (3.33).

(b) Ecrivons $\hat{C} = \hat{A}\hat{B}$, où $\hat{A}$ et $\hat{B}$ sont des opérateurs de Hilbert-Schmidt. Alors en utilisant des coordonnées et (a), on vérifie (3.34) si Z est de dimension finie.

(c) En général, soit π_j le projecteur orthogonal de Z sur Z_j . Utilisant les notations de (3.13), on sait que $\mathrm{tr}\ \hat{C} = \lim_j \mathrm{tr}\ \hat{C}_j$. Vu (b) et (3.13) il vient

$$\mathrm{tr}\ \hat{C} = \lim_j \int \tilde{\hat{C}}_j(\bar{z}\ ,\ z)\ \nu_j(\bar{z}\ ,\ z) = \lim_j \int \tilde{C}_j(\bar{z}\ ,\ z)\ \nu_j(\bar{z}\ ,\ z)\ .$$

On calcule maintenant la forme normale (ou symbole) du composé de deux opérateurs.

(3.35) THÉORÈME. - Soit $P = P_H$ et $\sigma = S$ ou A . Alors, pour $\hat{L} \in$ Opi et $\hat{Q} \in$ Op , le symbole de $\hat{A} = \hat{Q} \circ \hat{L}$ s'exprime de la manière suivante en fonction des symboles de $\hat{Q}$ et $\hat{L}$:

(3.36) $\quad (Q \circ L)(\bar{z}\ ,\ z') = \sum_{i=0}^{\infty} i\,!^{-1}[D^i_{z'}\ Q(\bar{z}\ ,\ z') \bigcirc D^i_{\bar{z}}\ L(\bar{z}\ ,\ z')]$,

la série convergeant dans $F('\bar{E} \times 'E)$.

Les symboles $[\ldots \bigcirc \ldots]$ désignent un produit tensoriel σ-symétrique de formes vectorielles, suivi de la contraction associée à la forme bilinéaire de dualité entre $\bar{E}^i_\sigma$ et E'^i_σ . Les dérivées qui interviennent dans (3.36) sont des dérivées à gauche. On va encore utiliser, pour prouver (3.36), la démarche générale exposée en (3.30). Cette démarche a l'avantage de séparer les difficultés algébriques (lemme 1) des difficultés d'analyse (lemme 2 et 3). On écrit (3.36) sous la forme abrégée I = II . La démonstration montre comme l'hypothèse sur P peut être affaiblie.

LEMME 1. - On suppose P quelconque, $\sigma = S$ ou A , et qu'il existe un sous-espace $'E_j$ de dimension finie de $'E$ tel que la forme $Q(\bar{z}\ ,\ z')$ soit définie par un élément de l'algèbre tensorielle de $E_j \times \bar{E}_j$. Alors (3.36) est vraie.

On note d'abord qu'elle a un sens puisque la série de II a un nombre fini de termes non nuls. Il faut vérifier que les formes I et II coïncident sur tout sous-espace $'\bar{E}_k \times 'E_k$ de $'\bar{E} \times 'E$. Remplaçant $'E_j$ et $'E_k$ par leur somme, on peut supposer $j = k$. Vu la proposition (3.27), il vient en utilisant la notation (3.31)

$$\begin{aligned}\tilde{A}_j(\bar{z}\ ,\ z') &= \langle Q(\bar{z}\ ,\ u) \bigcirc \exp \bar{z}u\ ,\ \tilde{L}(\bar{u}\ ,\ z')\rangle_j \\ &= \langle Q_j(\bar{z}\ ,\ u) \bigcirc \exp \bar{z}u\ ,\ \tilde{L}_j(\bar{u}\ ,\ z')\rangle\ .\end{aligned}$$

On est ainsi ramené en dimension finie. En utilisant la formule de Taylor (paragraphe 6 de l'exposé 3) et des coordonnées, il vient

$$\begin{aligned}\tilde{A}_j(\bar{z}\ ,\ z') &= \langle Q_j(\bar{z}\ ,\ u)\ ,\ \tilde{L}_j(\bar{u} + \bar{z}z')\rangle \\ &= \langle Q_j(\bar{z}\ ,\ u)\ ,\ \exp(\bar{u} + \bar{z})z' \bigcirc L_j(\bar{u} + \bar{z}\ ,\ z')\rangle\ .\end{aligned}$$

Comme l'exponentielle est une somme de formes homogènes de degré pair, elle commute, et on a l'égalité suivante.

$$A_j(\bar{z}\ ,\ z') = \langle Q_j(\bar{z}\ ,\ u)\ ,\ \exp \bar{u}z' \bigcirc L_j(\bar{u} + \bar{z}\ ,\ z')\rangle\ .$$

Par deux autres applications de la formule de Taylor, il vient

$$\begin{aligned}A_j(\bar{z}\ ,\ z') &= \langle Q_j(\bar{z}\ ,\ u + z')\ ,\ L_j(\bar{u} + \bar{z}\ ,\ z')\rangle \\ &= \sum i\,!^{-1}[D^i_{z'}\ Q_j(\bar{z}\ ,\ z') \bigcirc D^i_{\bar{z}}\ L_j(\bar{z}\ ,\ z')] = II_j\end{aligned}$$

et le lemme 1 est démontré.

LEMME 2. - Soit P vérifiant toujours (C1), (C2), (C4) et $\sigma = S$ ou A .

(a) Alors le produit σ-symétrisé des noyaux de deux opérateurs $\hat{Q}$ et $\hat{L} \in$ Opi est encore le noyau d'un opérateur de Opi .

(b) Ceci entraîne, en particulier, que l'application symbole réalise une bijection de Opi sur l'espace des formes vérifiant (3.20).

Démonstration.

