Paul Krée

Formes et coformes sur un espace nucléaire complet

Séminaire Paul Krée, tome 3 (1976-1977), exp. nº 3, p. 1-34
<http://www.numdam.org/item?id=SPK_1976-1977__3__A3_0>

Séminaire Paul KRÉE
(Equations aux dérivées partielles
en dimension infinie)
3e année, 1976/77, n° 3, 34 p.

FORMES ET COFORMES SUR UN ESPACE NUCLÉAIRE COMPLET

par Paul KRÉE

Pour donner une base mathématique au calcul symbolique relatif aux bosons, il a été commode d'utiliser des triplets nucléaires comme espaces de base (alors que l'analyse en dimension infinie s'était surtout développée dans un cadre banachique), et d'utiliser des fonctionnelles analytiques en dimension infinie. La transformation de Laplace-Borel et les propriétés de nucléarité interviennent alors de façon essentielle. La matière étant surtout constituée de fermions, il est indispensable de modifier le formalisme qui vient d'être évoqué afin qu'il s'étende aux fermions. C'est cette modification qui a conduit à la notion de forme et de coforme. Soit σ un élément fixé appartenant à $\{X , S , A\}$. Une forme σ-symétrique sur un e. v. E est une somme (formelle) $f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$ de formes σ-symétriques f_k, homogènes, de degré k sur E. En pratique, les f_k vérifient certaines conditions de croissance en k, et certaines conditions de continuité, E étant un e. l. c. s. On construit ainsi un e. v. t. $F_\sigma(E)$ de formes sur E, et un e. v. t. $F_\sigma(E')$ de formes sur E', chacun de ces espaces étant le dual de l'autre. D'où une identification $F'_\sigma(E) \longrightarrow F_\sigma(E')$ appelée transformation de Laplace-Borel. Comme d'autre part, $F_\sigma(E)$ et $F_\sigma(E')$ sont des algèbres pour le produit tensoriel σ-symétrique, on définit par transposition des opérateurs de dérivation.

On notera que, si E est de dimension finie, l'algèbre tensorielle symétrique est de dimension infinie, ce qui a conduit à des problèmes d'analyse, et plus précisément à des problèmes concernant des fonctions de plusieurs variables complexes. Mais si E est de dimension finie, l'algèbre ΛE de E est de dimension finie. On notera d'ailleurs que la formulation existante de l'algèbre exterieure ne fait pas apparaitre la transformation de Laplace, les opérateurs de dérivations, la dualité symplectique, ... ces notions étant utiles en physique. Le fait intéressant est que ΛE est de dimension infinie en dimension infinie, ce qui pose des problèmes d'analyse complètement nouveaux qui sont abordés ici.

Ce travail expose le contenu de la note [5].

1. Dualité symplectique pour les algèbres tensorielles.

Si E est un espace nucléaire complet, comment mettre en dualité $\prod_{j=0}^{\infty} E_\sigma^j$ et $\bigoplus_{j=0}^{\infty} E'^j_\sigma$? En particulier, si E est de dimension finie et si $\sigma = A$, comment mettre en dualité ΛE et $\Lambda E'$? Notons, pour tout j, $\langle\ ,\ \rangle_{j,us}$ la dualité entre E_σ^j et E'^j_σ qui est induite par la dualité entre $\bigotimes_j E$ et $\bigotimes_j E'$. On a, dans $E^j = \widehat{\widehat{\bigotimes}}_j E$, une involution $f_j \longrightarrow f_j^\vee$ correspondant au retournement des tenseurs

$$(1.1) \qquad (x_1 \otimes \dots \otimes x_j)^\vee = x_j \otimes \dots \otimes x_1 .$$

Cette involution induit l'application identique dans E_S^j , et une involution dans E_A^j . On a de même une involution $g_j \longrightarrow g_j^\vee$ dans E'^j_σ . Pour des raisons symplectiques [5], on met E_σ^j et E'^j_σ en dualité en posant

$$(1.2) \qquad \langle f_j , g_j\rangle_j = \langle f_j , g_j^\vee\rangle_{us} = \langle f_j^\vee , g_j\rangle_{j,us} .$$

Pour avoir un bon comportement de la dualité vis-à-vis de l'opération produit, la proposition suivante montre qu'on a intérêt à utiliser la dualité suivante entre $\prod E_\sigma^j$ et $\bigoplus E'^j_\sigma$: Pour $f(f_j)$ et $g = \sum g_j$ dans chacun de ces espaces, on pose, λ étant une constante fixée $\neq 0$,

$$(1.3) \qquad \langle f , g\rangle = \langle f , g\rangle_E = \textstyle\sum_{j=0}^\infty \lambda^j\, j!\langle f_j , g_j\rangle_j .$$

Sauf indication contraire, on prendra $\lambda = 1$, soit

$$(1.4) \qquad \langle f , g\rangle = \textstyle\sum_{j=0}^\infty j!\langle f_j , g_j\rangle_j .$$

Dans le cas où E est un complexe, pour $f \in \prod E_\sigma^j$ et $g \in \bigoplus {}'E_\sigma^j$, on pose

$$(1.5) \qquad (f , g) = \textstyle\sum j!(f_j , g_j)_j = \sum j!(f_j , g_j^\vee)_{j,us} ,$$

où la dernière parenthèse indique une antidualité induite par l'antidualité naturelle entre $\bigotimes E$ et $\bigotimes{}' E$

$$(x_1 \otimes x_2 \dots \otimes x_j , \xi_1 \otimes \dots \otimes \xi_j)_{j,us} = (x_1 , \xi_1)\dots(x_j , \xi_j) .$$

Dans certains cas, E étant réel ou complexe, on peut utiliser la dualité usuelle entre $\prod E_\sigma^j$ et $\bigoplus E'^j_\sigma$. Pour ne pas confondre cette dualité avec la dualité retournée (ou symplectique) qui vient d'être définie, la dualité usuelle est signalée par un indice us

$$(1.6) \qquad \langle f , g\rangle_{us} \subset \langle f , g\rangle_{\mathbf{us}} = \textstyle\sum j!\langle f_j , g_j\rangle_{j,us} .$$

(1.7) Forme symplectique.

Soient E et E' deux e. v. en dualité. Soit $\omega = x \vee \xi$ la forme symplectique canonique sur $E \times E'$. Pour $m_j = (x_j , \xi^j) \in E \times E'$, $j = 1$ et 2 , on a donc

$$(1.8) \qquad \omega(m_1 , m_2) = \tfrac{1}{2}(\langle x_1 , \xi^2\rangle\langle x_2 , \xi^1\rangle) .$$

Soit $\omega^0 = 1 \in \underline{K}$. Pour tout $k \geqslant 1$, ω^k désigne $\omega \wedge \dots \wedge \omega$ (k fois). Soit β_k la forme $2k$-linéaire suivante sur $E \times E'$

$$m_1 = (x_1 , \xi^1) , \dots , m_{2k} = (x_{2k} , \xi^{2k}))$$
$$\longrightarrow \langle x_1 \wedge \dots \wedge x_k , \xi^{k+1} \wedge \dots \wedge \xi^{2k}\rangle_k$$

Alors

$$(1.9) \qquad (x \vee \xi)^k = \mathrm{Alt}\ \beta_k .$$

N.B. — Ne pas confondre $x \vee \xi$ avec $x \wedge \xi$.

Preuve.

(a) Si E est de dimension finie n , on rapporte E et E' à des bases duales. Les formes coordonnées dans E et E' sont notées x^i et ξ_i respectivement, $i = 1 , \dots , n$. Alors ω est l'antisymétrisée de $\sum x^i \otimes \xi_i$, soit $\sum_{i=1}^n x^i \wedge \xi_i$. D'où

$$(x \vee \xi)^k = \sum_{i_1,\dots,i_k} x^{i_1} \wedge \xi_{i_1} \wedge \dots \wedge x^{i_k} \wedge \xi_{i_k} ,$$

$$(1.10) \qquad (x \vee \xi)^k = \sum_{i_1,\dots,i_k} x^{i_k} \wedge x^{i_{k-1}} \dots \wedge x^{i_1} \wedge \xi_{i_1} \wedge \dots \wedge \xi_{i_k} .$$

Par ailleurs,

$$\langle x_1 \wedge \dots \wedge x_k , \xi^{k+1} \wedge \dots \wedge \xi^{2k} \rangle_k = k!^{-1} \sum \operatorname{sg}\alpha\, (x_k)^{i_1} (\xi^{1+\alpha_1})_{i_1} \dots (x_1)^{i_k} (\xi^{k+\alpha_k})_{i_k} ,$$

d'où

$$\beta_k = k!^{-1} \sum \operatorname{sg}\alpha\, x^{i_k} \otimes x^{i_{k-1}} \dots \otimes x^{i_1} \otimes \xi_{i_{\alpha_1}} \otimes \xi_{i_{\alpha_2}} \otimes \dots \otimes \xi_{i_{\alpha_k}} ,$$

la somme étant étendue aux $(\alpha , i_1 , \dots , i_k) \in \mathfrak{S}_k \times \{1 , 2 , \dots , n\}^k$. D'où

$$\beta_k = \sum_{i_1,\dots,i_k} x^{i_k} \otimes x^{i_{k-1}} \dots \otimes x^{i_1} \otimes (\xi_{i_1} \wedge \dots \wedge \xi_{i_k}) ,$$

$$(1.11) \qquad \beta_k = \sum_{i_1,\dots,i_k} (x^{i_k} \wedge x^{i_{k-1}} \dots \wedge x^{i_1}) \otimes (\xi_{i_1} \wedge \dots \wedge \xi_{i_k}) .$$

Comparant (1.10) et (1.11), (1.09) est montré en dimension finie.

(b) Dans le cas général, quels que soient les $2k$ éléments $m_j = (x_j , \xi^j)$ de $E \times E'$, il s'agit de montrer

$$(*) \qquad \omega^k(m_1 , \dots , m_{2k}) = (\operatorname{Alt} \beta_k)(m_1 , \dots , m_{2k}) .$$

J'introduis un sous-espace G de dimension finie de E contenant les x_j , et l'injection canonique u de G dans E . La transposée u' de u est une surjection de E' sur $G' = E/G^{\perp}$. Introduisant les points $p_j = (x_j , u'\xi^j)$ de $G \times G'$, la forme symplectique ω' sur $G \times G'$, la forme β'_k sur $G \times G'$, (*) est équivalent à

$$\omega'^k(p_1 , \dots , p_{2k}) = (\operatorname{Alt} \beta'_k)(p_1 , \dots , p_{2k}) .$$

On est ainsi ramené au cas de la dimension finie. Cette technique de démonstration est fondamentale en analyse anticommutative. Plus précisément en analyse usuelle, pour montrer l'égalité de deux fonctions holomorphes f et g sur un espace H , on vérifie que f et g prennent même valeur <u>en tout point</u> de H . Ceci ne permet pas de vérifier l'égalité de deux formes alternées. Mais <u>deux formes alternées f et g sur un espace H sont égales si, et seulement si, les restrictions de f et g à tout sous-espace de dimension finie de H sont égales</u>.

(1.12) Notations d'algèbre extérieure de dimension finie.

Adoptons la convention des multi-indices pour simplifier l'écriture de la formule (1.10), par exemple.

Toute partie i de $\{1, 2, \dots, n\}$ s'écrit, d'une seule façon, sous forme d'une suite strictement croissante $i = (i_1, \dots, i_p)$ avec $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n$. Soit E de dimension n, les coordonnées de $x \in E$ sont notées x^j, et les coordonnées de $\xi \in E'$, par rapport à la base duale, sont notées ξ_j, $1 \leq j \leq n$. On pose

(1.13) $$x^i = x^{i_1} \wedge \dots \wedge x^{i_p}, \quad \xi_i = \xi_{i_1} \wedge \dots \wedge \xi_{i_p},$$

avec la convention $x^{\emptyset} = 1$. On a

(1.14) $$(x^i)^{\vee} = (i) x^i, \text{ avec } (i) = (1)^{p(p-1)/2}.$$

Les x^i forment une base de $F_A(E) = \Lambda E'$. Pour la dualité symplectique, la base duale de $F_A(E')$ est formée par les $(\xi_i)^{\vee}$. Tandis que, pour la dualité ordinaire, il faut considérer les ξ_i. La table de multiplication dans $\Lambda E'$ est

(1.15) $$x^i \vee x^j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \cap j \neq \emptyset \\ (i, j)\, x^{i \cup j} & \text{sinon} \end{cases},$$

avec $(i, j) = (-1)^k$, k étant le nombre de couples $(i_\ell, j_m) \in i \times j$, tels que $j_m < i_\ell$.

Il est aussi commode de noter i' le complémentaire de i dans $\{1, 2, \dots n\}$. On note $IA(n)$ l'ensemble des parties de $\{1, 2, \dots, n\}$ et JA l'ensemble des parties finies de $\{1, 2, \dots, n, \dots\}$. Pour $i \in IA(n)$ où $i \in JA$, $|i|$ désigne le nombre d'éléments de i.

(1.16) Notons les formules

(a) $$x \vee \xi = \sum_{j=1}^{n} x^j \wedge \xi_j.$$

(b) $$k!^{-1} (x \vee \xi)^k = \sum_{\substack{i \in IA(n) \\ |i| = k}} (x^i)^{\vee} \wedge \xi_i.$$

D'où

(c) $$\exp(x \vee \xi) = \sum_{i \in IA(n)} (x^i)^{\vee} \wedge \xi_i.$$

(d) $$\langle x^i, \xi^{\vee} \rangle = \langle x^i, \xi_j \rangle_{us} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}.$$

(1.17) PROPOSITION. - *Soient* E *et* G *deux espaces nucléaires complets, et soit* $H = E \times G$. *Alors, pour* $f \in E_\sigma^k$, $g \in G_\sigma^\ell$, $\varphi \in E'^k_\sigma$, $\psi \in G'^\ell_\sigma$, *et pour* $\sigma = S$ *ou* A, *on a*

(1.18) $$\langle \underset{\sim}{f} \circ \underset{\sim}{g}, \underset{\sim}{\varphi} \circ \underset{\sim}{\psi} \rangle_{H,us} = \langle f, \varphi \rangle_{E,u} \langle g, \psi \rangle_{G,us}$$

et

(1.19) $$\langle \underset{\sim}{f} \circ \underset{\sim}{g}, \underset{\sim}{\psi} \circ \underset{\sim}{\varphi} \rangle_H = \langle f, \varphi \rangle_E \langle g, \psi \rangle_G$$

où $\underset{\sim}{f}$ désigne la forme sur H définie naturellement par f.

Démonstration.

(a) On peut se limiter au cas où $\varphi = x_1 \circ x_2 \dots x_k$ et où $\psi = y_1 \circ \dots \circ y_\ell$. Notant I et II les deux membres de I, on a

$$\mathrm{I} = (k+\ell)!\langle \underset{\sim}{f} \circ \underset{\sim}{g}\ ,\ \underset{\sim}{x}_1 \otimes \underset{\sim}{x}_2 \otimes \dots \otimes \underset{\sim}{x}_k \otimes \underset{\sim}{y} \otimes \dots \otimes \underset{\sim}{y}_\ell\rangle_u .$$

On a

$$\underset{\sim}{x}_i = z_i = (x_i\ ,\ 0) \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant k ,$$

et

$$\underset{\sim}{y}_j = z_{k+j} = (0\ ,\ y_j) \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant j \leqslant \ell .$$

D'une manière générale, pour $1 \leqslant j \leqslant k + \ell$, on pose $z_j = (x_j\ ,\ y_j)$. Comme $\underset{\sim}{f} \circ \underset{\sim}{g} = \mathrm{Sym}_\sigma(\underset{\sim}{f} \otimes \underset{\sim}{g})$, il vient

$$\begin{aligned}\mathrm{I} &= \textstyle\sum_{\alpha\in\mathfrak{S}_{k+\ell}} \mathrm{sg}_\sigma \alpha \langle f \otimes g\ ,\ z_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes z_{\alpha_{k+\ell}}\rangle \\ &= \textstyle\sum \mathrm{sg}_\sigma \alpha\ f(x_{\alpha_1}\ ,\ \dots\ ,\ x_{\alpha_k})\ g(y_{\alpha_{k+1}}\ ,\ \dots\ ,\ y_{\alpha_{k+\ell}}) .\end{aligned}$$

Comme $y_1 = \dots = y_k = 0$, et $x_{k+1} = \dots = x_{k+\ell} = 0$, on peut limiter la somme aux permutations $\alpha = (\alpha'\ ,\ \alpha'')$ telles que $\alpha' = (\alpha'_1\ ,\ \dots\ ,\ \alpha'_k) \in \mathfrak{S}_k$, et $\alpha'' = (\alpha''_{k+1}\ ,\ \dots\ ,\ \alpha''_{k+\ell}) \in \mathfrak{S}_\ell$. D'où

$$\begin{aligned}\mathrm{I} &= \textstyle\sum_{\alpha'} \mathrm{sg}_\sigma \alpha'\ f(x_{\alpha'_1}\ ,\ \dots\ ,\ x_{\alpha'_k}) \sum_{\alpha''} \mathrm{sg}_\sigma \alpha''\ g(y_{\alpha''_{k+1}}\ ,\ \dots\ ,\ y_{\alpha''_{k+\ell}}) \\ &= k!\,\ell!\ f(x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_k)\ g(y_1\ ,\ \dots\ ,\ y_\ell) \\ &= k!\langle f\ ,\ x_1 \circ \dots \circ x_k\rangle_{k,u}\ \ell!\langle g\ ,\ y_1 \circ \dots \circ y_\ell\rangle_u \\ &= \langle f\ ,\ \varphi\rangle_u \langle g\ ,\ \psi\rangle_u = \mathrm{II}\end{aligned}$$

La relation (1.18) est démontrée.

