Séminaire Paul Krée

Bernard Lascar

Invariance par difféomorphisme d'espace de Sobolev. Espace de Sobolev d'une variété. Applications

Séminaire Paul Krée, tome 2 (1975-1976), exp. n° 7, p. 1-29
<http://www.numdam.org/item?id=SPK_1975-1976__2__A7_0>

Séminaire Paul KRÉE
(Equations aux dérivées partielles
en dimension infinie)
2e année, 1975/76, n° 7, 29 p.

INVARIANCE PAR DIFFÉOMORPHISME D'ESPACE DE SOBOLEV. ESPACE DE SOBOLEV D'UNE VARIÉTÉ. APPLICATIONS

par Bernard LASCAR

Cet article est la suite de l'exposé 11, en trois paragraphes, du Séminaire P. Krée, 1974/75. Nous en reprenons l'essentiel des outils et des notations. Nous renvoyons donc le lecteur à ce texte, ou encore aux articles [10] et [11].

4. Espaces $K^s(\mathcal{O})$.

Dans cette partie, $\mathcal{O}$ désigne un ouvert quelconque de Ω.

Définition (4.1). - On définit l'espace $K^s(\mathcal{O})$ comme l'espace vectoriel quotient de $K^s(X)$ par le sous-espace vectoriel $N = \{v \in K^s(X) \; ; \; \operatorname{supp} v \subset \complement\mathcal{O}\}$.

On définit $HSC_b^\infty(\mathcal{O})$ comme l'ensemble des restrictions à $\mathcal{O}$ des fonctions de $HSC_b^\infty(\Omega)$.

PROPOSITION (4.1). - $K^s(\mathcal{O})$ <u>est un espace de Hilbert muni de la norme</u>

$$\|u\|_s = \inf_{v|_{\mathcal{O}}=u} \|v\|_s .$$

<u>Démonstration</u>. - Il suffit de voir que N est un sous-espace fermé de $K^s(X)$. Soit $v \in K^s(X)$ avec $v_n \to v$ dans $K^s(X)$ et $\operatorname{supp} v_n \subset \complement\mathcal{O}$; comme pour toute $\varphi \in HSC_0^\infty(\mathcal{O})$,

$$(v , \varphi) = \lim_{n\to\infty} (v_n , \varphi) = 0 ,$$

on a $\operatorname{supp} v \subset \complement\mathcal{O}$.

PROPOSITION (4.2).

(i) <u>Si</u> ζ <u>appartient à</u> $HSC_b^\infty(\mathcal{O})$, <u>on définit une application linéaire continue</u> $u \to \zeta u$ <u>de</u> $K^s(\mathcal{O})$ <u>dans</u> $K^s(\mathcal{O})$ <u>par passage au quotient</u>.

(ii) $HSC^\infty(\mathcal{O})$ <u>est dense dans</u> $K^s(\mathcal{O})$.

<u>Démonstration</u>.

(i) est évident.

(ii) résulte du fait que $HSC_b^\infty(\Omega)$ est dense dans $K^s(X)$ et de la continuité de la surjection canonique $K^s(X) \to K^s(\mathcal{O})$.

PROPOSITION (4.3). - Si $t > s$, <u>on a une injection continue</u> $K^t(\mathcal{O}) \to K^s(\mathcal{O})$.

PROPOSITION (4.4). - <u>Les opérateurs</u> $\tilde{D}^j$ (<u>resp.</u> div_j) <u>déterminent par passage</u>

au quotient des opérateurs continus de $K^s(\mathcal{O})$ dans $K^{s-j}(\mathcal{O}) \hat{\otimes} \hat{\odot}_j X$ (resp. $K^s(\mathcal{O}) \hat{\otimes} \hat{\odot}_j X$ dans $K^{s-j}(\mathcal{O})$).