(a) Comme $\hat{Q}$ (respectivement $\hat{L}$) $\in$ Opi , pour tout couple $(\varpi\ ,\ u)$, il existe

(ϖ_1 , v) (respectivement (ϖ_2 , v_2)), C_Q et C_L tels que

$$\|Q_{k\ell}\|_{u^0,v} \leqslant C_Q \frac{\varpi_1(k)}{k!} \varpi(\ell)^{-1} ,$$

et

$$\|L_{k\ell}\|_{u^0,v_2} \leqslant C_L\, k!^{-1}\, \varpi_2(k)\, \varpi(\ell)^{-1} .$$

Comme P et U sont filtrantes croissantes, on peut supposer $\varpi_2 = \varpi_1$ et $v_2 = v$. Le produit $\tilde{A}$ de $\tilde{Q}$ et $\tilde{L}$ vérifie

$$\forall\ (m , n) ,\quad A_{m,n}(\bar{z} , z') = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} Q_{m-i,n-j}(\bar{z} , z') \circ L_{ij}(\bar{z} , z') .$$

Pour montrer que $\hat{A} \in$ Opi , j'utilise le théorème des noyaux, et je pars d'un couple (ϖ' , u) arbitraire. Comme (C1) ∪ (C2) ⟹ (C3) , il existe $C > 0$ et des poids ϖ_1' et $\varpi \in P$ tels que

$$\Sigma_1 = \sum_{i=0}^{m} \frac{\varpi_1(m - i)\, \varpi_1(i)}{(m - i)!\, i!} \leqslant C \frac{\varpi_1'(m)}{m!} ,$$

et

$$\Sigma_2 = \sum_{j=0}^{n} \varpi(n - j)^{-1}\, \varpi(j)^{-1} \leqslant C\, \varpi'(n)^{-1} .$$

D'où

$$\|A_{mn}\|_{u^0,v} \leqslant C_Q\, C_L\, \Sigma_1\, \Sigma_2 \leqslant C^2\, C_Q\, C_L \frac{\varpi_1'(m)}{m!} \varpi'(n)^{-1} ,$$

uniformément en m et n . D'après le théorème des noyaux, $\hat{A} \in$ Opi ,

(b) Soit α un morphisme du triplet étudié $\mathcal{C}$. En utilisant (3.16), on peut voir que le noyau de $F\alpha$ est $\exp(\bar{z}(\alpha z'))$, et l'on sait que $F\alpha$ est un morphisme de $F\mathcal{C}$. En particulier, $\exp(- \bar{z}z')$ est le noyau d'un opérateur de Opi . Vu (a), si $\hat{Q} \in$ Opi , $Q(\bar{z} , z') = \tilde{Q}(\bar{z} , z') \exp(- \bar{z}z') \in \widetilde{\text{Opi}}$.

LEMME 3. - Soient $P = P_H$ ou P_F , et $\sigma = S$ ou A . Pour $\hat{L}$ fixé dans Opi , et $\hat{Q} \in$ Op , le second membre II de (3.36) appartient à $F('\bar{E} \times 'E)$, la série convergeant dans cet espace. De plus, l'application $\hat{Q} \longrightarrow$ II est linéaire continue de Op dans $F('\bar{E} \times 'E)$.

Preuve. - On a $Q \in F('\bar{E} \times 'E) = F('\bar{E}) \hat{\otimes} F'E)$. On a vu, dans l'exposé 3, que le produit σ-symétrisé par un élément fixé de $F('\bar{E} \times 'E)$ définit un opérateur continu de cet espace. Vu la propriété universelle de la topologie π , on peut donc se limiter à démontrer le lemme quand $Q = Q(z') \in F('E)$. Par identification, on obtient les coefficients de la série de Taylor de II .

$$(**)\quad \text{II}_{k,\ell} = \sum_{i;\, i\leqslant\alpha\leqslant k+i} \frac{\alpha(\alpha- 1)\dots(\alpha- i+ 1)}{i!}(\ell+ i)\dots(\ell+ 1)[\, Q_\alpha \circ L_{\ell+i,k+i-\alpha}] .$$

Examinons d'abord le cas $P = P_H$. Comme $Q(z') = \sum_\alpha Q_\alpha(z'^\alpha) \in F('E)$, pour tout (m , u) il existe $C > 0$ tel que $|Q_\alpha|_u \leqslant C_Q\, m^{-\alpha}$. D'autre part, comme $\hat{L} \in$ Opi , pour tout (N_0 , u) , il existe (N_0' , v) tel que

$$\forall\ (p , q) ,\quad |L_{p,q}|_{v^0,u^n} \leqslant C_L\, p!^{-1}\, N_0'^{\,p}\, N_0^{-q} .$$

On peut supposer $v \supset u$. Par conséquent, pour tout couple (k , ℓ) d'entiers $\geqslant 0$, il vient

$$N^{k+\ell}|II_{k,\ell}|_u \leqslant C_Q\, C_L \frac{(NN_0')^{\ell}}{\ell!}\left(\frac{N}{N_0}\right)^k \sum_{\alpha,i} \frac{\alpha\ldots(\alpha-i+1)}{i!}\left(\frac{N_0}{m}\right)^{\alpha}\left(\frac{N_0'}{N_0}\right)^i ,$$

la somme $\sum$ étant étendue aux couples d'entiers α et i tels que $i \geqslant 0$, $i \leq \alpha \leq i+k$. Prenant $N_0 > N$, le terme en facteur devant $\sum$ est uniformément majoré, quand k et ℓ varient. Il suffit de montrer qu'il en est de même pour $\sum$, du moins si m est convenablement choisi. On calcule $\sum$ en faisant le changement d'indice $(i\ ,\ \alpha) \longrightarrow (i\ ,\ \gamma = \alpha - i)$. D'où

$$\sum = \sum_{\gamma=0}^{k}(N_0/m)^{\gamma} \sum_{i=0}^{\infty}\binom{i+\gamma}{i}\left(\frac{N_0\ N_0'}{mN_0}\right)^i = \sum_{\gamma=0}^{k}(N_0/m)^{\gamma}\left(1-\frac{N_0\ N_0'}{mN_0}\right)^{-\gamma} .$$

Lorsque k varie, ces sommes sont majorées par la série géométrique $\sum_{\gamma=0}^{\infty} \varepsilon^{\gamma}$, avec $\varepsilon < 1$ si m est assez grand. Le lemme est ainsi prouvé si $P = P_H$. Si $P = P_L$ la condition $L \in \mathrm{Opi}$ signifie, d'après le théorème des noyaux, que, $\forall\, k_0$, $\exists\, \ell_0$ avec $L_{\ell k} = 0$ si $\ell > \ell_0$, et $k < k_0$. Ceci entraine que (*) a seulement un nombre fini de termes non nuls, ceci permet de montrer la continuité de l'application $\hat{Q} \longrightarrow II$ dans ce cas.