(b) On en déduit (1.19) car

$$\begin{aligned}\langle \underset{\sim}{f} \circ \underset{\sim}{g}\ ,\ \underset{\sim}{\psi} \circ \underset{\sim}{\varphi}\rangle_H &= \langle \underset{\sim}{f} \circ \underset{\sim}{g}\ ,\ \underset{\sim}{\varphi}^\vee \circ \underset{\sim}{\psi}^\vee\rangle_{H,us} \\ &= \langle f\ ,\ \varphi^\vee\rangle_{E,us} \langle g\ ,\ \psi^\vee\rangle_{G,us} = \langle f\ ,\ \varphi\rangle_E \langle g\ ,\ \psi\rangle_G\end{aligned}$$

2. Espaces $F_\sigma(E)$ et $F_\sigma(E')$ de formes.

Si E est un e. l. c. s., quels espaces de formes σ-symétriques peut-on considérer sur E ou sur E' ? Cette question se spécialise, dans le cas particulier $\sigma = S$, en la question de la (bonne) définition des fonctions holomorphes sur un e. l. c. s. Comme nous sommes intéressés par les applications à la théorie des champs, on considère, ci-après, des espaces de formes naturellement associées, après retournement, aux produits tensoriels complétés étudiés dans l'exposé 2. Ainsi, E étant supposé nucléaire complet, on obtient une bonne dualité entre les formes sur E et les formes sur E'. On notera d'ailleurs qu'on est ainsi naturellement amené à ne pas travailler avec des formes continues, mais soit avec des formes hypercontinues, soit avec des formes hypocontinues, au sens de (2.3).

(2.1) Par la suite, E et G désignent des espaces nucléaires complets, k est un entier $\geqslant 0$. Les topologies de E et G sont respectivement définies par des familles filtrantes croissantes $(\varepsilon_u\ ,\ u \in U)$ et $(\varepsilon_v\ ,\ v \in V)$ de semi-normes préhilbertiennes. Pour toute partie d de E, ${}^k d$ désigne la partie $d \times \dots \times d$ de ${}^k E = E \times \dots \times E$. Par convention, la forme k-linéaire σ-symétrique sur E, naturellement associée, après retournement, à tout $f \in E'^k_\sigma$, est

(2.2) $$(x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_k) \longrightarrow \langle x_1 \bigcirc \dots \bigcirc x_k \rangle,\ f\rangle_{k,us}\ .$$

Cette forme est encore notée f. De même, tout $f \in E'^k_\sigma \check{\otimes} G'$ définit une forme vectorielle ${}^k E \longrightarrow G'$, tout $g \in E^k_\sigma$ définit une forme ${}^k E' \longrightarrow \underset{\sim}{K} \dots$

(2.3) Définition des espaces de formes homogènes et proposition.

(a) Soit ${}^k F_\sigma(E'\ ,\ G)$ l'espace des formes homogènes k-linéaires σ-symétriques ${}^k E' \longrightarrow G$ qui sont hypocontinues, c'est-à-dire telles que, pour tout $(u\ ,\ v) \in U \times V$,

$$|\varphi|_{u,v} = \sup\ \{\varepsilon_v\ \varphi(x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_k)\ ;\ (x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_k) \in {}^k u\} < \infty\ .$$

Alors, muni de ces semi-normes, ${}^k F_\sigma(E'\ ,\ G)$ devient un e. l. c. s., isomorphe à $X = E^k_\sigma \hat{\otimes} G$, cet isomorphisme faisant correspondre à $|\ \ |_{u,v}$, la semi-norme $\varepsilon(\varepsilon\sigma^k_u\ ,\ \varepsilon_v)$ sur X.

(b) Soit ${}^k F_\sigma(E\ ,\ G')$ l'espace des formes homogènes k-linéaires σ-symétriques $f\ :\ {}^k E \longrightarrow G'$ qui sont hypercontinues, c'est-à-dire telles qu'il existe $(u\ ,\ v) \in U \times V$, et $\lambda > 0$ avec $f({}^k(u^0)) \subset \lambda v$. Cet espace muni des "bornés" définis par les disques

(2.4) $$\sigma'^k_{u,v} = \{f\ ;\ f({}^k(u^0)) \subset v\}\ .$$

Il existe un isomorphisme canonique α de ${}^k F_\sigma(E\ ,\ G')$ sur $E'^k_\sigma \check{\otimes} G'$. De plus, soient $(u_1\ ,\ v_1) \in U \times V$ tel que les surjections canoniques $E_{u_1} \longrightarrow E_u$ et $G_v \longrightarrow G_{v_1}$ aient des normes nucléaires majorées par $\lambda > 0$. Alors,

(2.5) $$\sigma^k_{u,v} \subset \alpha(\sigma'^k_{u,v}) \subset \lambda^{k+1}\ \sigma^k_{u_1,v_1}\ .$$

(c) L'e. l. c. s. ${}^k F_\sigma(E'\ ,\ G)$ est nucléaire complet, et son dual est ${}^k F_\sigma(E\ ,\ G')$.

La démonstration s'effectue naturellement en utilisant les résultats du paragraphe 2 de l'exposé 2.

(a) En effet, $\varphi \in {}^k F_\sigma(E'\ ,\ G)$ étant hypocontinue, φ définit, par la propriété universelle du produit tensoriel, une application linéaire $\tilde{\varphi}\ :\ \bigcirc_k E' \longrightarrow G$; et vu la propriété universelle des semi-normes π, pour tout u, $\tilde{\varphi}$ induit une application continue $\tilde{\varphi}_u\ \bigcirc_{k,\pi} E'_u \longrightarrow G$. Cette application se prolonge par continuité en $\hat{\varphi}_u\ :\ \widehat{\bigcirc}_k\ E'_u \longrightarrow G$. Comme $E'^k_\sigma = \bigcup_u \widehat{\bigcirc}_k\ E'_u$ est ultrabornologique, les $\hat{\varphi}_u$ définissent une application linéaire continue $\hat{\varphi}$ de E'^k_σ dans G. Comme E'^k_σ est le dual de l'espace nucléaire complet E^k_σ, $\hat{\varphi}$ définit un élément $\hat{\underset{\sim}{\varphi}}$ de X. Réciproquement, tout élément de X définit une $\varphi \in {}^k F_\sigma(E'\ ,\ G)$, et il existe une bijection $\varphi \longrightarrow \hat{\hat{\varphi}}$ de ${}^k F_\sigma(E' , G)$. En ce qui concerne les semi-normes, on sait que l'isomorphisme $L(E'^k_\sigma , G) \sim E^k_\sigma \hat{\otimes} G$ fait correspondre à $\varepsilon(\varepsilon\sigma^k_u , \varepsilon_v)$ la semi-norme $\hat{\varphi} \longrightarrow \sup\{\varepsilon_v(\hat{\varphi}(t))$, t décrivant la boule unité de $\hat{\bigcirc}_k E'_u$.

D'après la propriété déjà évoquée des semi-normes π , ce sup est égal à $\sup\{\varepsilon_v(\varphi(x_1 , \dots , x_k))$; $(x_1 , \dots , x_k) \in {}^kU\}$ c'est-à-dire à $|\varphi|_{u,v}$.

(b) Soit $\tilde{f} : \bigcirc_k E \longrightarrow G$ l'application linéaire σ-symétrique canoniquement définie par toute $f \in {}^kF(E , G')$. Vu la définition de cet espace, $\tilde{f}$ décrit $L^{HR}(\bigcirc_{k,\pi} E , G')$. Et, si f décrit $\sigma^k_{u,v}$, $\tilde{f}$ envoie $\Gamma(\bigcirc u^0)$ dans v . Vu la preuve de (2.14) de l'exposé 2,

$$L^{HR}(\bigcirc_{k,\pi} E , G') \simeq B = B(\bigcirc_{k,\pi} E , G) .$$

Comme E est nucléaire, π et ε coincident sur $\bigcirc_k E$. Vu la propriété universelle de π :

$$B \simeq [(\bigcirc_{k,\varepsilon} E) \otimes_\pi G)]' .$$

Par nucléarité, π peut être remplacé par ε , et le dual de l'espace entre crochets est le même que le dual se son complété X . Et l'on a ainsi un isomorphisme algébrique canonique de ${}^kF(E , G')$ sur $X' = Y$. En ce qui concerne les disques, notons $\pi\sigma^k_u$ la restriction à E^k_σ de la semi-norme $\pi(\varepsilon_u , \dots , \varepsilon_u)$ sur $\bigcirc_k E$. L'isomorphisme défini précédemment de ${}^kF(E , G')$ sur le dual de $(\bigcirc_{k,\varepsilon} E) \otimes G) = Z$, applique $\sigma^k_{u,v}$ sur les formes linéaires $\psi : Z \longrightarrow \underset{\sim}{C}$, majorées par 1 en module sur la semi-boule où $\pi(\pi\sigma^k_u , \varepsilon_v) \leq 1$. Comme les semi-normes π sont plus grandes que ε , on a

$$\{\pi(\pi\sigma^k_u , \varepsilon_v) \leq 1\} \subset \{\varepsilon(\varepsilon\sigma^k_u , \varepsilon_v) \leq 1\} ,$$

et, par conséquent, $\sigma^k_{u,v} \subset \alpha(\sigma'^k_{u,v})$. Inversement, soient $(u_1 , v_1) \in U \times V$ tels que $u_1 \supset u$, $v_1 \supset v$, les normes des surjections nucléaires $E_{u_1} \longrightarrow E_u$ et $F_{v_1} \longrightarrow F_v$ étant majorées par un certain nombre k . D'après la propriété (14) de l'exposé 4 de [7] de supercontinuité des applications nucléaires, on a $\pi\sigma^k_u \leq \lambda^k \varepsilon\sigma^k_{u_1}$; puis

$$\pi(\pi\sigma^k_u , \varepsilon_v) \leq \lambda\varepsilon \text{ et } (\pi\sigma^k_u , \varepsilon_{v_1}) \leq \lambda^{k+1} \varepsilon(\varepsilon\sigma^k_{u_1} , \varepsilon_{v_1}) .$$

D'où

$$\{\varepsilon(\varepsilon\sigma^k_{u_1} , \varepsilon_{v_1}) \leq 1\} \subset \{\pi(\pi\sigma^k_u , \varepsilon_v) \leq \lambda^{k+1}\} = \lambda^{k+1}\{\pi(\pi\sigma^k_u) , \varepsilon_v) \leq 1\} ,$$

et, par conséquent, $\alpha(\sigma'^k_{u,v}) \subset \lambda^{k+1} \sigma^k_{u_1,v_1}$.

(c) résulte de (a), (b) et du théorème (2.12) de l'exposé 2.

(2.6) <u>Cas particulier 1.</u>

<u>Si</u> $G = \underset{\sim}{K}$, <u>on pose</u>

$${}^kF_\sigma(E) = {}^kF_\sigma(E , \underset{\sim}{K}) \text{ , et } {}^kF_\sigma(E') = {}^kF_\sigma(E' , \underset{\sim}{K}) .$$

Les éléments de ces espaces sont des formes scalaires, homogènes de degré k , sur E et E' respectivement. On notera que, pour $k = 0$, ces espaces formes se réduisent à $\underset{\sim}{K}$. De même,

$$^{0}F_{\sigma}(E\ ,\ G') \simeq G'\ ,\ \text{et}\quad ^{0}F_{\sigma}(E'\ ,\ G) \simeq G\ .$$

On a aussi

$$^{k}F_{\sigma}(E\ ,\ G') \simeq {}^{k}F_{\sigma}(E)\ \check{\otimes}\ G'\ ,\ \text{et}\quad ^{k}F_{\sigma}(E'\ ,\ G) \simeq {}^{k}F_{\sigma}(E')\ \widehat{\widehat{\otimes}}\ G\ .$$

(2.7) Cas particulier 2.

Soient ℓ un entier $\geqslant 0$, et $G = E_{\sigma}^{\ell}$. Donc $G' = E_{\sigma}'^{\ell}$.

(a) Alors, la topologie de $^{k}F_{\sigma}(E'\ ,\ E_{\sigma}^{\ell})$ est définie par la famille filtrante des semi-normes

$$\varphi \longrightarrow |\varphi|_{u} = \sup\{\varepsilon_{u}(\varphi(x_{1}\ ,\ \ldots\ ,\ x_{k}))\ ,\ (x_{1}\ ,\ \ldots\ ,\ x_{k}) \in u^{k}\}\ .$$

(b) De même, la famille des "bornés" de $^{k}F_{\sigma}(E\ ,\ E_{\sigma}'^{\ell})$ est définie par la famille filtrante croissante des disques

$$u_{\sigma}'^{k} = \{f \in {}^{k}F_{\sigma}(E\ ,\ E_{\sigma}'^{\ell})\ ;\ f(^{k}(u^{0})) \subset \sigma_{u}^{\ell}\}\ .$$

En effet :

(a) La topologie de E_{σ}^{k} est définie par les semi-normes $\varepsilon\sigma_{u'}^{k}$, $u' \in U$. Pour tout couple d'éléments u et u' de U , il existe un autre élément u'' contenant u et u' . D'où

$$\begin{aligned}|\varphi|_{u,u'} &= \sup\{\varepsilon_{u'}(\varphi(x_{1}\ ,\ \ldots\ ,\ x_{k}))\ ;\ x_{j} \in u\}\\ &\leqslant \sup\{\varepsilon_{u''}(\varphi(x_{1}\ ,\ \ldots\ ,\ x_{\ell}))\ ;\ x_{j} \in u''\}\end{aligned}$$

et

$$|\varphi|_{u,u'} \leqslant |\varphi|_{u''}\ ,$$

ce qui prouve que les familles de semi-normes $\{|\ .\ |_{u,u'}\ ,\ (u\ ,\ u') \in U \times U\}$ et $\{|\ .\ |_{u}\ ;\ u \in U\}$ sont équivalentes.

(b) De la même manière, on voit que, pour tout couple $(u\ ,\ u')$ d'éléments de U , on a

$$\sigma_{u,u'}'^{k} = \{f\ ;\ f(^{k}u^{0}) \subset u_{\sigma}'^{\ell}\} \subset \{f\ ;\ f(^{k}u''^{0}) \subset u_{\sigma}''^{\ell})\ .$$

(2.8) DÉFINITION. - Soient E et G deux espaces nucléaires complets. On dit qu'une forme $f = \sum f_{k}$ sur E , à valeurs dans G' , est hypercontinue si chacun des termes homogènes f_{k} est hypercontinu de E , à valeurs dans G' . De même, une forme $\varphi = \sum \varphi_{k}$ sur E' , à valeurs dans G , est définie comme une somme de formes homogènes $\varphi_{k}\ :\ E'^{k} \longrightarrow G$. Et φ est dit hypocontinue si chaque φ_{k} est hypocontinue.

On définit maintenant des e. l. c. s. de telles formes en supposant donnée, une fois pour toute, une famille P de poids sur $\underset{\sim}{N}$, P vérifiant la condition (C1) de l'exposé 2. On suppose ainsi que σ est fixé dans $\{X\ ,\ S\ ,\ A\}$.

(2.9) DÉFINITION et PROPOSITION. - Soit E un espace nucléaire complet sur $\underset{\sim}{K} = \underset{\sim}{R}$ ou $\underset{\sim}{C}$, la topologie de E étant définie par une famille filtrante croissante (ε_u) de semi-normes préhilbertiennes.