Démonstration. - Etudions d'abord l'opérateur $\tilde{D}^j$. Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} K^s(X) & \xrightarrow{\tilde{D}^j} & K^{s-j}(X) \hat{\otimes} \hat{\odot}_j X \\ R \downarrow & & \downarrow R \hat{\otimes} \mathrm{Id} \\ K^s(\mathcal{O}) & \xrightarrow{\tilde{D}^j} & K^{s-j}(\mathcal{O}) \hat{\otimes} \hat{\odot}_j X \end{array}$$

En effet, si $v \in K^s(X)$ et $\operatorname{supp} v \subset \complement \mathcal{O}$, on a $Rv = 0$ et également

$$(R \hat{\otimes} \mathrm{Id})\, \tilde{D}^j v = 0 ,$$

car

$$\tilde{D}^j v = \lim_{\mathfrak{J} \to I} \sum_{\beta \in \mathfrak{J}} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\beta v \,\frac{|\beta|!}{\beta!}\, e_\beta$$

la limite ayant lieu dans $K^{s-j} \hat{\otimes} \hat{\odot}_j X$, et l'on a

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\beta v = 0 .$$

Pour l'opérateur div_j

$$\begin{array}{ccc} K^s(X) \hat{\otimes} \hat{\odot}_j X & \xrightarrow{\operatorname{div}_j} & K^{s-j}(X) \\ R \hat{\otimes} \mathrm{Id} \downarrow & & \downarrow R \\ K^s(\mathcal{O}) \hat{\otimes} \hat{\odot}_j X & \xrightarrow{\operatorname{div}_j} & K^{s-j}(\mathcal{O}) \end{array}$$

l'application $R \hat{\otimes} \mathrm{Id}$ est surjective. Ce diagramme est commutatif, car si

$$(R \hat{\otimes} \mathrm{Id})\, v = 0 ,$$

si on pose $v = \sum_\beta v_\beta e_\beta$, on a $Rv_\beta = 0$, $\forall \beta$. Soit $\operatorname{supp} v_\beta \subset \complement \mathcal{O}$, d'où

$$\operatorname{supp} \operatorname{div}_j v \subset \complement \mathcal{O} \text{ et } R \operatorname{div}_j v = 0 .$$

COROLLAIRE. - Si $P(x , D) = \sum_{\ell+k\leq m} \operatorname{div}_k a_{\ell k} \tilde{D}^\ell u$, où $a_{\ell k}$ sont les restrictions à $\mathcal{O}$ de fonctions $a'_{\ell k}$ vérifiant les hypothèses de 1.13, on a alors

$$P(x , D) \text{ opère continûment } K^s(\mathcal{O}) \to K^{s-m}(\mathcal{O}) .$$

DÉFINITION (4.2). - Soit s entier positif, soit $u \in L^2(\mathcal{O})$ qui vérifie, pour toute $\zeta \in HSC_b^\infty(\Omega)$, $\zeta \equiv 0$ sur $\complement \mathcal{O}$, on a $\zeta u \in K^s(X)$, $d(\overline{\omega}, \complement\mathcal{O}) > 0$; on peut alors définir $D^j u \in L^0(\mathcal{O}, \hat{\odot}_j X)$ par $D^j u$ sur ω ouvert, $\omega \subset \mathcal{O}$, est la classe des $D^j(\zeta u)|_\omega$, où $\zeta \equiv 1$ sur un voisinage de $\overline{\omega}$ et $\operatorname{supp} \zeta \subset \mathcal{O}$.

DÉFINITION (4.3). - On définit l'espace $\mathcal{K}^s(\mathcal{O})$ pour $s \in \underset{\sim}{N}$ comme l'ensemble des éléments $u \in L^2(\mathcal{O})$ qui satisfont à l'hypothèse de la définition (4.2), et qui vérifient en outre :

$$D^j\, u \in L^2(\mathcal{O}\,,\ \hat{\odot}_j\, X) \ \underline{\text{pour}}\ \ j = 0 \dots s\ .$$

<u>On supposera que</u> $\mathcal{H}^s(\mathcal{O})$ <u>est muni de la norme</u>

$$\|u\|_s'^2 = \Sigma_{j=0}^s \int \|D^j\, u\|_j^2\, dP\ .$$

PROPOSITION (4.5). – <u>Soit</u> $s \in \underset{\sim}{N}$, <u>on a une application oontinue injective de</u> $K^s(\mathcal{O}) \hookrightarrow \mathcal{H}^s(\mathcal{O})$.

<u>Démonstration</u>. – On a $K^s(\mathcal{O}) \hookrightarrow L^2(\mathcal{O})$ et, si $u \in K^s(\mathcal{O})$, si $v \in K^s(X)$ avec $u = v|_{\mathcal{O}}$, on a $\zeta u = \zeta v \in K^s(X)$, et $D^j\, u \in L^2(\mathcal{O}\,,\ \hat{\odot}_j\, X)$ résulte alors de $D^j\, v \in L^2(\Omega\,,\ \hat{\odot}_j\, X)$ et de $D^j(\zeta u) = D^j\, \zeta v$.