(3.37) DÉFINITION. - Le conoyau $\delta\tilde{Q}$ de tout opérateur $\hat{Q} \in \mathrm{Op}$ est la coforme sur $\bar{E} \times E$ ayant pour transformé de Laplace le noyau $\tilde{Q}$ de $\hat{Q}$.

D'où

$$\tilde{Q}(\bar{z}\ ,\ z') = \int \exp(\bar{z}u' + z'\bar{u})\ \delta\tilde{Q}(\bar{u}\ ,\ u') .$$

La formule (3.16) s'écrit

$$\forall\ \Phi \in F(\bar{E})\ ,\quad (\hat{Q}\Phi)(z) = \int \Phi(\bar{u}')\exp \bar{z}u\ \delta\tilde{Q}(\bar{u}\ ,\ u') ,$$

ce que certains physiciens écriraient

$$\hat{Q} = \int \exp u \otimes \exp \bar{u}'\ \delta\tilde{Q}(\bar{u}\ ,\ u') .$$

Ainsi, nous avons résolu, en dimension quelconque et pour $\sigma = S$ ou A, le problème de la représentation diagonale, qui était seulement abordé jusqu'ici en dimension un et pour $\sigma = S$.

(3.38) Par exemple, le conoyau de l'opérateur identique est la coforme normale canoniquement ν sur Z^u, coforme très bien connue si $\sigma = S$ (mesure gaussienne), et moins connue si $\sigma = A$ (voir fin de l'exposé 3). Soit aussi

$$\hat{Q} = U_t = \exp(it\hat{H}_0) ,$$

H_0 étant l'hamiltonien du champ libre et t complexe. La T. L. de U_t est $\tilde{U}_t = \exp\langle\bar{z}\ ,\ \exp(itw)\ z'\rangle$ si $\sigma = S$. Pour $t = i\theta$ avec θ réel > 0, on retrouve une mesure gaussienne. Pour t complexe quelconque, on trouve une fonctionnelle analytique représentée par une mesure gaussienne déduite de la mesure gaussienne de T. L. $\exp \bar{z}z'$ par la transformation linéaire $z \longrightarrow z\exp((itw)/2)$.

4. Calcul symbolique pour les opérateurs vectoriels.

Soit $\mathcal{C} = ('E \subset S \subset E)$ un triplet conucléaire complexe. Vu le paragraphe 2 de l'exposé 4, on peut définir, pour tout entier $k \geqslant 0$, le triplet

$$F^k \mathcal{C} = (F^k(\bar{E}\ ,\ 'E^k_\sigma) \subset F^k(\bar{Z}\ ,\ Z^k_\sigma) \subset F^k('\bar{E}\ ,\ E^k_\sigma))\ ,$$

et pour $k = 0$, on retrouve le triplet $F\mathcal{C}$.

On définit par exemple,

Op_k = espace des opérateurs linéaires continus de $F(\bar{E})$ dans $F^k('\bar{E}\ ,\ E^k_\sigma)$, muni de sa topologie naturelle ;

Opi_k = espace des opérateurs linéaires équicontinus de $F(\bar{E})$ dans $F^k(\bar{E}\ ,\ 'E^k_\sigma)$, muni de sa famille naturelle de disques bornés ;

$Op\varphi_k$ = espace des opérateurs linéaires continus de $F(\bar{E})$ dans $F^k(\bar{Z}\ ,\ Z^k_\sigma)$, muni de sa topologie naturelle.

En procédant comme au paragraphe précédent et en utilisant les résultats généraux des exposés 2 et 3, on voit que tous les résultats du paragraphe 3 s'étendent à ce cas. Ainsi la forme normale de l'opérateur vectoriel $\hat{Q} \in Op_k$ est une forme vectorielle

$$Q(\bar{z}\ ,\ z') \in F^k('\bar{E}\ ,\ E^k_\sigma)\, \widehat{\otimes}\, F('E) \simeq F('E \times 'E)\, \widehat{\otimes}\, E^k_\sigma\ .$$

Si l'on écrit $Op_k = Op_{k,0}$, et si l'on définit naturellement $Op_{0,k}$, on voit que l'adjoint de $\hat{Q}$ appartient à $Op_{0,k}$, et que sa forme normale est une forme à valeurs dans $\bar{E}^k_\sigma$.

5. Applications préliminaires à la physique.

En théorie constructive, les expressions des champs libres sont données directement par certaines distributions $f \longrightarrow \hat{\Phi}_0(f)$ à valeurs opérateurs sur M, puis l'on vérifie que ces expressions vérifient l'axiomatique de Garding et Wightman. La méthode fonctionnelle et le formalisme lagrangien (exposé 1) permettent de définir naturellement et ponctuellement tout champ libre $\hat{\Phi}_0$, $\hat{\Phi}_0(x)$ ayant pour symbole la fonctionnelle définie par l'observable classique $z \longrightarrow \Phi_0(x)$, les variables z et $\bar{z}$ étant dédoublées. Voyons l'exemple des bosons scalaires.

(5.1) DÉFINITION. - Soit un triplet $\mathcal{C} = ('E \subset Z \subset E)$ comme dans l'exposé 1 avec $E = '\mathcal{S}(H\uparrow)$ (respectivement $'\mathcal{D}(H\uparrow)$), et soit $P = P_H$. Alors, le champ libre de bosons sur M est la fonction $\hat{\Phi}_0 : M \longrightarrow Op\mathcal{C}$ telle que, pour tout $x \in M$, $\hat{\Phi}_0(x)$ a pour symbole

$$(5.2)\quad \Phi_0(x\ ,\ \bar{z}\ ,\ z') = (2\pi)^{-(d-1)/2} \int_{p \in H\uparrow} (\bar{z}(p) \exp(ipx) + z'(p) \exp(-ipx))\, d\mu(p)\ .$$

En théorie constructive, $\hat{\Phi}_0(x)$ n'est pas défini, et on écrit formellement

$$(5.3)\qquad \forall\, f \in \mathcal{S}(M)\ ,\quad \hat{\Phi}_0(f) = \int \hat{\Phi}_0(x)\, f(x)\, dx\ .$$

Dans le présent formalisme, on a la proposition suivante.