(a) On définit l'espace $F_\sigma(E')$ des formes (P-formelles σ-symétriques) $\varphi = \sum \varphi_k$ sur E' telles que les formes homogènes $\varphi_k \in {}^kF_\sigma(E')$ vérifient

(2.10) $$\forall\ (\varpi\ ,\ u) \in P \times U\ ,\quad |\varphi|_{\varpi,u} = \sum_{j=0}^{\infty} \varpi(j)\,|\varphi_j|_u < \infty\ .$$

Cet espace, muni de la topologie définie par la famille filtrante croissante des semi-normes $|f|_{\varpi,u}$, $(\varpi\ ,\ u)$ décrivant $P \times U$, est isomorphe à $P(\underset{\sim}{N}\ ,\ E^{\bullet})$.

(b) Le dual de $F_\sigma(E')$ s'identifie à l'espace $P^{\vee}(\underset{\sim}{N}\ ,\ E'^{\bullet}) \simeq F_\sigma(E)$ des formes $f = \sum f_k$ σ-symétriques sur E telles qu'il existe $(\varpi\ ,\ u) \in P \times U$ vérifiant

(2.11) $\exists\ C > 0\ ,\ \forall\ k\ ,\ \forall\ x_1\ ,\ \ldots\ ,\ x_k \in u^0\ ,\quad k!\ \varpi(k)^{-1}|f_k(x_1\ ,\ \ldots\ ,\ x_k)| \leqslant C\ .$

De plus, sur $F_\sigma(E)$, la topologie de dual fort de $F_\sigma(E')$ est la limite inductive localement convexe des topologies des espaces normés

(2.12) $$M_{\varpi,\ u} = \{f = \sum f_k\ ,\quad \sup_k\ k!\ \varpi(k)^{-1}|f_k({}^ku^0)| < \infty\}\ .$$

(c) La dualité entre $F_\sigma(E')$ et $F_\sigma(E)$ est donnée par

(2.13) $$\langle f\ ,\ \varphi\rangle = \sum k!\langle f_k\ ,\ \varphi_k\rangle_k\ ,$$

où l'on a utilisé les identifications

(*) $$ {}^kF_\sigma(E) \simeq E'^k_\sigma\ ,\quad {}^kF_\sigma(E') \simeq E^k_\sigma\ ,$$

l'une de ces identifications naturelles faisant intervenir un retournement.

Dans le cas où les deux identifications (*) étaient faites sans retournement, ou si toutes les deux étaient faites avec retournement, on aurait au lieu de (2.13)

(2.14) $$\langle f\ ,\ \varphi\rangle = \sum k!\langle f_k\ ,\ \varphi_k\rangle_{k,us}\ .$$

Démonstration.

(a) On note d'abord que la définition de $F_\sigma(E')$ ne dépend pas de U. En effet, soit $(\varepsilon_{u'})_{U'}$ équivalent à ε_u. Tout $u \in U$ est contenu dans $\lambda u'$, pour $\lambda > 0$ et $u' \in U'$ convenable symétriquement. Pour tout $(\varpi\ ,\ u)$ donné, on a

$$\sum \varpi(j)\,|\varphi_j|_u \leqslant \sum \lambda^j\ \varpi(j)\,|\varphi_j|_{u'}\ .$$

Vu (C1), il existe $\varpi' \geqslant \varpi$ tel que $C = \sum \lambda^j\ \varpi'^{-1}(j)\ \varpi(j) < \infty$. D'où

$$\sum \varpi(j)\,|\varphi_j|_u \leqslant C \quad \sup_j\ \varpi'(j)\,|\varphi_j|_{u'} \leqslant C \sum \varpi'(j)\,|\varphi_j|_{u'}\ .$$

On montre, de même, une inégalité en sens inverse.

(b) On utilise alors (2.3), et l'on voit que $F_\sigma(E')$ est un e. l. c. s. isomorphe à l'espace T des suites $t = (t_j)$ de tenseurs $t_j \in E^j_\sigma$ tels que

$$\forall\ (\varpi\ ,\ u) \in P \times U\ ,\quad \sum_{j=0}^{\infty} \varpi(j)\ \varepsilon\sigma_u^j(t_j) < \infty\ .$$

On reconnait alors l'espace $P(\underset{\sim}{N}\ ,\ E^{\bullet}_\sigma)$ de suites vectorielles défini dans l'exposé précédent. Par application de (3.14) de l'exposé 2, cet espace de suites est nucléaire complet. Son dual est isomorphe à l'espace $P^{\vee}(\underset{\sim}{N}, E'_\sigma)$ des suites $s = (s_j)$, $s_j \in E'^{j}_{\sigma}$, telles qu'il existe $(\varpi, u) \in P \times U$ tels que

$$\sup j!\, \varpi(j)^{-1} |s_j|_u < \infty ,$$

où $|s_j|_u$ est la norme de s_j dans $\widehat{\bigcirc}_j E'_u$.

(c) On utilise à présent (2.3 (b)) pour voir que $P^{\vee}(\underset{\sim}{N}, E'^{\bullet})$ s'identifie à $F_\sigma(E)$ comme espace vectoriel, puis pour voir que les structures à bornées sur ces espaces sont identiques.

Pour illustrer cette proposition, montrons comment $F_S(E)$ et $F_S(E')$ s'identifient à des espaces de fonctions entières, lorsque $\underset{\sim}{K} = \underset{\sim}{C}$, P étant la famille

(2.15) $$P_H = \{\varpi_n(j) = n^j , \quad n = 1, 2, \ldots\} .$$

(2.16) COROLLAIRE 1. - Soit E nucléaire complet complexe dont la topologie est définie par la famille filtrante croissante des semi-normes préhilbertiennes ε_u. Soit $H^{HO}(E')$ l'espace des fonctions φ finiment holomorphes et hypocontinues sur E', i. e. telles que pour tout u, la restriction de φ à l'e. v. n. E'_u soit continue. On munit $H^{HO}(E')$ de la topologie τ_0 de la convergence uniforme sur les parties équicontinues de E'. L'espace $\mathrm{Exp}\, E$ des fonctions entières de type exponentiel sur E est l'espace des fonctions f finiment holomorphes continues vérifiant

(2.17) $$\exists\, n > 0 , \quad \exists\, u \in U , \quad \forall\, z \in E , \quad \sup_z \exp(-\, n\varepsilon_u(z))|\varphi(z)| < \infty .$$

Cet espace est muni de sa topologie naturelle de limite inductive d'espaces normés. Alors, on a des isomorphismes d'e. l. c. s.

$$H(E') \sim F_S(E') , \quad \mathrm{Exp}\, E = F_S(E)$$

fournis par l'application "série de Taylor" :

(2.18) $$f = f(z) = \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} f_k\, z^k \longrightarrow (f_k)_k .$$

De plus, la dualité (2.13) entre $F_s(E)$ et $F_s(E')$ définit canoniquement des applications bijectives

(2.19) $$H'(E') \xrightarrow{\ I\ } \mathrm{Exp}\, E' , \quad \mathrm{Exp}'(E) \xrightarrow{\ II\ } H(E')$$

coïncidant avec la transformation de Laplace-Borel. De plus, I est bicontinue, et II est bi-"bornée".

On rappelle que les premiers théorèmes de nucléarité en holomorphie, en dimension infinie, et l'isomorphisme algébrique $H'(E) \longrightarrow \mathrm{Exp}\, E'$ pour le type nucléaire sont dus à P. BOLAND [2], [3]. Il a été remarqué dans [4] que l'hypothèse "E Schwartz complet" permet d'obtenir deux isomorphismes topologiques, en dualité qui jouent un rôle fondamental en calcul symbolique.

Démonstration.

(a) Pour $\varphi \in H^{HO}(E')$, on a $\varphi = \sum \varphi_j$ avec

$$\forall\ \xi \in E' \ , \quad \varphi_j\ \xi^j = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} \frac{\varphi(z\xi)}{z^{j+1}}\, dz \ .$$

Par hypothèse, pour tout $u \in U$, la restriction de φ à E'_u est continue. Pour tout voisinage disqué D de l'origine de $\underset{\sim}{C}$, et pour tout u , il existe donc $\lambda > 0$ tel que $\varphi(\xi) - \varphi(0) \in D$ pour $\xi \in \lambda u$. Ceci entraine que

$$\xi \in 2^{-1}\ \lambda u \Longrightarrow \varphi_j\ \xi^j = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\varphi(z\xi) - \varphi(0)}{z^{j+1}} \in 2^{-j}\ D \ .$$

Par l'identité de polarisation ([7], exposé 3), il en résulte que la forme j-linéaire S-symétrique $\underset{\sim}{\varphi}_j$, définie par φ_j , est hypocontinue sur ${}^jE'$. Et en utilisant l'exposé 2 , $\underset{\sim}{\varphi}_j \in E^j_S$. On voit alors que $(\underset{\sim}{\varphi}_j) \in P_H(\underset{\sim}{N}\ ,\ E^{\bullet}_S)$ car, pour tout $(\varpi_n\ ,\ u) \in P_H \times U$, on a

$$|\underset{\sim}{\varphi}_j|_u \leqslant \frac{j^j}{j!}\ |\varphi_j|_u \leqslant \frac{j^j}{j!}\ (2n)^{-j} |\varphi|_{2nu} \ ,$$

avec $|\varphi|_{2nu} = \sup\{|\varphi(x)|\ ,\ x \in 2nu\}$. D'où $\sum n^j |\underset{\sim}{\varphi}_j|_u < \infty$. Réciproquement, on voit que, pour toute suite $(\underset{\sim}{\varphi}_j) \in P_H(\underset{\sim}{N}\ ,\ E^{\bullet}_S)$, la fonction

$$\varphi = \textstyle\sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j\ z^k \in H^{HO}(E') \ ,$$

et que l'application $(\underset{\sim}{\varphi}_j)_j \longrightarrow \varphi$ est continue.

(b) Le même type d'arguments montre que l'application "série de Taylor" identifie $\operatorname{Exp} E$ à $F_S(E)$.

(c) Le fait que la transformation de Laplace-Borel coïncide avec l'application $H'(E') \longrightarrow \operatorname{Exp} E$, définie par la forme bilinéaire de dualité, entre $P_H(\underset{\sim}{N}\ ,\ E^{\bullet}_S)$ e et $P^{\vee}_H(\underset{\sim}{N}\ ,\ E'^{\bullet}_S)$, provient du fait que, pour toute $f \in \operatorname{Exp} E$, par exemple, et, pour tout $z \in E$, on a

(2.20) $\quad \langle f\ ,\ e^z\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n!\,\langle f_n, n!^{-1} \otimes_n z\rangle_{n,us} = \sum \langle f_n\ , \bigotimes_n\ z\rangle_{n,us} = f(z)$.

D'une manière plus générale, et sans que ceci soit systématiquement rappelé, tous les résultats énoncés dans cet exposé se restreignent, dans le cas particulier $P = P_H$, $\sigma = S$, $\underset{\sim}{K} = \underset{\sim}{C}$, en des propriétés concernant l'holomorphie en dimension quelconque.

(2.21) Propriétés de densité.

Le sous espace $\bigoplus_{j=0}^{\infty} (\bigcirc_j E)$ de $F_\sigma(E')$ est dense dans $F_\sigma(E')$. De même, si f appartient au sous-espace normé $M_{\varpi,u}$, défini en (2.12), de $F_\sigma(E)$, alors il existe une suite de $\bigoplus(\bigcirc_j E'_u)$ qui converge vers f dans $M_{\varpi,u}$, donc a fortiori dans $F_\sigma(E)$.

Ceci résulte de l'exposé 2. Dans le cas particulier où $\sigma = S$, l'identité de polarisation montre que tout $t \in \bigodot_j E$ est une somme de tenseurs $x \odot \dots \odot x = x^{\odot j}$, avec $x \in E$. Donc, les tenseurs de ce type forment un système total dans $F_\sigma(E')$.

(2.22) Formes vectorielles.

Soient E et G deux espaces nucléaires complets. On pose

$F_\sigma(E' , G) = F_\sigma(E') \hat{\hat{\otimes}} G ,$

$F_\sigma(E , G') = F_\sigma(E) \check{\otimes} G' .$

Ces deux espaces sont en dualité, $F_\sigma(E' , G)$ étant nucléaire complet.

(2.23) On a, dans ce cas, une proposition analogue à (2.6). Autrement dit, $F_\sigma(E' , G)$, par exemple, peut aussi être défini comme l'espace des $\varphi = (\varphi_j)$, les $\varphi_j \in {}^jF_\sigma(E' , G)$ vérifiant les conditions de croissance.

(2.24) $\forall\ (\varpi , u , v) \in P \times U \times V ,$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \varpi(j) \sup\{\varepsilon_v(\varphi_j(x_1 , \dots , x_j)) \ ; \ x_1 , \dots , x_j \in u\} < \infty .$$

(2.25) En pratique, on utilisera surtout le cas particulier où $G = E_\sigma^\ell$ avec ℓ entier $\geqslant 0$. Dans ce cas, U paramétrise aussi les semi-normes ϖ_u^ℓ de E_σ^ℓ (voir l'exposé 2). De plus vu (2.7), la topologie de $F_\sigma(E' , E_\sigma^\ell)$ est définie par les semi-normes suivantes indéxées dans $P \times U$

$$\varphi = (\varphi_j) \longrightarrow \sum_{j=0}^{\infty} \varpi(j) \sup\{\varpi_u^\ell(\varphi_j(x_1 , \dots , x_j)) \ ; \ x_1 , \dots , x_j \in u\} .$$

Nous examinons maintenant un autre cas particulier très important, celui où G est un espace de formes σ-symétriques P-décroissantes sur un autre espace vectoriel. Nous allons voir que les espaces correspondants, $F_\sigma(E' , G)$ et $F_\sigma(E , G')$ de formes vectorielles, s'identifient naturellement à des espaces de formes sur un produit.

3. Formes sur un espace produit.

Dans ce paragraphe, $\sigma = S$ ou A seulement.

Soient E et G deux espaces nucléaires complets, les duals forts étant notés E' et G' . On pose

$$H = E \times G \quad \text{et} \quad H' = E' \times G' .$$

On commence par exprimer les formes homogènes d'un degré n fixé sur un produit à l'aide de formes sur chaque facteur.

Pour $x \in E$, $y \in G$, on pose $z = (x , y) \in H$, et

(3.1) $$\underset{\sim}{x} = (x , 0) , \quad \underset{\sim}{y} = (0 , y) .$$

Les familles (ε_u) et (ε_v) sont définies comme d'habitude. La topologie produit sur H est définie par les semi-normes

(3.2) $$z \longrightarrow \varepsilon_{u,v}(z) = \sup\{|\langle x , \xi\rangle + \langle y , \eta\rangle| \ ; \ \xi \in u , \ \eta \in v\} = \varepsilon_u(x) + \varepsilon_v(y) .$$

Pour $R \in H_\sigma^n$ et $\zeta^j = (\xi^j , \eta^j) \in H'$, $j = 1 , \dots , n$, on a

(3.3) $$\langle R , \zeta^1 \otimes \dots \otimes \zeta^n\rangle_{n,us} = \langle R , (\xi^1 + \eta^1) \otimes \dots \otimes (\xi^n + \eta^n)\rangle_{n,us} = \sum_{i=0}^{n} U_{n-i}(\zeta^1 , \dots , \zeta^n)$$

où U_{n-i} regroupe les termes du développement qui contiennent $(n - i)$ facteurs ζ^j . Autrement dit, notant B l'ensemble des parties $\ell = (\ell_1 , \dots , \ell_{n-i})$ à

$(n - i)$ éléments de l'ensemble $\{1 , 2 , \dots , n\}$, et posant $\ell' = \{1 , 2 , \dots , n\} \setminus \ell$, on a

$$U_{n-i}(\zeta^1 , \dots , \zeta^n) = \Sigma\langle R , \dots \underset{\sim}{\xi}^{\ell_1} \otimes \dots \otimes \underset{\sim}{\xi}^{\ell_2} \dots \underset{\sim}{\xi}^{\ell_{n-i}} \dots\rangle ,$$

$$U_{n-i}(\zeta^1 , \dots , \zeta^n) = \Sigma_{\ell\in B}(\ell , \ell')_\sigma \langle R , \underset{\sim}{\xi}^{\ell_1} \otimes \dots \otimes \underset{\sim}{\xi}^{\ell_{n-i}} \otimes \underset{\sim}{\eta}^{\ell'_1} \otimes \dots \otimes \underset{\sim}{\eta}^{\ell'_i}\rangle ,$$

avec $(\ell , \ell')_\sigma = 1$ si $\sigma = S$, et $(\ell , \ell')_\sigma = (\ell , \ell')$ si $\sigma = A$.