PROPOSITION (4.6). – <u>Si</u> Ω_1^+ <u>est un demi-espace de</u> Ω , <u>défini par</u>

$$\Omega_1^+ = \{x \in \Omega\ ;\ \ (x \mid e_1) > 0 \ \ \underline{\text{où}}\ \ e_1 \in \Omega\}\ ,$$

alors $HSC_b^\infty(\Omega_1^+)$ est dense dans $\mathcal{H}^s(\Omega_1^+)$, $s \in \underset{\sim}{N}$.

<u>Démonstration</u>. – Avec les notations de [8], on note $f_n(\Omega_1^+) = X_n^+$, demi-espace de X_n ; comme Ω_1^+ est un ouvert cylindrique et que, $0 \leq j \leq s$, $D^j\, u \in L^2(\Omega_1^+\,,\ \hat{\odot}_j X)$, on sait d'après [6] qu'il existe une suite $u_n \in K^s(X_n^+)$ avec

$$\Sigma_{j=0}^s \int_{\Omega_1^+} \|D^j\, u - D^j\, u_n\|_j^2\, dP \to 0 \ \ \text{quand}\ \ n \to \infty\ .$$

Il suffit donc de montrer la proposition (4.6) en dimension finie. Mais comme il est évident que l'on peut supposer que le support de u est compact, on peut choisir les u_n à support compact. Comme sur un compact K les normes $\|u\|_{L^2(e^{-x^2/2})}$ et $\|u\|_{L^2(dx)}$ sont équivalentes, la méthode de convolution avec une suite régularisante de fonctions, qui gardent leur support dans $\underset{\sim}{R}_-^n$, donne une suite de fonctions de $\mathcal{D}(\overline{\underset{\sim}{R}_+^n})$ qui converge vers u dans $K^s(\underset{\sim}{R}_+^n)$.

PROPOSITION (4.7). – <u>Il existe un opérateur</u> P <u>de prolongement de</u> $\mathcal{H}^s(\Omega_1^+)$ <u>dans</u> $K^s(X)$

$$R \circ P = Id\ .$$

<u>Démonstration</u>. – On définit P sur $HSC_b^\infty(\Omega_1^+)$ par

$$u(x_1\,,\ x') \to Pu \begin{cases} u(x_1\,,\ x') & \text{si}\ \ x_1 > 0 \\ \Sigma_{k=1}^m \lambda_k\, u(-\,kx_1\,,\ x') \times \zeta(x_1) & \text{si}\ \ x_1 < 0\ , \end{cases}$$

avec

$$\Sigma_{k=1}^m \lambda_k(-\,k)^j = 1 \ \ \text{si}\ \ j = 0 \dots m-1 \ \ \text{et}\ \ m > s\ ,\ \ \zeta \in C_b^\infty(\underset{\sim}{R}) \begin{cases} \zeta = 1 & \text{si}\ \ x > -1 \\ \zeta = 0 & \text{si}\ \ x < -2 \end{cases}$$

comme dans [2].

On vérifie que, si u est XC^∞ sur Ω_1^+ , Pu est XC^m sur Ω , et

$$D^j Pu(x_1 , x') h^j = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k D^j u(-kx_1 , x')(-kh_1 , h')^j , \quad -1 < x_1 < 0 .$$

Pu a également pour dérivées des polynômes de Hilbert-Schmidt. Quant à la continuité de l'application $P : \mathcal{H}^s(\Omega_1^+) \to K^s(X)$, elle est assurée par la multiplication par la fonction ζ qui permet d'éviter la difficulté posée par le changement de variable

$$\begin{cases} y_1 = -kx_1 \\ y' = x' \end{cases} \quad \text{sur } \Omega_1^- .$$

PROPOSITION (4.8). - <u>On a</u> $K^s(\Omega_1^+) = \mathcal{H}^s(\Omega_1^+)$, <u>et leurs normes sont équivalentes</u>, $s \in \mathbb{N}$.

Ceci est une conséquence évidente des propositions 4.5 et 4.7.