(5.4) PROPOSITION. - Pour $E = '\mathcal{S}(H\uparrow)$ (respectivement $'\mathcal{D}(H\uparrow)$), le champ libre $\hat{\Phi}_0$

<u>est une fonction</u> C^∞ <u>sur</u> M <u>(respectivement entière), à valeurs dans</u> $Op\mathcal{C}$. <u>De plus, pour toute</u> $f \in \mathcal{D}(M)$, <u>le champ moyenne</u> $\hat{\Phi}_0(f)$ <u>est l'intégrale de Dunford de la fonction vectorielle</u> $x \longrightarrow \hat{\Phi}_0(x)$, <u>par rapport à la mesure</u> $f(x)\,dx$.

<u>Démonstration</u>. - Comme l'application symbole est un homéomorphisme de $Op\mathcal{C}$ sur $H('\bar{E} \times 'E)$, il suffit de montrer :

(a) L'application $G : x \longrightarrow \Phi_0(x\ ,\ \bar{z}\ ,\ z')$ est C^∞ (respectivement analytique) sur M à valeurs dans $H('\bar{E} \times 'E)$.

(b) Le symbole $\hat{\Phi}_0(f\ ,\ \bar{z}\ ,\ z')$ de $\hat{\Phi}_0(f)$ est l'intégrale faible de G .

En ce qui concerne (a), comme $G(x)$ est la somme de deux formes linéaires, il suffit de montrer, par exemple, que la fonction suivante est C^∞ (respectivement analytique)

$$K : x \longrightarrow \int \bar{z}(p) \exp(ipx)\, d\mu(p) .$$

Or $K(x) = (\bar{z} \longmapsto \langle \bar{z}\ ,\ K_1(x)\rangle)$, où K_1 est la fonction C^∞ (respectivement analytique) $x \longrightarrow \exp(ipx)\, d\mu(p)$ de M dans E . Donc (a) est démontré. En ce qui concerne (b), on note que la fonction G est continue à valeurs dans l'espace complet $H('\bar{E} \times 'E)$. Donc, l'intégrale faible (Dunford-Bourbaki) de G par rapport à $f(x)\,dx$ est définie. Par application du théorème de Fubini, il vient

$$\int \Phi_0(x,\bar{z},z')\, f(x)\, dx = (2\pi)^{-(d-1)/2} \iint (\bar{z}(p) \exp(ipx) + z'(p) \exp(-ipx)\, f(x)\, d\mu(p)$$
$$= \sqrt{2\pi}\ (\bar{z} \text{ rest } \tilde{f} + z' \text{ rest}(\tilde{f^\vee})\ ,$$

où $f^\vee(x) = f(-x)$, rest $\tilde{f}$ étant la restriction à $H\uparrow$ de $\tilde{f}$. D'où

$$\int \hat{\Phi}_0(x)\, f(x)\, dx = \sqrt{2\pi}[\, a^*(\text{rest } \tilde{f}) + a \text{ rest}(\widetilde{f^\vee})] .$$

On retrouve l'expression du champ libre $\hat{\Phi}_0(f)$ donnée en théorie constructive.

Soient f_1 , f_2 , f_3 , $f_4 \in {}'E$. Le produit de Wick, $:\hat{Q}\hat{R}:$, des opérateurs

(5.5) $$\hat{Q} = a^*(f_1)\, a(\overline{f_2}) \quad \text{et} \quad \hat{R} = a^*(f_4)\, a(\overline{f_3})$$

est défini en formant d'abord $\hat{Q}\hat{R}$, puis en mettant tous les créateurs à gauche, et les annihiliteurs à droite. Dans le cas des fermions, il faut affecter le résultat du signe $(-1)^i$, où i est le nombre d'inversions effectuées pour faire ce réordonnancement. Or, $Q(\bar{z}\ ,\ z') = \bar{z}f_1 . z'\overline{f_2}$ et $R(\bar{z}\ ,\ z') = z'\overline{f_3}\ \bar{z}f_4$. On constate donc que dans ce cas

$$:\hat{Q}\hat{R}:(\bar{z}\ ,\ z') = Q(\bar{z}\ ,\ z')\, R(\bar{z}\ ,\ z')\ ,$$

et cette règle s'étend au cas où Q et R sont des polynômes en les créateurs et les annihilateurs. Ceci nous conduit à la définition ci-après très simple des produits de Wick.

(5.6) DÉFINITION. - <u>Pour</u> $\hat{Q}$ et $\hat{R} \in Op\mathcal{C}$, <u>l'opérateur</u> $:\hat{Q}\hat{R}: \in Op\mathcal{C}$ <u>est défini par son symbole</u>

(5.7) $$:\hat{Q}\hat{R}:(\bar{z}\ ,\ z') = Q(\bar{z}\ ,\ z')\, R(\bar{z}\ ,\ z') .$$

Cette définition s'étend aux opérateurs vectoriels, mais alors $:QR:$ n'est défini que si le second membre de (5.7) est défini comme forme vectorielle.

En théorie constructive, le foncteur gamma permet seulement de quantifier directement les contractions de Z, les opérateurs auto-adjoints de Z étant ensuite quantifiés d'une autre manière. Nous allons préciser ces résultats en calculant le noyau de l'opérateur quantifié. De plus, nous étendons ces résultats à des opérateurs plus généraux de $\mathcal{T}$, à savoir tous les morphismes du triplet $\mathcal{T}$. Pour avoir des notations en accord avec celles des physiciens, le quantifié de β, γ, ... est noté U_β, U_γ, ... au lieu de $F(\beta)$, $F(\gamma)$, ... Nous calculons aussi le noyau de $U_\beta \hat{Q} U_\gamma$, pour tout $\hat{Q} \in \mathrm{Op}$.

(5.8) PROPOSITION.