Donc, U_{n-i} définit une forme n-linéaire sur H' . Or :

(3.4) $$U_{n-i}(\zeta^1 , \dots , \zeta^n) = (\mathrm{Sym}_\sigma \underset{\sim}{R}_{n-i})(\zeta^1 , \dots , \zeta^n) ,$$

avec

(3.5) $$\underset{\sim}{R}_{n-i}(\zeta^1 , \dots , \zeta^n) = \binom{n}{i}\langle R , \underset{\sim}{\xi}^1 \otimes \dots \otimes \underset{\sim}{\xi}^{n-i} \otimes \underset{\sim}{\eta}^{n-i+1} \otimes \dots \otimes \underset{\sim}{\eta}^n\rangle .$$

En effet,

(*) $$(\mathrm{Sym}_\sigma \underset{\sim}{R}_{n-i})(\zeta^1 , \dots , \zeta^n)$$
$$= i!^{-1}(n - i)!^{-1} \Sigma_{\alpha\in G_n} \mathrm{sg}_\sigma\alpha\langle R , \underset{\sim}{\xi}^{\alpha_1} \dots \otimes \underset{\sim}{\xi}^{\alpha_{n-i}} \otimes \underset{\sim}{\eta}^{\alpha_{n-i+1}} \dots \otimes \underset{\sim}{\eta}^{\alpha_n}\rangle_{us} .$$

Pour tout $\alpha = (\alpha_1 , \dots , \alpha_n) \in G_n$, soit $\ell = (\ell_1 , \dots , \ell_{n-i})$ l'unique élément correspondant de B qui contienne $\alpha_1 , \dots , \alpha_{n-i}$. On passe de la suite non ordonnée $(\alpha_1 , \dots , \alpha_{n-i})$ à la suite croissante $(\ell_1 , \dots , \ell_{n-i})$ en faisant une certaine permutation. De même, on passe de $(\alpha_{n-i+1} , \dots , \alpha_n)$ à $(\ell'_1 , \dots , \ell'_i)$ par une permutation, et

$$\mathrm{sg}_\sigma\alpha\langle R , \underset{\sim}{\xi}^{\alpha_1} \dots \otimes \underset{\sim}{\xi}^{\alpha_{n-i}} \otimes \underset{\sim}{\eta}^{\alpha_{n-i+1}} \dots \otimes \underset{\sim}{\eta}^{\alpha_n}\rangle$$
$$= (\ell , \ell')_\sigma\langle R , \underset{\sim}{\xi}^{\ell_1} \otimes \dots \underset{\sim}{\xi}^{\ell_{n-i}} \otimes \eta^{\ell'_1} \otimes \dots \otimes \eta^{\ell'_i}\rangle .$$

En regroupant ainsi les termes de la somme (*) correspondant au même $\ell \in B$, on obtient

$$(\mathrm{Sym}_\sigma \underset{\sim}{R}_{n-i})(\zeta^1 , \dots , \zeta^n) = \Sigma_{\ell\in B}(\ell , \ell')_\sigma\langle R , \underset{\sim}{\xi}^{\ell_1} \otimes \dots \underset{\sim}{\xi}^{\ell_{n-i}} \otimes \eta^{\ell'_1} \dots \otimes \eta^{\ell'_i}\rangle ,$$

et (3.4) est démontré.

Pour déduire de ces calculs algébriques, relatifs à des formes multilinéaires, des identifications de produits tensoriels complétés, on note ce qui suit.

(a) L'espace des formes n-linéaires f sur ${}^{n-i}E' \times {}^{i}G'$ qui sont hypocontinues et σ-symétriques, d'une part relativement aux $(n - i)$ premiers arguments, d'autre part relativement aux i derniers, est isomorphe à $E^{n-i} \widehat{\widehat{\otimes}} G^i$, et à toute semi-norme

$$f \longrightarrow |f|_{u,v} = \sup_{\xi^j\in u, \eta^k\in v} |f(\xi^1 , \dots , \xi^{n-i} , \eta^1 , \dots , \eta^\ell)|$$

il correspond à la semi-norme $\varepsilon(\varepsilon\sigma_u^{n-i} , \varepsilon\sigma_v^i)$ sur $E^{n-i} \widehat{\widehat{\otimes}} G^i$. Ceci se démontre comme (2.8).

(b) Par exemple, pour tout $R \in H_\sigma^n$, la forme n-linéaire suivante sur ${}^{n-i}E' \times {}^{i}G'$

(3.6) $$R_{n-i}(\xi^1, \dots, \xi^{n-i}, \eta^1, \dots, \eta^i) = \binom{n}{i}\langle R, \underset{\sim}{\xi}^1 \otimes \dots \otimes \underset{\sim}{\xi}^{n-i} \otimes \underset{\sim}{\eta}^1 \dots \otimes \underset{\sim}{\eta}^i\rangle_{n,us}$$

s'identifie à un élément de $E^{n-i} \hat{\hat{\otimes}} G^i$. Tandis que $\underset{\sim}{R}_{n-i}$, définie par (3.5), est en fait la forme n-linéaire sur ${}^nH'$ associée canoniquement à R_{n-i}.

D'où, la proposition suivante.

(3.7) PROPOSITION. - Pour tout $R \in H^n_\sigma$, et tout $i \in \{0, \dots, n\}$, on note R_{n-i} la forme n-linéaire (3.6) sur ${}^{n-i}E' \times {}^iG'$, et soit $\underset{\sim}{R}_{n-i}$ la forme n-linéaire correspondante (3.5) sur ${}^nH'$. Alors

(a) $$R = \sum_{i=0}^n \mathrm{Sym}_\sigma \underset{\sim}{R}_{n-i}.$$

(b) L'application

(3.8) $$\begin{aligned} H^n_\sigma &\xrightarrow{\alpha_n} \oplus_{i=0}^n (E^{n-i}_\sigma \hat{\hat{\otimes}} G^i) \\ R &\longmapsto (R_n, R_{n-1}, \dots, R_0) \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'e. l. c. s. Plus précisement, pour tout $(u, v) \in U \times V$, on a

(3.9) $$|R|_{u,v} \leq \sum_{i=0}^n |R_{n-i}|_{u,v} \leq 2^n |R|_{u,v},$$

avec $|R|_{u,v} = \sup\{|\langle R, \zeta^1 \otimes \dots \otimes \zeta^n\rangle_{n,us}|, \zeta^j \in u \times v\}$.

(3.10) Remarque.

Pour $t \in E^{n-i}_\sigma$ et $t' \in G^i_\sigma$, alors

$$R = \underset{\sim}{t} \bigcirc \underset{\sim}{t}' \Longrightarrow R_{n-i} = t \otimes t'.$$

En effet, vu (3.6),

$$\begin{aligned} R_{n-i}(\xi^1, \dots, \xi^{n-i}, \eta^1, \dots, \eta^i) &= \binom{n}{i}\langle \underset{\sim}{t} \bigcirc \underset{\sim}{t}', \underset{\sim}{\xi}^1 \otimes \dots \otimes \underset{\sim}{\xi}^{n-i} \otimes \underset{\sim}{\eta}^1 \dots \underset{\sim}{\eta}^i\rangle_{n,us} \\ &= i!^{-1}(n-i)!^{-1}\langle \underset{\sim}{t} \bigcirc \underset{\sim}{t}', \underset{\sim}{\xi}^1 \otimes \dots \otimes \underset{\sim}{\xi}^{n-i} \otimes \underset{\sim}{\eta}^1 \dots \underset{\sim}{\eta}^i\rangle_{us}. \end{aligned}$$

Par application de (1.18), il vient

$$\begin{aligned} R_{n-i}(\xi^1, \dots, \xi^{n-i}, \eta^1, \dots, \eta^i) &= i!^{-1}(n-i)!^{-1}\langle t, \xi^1 \otimes \dots \otimes \xi^{n-i}\rangle_{us}\langle t', \eta^1 \otimes \dots \otimes \eta^i\rangle_{us} \\ &= \langle t, \xi^1 \otimes \dots \otimes \xi^{n-i}\rangle_{n-i,us}\langle t', \eta^1 \otimes \dots \eta^i\rangle_{i,us}. \end{aligned}$$

Tout ceci est d'ailleurs bien clair dans le cas symétrique : si $t = t(\xi)$ et $t' = t'(\eta)$ sont respectivement des polynômes homogènes de degré $h - i$ et i sur E' et G' respectivement, le polynôme correspondant sur $E' \times G' = H'$ est $\underset{\sim}{t} \otimes \underset{\sim}{t}' = t(\xi)t'(\eta)$.

Par application de cette proposition et du théorème (3.29) de l'exposé précédent, on obtient l'identification des formes sur un produit à un produit tensoriel complété, à condition que la famille P de poids vérifie la condition suivante notée (C2).

(C2) Pour tout $\varpi \in P$, on pose :

$$\overline{\varpi}(k) = \sup_{i=0\ldots k} \varpi(k-i)\,\varpi(i) \quad \text{et} \quad \underline{\varpi}(k) = \inf_{i=0\ldots k} \varpi(k-i)\,\varpi(i) \ .$$

Pour tout $\varpi \in P$, il existe ϖ' et $\varpi'' \in P$ et C' , $C'' > 0$ avec

$$\varpi \leqslant C'\underset{\sim}{\varpi}' \quad \text{et} \quad \overline{\varpi} \leqslant C''\varpi'' \ .$$

Plus précisément on a le théorème suivant.

(3.11) THÉORÈME. - Soient E et G deux espaces nucléaires complets. Soit $\sigma = S$ ou A , et soit P une famille de poids vérifiant (C1) et (C2).

(a) Alors les applications

(3.12) $$E_\sigma^{n-i} \otimes G_\sigma^i \longrightarrow E_\sigma^{n-i} \otimes G_\sigma^i \longrightarrow (E \times G)_\sigma^n$$
$$t \otimes t' \longrightarrow t \otimes t' \longrightarrow \underset{\sim}{t} \bigcirc \underset{\sim}{t}'$$

se prolongent par linéarité et continuité en des isomorphismes d'e. l. c. s.

(3.13) $$F_\sigma(E')\,\widehat{\widehat{\otimes}}\,F_\sigma(G') \xrightarrow{A} (P \otimes P)(\underset{\sim}{N} \times \underset{\sim}{N}\ ,\ E_\sigma^\bullet \otimes G_\sigma^\bullet) \xrightarrow{B} F_\sigma(E' \times G') \ .$$

(b) De la même manière, pour $\varphi_{n-i} \in E'^{\,n-i}_\sigma$ et $\psi_{n-i} \in G'^{\,i}_\sigma$, les applications $\varphi_{n-i} \otimes \psi_i \longrightarrow \varphi_{n-i} \otimes \psi_{n-i} \longrightarrow \underset{\sim}{\varphi}_{n-i} \bigcirc \underset{\sim}{\psi}_i$ se prolongent en des isomorphismes d'espaces vectoriels à bornés

(3.14) $$F_\sigma(E)\,\check{\otimes}\,F_\sigma(G) \xleftarrow{A'} (P^\vee \otimes P^\vee)(\underset{\sim}{N} \times \underset{\sim}{N}\ ,\ E'^\bullet_\sigma \otimes G'^\bullet_\sigma) \xleftarrow{B'} F_\sigma(E \times G) \ .$$

Pour $\tilde{Q} = (\tilde{Q}_n)_n \in F_\sigma(E \times G)$, $\varphi = (\varphi_i) \in F_\sigma(E')$, $\psi = (\psi_j) \in F_\sigma(G')$, posons

$$(\tilde{Q}_{n,0}\ ,\ \tilde{Q}_{n-1,1}\ ,\ \ldots\ ,\ \tilde{Q}_{0,n}) = \alpha_n\,\tilde{Q}_n \ , \text{ avec } \tilde{Q}_{n-i,i} \in E_\sigma^{n-i}\,\widehat{\widehat{\otimes}}\,G_\sigma^i \ .$$

Alors

(3.15) $$\langle \tilde{Q}\ ,\ \underset{\sim}{\varphi} \bigcirc \underset{\sim}{\psi}\rangle_{us} = \sum_{k,j} k!\,j!\,\langle \tilde{Q}_{k,j}\ ,\ \varphi_k \otimes \psi_j\rangle_{us} \ .$$

Les derniers crochets symbolisent la dualité naturelle entre $E_\sigma^k\,\widehat{\widehat{\otimes}}\,G_\sigma^j$ et $E'^{\,k}_\sigma \otimes G'^{\,j}_\sigma$. Dans le premier membre de (3.15), les crochets symbolisent la dualité usuelle entre $F_\sigma(E \times G)$ et $F_\sigma(E' \times G')$. Si l'on remplace cette dualité $\langle\ ,\rangle_{us}$ par la dualité retournée $\langle\ ,\ \rangle$, il faut aussi retourner la dualité au second membre. Et (3.15) est, alors, remplacé par

(3.16) $$\langle \tilde{Q}\ ,\ \underset{\sim}{\psi} \bigcirc \varphi\rangle = \sum_{k,j} k!\,j!\,\langle \tilde{Q}_{k,j}\ \varphi_k \otimes \psi_j\rangle \ ,$$

avec

(3.17) $$\langle \tilde{Q}_{k,j}\ ,\ \varphi_k \otimes \psi_j\rangle = \langle \tilde{Q}_{k,j}\ ,\ \check{\varphi}_k \otimes \check{\psi}_j\rangle_{us} \ .$$

Démonstration.

(a) L'isomorphisme A de (3.13) résulte de (3.19) de l'exposé 2 et de (2.6). Pour obtenir B , on note que

$$P(\underset{\sim}{N}\ ,\ (E \times G)_\sigma^\bullet) \simeq F_\sigma(H) \ ; \text{ avec } H = E \times G \ .$$

Soit $h = (h_{i,j}) \in P(\underset{\sim}{N} \times \underset{\sim}{N}\ ,\ E_\sigma^\bullet\,\widehat{\widehat{\otimes}}\,G_\sigma^\bullet)$. Pour définir Bh , on utilise (3,7) pour regrouper les termes h_{ij} correspondant à $i + j = n$ fixé. On pose donc

$$Bh = (k_n)_n \in F_\sigma(H) ,$$

avec pour tout n,

$$k_n = \alpha_n^{-1}(h_{n,0} , h_{n-1,1} , \dots , h_{0,n})$$

l'application α_n étant définie par (3.7 (b)). L'application B est continue car, pour tout $\varpi \in P$ et tout $(u , v) \in U \times V$, on a

$$\begin{aligned} |Bh|_{u,v} = \textstyle\sum_{n=0}^\infty \varpi_n |k_n|_{u,v} &\leqslant \textstyle\sum_{n=0}^\infty \varpi(n) \sum_{i=0}^n |h_{n-i,i}|_{u,v} \\ &\leqslant C' \textstyle\sum_{n=0}^\infty \sum_{i=0}^n \varpi'(n-i)\, \varpi'(i) |h_{n-i,i}|_{u,v} \\ &\leqslant C' \textstyle\sum_{i,j} \varpi'(i)\, \varpi'(j) |h_{i,j}|_{u,v} . \end{aligned}$$

Réciproquement, soit $k = (k_n) \in F_\sigma(H)$. Vu (3.7 (b)), pour tout n, $0 \leqslant i \leqslant n$, il existe $h_{n-i,i} \in E_\sigma^{n-i} \hat{\otimes} G_\sigma^i$ tels que $k_n = \alpha_n^{-1}(h_{n,0} , h_{n-1,1} , \dots , h_{0,n})$. De plus,

$$\forall\ (\varpi'' , u , v) \in P \times U \times V ,\ \textstyle\sum_{n=0}^\infty \varpi''(n) \sum_{i=0}^n |h_{n-i,i}|_{u,v} < \infty .$$

Pour tout $(\varpi , u , v) \in P \times U \times V$, on a

$$\textstyle\sum_{i,j} \varpi(i)\, \varpi(j) |h_{ij}|_{u,v} \leqslant C'' \sum_{n=0}^\infty \varpi''(n) \sum_{i=0}^n |h_{n-i,i}|_{u,v} < \infty .$$

Ceci prouve que B est bijective car $Bh = k$; et ceci prouve aussi que l'inverse de B est continue.

(b) L'isomorphisme A' de (3.14) résulte de (3.19) de l'exposé 2. L'isomorphisme d'e. v. à bornés $A' \circ B' = (B \circ A)'$ s'obtient en transposant $B \circ A$. L'isomorphisme B' s'obtient en composant les isomorphismes d'e. v. à bornés $A' \circ B'$ et A'^{-1}.