(a) <u>Soit</u> β <u>une contraction linéaire de</u> Z (<u>respectivement un morphisme du triplet</u> $\mathcal{T}$). <u>Alors</u> U_β <u>est une contraction de</u> $F(\bar{Z})$ (<u>respectivement un morphisme du triplet</u> $F\mathcal{T}$) <u>et le noyau de</u> U_β <u>est</u>

(5.9) $$\tilde{U}_\beta(\bar{z}, z') = \exp(\bar{z}\beta z') .$$

(b) <u>Soit</u> γ <u>comme</u> β. <u>Soit</u> $\hat{Q}$ <u>un opérateur linéaire continu de</u> $F(\bar{Z})$ (<u>respectivement</u> $\hat{Q} \in \mathrm{Op}\mathcal{T}$). <u>Alors,</u> $\hat{L} = U_\beta \hat{Q} U_\gamma$ <u>est défini comme opérateur linéaire continu de</u> $F(\bar{Z})$ (<u>respectivement</u> $\in \mathrm{Op}\mathcal{T}$), <u>et son noyau est</u>

(5.10) $$\tilde{L}(\bar{z}, z') = \tilde{Q}(\overline{\beta^* z}, \gamma z') .$$

<u>Démonstration</u>. – On utilise les formules (3.16) :

$$\tilde{U}_\beta(\bar{z}, z') = (\exp z, U_\beta \exp z') = (\exp z, (\textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \otimes_k \beta) \exp z')$$
$$= (\exp z, \exp(\beta z)) = \exp(\bar{z}\beta z') .$$

Dans le cas des fermions, (5.9) signifie que U_β est l'exponentielle de la forme $\bar{z} \vee \beta z'$.

$$\tilde{L}(\bar{z}, z') = (\exp z, U_\beta \hat{Q} U_\gamma \exp z') = ((U_\beta)^* \exp z, \hat{Q} U_\gamma \exp z')$$
$$= (U_{\beta^*} \exp z, \hat{Q}(U_\gamma \exp z')) = (\exp(\beta^* z), \hat{Q} \exp(\gamma z')) = \tilde{Q}(\bar{\beta}^* z, \gamma z') .$$

Dans le cas des fermions, (5.10) signifie que $\tilde{L}$ est la transportée de la forme alternée $\tilde{Q}$ par l'application $(\bar{z}, z') \longmapsto (\overline{\beta^* z}, \gamma z')$.

(5.11) <u>Applications pour les bosons</u>.

(a) En théorie constructive, la propriété d'invariance relativiste du champ libre de bosons est d'abord écrite formellement :

(5.12) $$\forall L \in L_+^\uparrow, \forall x \in M, \quad U_L \, \Phi_0(x) \, U_L^{-1} = \hat{\Phi}_0(Lx) ,$$

puis écrite sous la forme rigoureuse en "intégrant chaque membre par rapport à $f(x)\,dx$". Dans le présent formalisme, (5.12) a un sens mathématique. C'est une égalité dans $\mathrm{Op}\mathcal{T}$. On notera que le premier membre $U_L \hat{\Phi}_0(x) U_{L^{-1}}$ est défini :

$$F(\bar{E}) \xrightarrow{U_{L^{-1}}} F(\bar{E}) \xrightarrow{\Phi_1(x)} F('\bar{E}) \xrightarrow{U_L} F('\bar{E}) .$$

De plus (5.8 (b)) donne un moyen très simple de vérifier (5.12) (exercice).

(b) Considérons le cas particulier où $L_t = (a\ ,\ \Lambda)$ est une translation temporelle d'intensité t . Soient $a = (t\ ,\ \vec{0})$ et $\Lambda = \mathrm{Id}$. L'action de L_t dans $\mathcal{T}$ s'écrit $z(\vec{p}) \longmapsto \exp(it\omega(\vec{p}))\ z(\vec{p})$. On pose alors

(5.13) $$\exp(it\hat{H}_0) = U_{L_t}\ ,$$

d'où

(5.14) $$(\exp(it\hat{H}_0))(\bar{z}\ ,\ z') = \exp(\bar{z}((\exp(it\omega)) - 1)z')\ .$$

Pour t petit, cette quantité est équivalente à $1 + it\bar{z}wz$, et la forme normale de l'hamiltonien libre $\hat{H}_0$ est

(5.15) $$H_0(\bar{z}\ ,\ z') = \bar{z}\,\omega z'\ .$$

D'ailleurs, $H_0(\bar{z}\ ,\ z)$ est la fonctionnelle définissant l'hamiltonien du champ classique : voir exposé 1. Notons que (5.8 (b)) entraîne

(5.16) $$\hat{\Phi}_0(t\ ,\ \vec{x}) = \exp(+\ it\hat{H}_0)\ \hat{\Phi}_0(0\ ,\ \vec{x})\ \exp(-\ it\hat{H}_0)\ .$$

(c) Classiquement, $\exp(it\hat{H})$ est défini seulement comme contraction dans $F(\bar{Z})$ seulement pour les t complexes tels que la multiplication par $\exp(it\omega)$ est une contraction dans Z , c'est-à-dire seulement pour $\mathrm{Im}\ t > 0$. Dans le présent formalisme, si $E = {}'\mathcal{D}(H\uparrow)$, $\exp(it\hat{H})$ est défini comme élément de $\mathrm{Op}\mathcal{T}$, pour tout nombre complexe t . En effet, pour tout nombre complexe t , la multiplication par $\exp(it\omega)$ définit un morphisme de $\mathcal{T} = (\mathcal{D}(H\uparrow)\mu \subset L^2(H\uparrow\ ,\ \mu)\mu \subset {}'\mathcal{D}(H\uparrow))$. Donc $F_S(\exp(it\omega))$ est un morphisme de $F\mathcal{T}$. Mais ceci n'est plus vrai pour $E = {}'\mathcal{S}(H\uparrow)$. On suppose dès lors $E = {}'\mathcal{S}(H\uparrow)$ et $P = P_H$.

(5.17) <u>Définition des produits de Wick du champ libre.</u>

<u>Soient</u> n <u>entier</u> ≥ 1 , $x \in M$, $f \in \mathcal{S}(\underset{\sim}{R}^d)$, $g \in \mathcal{D}(\underset{\sim}{R}^{d-1})$. <u>On pose</u>

$$:\hat{\Phi}_0^n:(x) = :\hat{\Phi}_0(x)^n:\ ,$$

$$:\hat{\Phi}_0^n:(f) = \int :\hat{\Phi}_0^n:(x)\ f(x)\ dx\ ,$$

$$:\hat{\Phi}_0^n:(0\ ,\ g) = \int :\hat{\Phi}_0^n:(0\ ,\ \vec{x})\ g(\vec{x})\ d\vec{x}\ .$$

(5.18) PROPOSITION.