(c) Pour démontrer (3.15), par linéarité, on peut supposer que $\varphi = \varphi_k$ et $\psi = \psi_j$ sont des formes homogènes. Alors $B'(\underset{\sim}{\varphi} \bigcirc \underset{\sim}{\psi}) = B'(\underset{\sim}{\varphi}_k \bigcirc \underset{\sim}{\psi}_j) = \varphi_k \otimes \psi_j$. Introduisant $(\tilde{Q}_{k,j})_{k,j} = B^{-1}(\tilde{Q})$, il vient

$$\begin{aligned} \langle \tilde{Q} , \underset{\sim}{\varphi} \bigcirc \underset{\sim}{\psi} \rangle_{us} &= \langle B(B^{-1} \tilde{Q}) , \underset{\sim}{\varphi} \bigcirc \underset{\sim}{\psi} \rangle_{us} = \langle B^{-1} \tilde{Q} , B'(\underset{\sim}{\varphi} \bigcirc \underset{\sim}{\psi}) \rangle_{us} \\ &= \langle B^{-1} \tilde{Q} , \varphi_k \otimes \psi_j \rangle_{us} = k!\, j! \langle \tilde{Q}_{k,j} , \varphi_k \otimes \psi_j \rangle_{us} , \end{aligned}$$

et (3.15) est démontré. On en déduit (3.16) car

$$\begin{aligned} \langle \tilde{Q} , \underset{\sim}{\psi} \bigcirc \underset{\sim}{\varphi} \rangle &= \langle \tilde{Q} , (\underset{\sim}{\psi} \bigcirc \underset{\sim}{\varphi})^\vee \rangle_{us} = \langle \tilde{Q} , \underset{\sim}{\varphi}^\vee \bigcirc \underset{\sim}{\psi}^\vee \rangle_{us} \\ &= \textstyle\sum k!\, j! \langle \tilde{Q}_{k,j} , \check{\varphi}_k \otimes \check{\psi}_j \rangle_{us} = \sum k!\, j! \langle \tilde{Q}_{k,j} , \varphi_k \otimes \psi_j \rangle . \end{aligned}$$

Le théorème (3.11) et l'égalité (3.16) sont démontrés. Soient k et ℓ deux entiers positifs. En tensorisant les isomorphismes d'e. l. c. s. A et B du théorème (3.11) avec l'application identique de $E_\sigma^k \hat{\hat{\otimes}} G_\sigma^\ell$, on en déduit la variante ci-après.

(3.18) <u>Variante vectorielle du théorème</u> (3.11).

<u>Sous les hypothèses de</u> (3.11), k <u>et</u> ℓ <u>étant des entiers, on a des isomorphis-</u>

mes d'e. l. c. s.

$$F_\sigma(E', E^k_\sigma) \widehat{\widehat{\otimes}} F_\sigma(G', G^\ell_\sigma) \simeq (P \otimes P)(\underset{\sim}{N}^2, E^\bullet_\sigma \widehat{\widehat{\otimes}} E^k_\sigma \widehat{\widehat{\otimes}} G^\bullet_\sigma \widehat{\widehat{\otimes}} G^\ell_\sigma)$$
$$\simeq F_\sigma(E' \times G', E^k_\sigma \widehat{\widehat{\otimes}} G^\ell_\sigma) .$$

On a aussi des isomorphismes du même type pour les formes vectorielles sur $E \times G$.

(3.19) Application avec fonctions holomorphes.

Par application du corollaire (2.16), on obtient que l'application $f \otimes g \longrightarrow f(z)\, g(z')$ réalise un isomorphisme d'e. l. c. s.

$$H^{HO}(E') \widehat{\widehat{\otimes}} H^{HO}(G') \simeq H^{HO}(E' \times G') ,$$

et un isomorphisme transposé,

$$\mathrm{Exp}(E') \check{\otimes} \mathrm{Exp}(G') \simeq \mathrm{Exp}(E' \times G') .$$

4. Propriétés des formes. Opérations sur les formes.

Etant donnés P vérifiant (C1), et σ , on a associé à tout espace nucléaire complet E un espace nucléaire complet $F_\sigma(E')$ de formes sur E' . Vérifions que F_σ est un foncteur covariant dans la catégorie des espaces nucléaires complets.

(4.1) PROPOSITION. - Soient E et G nucléaires complets, et soit α linéaire continue de E dans G . Alors les applications $\otimes_j \alpha : E^j_\sigma \longrightarrow G^j_\sigma$ définissent une application linéaire continue $F_\sigma\alpha$ de $F_\sigma(E')$ dans $F_\sigma(G')$, dont la transposée est l'application "bornée" $g \longrightarrow g \circ u$ de $F_\sigma(G)$ dans $F_\sigma(E)$.

Définissons, comme toujours, les familles de semi-normes $(\varepsilon_u , u \in U)$ et $(\varepsilon_v , v \in V)$. Soit (ϖ , v) quelconque dans $P \times V$. Comme α est continue, il existe $u \in U$ et $\lambda > 0$ tel que $\varepsilon_v(\alpha x) \leq \lambda \varepsilon_u(x)$, pour tout $x \in E$. D'où,

$$\varepsilon(\varepsilon_v , \dots , \varepsilon_v)((\otimes_j \alpha)x) \leq \lambda^j\, \varepsilon(\varepsilon_u , \dots , \varepsilon_u)(x) .$$

Donc, pour tout $t = t_j \quad E^j_\sigma$,

$$\varepsilon\sigma^j_v((\otimes_j \alpha)t_j) \leq \lambda^j\, \varepsilon\sigma^j_u(t_j) .$$

Vu (C1), il existe $\varpi' \geq \varpi$ avec $\sum \lambda^j\, \varpi'(j)^{-1}\, \varpi(j) = C < \infty$.

D'où, pour tout $t = (t_j) \in F_\sigma(E') \simeq P(\underset{\sim}{N}, E^\bullet_\sigma)$,

$$\sum \varpi(j)\, \varepsilon\sigma^j_v((\otimes \alpha)t_j) \leq \sum \varpi(j)\, \lambda^j\, \varepsilon\sigma^j_u(t_j)$$
$$\leq C\, \sup_j \varpi'(j)\, \varepsilon\sigma^j_u(t_j) \leq C|t|_{\varpi,u} .$$

Par conséquent, l'application $F_\sigma\alpha$ définie par les $\otimes_j \alpha$ est linéaire continue de $F_\sigma(E')$ dans $F_\sigma(G')$. L'application transposée de $F_\sigma\alpha$ est définie par la collection des applications $\otimes_j \alpha : G'^j_\sigma \longrightarrow E'^j_\sigma$. Elle associe donc à toute $g_j \in {}^jF_\sigma(G)$ la forme homogène sur E . Cette transposée est "bornée" puisqu'elle est la transposée d'une application linéaire continue.

(4.2) De même, soit β une application linéaire "bornée" de E' dans G', c'est-à-dire transformant toute partie équicontinue de E' en une partie équicontinue de G'. Pour tout j, l'application $\beta_\sigma^j : E'^j_\sigma \longrightarrow G'_\sigma$ induite par $\otimes_j \beta$ est "bornée". Et si $\beta u \subset \lambda v$, on a $\beta_\sigma^j(\sigma_u^j) \subset \lambda^j \sigma_v^j$. Et l'on peut vérifier que la collection des applications β_σ^j définit une application "bornée" $F_\sigma \beta$ de $F_\sigma(E')$ dans $F_\sigma(G')$. D'ailleurs, $F_\sigma \beta$ est la transposée de $F_\sigma \beta'$.

(4.3) PROPOSITION. - Soit P une famille de poids sur $\underset{\sim}{N}$ vérifiant (C1) et (C3).

(C3) Pour tout $\varpi \in P$, il existe $C > 0$ et $\varpi' \in P$, avec, pour tout $n \geqslant 0$,

$$\sum_{j=0}^n \frac{\varpi(n-j)\,\varpi(j)}{(n-j)!\,j!} \leqslant C\,\frac{\varpi'(n)}{n!}$$

$$\sum_{j=0}^n \varpi'(n-j)^{-1}\,\varpi'(j)^{-1} \leqslant C\varpi(n)^{-1}.$$

Alors $F_\sigma(E)$ et $F_\sigma(E')$ sont des algèbres relativement au produit tensoriel σ-symétrique $f, g \longrightarrow f \bigcirc g$. Ce produit définit une application bilinéaire "bornée"

$$F_\sigma(E) \times F_\sigma(E) \longrightarrow F_\sigma(E)$$

et une application bilinéaire continue

$$F_\sigma(E') \times F_\sigma(E') \longrightarrow F_\sigma(E').$$

Soient, en effet, $f = \sum f_k$ et $g = \sum g_k \in F_\sigma(E)$. Il existe $(\varpi, u) \in P \times U$ et des constantes C' et C'' avec, pour tout k,

$$|f_k|_{u^0} \leqslant C'k!^{-1}\,\varpi(k) \quad \text{et} \quad |g_k|_{u^0} \leqslant C''k!^{-1}\,\varpi(k).$$

Pour tout $n \geqslant 0$, on pose $h_n = f_n \bigcirc g_0 + \dots + f_0 \bigcirc g_n$. D'où

$$|h_n|_{u^0} < \sum_{j=0}^n |f_{n-j}|_{u^0}|g_j|_{u^0} \leqslant CC'C''\varpi'(n)n!^{-1}.$$

Ceci montre que $h = f \bigcirc g \in F_\sigma(E')$, et que le produit tensoriel σ-symétrique définit une application "bornée". De même, soient f et $g \in F_\sigma(E)$. Définissant de même les h_k, on veut montrer que $\sum \varpi''(k)|h_k|_u$ est fini, pour tout (ϖ'', u). Vu (C1), soit $\varpi \geqslant \varpi''$ avec $D = \sum \varpi''(j)\,\varpi(j)^{-1}$ fini. Comme $|f_k| \leqslant C'\varpi'(k)^{-1}$ et $|g_k|_u \leqslant C''\varpi'(k)^{-1}$, pour tout k, il vient, vu (C3),

$$\text{(C4)} \qquad \varpi(n)|h_n|_u \leqslant \varpi(n) \sum_{j=0}^n |f_{n-j}|_u |g_j|_u \leqslant CC'C''.$$

D'où

$$\sum \varpi''(n)|h_n|_u \leqslant CC'C''D.$$

Ceci montre que $h = (h_n) \in F_\sigma(E')$ et que l'application bilinéaire de produit σ-symétrique est continue dans $F_\sigma(E')$. On notera que (C1) $\cup$ (C2) $\Longrightarrow$ (C3).

(4.4) Exponentielle d'une forme sur E'.

Soit $\alpha \in F_\alpha(E')$. Pour tout $(\varpi, u) \in P \times U$, on a $C' = \sup_k \varpi(k)|\alpha_k|_u$ fini. Le calcul précédent entraine que, pour tout $n \geqslant 1$, et pour tout $k \geqslant 0$, on a

$\varpi(k)\,|(\alpha^{\wedge n})_k|_u \leqslant C^{n-1}\,C'^{\,n}$. Alors $\exp\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} n!^{-1}\,\alpha^{\wedge n} \in F_\sigma(E')$ car, pour tout k

$$\varpi(k)\,|((\exp\alpha)-1)_k|_u \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C^{n-1}\,C'^{\,n}}{n!} < \infty \,.$$

(4.5) <u>Exemple</u> : <u>Exponentielle de la forme symplectique sur</u> $E \times E'$.

(a) Soit $\alpha = x \vee \xi$. Pour tout e. l. c. s. E , on a défini et étudié la forme α^k au point (1.7). En sommant les formes $k!^{-1}\,\alpha^k$, on peut définir $\exp\alpha$, mais $\exp\alpha$ ne vérifie que des conditions mixtes de continuité en général.

(b) Etudions le cas particulier important où une injection continue β de E' dans E est donnée. Alors, on peut définir l'exponentielle de la forme $\underset{\sim}{\alpha}$ sur $E' \times E'$ qui est l'image de α par $\beta \times \mathrm{Id}_{E'}$: $E' \times E' \longrightarrow E \times E'$. En effet, pour tout $u \in U$, il existe $C > 0$ tel que $\beta u \in C u^0$. Alors, pour m_1 et $m_2 \in u \times u$, il vient

$$|\underset{\sim}{\alpha}(m_1\,,\,m_2)| = \tfrac{1}{2}|\langle \beta m_1\,,\,m_2\rangle - \langle m_1\,,\,\beta m_2\rangle| \leqslant C \,.$$

Donc, $\underset{\sim}{\alpha} \in {}^2F(E' \times E')$, et vu (4.3), $\exp\underset{\sim}{\alpha} \in F_\sigma(E' \times E')$.

Examinons le cas de formes vectorielles. Différents cas sont possibles suivant l'application bilinéaire définissant le produit "des valeurs des formes".

(4.6) PROPOSITION. - <u>On suppose que</u> P <u>vérifie</u> (C1) <u>et</u> (C3). <u>On considère l'application bilinéaire naturelle</u>

(4.7)
$$E'^{\,k}_\sigma \times E'^{\,k'}_\sigma \xrightarrow{\ \gamma\ } E'^{\,k+k'}_\sigma \,.$$

<u>Alors, pour</u> $f = \sum f_\ell \in F_\sigma(E\,,\,E'^{\,k}_\sigma)$ <u>et</u> $g = \sum g_{\ell'} \in F_\sigma(E\,,\,E'^{\,k'}_\sigma)$, <u>on a</u> $h = f \bigcirc g \in F_\sigma(E\,,\,E'^{\,k+k'})$.

En effet, il existe $u \in U$, C' et $C'' > 0$ avec

$$x_1\,,\,\dots\,,\,x_\ell \in u^0 \Longrightarrow f_\ell(x_1\,,\,\dots\,,\,x_\ell) \in C'\ell!^{-1}\,\varpi(\ell)\sigma_u^k \,,$$

$$x_{\ell+1}\,,\,\dots\,,\,x_{\ell+\ell'} \in u^0 \Longrightarrow g_{\ell'}(x_{\ell+1}\,,\,\dots\,,\,x_{\ell+\ell'}) \in C''\ell'!^{-1}\,\varpi(\ell')\sigma_u^{k'} \,.$$

Comme γ envoie $\sigma_u^k \times \sigma_u^{k'}$ dans $\sigma_u^{k+k'}$, il vient

$$(x_1\,,\,\dots\,,\,x_{\ell+\ell'} \in u^0) \Longrightarrow f_\ell(x_1\,,\,\dots\,,\,x_\ell)\,g_{\ell'}(x_{\ell+1}\,,\,\dots\,,\,x_{\ell+\ell'}) \leqslant C'C''\ell!^{-1}\,\ell'!^{-1}\,\varpi(\ell)\,\varpi(\ell')\,\sigma_u^{k+k'} \,.$$

Alors (C3) entraine qu'on a uniformément en n :

$$(x_1\,,\,\dots\,,\,x_n \in u^0) \Longrightarrow h_n(x_1\,,\,\dots\,,\,x_n) \in CC'C''n!^{-1}\,\varpi(n)\,u_\sigma^n \,.$$

La collection h des $h_n = f_n \bigcirc g_0 + \dots + f_0 \bigcirc g_n$ appartient donc à $F_\sigma(E\,,\,E'^{\,k+k'}_\sigma)$.

(4.8) <u>De même, relativement à l'application bilinéaire continue naturelle</u>

(4.9)
$$E^k_\sigma \times E^{k'}_\sigma \longrightarrow E^{k+k'}_\sigma \,.$$

<u>On a un produit tensoriel</u> σ-<u>symétrique</u>

$$F_\sigma(E', E_\sigma^k) \times F_\sigma(E', E_\sigma^{k'}) \longrightarrow F_\sigma(E', E_\sigma^{k+k'}) .$$

Voyons à présent un autre cas de figure qui permet par transposition, de définir les dérivations à droite et à gauche de formes alternées et de formes quelconques.

(4.10) PROPOSITION. - On suppose que P vérifie (C1) et (C3) et $k \geqslant k'$. On considère l'application bilinéaire

(4.11) $$E'^{k}_\sigma \times E^{k'}_\sigma \xrightarrow{\gamma} E'^{k-k'}_\sigma$$

de contraction entre $E^{k'}_\sigma$ et les k derniers facteurs de E'^{k}_σ. Alors, on peut définir relativement à cette application bilinéaire un produit tensoriel σ-symétrique

$$F_\sigma(E, E'^{k}_\sigma) \times F_\sigma(E, E^{k'}_\sigma) \longrightarrow F_\sigma(E, E'^{k-k'}_\sigma) .$$

En effet, on peut raisonner comme précédemment en partant du fait que γ envoie $\sigma^k_u \times (\sigma^{k'}_u)^0$ dans $\sigma^{k-k'}_u$.

(4.12) Opérateur différentiel scalaire dans $F_\sigma(E)$.

Soit φ un élément fixé de $F_\sigma(E')$. L'opérateur $f \longrightarrow \varphi(D)f$ de dérivation à gauche dans $F_\sigma(E)$ est défini comme le transposé du produit σ-symétrique à droite par φ dans $F_\sigma(E')$.

Ce deuxième opérateur s'écrit donc $\psi \longrightarrow \psi \bigcirc \varphi$ et

(4.13) $$\langle \varphi(D)f , \psi \rangle = \langle f , \psi \bigcirc \varphi \rangle .$$

(4.14) De la même manière,

(a) on définit la dérivation à droite par $\varphi(D)$ dans $F_\sigma(E)$ comme le transposé du produit σ-symétrisé à gauche par φ dans $F_\sigma(E')$

(4.15) $$\langle f\varphi(D) , \psi \rangle = \langle f , \varphi \bigcirc \psi \rangle ;$$

(b) On définit la dérivation à droite et la dérivation à gauche dans $F_\sigma(E')$; il suffit de permuter les rôles de E et E' dans ce qui précède.

Dans le cas particulier où $\sigma = A$, on peut écrire, en accord avec les notations de N. BOURBAKI en algèbre extérieure,

(4.16) $$\varphi(D)f = f \llcorner \check{\varphi} \quad \text{et} \quad f\varphi(D) = \check{\varphi} \lrcorner f .$$

Noter que

$$\langle \varphi_1(D)(\varphi_2(D)f) , \psi \rangle = \langle \varphi_2(D)f , \psi \bigcirc \varphi_1 \rangle = \langle f , \psi \bigcirc \varphi_1 \bigcirc \varphi_2 \rangle$$
$$= \langle (\varphi_1 \bigcirc \varphi_2)(D)f , \psi \rangle .$$

D'où

(4.17) $$\varphi_1(D)(\varphi_2(D)f) = (\varphi_1 \bigcirc \varphi_2)(D) .$$

De même

(4.18) $$(f\varphi_1(D))\varphi_2(D) = f(\varphi_1 \circ \varphi_2)(D) .$$

Dans le cas particulier, où $\varphi = x \in {}^1F(E')$, on écrit encore

$$\varphi(D)f = \frac{\partial f}{\partial x} = \partial_x f ,$$

d'où $(x_1 \wedge x_2)(D)f = \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2} f$, pour x_1 et $x_2 \in E$. De même, $f\varphi(D)$ s'écrit encore $f\frac{\partial}{\partial x} = f\ \partial_x$.

(4.19) <u>Pour toute</u> $f \in {}^kF(E)$, $x_1 , x_2 , \dots , x_k \in E$, <u>et</u> $a \in E$, <u>on a</u>

$$(\partial_a f)(x_1 , \dots , x_{k-1}) = kf(a , x_1 , x_2 , \dots , x_{k-1}) .$$

En effet, on a

$$\begin{aligned}(k-1)!(\partial_a f)(x_1 , \dots , x_{k-1}) &= \langle \partial_a f , x_1 \wedge \dots \wedge x_{k-1}\rangle_{k-1,us}\ (k-1)! \\ &= \langle \partial_a f , x_1 \wedge \dots \wedge x_{k-1}\rangle_{us} = \langle \partial_a f , x_{k-1} \wedge \dots \wedge x_1\rangle \\ &= \langle f , x_{k-1} \wedge \dots \wedge x_1 \wedge a\rangle = \langle f , a \wedge x_1 \wedge \dots x_{k-1}\rangle_{us} \\ &= k!\ f(a , x_1 , \dots , x_{k-1}) .\end{aligned}$$

Noter aussi

(4.20) $$(\varphi(D)f)^\vee = f^\vee \varphi^\vee(D) ,$$

car

$$\begin{aligned}\langle(\varphi(D)f)^\vee , \psi\rangle &= \langle\varphi(D)f , \psi^\vee\rangle = \langle f , \psi^\vee \circ \varphi\rangle \\ &= \langle f , (\varphi^\vee \circ \psi)^\vee\rangle = \langle f^\vee , \varphi^\vee \circ \psi\rangle = \langle f^\vee \varphi^\vee(D) , \psi\rangle .\end{aligned}$$

Calculons les dérivées lorsque E et E' sont rapportés à des bases duales.

(4.21) PROPOSITION. - <u>Les espaces</u> E <u>et</u> E' <u>sont rapportés à des bases duales</u> ; <u>les formes coordonnées dans</u> E <u>et</u> E' <u>sont respectivement notées</u> x^u <u>et</u> ξ_v , u <u>et</u> $v \in \{1 , \dots , n\}$

(a) <u>Pour tout</u> $i \in IA(n)$, <u>et tout</u> $c \in \{1 , \dots , n\}$, <u>on a</u>

(4.22) $$\frac{\partial}{\partial x^c} x^i = \partial_c x^i = 0 \quad \text{si} \quad c \notin i .$$

<u>Si</u> $c = i_\alpha \in i$, <u>avec</u> $i = (i_1 , i_2 , \dots , i_\alpha , \dots , i_k)$, <u>on a</u>

$$\partial_c x^i = (-1)^{\alpha-1} x^{i_1} \wedge \dots \wedge x^{\widehat{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge x^{i_k} ,$$

<u>le terme muni d'un chapeau étant omis.</u>

(b) <u>De même, on a</u>

(4.23) $$x^i \partial_c = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad c \in i , \\ (-1)^{k-\alpha} x^{i_1} \wedge \dots \wedge x^{\widehat{i_\alpha}} \dots \wedge x^{i_k} \quad \text{si} \quad c = i_\alpha \in i .\end{cases}$$

(c) <u>Posant</u> $f = x^1 \wedge \dots \wedge x^n = \underset{\sim}{x}$ <u>et</u> $\varphi = \xi_n \wedge \dots \wedge \xi_1 = \underset{\sim}{\xi}^\vee$, <u>on a, pour toute partie</u> i <u>de</u> $\{1 , \dots , n\}$,

$$(4.24)\qquad \begin{cases} x^{i}(D)\ \underset{\sim}{\xi}^{\vee} = (i')(i'\ ,\ i)\xi_{i'} \\ \xi_{i'}(D)\ \underset{\sim}{x} = (i)(i'\ ,\ i)x^{i} \end{cases} .$$

Ce sont ces relations qui motivent la terminologie "dérivation à droite" et "dérivation à gauche". En effet, pour dériver à gauche le monôme x^{i} par rapport à la coordonnée $v = i_\alpha \in i$, on fait passer x^{i_α} à gauche dans x^{i}, ce qui nécessite $(\alpha - 1)$ inversions, puis on supprime x^{i_α}. De même, pour dériver à droite le monôme $x^{i} = x^{i_1} \wedge \dots \wedge x^{i_\alpha} \dots \wedge x^{i_k}$, par rapport à la coordonnée $c = i_\alpha \in i$, on fait passer x^{i_α} à droite, puis on le supprime. On notera aussi l'analogie (et la différence !) des formules (4.21 (a) et (b)) avec la formule donnant en algèbre commutative la dérivée d'un monôme $(x^{i_1})^{\alpha_1} \dots (x^{i_k})^{\alpha_k}$, par rapport) x^{i_α}.

Démonstration de la proposition (4.21). - A priori, on a $\partial_{x^v} x^{i} = \sum_{j\in IA(n)} a_j\, x^{j}$. Pour tout $j \in IA(n)$, la constante a_j est donnée par

$$a_j = \langle \partial_v\, x^{i}\ ,\ (\xi_j)^{\vee}\rangle = \langle x^{i}\ ,\ (\xi_j)^{\vee} \wedge \xi_v\rangle .$$

Donc, a_j est nul sauf peut-être si $i = j \cup v$. Dans ce cas, $v = i_\alpha$ et j
$j = (i_1\ ,\ i_2\ ,\ \dots\ ,\ \widehat{i_\alpha}\ ,\ \dots\ ,\ i_k)$, d'où

$$\xi_j^{\vee} \wedge \xi_v = \xi_{j_k} \wedge \dots \wedge \widehat{\xi_{j_\alpha}} \wedge \dots \wedge \xi_{j_1} \wedge \xi_{j_\alpha} = (-1)^{\alpha-1}(\xi)^{\vee} .$$

D'où

$$\partial_v\, x^{i} = (-1)^{\alpha-1}\, x^{i_1} \wedge \dots\ x^{\widehat{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge x^{i_k} .$$

(c) A priori, $x^{i}(D)\underset{\sim}{\xi}^{\vee} = \sum a_j\ \xi_j$, et les constantes a_j sont telles que

$$a_j = \langle x^{i}(D)\underset{\sim}{\xi}^{\vee}\ ,\ (x^{j})^{\vee}\rangle = \langle \underset{\sim}{\xi}^{\vee}\ ,\ (x^{j})^{\vee} \wedge x^{i}\rangle .$$

Le coefficient a_j ne peut être non nul, seulement si $j = i'$ et si

$$a_{j'} = \langle \underset{\sim}{\xi}^{\vee}\ ,\ (x^{i'})^{\vee} \wedge x^{i}\rangle = \langle \underset{\sim}{\xi}^{\vee}\ ,\ x^{i\cup j}\rangle(i')(i'\ ,\ i) = (i')(i'\ ,\ i) .$$

De même, on voit que $\xi_{i'}(D)\underset{\sim}{x} = bx^{i}$ avec

$$\begin{aligned} b &= \langle \xi_{i'}(D)\underset{\sim}{x}\ ,\ (\xi_i)^{\vee}\rangle = \langle \underset{\sim}{x}\ ,\ (\xi_i)^{\vee} \wedge \xi_{i'}\rangle \\ &= \langle \underset{\sim}{x}\ ,\ ((\xi_{i'})^{\vee} \wedge \xi_i)^{\vee}\rangle = (i')(i'\ ,\ i)\langle \underset{\sim}{x}\ ,\ \xi^{\vee}{}_{i\cup i'}\rangle . \end{aligned}$$

Donc, $b = (i')(i'\ ,\ i)$, et $\xi_{i'}(D)\underset{\sim}{x} = (i')(i'\ ,\ i)x^{i}$.

(4.25) PROPOSITION. - Soit E un e. l. c. s., soit E' son dual.

(a) Pour $g \in \Lambda E'$ et $h \in \Lambda_{\ell} E'$, on a, pour tout $\xi \in E'$,

$$(4.26)\qquad (g \wedge h)\partial_\xi = (-1)^{\ell}(g\partial_\xi) \wedge h + g(h\partial_\xi) .$$

(b) Symétriquement, pour $g \in \Lambda_k E'$ et $h \in \Lambda E'$, on a

$$(4.27)\qquad \partial_\xi(g \wedge h) = (\partial_\xi\ g) \wedge h + (-1)^{k}\ g \wedge (\partial_\xi\ h) .$$

Démonstration. - Par linéarité, il suffit de démontrer ces formules pour g et h respectivement homogènes de degrés k et ℓ. Vu la relation (4.20), la deuxième formule se déduit de la première, en utilisant l'involution $k \longrightarrow k^{\vee}$. D'autre part, en raisonnant comme dans la preuve de (1.7), on voit qu'il suffit de montrer (4.26) en dimension finie. On rapporte E et E' à des bases duales. Par bilinéarité, il suffit de montrer

(4.28) $$(x^i \wedge x^j)\partial_c = (-1)^\ell (x^i \partial_c) \wedge x^j + x^i \wedge (x^j \partial_c) ,$$

avec $c \in \{1, \dots, n\}$. Si $\mathrm{card}(i \cap j) \geqslant 2$, les deux membres de (*) sont nuls. Si $i \cap j = i_\alpha = j_\beta \neq \xi$, le premier membre I de (4.28) est nul, alors que son second s'écrit, vu (4.21),

$$\mathrm{II} = (-1)^\ell \widehat{x^i} \wedge x^j + (-1)^{\ell-\beta} x^i \wedge \widehat{x^j} ,$$

où le chapeau signifie que le terme $x^{i_\alpha} = x^{i_\beta}$ a été omis. On voit, alors, par un jeu de saute-mouton que $\mathrm{II} = 0$. Il reste à examiner le cas $i \cap j = \emptyset$. Si $c \notin i \cup j$, $\mathrm{I} = \mathrm{II} = 0$. Si $c = i_\alpha \in i$, on a $\mathrm{I} = a\widehat{x^i} \wedge x^j$ avec

$$\begin{aligned} a &= \langle (x^i \wedge x^j)\partial_c , (\xi_j)^\vee \wedge \widehat{\xi_i^\vee} \rangle = \langle x^i \wedge x^j , \xi_{i_\alpha} \wedge \xi_j^\vee \wedge \widehat{\xi_i^\vee} \rangle \\ &= (-1)^\ell \langle x^i \wedge x^j , \xi_j^\vee \wedge \xi_{i_\alpha} \wedge \widehat{\xi_i^\vee} \rangle \\ &= (-1)^{\ell+k-\alpha} \langle x^i \wedge x^j , \xi_j^\vee \wedge \xi_i^\vee \rangle = (-1)^{\ell+k-\alpha} . \end{aligned}$$

D'où $\mathrm{I} = (-1)^\ell (x^i \partial_c) \wedge x^j = \mathrm{II}$. On traite de même le cas où $c = j_\beta \in j$, et (4.25) est démontré.

(4.29) <u>Dérivées à droite, dérivées à gauche</u>.

(a) Vu les formules (4.16), il apparait qu'on a reformulé, dans un langage adéquat à la théorie des champs, les notions classiques de produits intérieurs gauche et droit en algèbre extérieure. On ne définit pas usuellement en algèbre extérieure les dérivées globales d'une forme alternée. Nous allons le faire car nous aurons besoin de ces dérivées globales, de la même manière qu'on a besoin en analyse de la dérivée Df d'une fonction définie sur $\underset{\sim}{R}^n$, les dérivées partielles $\partial f/\partial x^i$ étant insuffisantes. De même qu'en analyse ordinaire, on utilise des fonctions vectorielles pour définir et étudier Df, $D^2 f$, nous utilisons en analyse anticommutative les formes alternées vectorielles. Traitons d'ailleurs en même temps les cas $\sigma = S$ et A.

(b) Pour k entier $\geqslant 1$ fixé, considérons l'opérateur

(4.30) $$\begin{aligned} F_\sigma(E', E^k_\sigma) &\xrightarrow{\gamma} F_\sigma(E') \\ \vec{\psi} &\longrightarrow [\vec{\psi} \circ \vec{\xi}^k_\sigma] \end{aligned}$$

où $\vec{\xi}^k_\sigma$ désigne la forme vectorielle homogène de degré

$$k : \xi_1, \dots, \xi_k \longrightarrow \xi_1 \circ \xi_2 \circ \dots \circ \xi_k .$$

Cette forme sur E' est à valeurs dans $\bigcirc_k E'$. Les crochets indiquent qu'il y a contraction dans le but, c'est-à-dire que, selon le principe (4.10), le produit σ-symétrique est associé à la forme bilinéaire de dualité $E^k_\sigma \times E'^k_\sigma \longrightarrow \underset{\sim}{K}$.

L'opérateur γ est continu. Son transposé

(4.31) $$F_\sigma(E) \xrightarrow{\gamma'=D^k} F_\sigma(E\ ,\ E'^k)$$

est appelé opérateur de dérivation à gauche d'ordre k . On voit alors, en raisonnant comme dans le cas scalaire, que $D^k = D \circ D \circ \ldots \circ D$ (k fois). On définit de même $f \longrightarrow fD^k$ en transposant $\vec{\psi} \longrightarrow [\vec{\xi}^k_\sigma \bigcirc \vec{\psi}]$. Dans le cas commutatif, dérivées à droite et à gauche coïncident.

5. Les coformes.

On se limite essentiellement au cas scalaire. D'ailleurs l'étude des coformes vectorielles se ramène à celle des coformes scalaires, par un argument facile de produit tensoriel. On suppose P et σ fixés.

(5.1) Définition d'une coforme.

Une coforme (P-décroissante, σ-symétrique) sur l'espace nucléaire complet E est un élément du dual $F'_\sigma(E)$ de $F_\sigma(E)$.

L'action de la coforme $M \in F'_\sigma(E)$ sur la forme $f \in F_\sigma(E)$ est notée

(5.2) $$M(f) = \langle M\ ,\ f\rangle = \int f(x)\, M(x)\ ,$$

où le signe d'intégration symbolise seulement une forme bilinéaire de dualité. On définit de même les coformes sur E' .

(5.3) Proposition et définition de la transformation de Laplace.

L'espace $F'_\sigma(E)$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur les "bornés" de $F_\sigma(E)$ est nucléaire complet isomorphe à $F_\sigma(E')$. De même, l'espace $F'_\sigma(E')$, muni de la topologie de dual fort de $F_\sigma(E')$, est isomorphe à $F_\sigma(E)$. Pour toute $M \in F'_\sigma(E)$, il existe une seule $\hat{M} \in F_\sigma(E)$ telle que

(5.4) $$\langle M\ ,\ f\rangle = \sum k!\langle \hat{M}_k\ ,\ f_k\rangle_k\ .$$

On dit que $\hat{M}$ est la transformée de Laplace de M . De même, la coforme sur E , dont la transformée de Laplace est $\varphi \in F_\sigma(E')$, est notée $\delta\varphi$, en général.

(5.5) Relation du type Parseval.