(a) <u>Les trois opérateurs de la définition précédente ont pour symboles</u>

$$:\Phi_0^n:(x\ ;\ \bar{z}\ ,\ z') = \Phi_0(x\ ;\ \bar{z}\ ,\ z')^n\ ,$$

$$:\Phi_0^n:(f\ ;\ \bar{z}\ ,\ z') = \int \Phi_0(x\ ;\ \bar{z}\ ,\ z')^n\ f(x)\ dx\ ,$$

$$:\Phi_0^n:(0\ ,\ g\ ;\ \bar{z}\ ,\ z') = \int \Phi_0(0\ ,\ \vec{x}\ ;\ \bar{z}\ ,\ z')^n\ g(\vec{x})\ d\vec{x}\ .$$

(b) $$:\hat{\Phi}_0^n:(x) \in \mathrm{Op}\mathcal{T}\ ;\quad :\hat{\Phi}_0^n:(f) \in \mathcal{M}\mathrm{or}\mathcal{T}\ ,$$

et

$$:\hat{\Phi}_0^n:(0\ ,\ g) \in \mathrm{Op}\varphi\ ,\ \text{pour tout}\ \ g \in \mathcal{D}(\underset{\sim}{R}^{d-1}) \Longleftrightarrow d = 2\ .$$

<u>Preuve</u>. - La partie (a) résulte de (5.2) et de (5.6). Notons $\bar{z}(x)$ et $z'(x)$ les transformées de Fourier inverses de $\mathrm{ext}(\bar{z}u)$ et $\mathrm{ext}(z'u)$. On a

$$\Phi_0(x\ ;\ \bar{z}\ ,\ z') = (2\pi)^{1/2}\ (\bar{z}(-\ x) + z'(x))\ .$$

D'où

$$:\Phi_0^n:(x\ ;\ \bar{z}\ ,\ z') = C(\bar{z}(-\ x) + z'(x))^n\ .$$

$$:\Phi_0^n:(f\ ,\ \bar{z}\ ,\ z') = C^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \int_M \bar{z}(-\ x)^k\ z'(x)^{n-k}\ f(x)\ dx\ .$$

Vu le théorème des noyaux, $:\hat{\Phi}_0^n:(f) \in$ Opi , si l'on peut montrer que, pour tout z' fixé dans $\mathcal{S}$, et, pour tout $k = 0\ ,\ 1\ ,\ \dots\ ,\ n$, la fonctionnelle

$$\bar{z} \longrightarrow Q_k(\bar{z}) = \int \bar{z}(-\ x)^k\ z'(x)^{n-k}\ f(x)\ dx\ ,$$

se prolonge en un polynôme continu de degré k sur $'\mathcal{S}(H\uparrow)$. Or par transformation de Fourier inverse, on obtient en posant $F(x) = z'(x)^{n-k}\ f(x)$:

$$Q_k(\bar{z}) = \int_{H\uparrow^k} F(p^1 + \dots + p^k)\ \bar{z}(p')\ \dots\ \bar{z}(p^k)\ d\mu(p^1)\ \dots\ d\mu(p^k)\ .$$

D'où le prolongement cherché de Q_k puisque $F(p) \in \mathcal{S}$. Ceci entraîne

$$:\hat{\Phi}_0^n:\ (f) \in \text{Opi}\ .$$

Comme le symbole de l'adjoint de $:\hat{\Phi}_0^n:\ (f)$ a une forme analogue au symbole de $:\hat{\Phi}_0^n:\ (f)$, cet opérateur appartient à Opi donc à Ope $\cap$ Opi $= \mathfrak{M}or\mathcal{C}$, pour la dernière assertion, voir [7].

On notera que (5.16) s'écrit aussi

(5.19) $\qquad \forall\ \varphi \in \mathcal{S}(\underset{\sim}{R}^{d-1})\ ;\quad \hat{\Phi}_0(t\ ,\ \varphi) = \exp(itH_0)\ \Phi_0(0\ ,\ \varphi)\ \exp(-\ it\hat{H}_0)\ .$

<u>Dans une première approche</u>, on peut considérer que la théorie des champs de bosons avec interaction se formule comme la mécanique quantique ordinaire, avec une équation de Schrödinger. En fait cette approche est incorrecte en général, car l'équation de Schrödinger n'a pas l'invariance relativiste, et l'écriture d'équations à temps constant introduit des infinis [2]. Mais elle a donné un résultat intermédiaire fondamental dans la construction de Φ_2^4 par GLIMM et JAFFE, à savoir l'existence d'un champ en dimension 2, correspondant à une interaction tronquée. Dans cette première approche, on part du champ libre à l'instant $t = 0$; on se donne un hamiltonien

(5.20) $$\hat{H} = \hat{H}_0 + H_I(t)$$

obtenu en ajoutant à l'halmitonien libre $\hat{H}_0$ un hamiltonien d'interaction dépendant éventuellement du temps t . Puis on cherche à définir le champ à une époque quelconque en faisant évoluer le champ pour t quelconque à l'aide de l'hamiltonien $\hat{H}$. Pour H_I indépendant du temps, on cherche à donner un sens à la formule

(5.21) $$\hat{\Phi}(t\ ,\ \varphi) = \exp(it\hat{H})\ \hat{\Phi}_0(0\ ,\ \varphi)\ \exp(-\ it\hat{H})\ .$$

Comme première application, il a été prouvé dans [12], que, pour g non nul dans $\mathcal{D}(\underset{\sim}{R}^{d-1})$ et $\lambda \neq 0$, l'hamiltonien tronqué

(5.22) $$\hat{H}_g = \hat{H}_0 + \frac{\lambda}{4} :\Phi_0^4:\ (0\ ,\ g)$$

est un opérateur de $F(\bar{Z})$ si, et seulement si, $d = 2$, ce qui résulte aussi du théorème des noyaux car le symbole de H_g est

(5.23) $$H_g(\bar{z}\ ,\ z') = \bar{z}wz' + \frac{\lambda}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_0(0\ ,\ \vec{x}\ ;\ \bar{z}\ ,\ z')\ g(\vec{x})\ d\vec{x}\ .$$

Il vérifie $H_g(\bar{z}\ ,\ z') = \overline{H_g(\bar{z}'\ ,\ z)}$, ce qui signifie que $\hat{H}_g$ est un opérateur auto-adjoint de $F(\bar{E})$ dans $F('\bar{E})$.