Quelles que soient $f \in F_\sigma(E)$ et $\varphi \in F_\sigma(E')$, on a

$$\langle f\ ,\ \varphi\rangle_E = \int_E f\delta\varphi = \int_{E'} \varphi\delta f\ .$$

(5.6) Accouplements partiels (ou "intégrations" partielles).

Notons Id l'application identique du dual X d'un espace nucléaire complet. Alors, pour toute $\varphi \in F_\sigma(E')$, $\mathrm{Id} \otimes \delta\varphi$ définit une application linéaire continue α de $X \check{\otimes} F_\sigma(E)$ dans $X \otimes \underset{\sim}{K} = X$. Pour $\vec{f} \in X \check{\otimes} F_\sigma(E)$, on pose

$$\int \vec{f}\delta\varphi = \alpha(f)\ .$$

(5.7) Cas particulier.

Soit $X = F_\sigma(G)$, où G est nucléaire complet. Comme $X \check{\otimes} F_\sigma(E) \simeq F_\sigma(G \times E)$, on peut écrire $\vec{f} = f(y , x)$, et alors

$$\int \vec{f}\delta\varphi = \int_E f(y , x) \ \delta\varphi(x) \in F_\sigma(G) .$$

(5.8) Exemple.

Soit $g \in F_S(E)$. Alors, pour tout $x \in E$ tel que $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} k!^{-1} \otimes_k x \in F_S(E')$, on a, d'après (5.4),

$$\langle e^x , g\rangle = \int e^{x\xi} \ \delta g(\xi) = \Sigma\langle g_k , \otimes_k x\rangle = g(x) ,$$

et la forme g est la transformée de Laplace au sens usuel de la coforme g .

(5.9) PROPOSITION. - Soit $g \in F_A(E)$.

(a) Pour toute forme simple $\vec{x} = \sum_{k=0}^{\infty} x_{k_1} \wedge \ldots \wedge x_{k_k}$ sur E' telle que

$$\exp \vec{x} = \sum_{k=0}^{\infty} k!^{-1} x_{k_1} \wedge \ldots \wedge x_{k_k} \in F_A(E') , \quad x_0 = 1 ,$$

on a

(5.10) $$g(\vec{x}) = \Sigma \ g_k(x_{k_1} , \ldots , x_{k_k}) = \int(\exp \vec{x})(\xi)\delta g(\xi) .$$

(b) Pour tout sous-espace E_α de dimension finie de E , la restriction g_α de g à E_α est telle que

(5.11) $$g_\alpha = g_\alpha(x) = \int_{E'_\alpha} \exp(x \vee \xi)\delta g_\alpha(\xi) .$$

Ce que l'on traduit par la formule

(5.12) $$g = g(x) = \int_{E'} \exp(x \vee \xi)\delta g(\xi) .$$

Démonstration. - On note que (a) résulte de (5.4). Pour prouver (5.11), rapportons E et E' à des bases duales et utilisons (1.12). Par linéarité, il suffit de montrer la formule (5.11) par $g_\alpha = x^i$, $i \in I_A(n)$. Or, vu (1.16 (d)) et la définition (5.6) de l'intégration partielle, on a

$$\int_{E'_\alpha} \exp(x \vee \xi)(\delta x^i)(\xi) = \Sigma_{\alpha\in I_A(n)} \int (x^\alpha)^\vee \wedge \xi_\alpha(\delta x^i)(\xi)$$
$$= \Sigma_{\alpha\in I_A(n)}(x^\alpha)^\vee \ \langle\xi_\alpha , x^i\rangle .$$

La somme se réduit au terme correspondant à $\alpha = i$, soit à

$$(x^i)^\vee\langle\xi_i , x^i\rangle = (i)(x^i)^\vee = x^i .$$

(5.13) Définition des coformes mormales.

Soient E nucléaire complet, et $\sigma \in \{X , S , A\}$. Une coforme σ-symétrique sur E est dite normale si sa transformée de Borel s'écrit $\exp \varphi$ avec $\varphi \in {}^1F_\sigma(E') \oplus {}^2F_\sigma(E')$. La coforme est dite centrée si $\varphi \in {}^2F_\sigma(E')$.

Nous étudions les opérations sur les coformes.

(5.14) Image par une application linéaire.

Soit $u \in L(E , G)$. Alors $g \longrightarrow g \circ u$ définit une application "bornée" de $F_\sigma(G)$ dans $F_\sigma(E)$, d'où, par transposition, une application $T \longrightarrow u(T)$ de $F'_\sigma(E)$ dans $F'_\sigma(G)$. Donc

(5.15) $$\langle u(T) , g\rangle = \langle T , g \circ u\rangle .$$

Soit u' la transposée de u . Comme la transposée de $g \longrightarrow g \circ u$ est l'opérateur linéaire continu $\varphi \longrightarrow \varphi \circ u$ de $F_\sigma(E)$ dans $F_\sigma(G)$, on a

(5.16) $$\widehat{u(T)} = \hat{T} \circ u' .$$

(5.17) Par exemple, soit (E'_α) la famille des sous-espaces de dimension finie de E' , les injections de transition étant notées $u'_{\beta\alpha} : E'_\beta \subset E'_\alpha$. Soit u'_α l'injection $E'_\alpha \subset E'$. Comme les restrictions $\hat{T}_\alpha$, $\hat{T}_\beta$ de $\hat{T}$ aux sous-espaces E'_α , E'_β vérifient $\hat{T}_\alpha = \hat{T} \circ u'_\alpha$, $\hat{T}_\beta = \hat{T}_\alpha \circ u'_{\beta\alpha}$, les coformes $\delta\hat{T}_\alpha$, $\delta\hat{T}_\beta$ sur $E_\alpha = E/E'^{\perp}_\alpha$, $E_\beta = \dots$, sont cohérentes, i. e.

(5.18) $$E'_\beta \subset E'_\alpha \Longrightarrow u_{\beta\alpha}(\bigcirc_\alpha \hat{T}_\alpha) = \delta\hat{T}_\beta ,$$

et de plus $\delta\hat{T}_\alpha = u_\alpha(T)$, où u_α , $u_{\beta\alpha}$ sont les transposées de u'_α , $u'_{\beta\alpha}$, ...

(5.19) Produit tensoriel (on suppose $\sigma = S$ ou A).

Soient π_1 et π_2 les projections canoniques de $E \times G$ sur E et G respectivement. Pour simplifier l'écriture, pour toute $f \in F_\sigma(E)$, $f \circ \pi_1$ est notée simplement f . D'ailleurs, ceci est fait depuis longtemps en analyse commutative. Pour $T \in F'_\sigma(E)$ et $U \in F'_\sigma(G)$, $T \otimes U \in F'_\sigma(E \times G)$ est définie par

(5.20) $$\forall f \in F_\sigma(E) , \quad \forall g \in F_\sigma(G) , \quad \langle T \otimes U , f \bigcirc g\rangle = \langle T , f\rangle\langle U , g\rangle .$$

La relation (1.19) montre que

(5.21) $$\widehat{T \otimes U} = \hat{U} \bigcirc \hat{T} ,$$

le produit tensoriel σ-symétrique du 2e membre étant calculé dans $F_\sigma(E \times G)$.

(5.22) Produit de convolution (on suppose $\sigma = S$ ou A).

Soient T et U deux coformes sur l'espace nucléaire complet E . On définit $T * U$ comme l'image par l'application somme $s : (x ; y) \longrightarrow x + y$ de la coforme $T \otimes U$ sur $E \times E$.

(5.23) $$\langle T * U , f\rangle = \langle T \otimes U , f \circ s\rangle .$$

La transposée de s est l'application $s' : \xi \longrightarrow (\xi , \xi)$ de E' dans $E' \times E'$. Par application de (5.16) et (5.21), on en déduit que la transformée de Laplace de $T * U$ est

$$\widehat{T * U} = ((\hat{T} \circ \pi_1) \bigcirc (\hat{U} \circ \pi_2)) \circ s' ,$$

où $\underset{\sim}{\pi}_1$ et $\underset{\sim}{\pi}_2$ sont les projections canoniques du produit $E' \times E'$ sur le premier et le deuxième facteur E' . On en déduit

(5.24) $$\widehat{T * U} = \hat{U} \bigcirc \hat{T} .$$

Ici, le produit tensoriel σ-symétrique est calculé dans $F_\sigma(E)$. Dans le cas symétrique, le produit de convolution est commutatif, mais ce n'est plus le cas en général dans le cas anticommutatif. Cependant le produit de convolution est toujours associatif.

(5.25) Convolution $T * f$.

On définit l'opérateur $C : f \longrightarrow T * f$ dans $F_\sigma(E)$ comme le transposé de l'opérateur $C' : U \longrightarrow T(-x) * U$ dans $F'_\sigma(E)$, où $T(-x)$ désigne l'image de T par la symétrie $x \longrightarrow -x$ dans E.

(5.26) $$\langle T * f , U \rangle = \langle f , T(-x) * U \rangle .$$

(5.27) PROPOSITION. - Tout opérateur de convolution à gauche est une dérivation à gauche

$$\forall f \in F_\sigma(E) , \quad T * f = (\hat{T}(-D))f .$$

En effet, après la transformation de Laplace, l'opérateur C' de $F'_\sigma(E)$ s'écrit

$$\varphi \xrightarrow{\widehat{C'}} \varphi \bigcirc T(-\xi) .$$

Or, d'après (4.12), cet opérateur est le transposé de l'opérateur $f \longrightarrow (\hat{T}(-D))f$.

(5.28) Opérateur de multiplication à gauche par une forme.

Soit $g \in F_\sigma(E)$. L'opérateur $T \longrightarrow gT$ est défini comme transposé de l'opérateur $m : f \longrightarrow f \bigcirc g$ de $F_\sigma(E)$

(5.29) $$\langle f , gT \rangle = \langle f \bigcirc g , T \rangle$$

ou

$$\int f(x)(gT)(x) = \int f(x) \bigcirc g(x) \; T(x) .$$

Or m est le transposé de l'opérateur $\varphi \longrightarrow g(D)\varphi$ de $F_\sigma(E')$. Donc

(5.30) $$\widehat{gT} = g(D)\hat{T} .$$

Notons que, pour g_1 et $g_2 \in F_\sigma(E)$, on a, vu (4.17),

(5.31) $$g_1(g_2 T) = (g_1 \bigcirc g_2)T .$$

(5.32) Coformes sur un dual algébrique.

Soit Z un e. v. quelconque sur $\underset{\sim}{K} = \underset{\sim}{R}$ ou $\underset{\sim}{C}$. Le dual algébrique Z^* de Z est systématiquement muni de la topologie faible $\sigma(Z^* , Z)$. Z^* est donc nucléaire complet, et les parties équicontinues de son dual Z sont les bornés de dimension finie de Z. On suppose P fixé égal à P_H. Alors $F_A(Z)$ est l'espace de toutes les formes alternées sur Z, alors que $F_S(Z)$ est l'espace des fonctions finiment holomorphes sur Z si $\underset{\sim}{K} = \underset{\sim}{C}$, ou sur le complexifié de Z si $\underset{\sim}{K} = \underset{\sim}{R}$. Soit (Z_α) la famille des sous-espaces de dimension finie de Z. Les injections canoniques $Z_\beta \longrightarrow Z_\alpha$ et $Z_\alpha \longrightarrow Z$ sont respectivement notées $j_{\beta\alpha}$ et j_α. Par transposition, on obtient un système projectif $(Z^*_\alpha , j'_{\beta\alpha})$, et des surjections canoniques $j'_\alpha : Z^* \longrightarrow Z^*_\alpha$. Alors, toute $\varphi \in F_\sigma(Z)$ est caractérisée par la famille cohérente (φ_α) de ses restrictions aux Z_α. Par transformation de Laplace inverse, et vu (5.18), on obtient la proposition suivante.

(5.33) PROPOSITION. - Toute coforme $\delta\varphi$ sur Z^* est caractérisée par une famille $(\delta\varphi_\alpha)$ de coformes sur les espaces de dimension finie Z^*_α, la famille $(\delta\varphi_\alpha)_\alpha$ étant cohérente au sens suivant

(5.34)
$$Z_\beta \subset Z_\alpha \Longrightarrow \delta\varphi_\beta = j'_{\beta\alpha}(\delta\varphi_\alpha) .$$

(5.35) DÉFINITION. - On dit que $(\delta\varphi_\alpha)_\alpha$ est la représentation cylindrique de la coforme $\delta\varphi$ sur Z^*.

(5.36) Remarque.

Soit G tout e. l. c. s. sur $\underset{\sim}{K}$ dont le dual est Z. On notera que le système projectif d'espaces vectoriels de dimension finie associé à G, dans la théorie des probabilités cylindriques, coïncide avec $(Z'_\alpha , j'_{\beta\alpha})$. On aurait pu définir une coforme cylindrique T sur G comme étant une famille cohérente de coformes sur les espaces Z'_α. Or, (5.33) montre que T est simplement une coforme sur Z^*. Il n'est donc pas utile d'introduire la notion de coforme cylindrique sur G, d'autant plus qu'une telle notion ne dépend pas intrinsèquement de G.

La notion de coforme étend, dans le cas commutatif réel, la notion de probabilité cylindrique à décroissance exponentielle et, dans le cas commutatif complexe, la notion de fonctionnelle analytique et de fonctionnelle analytique de type exponentiel. Dans le cas anticommutatif, elle donne la notion nouvelle de mesure anticommutative.

(5.37) PROPOSITION. - Considérons le cas particulier $\sigma = S$, $\underset{\sim}{K} = \underset{\sim}{R}$, $P = P_H$. Pour tout e. l. c. s. réel G, on a une injection canonique des mesures cylindriques $\mu = (\mu_\alpha)$ sur G telles que les μ_α soient à décroissance exponentielle, dans l'espace des coformes sur G'^*.

En effet, après transformation de Laplace, on constate que l'on a une injection des transformées de Laplace $\hat{\mu}$ dans l'espace des formes sur G'.

(5.38) "Radonification" des coformes (σ, $\underset{\sim}{K}$ quelconques, P vérifie (C1)).

Soient G et E deux e. l. c. s., E étant nucléaire complet, et soit u linéaire continue à image dense de G dans E ; u' identifie E' à un sous-espace dense de G'. L'application u se prolonge en $\hat{u}$ linéaire continue de G'^* dans E'^*, d'où une application $F'_\sigma(G'^*) \longrightarrow F'_\sigma(E'^*)$. Par transformation de Laplace, il apparait une injection des coformes sur E dans les coformes sur E'^*. Soit alors T une coforme sur G'^* telle que $\hat{T} \circ u' \in F_\sigma(E')$. Comme $\hat{T} \circ u' = \widehat{u(T)}$, on en déduit que u transforme la coforme T sur G'^* (ou "cylindrique sur G") en une coforme sur E .

On notera que, même particularisé au cas des probabilités cylindriques, le résultat ainsi obtenu est nouveau.

(5.39) Coforme de Fermi df sur un espace de dimension finie.

Soit (E , f) le couple formé par un espace vectoriel E de dimension n sur $\underset{\sim}{K} = \underset{\sim}{R}$ ou $\underset{\sim}{C}$, et par une forme $f \in {}^{n}F_{A}(E)$, $f \neq 0$. Soit φ la forme sur E' telle que $\langle f , \varphi\rangle = 1$. La coforme de Fermi, définie par le couple (E , f) , est la coforme $\delta\varphi$ sur E . Cette coforme est aussi notée df .

(5.40) PROPOSITION. - Ecrivons toute $g \in F_A(E)$ sous la forme $g = C(g)f + g'$ avec $d^\circ f' < n$. Alors

(5.41) $$\int g \; df = C(g) .$$

En effet, $g_n = C(g)f_n$ et $g' = g_0 + \dots + g_{n-1}$. D'autre part, $\varphi = \varphi_n$, et $\varphi_0 = \dots = \varphi_{n-1} = 0$. Donc,

$$\begin{aligned}\int g \; df = \langle g , \varphi\rangle &= \sum k!\langle g_k , \varphi_k\rangle = n!\langle g_n , \varphi\rangle_n \\ &= C(g)\langle f , \varphi\rangle_n \, n! = C(g)\langle f , \varphi\rangle = C(g) .\end{aligned}$$

(5.42) PROPOSITION. - Soient deux couples (E_1 , f) et (E_2 , f') comme dans (5.39). Alors,

(5.43) $$d(f \wedge f') = df \otimes df' .$$

En effet, soient $\varphi \in {}^{n}F(E_1')$, $\varphi' \in {}^{n}F(E_2')$ telles que $\langle f , \varphi\rangle = \langle f' , \varphi'\rangle = 1$. Alors, vu (1.19),

$$\langle f \wedge f' , \varphi' \wedge \varphi\rangle = \langle f , \varphi\rangle\langle f' , \varphi'\rangle = 1 .$$

Ce qui prouve, vu (5.21), que les transformées de Laplace des deux membres de (5.43) coïncident. Par conséquent, ces deux membres sont égaux.