L'interaction d'un champ de bosons scalaires avec une source est étudiée par L. D. FADEEV dans [4]. Pour $g \in \mathcal{D}(M)$ et tout temps t , la transformée de Fourier de $\vec{x} \longrightarrow g(t\ ,\ \vec{x})$ étant notée $\gamma(t)$, l'hamiltonien suivant est considéré par L. D. FADEEV

(5.24) $$\hat{H}(t) = \hat{H}_0 - \gamma(t)\ a^* - \overline{\gamma(t)}\ a\ .$$

Autrement dit, $\hat{H}(t)$ est l'opérateur de symbole

(5.25) $$H(t\ ,\ \bar{z}\ ,\ z') = \bar{z}\omega z' - \gamma(t)\ \bar{z} - \overline{\gamma(t)}\ z'\ ,$$

avec

(5.26) $$\gamma(t)\ \bar{z} = \int g(t\ ,\ \vec{p})\ \bar{z}(\vec{p})\ d\vec{p}/2\omega(\vec{p}))\ .$$

L'évolution du champ correspondant est étudié dans le schéma d'interaction. La solution $\Psi(t)$ de l'équation de Schrödinger $i\Psi^\bullet(t) = H(t)\ \Psi(t)$ est écrite, pour tout $t > r$ fixé ,

(5.27) $$\Psi(t) = \exp(-\ i(t - r)\hat{H}_0)\ \Psi_I(t)\ .$$

D'où

(*) $$i\Psi_I^\bullet(t) = V^S(r\ ,\ t)\ \Psi_I(t)\ ,$$

avec $V^S(r\ ,\ t) = \exp(i(t - r)\hat{H}_0)(-\ \gamma(t)\ a^* - \overline{\gamma(t)}\ a)\ \exp(-\ i(t - r)\hat{H}_0)$. Par exemple, utilisant (5.10), $U_t = V^S(0\ ,\ t)$ a pour forme normale

$$U_t(\bar{z}\ ,\ z') = -\ \gamma(t)\ \exp(it\omega)\ \bar{z} - \overline{\gamma(t)\ \exp(it\omega)}\ z'\ .$$

Définissons l'opérateur d'évolution U_t comme donnant, pour tout $t > 0$, la solution $\Psi_I(t)$ de (*), en fonction de sa donnée de Cauchy $\Psi_I(0)$

$$\Psi_I(t) = U_t\ \Psi_I(0) = U_t\ \Psi(0)\ .$$

Alors, U_t est solution du problème de Cauchy

(5.28) $$\begin{cases} iU_t^\bullet = V_t\ U_t\ , \text{ pour } t \geqslant 0 \\ U_0 = \mathrm{Id}\ . \end{cases}$$

Vu (3.35) la forme normale de U_t vérifie le problème de Cauchy

(5.29) $$\begin{cases} U_t^\bullet(\bar{z}\ ,\ z') = (-\ \gamma(t)\ \exp(it\omega)\ \bar{z} - \overline{\gamma(t)\ \exp(it\omega)}\ z')\ U_t(\bar{z}\ ,\ z') \\ \qquad\qquad - \overline{\gamma(t)\ \exp(it\omega)}\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\ U_t(\bar{z}\ ,\ z') \\ U_0(\bar{z}\ ,\ z') = 1 \end{cases}$$

quels que soient $\bar{z}$ et $z' \in {}'E = \mathcal{S}(H\uparrow)$.

Cherchons une solution du type

$$U_t(\bar{z}\ ,\ z') = \exp(A(t) + B(t)\ z' + C(t)\ \bar{z})\ .$$

Alors, les fonctions A , B et C vérifient

$$iA^{\bullet} = -\ \overline{\gamma\ \exp(it\omega)}\ C\ ,\quad iB^{\bullet} = -\ \overline{\gamma\ \exp(it\omega)}\ ,\quad iC^{\bullet} = -\ \gamma\ \exp(it\omega)$$

et peuvent être ainsi déterminées. Finalement, on trouve explicitement la forme normale de U_t :

$$U_t(\bar{z}\ ,\ z') = \exp[-\int_0^t \overline{\gamma(\theta)}e^{-it\omega}\,d\theta \int_0^\theta \gamma(u)e^{iu\omega}\,du + iz'\int_0^t \overline{\gamma(\theta)}e^{-i\theta\omega}\,d\theta + i\bar{z}\int_0^t \gamma(\theta)e^{i\theta\omega}\,d\theta]\cdot$$

Ceci montre que l'expression approchée de $U_t(\bar{z}\ ,\ z')$, trouvée par L. D. FADEEV [4] en utilisant le formalisme heuristique de la méthode fonctionnelle et un argument de phase stationnaire, est en fait l'expression exacte de $U_t(\bar{z}\ ,\ z')$.

6. Indications sur les applications aux dérivées partielles dans le domaine réel.

Les équations aux dérivées partielles, relatives aux fonctions holomorphes d'une infinité de variables, ont été étudiées depuis plus de dix ans : travaux de L. NACHBIN, GUPTA, T. DWYER, P. BOLAND ... Dans le domaine réel, les problèmes se posent d'une manière très différente en dimension quelconque qu'en dimension finie. Il y a d'abord une difficulté pour définir les opérateurs, difficulté qui peut être résolue en utilisant les distributions cylindriques [11] ou les fonctionnelles analytiques cylindriques. Ensuite, pour les estimations L^2 , la transformation de Fourier, si commode en dimension finie, doit être remplacée par la transformation de Fourier normalisé [11] ou transformation θ . Ainsi dans [11], en utilisant θ , les distributions cylindriques et un théorème de surjectivité de T. DWYER [3] relatif aux e. d. p. dans le domaine complexe, un premier théorème général d'existence dans le domaine réel a pu être démontré. Une autre différence entre dimension finie et dimension quelconque concerne la notion de symbole des opérateurs différentiels. En effet, VIŠIK, BLEHER et MARCHENKO avaient étendu, en dimension infinie, la notion de symbole et d'opérateur pseudo-différentiel classique, mais cette extension ne permet pas d'étudier les majorations L^2 , et elle introduit un terme infini dans l'opérateur nombre de particules : voir [13]. Le formalisme fournit une notion nouvelle de symbole dans le cas commutatif. Il se posait en 1974 les problèmes suivants. Est-ce-que cette notion de symbole en $\bar{z}$ et z' permet l'étude des majorations L^2 en dimension quelconque ? Peut-on étendre en dimension quelconque les estimations C^α du type Schauder ? Existe-t-il un rapport entre les travaux de L. GROSS d'une part, et VIŠIK-BLEHER-MARCHENKO d'autre part, relatifs au laplacien? Une solution à tous ces problèmes a été fourni par B. LASCAR (voir [14], et sa thèse d'état à paraître). On montre ci-après comment le calcul symbolique redonne le théorème de surjectivité de [3]