(5.44) COROLLAIRE. - Ceci permet de retrouver les règles qui sont prises usuellement comme définissant l'intégrale de Fermi sur $\underset{\sim}{R}^n$. En effet, prenant par exemple $E_1 = E_2 = \underset{\sim}{R}$ identifié à son dual, $f = x'$, $f' = x^2$ on a

$$\int 1 \; dx' = 0 , \int x^1 \; dx^1 = 1 , \int 1 \; dx^2 = 0 , \int x^2 \; dx^2 .$$

Et, par conséquent, on en déduit

$$\int x' \; dx^2 \wedge x' = \int x^1 \wedge 1 \; d(x^2 \wedge x') = \int x' \; dx' \int 1 \; dx^2 = 0 ,$$

$$\int x' \wedge x^2 \; d(x^2 \wedge x') = \int x^1 \; dx^1 \int x^2 \; dx^2 = 1.1 = 1 .$$

En analyse de dimension finie, un rôle très important est joué par la mesure de Lebesgue $dx = dx^1 \, dx^2 \dots dx^n$ sur $\underset{\sim}{R}^n$. Toute fonction intégrable f sur $\underset{\sim}{R}^n$ est "identifiée" à la mesure $f \, dx$, ce qui permet de définir l'accouplement

$(f\ ;\ g) \longrightarrow \int fg\,dx$, de définir la transformée de Fourier $\hat{f}$ de f comme étant en fait la transformée de Fourier de la mesure $f\,dx$, de faire des intégrations par partie, ... L'analyse anticommutative de dimension finie peut être considérée comme la reformulation de l'algèbre extérieure selon les principes donnés jusqu'ici dans cet exposé. Dans cette analyse, un rôle similaire à celui de dx en analyse usuelle est tenu par la coforme de Fermi $dx^{\vee} = dx^n \wedge x^{n-1} \ldots \wedge x^1$, les x^i désignant les formes coordonnées sur l'espace vectoriel E de dimension n , E étant rapporté à une base. Les formes coordonnées dans E' , rapporté à la base duale, sont notées $\xi_1 , \ldots , \xi_n$. Avec les notations (1.12), on a donc

(5.45) $$f = x' \wedge \ldots \wedge x^n , \quad \varphi = \xi_n \wedge \xi_{n-1} \wedge \ldots \wedge \xi_1 , \quad df = \delta\varphi = dx .$$

En effet, on associe à toute forme alternée k sur E la coforme $k\,df$. Vu (5.30),

(5.46) $$\widehat{k\,df} = k(D)\widehat{df} = k\varphi .$$

Or les formules (4.21 (c)) montrent que l'application $k \longrightarrow \chi = k(D)\varphi$ de $F_A(E)$ dans $F_A(E')$ est bijective, car elle applique une base du premier espace sur une base du second. De plus, ces formules montrent que l'inverse de cette application est $\chi \longrightarrow \chi(D)f$. Or $\chi(D)f$ est la transformée de Laplace de la coforme $\chi\,d\varphi$ sur E' . D'où la définition suivante.

(5.47) <u>Définition de la transformation de Fourier et proposition.</u>

<u>On se donne un couple</u> (E , f) <u>comme dans</u> (5.39), <u>et soit</u> $\varphi \in {}^nF(E')$ <u>telle que</u> $\langle f , \varphi\rangle = 1$. <u>L'application</u> $\mathfrak{F} :\ k \longrightarrow \chi = \widehat{k\,df} = k(D)\varphi$ <u>est appelée transformation de Fourier des formes sur</u> E . <u>Cette application est bijective de</u> $F_A(E)$ <u>sur</u> $F_A(E')$, <u>et son inverse</u> $\chi \longrightarrow \chi(D)f$ <u>est la transformation de Fourier des formes sur</u> E' .

(5.48) $$\forall\ z \in E ,\quad \mathfrak{F}(\partial_z k) = z \wedge \mathfrak{F}k .$$

(5.49) $$\forall\ z \in E' ,\quad \mathfrak{F}(\xi \wedge k) = \partial_\xi(\mathfrak{F}k) .$$

En effet, la transformée de Fourier inverse de $\chi' = z \wedge \chi$ est $k' = \chi'(D)f = (z \wedge \chi)(D)f$.

Par application de (4.17), il vient

$$k' = \partial_z(\chi(D)f) = \partial_z k .$$

De même, la transformée de Fourier de $k' = \xi \wedge k$ est $\chi' = \partial_\xi \chi$. La raison de cette terminologie est que, vu (5.12), les formules réciproques

$$k \xrightarrow{\mathfrak{F}} \chi = k(D)\varphi \quad \text{et} \quad \chi \xrightarrow{\mathfrak{F}} k = \chi(D)f$$

peuvent s'écrire

(5.50) $$\begin{cases} (a) & \chi(\xi) = \int \exp(\xi \vee x)k(x)\ df(x) \\ (b) & k(x) = \int \exp(x \vee \xi)\chi(\xi)\ d\varphi(\xi) \end{cases} .$$

(5.51) PROPOSITION. - Soient g , h , k des formes alternées sur E , et soit $\xi \in E'$, $n = \dim E$.

(a) On a toujours $\int (\xi(D)k)\, df = \int (k\xi(D))\, df = 0$.

(b) On peut montrer la formule d'intégration par parties de ([1], p. 54).

$$\int g \wedge (\xi(D)h)\, df = \int (g\xi(D)) \wedge h\, df \,. \tag{5.52}$$

$$\int g \wedge (h\xi(D))\, df = (-1)^{n+1} \int (\xi(D)g) \wedge h\, df \,. \tag{5.53}$$

Preuve.

(a) resulte de (5.40) et du fait que $\deg \xi(D)k$ et $\deg k\xi(D) < n$.

(b) Pour g homogène de degré k , on a, vu (a) et (4.27),

$$0 = \int \xi(D)(g \wedge h)\, df = \int (\xi(D)g) \wedge h\, df + (-1)^k \int g \wedge (\xi(D)h)\, df \,.$$

D'où

$$\int g \wedge (\xi(D)h)\, df = (-1)^{k+1} \int (\xi(D)g) \wedge h\, df \,.$$

Or $\xi(D)g = (-1)^{k+1}\, g\xi(D)$. Donc (5.52) est prouvé si g est homogène. Par linéarité, (5.52) est démontré.

(c) Par linéarité, il suffit de montrer (5.53) si g et h sont homogènes respectivement de degrés k et ℓ . Alors, vu (4.26), on a

$$0 = \int (g \wedge h)(\xi(D))\, df = (-1)^{\ell} \int (g\xi(D)) \wedge h\, df + \int g \wedge (h\xi(D))\, df \,.$$

D'où

$$\int g \wedge (h\xi(D))\, df = (-1)^{\ell+1} \int (g\xi(D)) \wedge h\, df = (-1)^{k+\ell} \int (\xi(D)g) \wedge h\, df \,.$$

Donc (5.53) est démontré si n et $k+\ell$ sont de parités différentes. Or, si $\deg g = k$, $\deg h = \ell$, $k+\ell$ et n étant de même parité, la formule (5.53) est encore vraie, car alors ses deux membres sont nuls !!

6. Formules de Taylor pour les formes extérieures.

Soit $\sigma = S$ ou A . On va donner pour les formes σ-symétriques deux formules de Taylor, ces formules se réduisant à la formule bien connue dans le cas particulier où $\sigma = S$.

On précise d'abord la dualité entre

$$F_\sigma(E\,,\, E'^k_\sigma) = F_\sigma(E) \check{\otimes} E'^k_\sigma \quad \text{et} \quad F_\sigma(E'\,,\, E^k_\sigma) = F_\sigma(E') \hat{\otimes} E^k_\sigma$$

qui a servi en (4.37) pour définir, en (4.37), les dérivées globales à droite ou à gauche d'une forme. Cette dualité est la dualité entre produits tensoriels, canoniquement associée à la dualité $\langle\ ,\ \rangle$ entre $F_\sigma(E)$ et $F_\sigma(E')$, et à la dualité $\langle\ ,\ \rangle_k$ entre E'^k_σ et E^k_σ . On rappelle que tout $f_\ell \in \bigodot_\ell E'$ est identifié à la fo forme homogène suivante sur E

$$(x_1\,;\,\ldots\,;\,x_\ell) \longrightarrow \langle x_1 \bigcirc \cdots \bigcirc x_\ell\,,\, f_\ell\rangle_{\ell,us} \,.$$

On vérifie alors que, $\forall\ (k\ ,\ \ell)$, et $f_\ell \in {}^\ell F_\sigma(E)$, $D^k f_\ell = 0 = f_\ell D^k$ si $k > \ell$, tandis que si $k \leqslant \ell$, quels que soient $x_1 , \dots , x_{\ell-k}$ dans E , et $y_1 , \dots , y_k$ E , on a

$$(6.1)\quad (\ell - k)!\ \langle y_k \bigcirc \cdots \bigcirc y_1\ ,\ D^k f_\ell(x_{\ell-k} , \dots , x_1)\rangle_{k,us}$$
$$= (\ell - k)!\ \langle D^k f_\ell\ ,\ (y_1 \bigcirc \cdots \bigcirc y_k) \otimes (x_1 \bigcirc \cdots \bigcirc x_{\ell-k})\rangle$$
$$= \ell!\ f_\ell(y_1 , \dots , y_k\ ;\ x_{\ell-k} , \dots , x_1) .$$

$$(6.2)\quad (\ell - k)!\ \langle (f_\ell D^k)(x_{\ell-k} , \dots , x_1)\ ,\ y_1 \bigcirc \cdots \bigcirc y_k\rangle_{k,us}$$
$$= (\ell - k)!\ \langle f_\ell D^k\ ,\ (y_1 \bigcirc \cdots \bigcirc y_k) \otimes (x_1 \bigcirc \cdots \bigcirc x_{\ell-k}\rangle$$
$$= \ell!\ f_\ell(x_{\ell-k} , \dots , x_1\ ,\ y_1 , \dots , y_k) .$$

Si, en particulier $\sigma = S$, on retrouve la formule bien connue

$$(6.3)\qquad D^k f_\ell(x^{\ell-k})\ y^k = \frac{\ell!}{(\ell - k)!} f_\ell(x^{\ell-k}\ ,\ y^k) .$$

Dans le cas où E est de dimension finie, il est très utile de connaître les composantes de $D^k f_\ell$, si E est rapporté à une base, et si E' est rapporté à la base duale. On trouve, avec la convention des multi-indices,

$$(6.4)\qquad \overrightarrow{D^k f_\ell(x)} = \begin{cases} \sum_{|\alpha|=k;\alpha\in IS} \frac{k!}{\alpha!}\ \partial^\alpha f_\ell(x) \otimes x^\alpha\ , & \text{si } \sigma = S \\ \sum_{|\alpha|=k;\alpha\in IA} k!\ \partial^\alpha f_\ell(x) \otimes x^\alpha\ , & \text{si } \sigma = A \end{cases} .$$

Notons aussi que, pour tout couple $(f\ ,\ \varphi) \in F_\sigma(E) \times F_\sigma(E')$,

$$(6.5)\qquad \langle f\ ,\ \varphi\rangle = \textstyle\sum_{j=0}^{\infty} j!^{-1}\ \langle D^j f\ ,\ D^j \varphi\rangle .$$

Au second membre, les deux dérivées qui interviennent sont des dérivées à gauche, et la formule serait fausse en général avec des dérivées à droite. L'écriture des formules de Taylor en algèbre extérieure (même de dimension finie) présente une difficulté appréciable puisque la formule de Taylor pour les polynômes

$$(6.6)\qquad f(x + y) = \textstyle\sum_{\ell=0}^{\infty} D^\ell f(x)\ y^k$$

est considérée usuellement comme une égalité entre nombres, et une telle égalité n'a plus aucun sens en algèbre extérieure. Une première méthode pour étendre (6.6) aux formes est de considérer que le second membre de (6.6) exprime le translaté de $f(x)$ en fonction de f et de ses dérivées, mais ceci nécessite de définir le translaté d'un tenseur.

(6.7) PROPOSITION. - <u>Notons</u> $F_X(E)$ <u>l'espace de toutes les formes (à condition de croissance définie par</u> P <u>vérifiant (C1) et (C2)) sur l'espace nucléaire complet</u> E . <u>Pour tout</u> $y \in E$, <u>il existe une seule application linéaire</u> t_y <u>"bornée" de</u> $F_X(E)$ <u>ayant les propriétés suivantes</u> :

(a) $t_y = 1$;

(b) $t_y\ \xi = \xi + \langle \xi\ ,\ a\rangle$, <u>pour tout</u> ξ <u>de</u> E' ;

(c) $t_y(f \otimes g) = (t_y f) \otimes (t_y g)$, <u>pour</u> f <u>et</u> g $F_X(E)$.

De plus, t_y laisse stable $F_\sigma(E)$ et coïncide avec la translation des polynômes si $\sigma = S$. D'où la possibilité d'écrire une formule ("de Taylor") exprimant $t_y f$ en fonction de f et de ses dérivées. Nous utiliserons dans l'exposé 5 une formule de Taylor très différente. Soit toujours E nucléaire complet, P vérifiant (C1) et (C2), $\sigma = S$ ou A .

(6.8) THÉORÈME. - Pour toute $f \in F_\sigma(E)$, la forme sur $E \times E$ obtenue en transportant f par l'application

$$\begin{cases} E \longrightarrow E \times E \\ x \longmapsto (x\ ,\ x) \end{cases}$$

est notée $f(x + y)$. Alors

(6.9) $f(x + y) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \ell!^{-1} [\vec{y}^{\ell} \bigcirc D^{\ell} f(x)] = \sum_{\ell=0}^{\infty} \ell!^{-1} [(f(x)D^{\ell}) \bigcirc (\vec{y}^{\ell})^{\vee}]$,

où les séries convergent dans une partie équicontinue de $F_\sigma(E \times E)$.

Par exemple, $[\vec{y}^{\ell} \bigcirc D^{\ell} f(x)]$ désigne la forme scalaire sur E obtenue en faisant d'abord le produit σ-symétrique de la forme $\vec{y}^{\ell}$ à valeurs dans $\bigcirc_{\ell} E$, avec la forme $D^{\ell} f$ à valeurs dans $\bigcirc_{\ell}^{\vee} E'$, puis en effectuant la contraction naturelle. Cette formule coïncide avec (6.6) si $\sigma = S$, à condition d'interpréter les deux membres de (E) comme des polynômes sur $E \times E$. Dans le cas $\sigma = A$, et quand E est de dimension finie, on peut exprimer (6.9) en utilisant des coordonnées.

$$(6.10)\quad f(x + y) = \sum_{j\in IA} (y^j)^{\vee} \wedge (\partial_j f(x)) = \sum_j (f(x)\ \partial_{j^{\vee}}) \wedge y^j = \sum_j (f(x)\ \partial_j) \wedge (y^j)^{\vee} .$$

Cet exposé fait ainsi apparaître une analogie parfaite entre l'algèbre commutative relative aux polynômes, par exemple, et l'algèbre extérieure. Cette analogie, convenablement formulée comme on l'a fait ici pour pouvoir traiter des espaces de dimension quelconque, correspond à l'analogie existant entre la théorie des bosons et celle des fermions.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BEREZIN (F. A.). - The method of second quantization. - New York, Academic Press, 1966 (Pure and applied Physics, 24).

[2] BOLAND (P. J.). - Holomorphic functions on nuclear spaces, Trans. Amer. math. Soc., t. 209, 1975, p. 275-281.

[3] BOLAND (P. J.). - Malgrange theorem for entire functions on nuclear spaces, "Proceedings on infinite dimensional holomorphy", [1973, Lexington], p. 135-144. - Berlin, Springer-Verlag, 1974 (Lecture Notes in Mathematics, 364).

[4] KRÉE (P.). - Calcul symbolique et seconde quantification des fonctions sesquiholomorphes, C. R. Acad. Paris, t. 284, 1977, Série A, p. 25-28.

[5] KRÉE (P.). - Formes et coformes sur les espaces nucléaires complets, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 286, 1978, Série A (à paraître).

[6] KRÉE (P.). - Méthodes fonctorielles en analyse de dimension infinie et holomorphie anticommutative, Séminaire P. Lelong : Analyse, 1976/77. - New York, Springer-Verlag (Lecture Notes in Mathematics) (à paraître).

[7] Séminaire Paul Krée : Equations aux derivées partielles en dimension infinie, 2e année, 1975/76. - Paris, Secrétariat mathématique, 1977.

Paul KRÉE
32 rue Miollis
75015 PARIS