(6.1) PROPOSITION. - Soient $\sigma = S$ et Q une forme $\sum_{k=0}^m Q_k$ du type Hilbert-Schmidt sur l'espace de Hilbert complexe séparable Z , $Q \neq 0$. Alors, l'opérateur de dérivation à gauche $Q(D)\ F(\bar{Z}) \longrightarrow F('\bar{E})$ induit une surjection de $F(\bar{Z})$ sur $F(\bar{Z})$. De plus,

$$Q(D)\ Q(D)^* = \sum_{k=0}^{m} k!^{-1}\ D^k\ Q(D)(D^k\ Q(D))^* . \tag{6.2}$$

Démonstration.

(a) On utilise un triplet conucléaire $'E \subset Z \subset E$ et $P = P_H$, par exemple. On a

$$\tilde{Q}(\bar{z}\ ,\ z') = \exp(\bar{z}.z')Q(z') \Longrightarrow \tilde{Q}^*(\bar{z}\ ,\ z') = \exp(\bar{z}.z')\ Q^*(\bar{z}) .$$

Le théorème des noyaux montre que $Q^* \in \mathrm{Op}\varphi$. Donc $Q \in L(F(\bar{Z})\ ,\ F('\bar{E}))$ et QQ^* est défini. Approchant $Q(z')$ par des formes $\in$ **Exp** $\bar{E}$, on voit que le symbole de QQ^* est égal à

$$(QQ^*)(\bar{z}\ ,\ z') = \sum k!^{-1}\ D^k\ Q(z')\ D^k\ Q^*(\bar{z}) .$$

Comme $\sum k!\ D^k\ Q(D)(D^k\ Q(D))^*$ a pour symbole le deuxième membre de (6.2), on en déduit (6.2). On voit donc que le calcul symbolique, restreint à la dimension finie et au cas commutatif, permet de montrer très simplement des identités du type Trèves.

(b) Le théorème des noyaux montre aussi que $Q(D) \in \mathrm{Opr}$. Pour $\Phi \in F(\bar{E})$, on a, vu (6.2) :

$$\|Q(D)^*\ \Phi\|^2 = (\Phi\ ,\ Q(D)\ Q^*(D)\ \Phi) \geqslant C\ \|\Phi\|^2 . \tag{6.3}$$

Vu le théorème de Hahn-Banach, $Q(D)$ est un surjectif de $F(\bar{Z})$ sur $F(Z)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BEREZIN (F. A.). - The method of second quantization. - New York, Academic Press, 1966 (Pure and applied Physics, 24).

[2] BOGOLJUBOV (N. N.) et ŠIRKOV (D. V.). - Introduction à la théorie quantique des champs. - Paris, Dunod, 1960 (Travaux et Recherches mathématiques, 5).

[3] DWYER (T. A. W.). - Partial differentiel equations in Fischer-Fock spaces for the Hilbert-Schmidt holomorphy type, Bull. Amer. math. Soc., t. 77, 1971, p. 725-730.

[4] FADEEV (L. D.). - Introduction to functional methods, "Méthodes en théorie des champs [28. 1975. Les Houches], p. 1-40. - Amsterdam, North-Holland publishing Company, 1976.

[5] FRIEDRICHS (K. O.). - Mathematical aspects of the quantum theory of fields. - New York, Interscience publishers, 1953.

[6] KRÉE (M.). - Propriétés de trace en dimension infinie d'espaces de Sobolev, Bull. Soc. math. France, t. 105, 1977, p. 141-163.

[7] KRÉE (P.) and RACZKA (R.). - Kernels and symbols of operators in quantum field theory, Ann. Ins. H. Poincaré, Section A (à paraître).

[8] KRÉE (P.). - Calcul symbolique et seconde quantification des fonctions sesqui-holomorphes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 284, 1977, Série A, p. 25-28.

[9] KRÉE (P.). - Méthodes holomorphes et méthodes nucléaires en analyse en dimension infinie et en théorie quantique des champs, "Measures on vector spaces [1977. Dublin]". - Berlin, Springer-Verlag (Lecture Notes in Mathematics) (à paraître).

[10] KRÉE (P.). - Méthodes fonctionnelles en analyse en dimension infinie et en holomorphie anticommutative, Séminaire P. Lelong : Analyse, 17e année, 1976/77. Berlin, Springer-Verlag (Lecture Notes in Mathematics) (à paraître).

[11] KRÉE (P.). - Solutions faibles d'équations aux dérivées fonctionnelles, II, Séminaire P. Lelong : Analyse, 14e année, 1973/74, n° 2, p. 16-47. - Berlin, Springer-Verlag, 1975 (Lecture Notes in Mathematics, 474).

[12] KRÉE (P.). - Holomorphie et théorie des distributions en dimension infinie, "Infinite dimensional holomorphy and applications", p. 277-296. - Amsterdam, North-Holland publishing Company, 1977 (North-Holland Mathematics Studies, 12; Notas de matematica, 54).

[13] KRÉE (P.). - Symboles et noyaux des opérateurs différentiels, Séminaire P. Krée : Equations aux dérivées partielles en dimension infinie et applications à la physique, 2e année, 1975/76, n° 1, 16 p.

[14] KRÉE (P.). - Classes d'opérateurs à puissance nucléaire, Séminaire P. Krée : Equations aux dérivées partielles en dimension infinie et applications à la physique, 2e année, 1975/76, n° 4, 12 p.

[15] LASCAR (B.). - Une condition nécessaire et suffisante d'ellipticité en dimension infinie, Comm. partial diff. Equations, t. 2, 1977, p. 31-67.

Paul KRÉE
32 rue Miollis
75015 PARIS