Il reste à montrer que lorsque $\mathcal{O}$ est un ouvert "régulier", il y a encore identité des espaces $\mathcal{H}^s(\mathcal{O})$ et $K^s(\mathcal{O})$, ceci sera établi plus loin, et pour cela, il faut étudier l'invariance par difféomorphisme des espaces K^s.

5. Invariance par certains difféomorphismes des espaces $K^s(X)$.

Le problème de l'image par un difféomorphisme de la probabilité P a été étudié par SEGAL et par RAMER dans [15]. Comme nous avons besoin de contrôler le jacobien des difféomorphismes, nous ne pouvons pas utiliser des difféomorphismes aussi larges que ceux de [15].

On définit pour V ouvert de Ω la classe

$$R(V) = \{A \text{ fermée}, \ A \subset V , \ d(A , \complement V) > 0\} .$$

Soit V ouvert de Ω, $\alpha : V \to \Omega$, on dit que (V , α) vérifie (I) si :

(i) α est un homéomorphisme de V sur $\tilde{V} = \alpha(V)$ tel que α et α^{-1} sont lipschitziennes $\Omega \to \Omega$;

(ii) $\alpha = \mathrm{Id} + k$, où $k(V) \subset \Omega'_N$ sous-espace de dimension finie de Ω', et $\Pi_N(V)$ (extension à Ω de la projection orthogonale de X sur Ω'_N) est une partie bornée ;

(iii) $\forall j \in \mathbb{N}$, $D^j k(x) \in C_b^0(V , \hat{\odot}_j X \otimes X)$ et $x \to \|(D\alpha)^{-1}(x)\|_{\mathcal{L}(X)}$ est bornée sur V.

PROPOSITION (5.1). - <u>Si</u> (V , α) <u>vérifie (I), alors</u> $(\alpha(V) , \alpha^{-1})$ <u>vérifie aussi (I), et on a aussi</u> $(\alpha(V \cap W) , \beta \circ \alpha^{-1})$ <u>vérifie (I) si</u> (V , α) <u>et</u> (W , β) <u>vérifient (I).</u>

<u>Démonstration</u>. - Si $y = \alpha(x) = x + k(x)$, on pose

$$x = \alpha^{-1}(y) = y + k_1(y) ,$$

d'où $k_1(y) = -k(x)$, soit $k_1 = -k \circ \alpha^{-1}$, ceci montre donc que $(\alpha(V) , \alpha^{-1})$

vérifie (i) et (ii). Vérifions (iii) ; pour cela on va procéder par récurrence sur j. On pose $\alpha(V) = \tilde{V}$.

Si $j = 1$, $Dk_1(y) = -(Id + Dk(x))^{-1} \circ Dk(x)$. Comme $Dk(x) \in X \hat{\otimes} X$, on voit que $(Id + Dk(x))^{-1} - I$ appartient à $X \hat{\otimes} X$ et même, compte tenu de l'hypothèse (iii), on a

$$x \to (Id + Dk(x))^{-1} - Id \text{ appartient à } C_b^0(V, X \hat{\otimes} X),$$

mais d'après le lemme 3 comme

$$Dk_1(y) = [(Id + Dk(x))^{-1} - Id] \circ Dk(x) + Dk(x),$$

on a aussi

$$Dk_1(y) \in C_b^0(\alpha(V), X \hat{\otimes} X).$$

Supposons la propriété vraie jusqu'à l'ordre $j - 1$. Comme $k_1(y) = k \circ \alpha^{-1}(y)$, on a

$$\frac{D^j k_1(y)}{j!} = -\sum_{\ell=1\ldots j, p_1+\cdots+p_\ell=j} \frac{D^\ell k(x)}{\ell!} \left(\frac{D^{p_1}(Id + k_1)}{p_1!}, \ldots, \frac{D^{p_\ell}(Id + k_1)}{p_\ell!}\right)$$

mais

$$D^p(Id + k_1) = \begin{cases} Id + Dk_1 & \text{si } p = 1 \\ D^p k_1 & \text{si } p > 1 \end{cases}$$

si on note ici $D^0 k_1 = Id$, on peut écrire, compte tenu de la linéarité,

$$D^j k_1(y) = -Dk(x) \circ D^j k_1 + \sum_{\ell>1, j>p_j\geq 0} C_{\ell,p} D^\ell k(x) (D^{p_1} k_1, \ldots, D^{p_\ell} k_1).$$

On a donc

$$D^j k_1(y) = (Id + Dk(x))^{-1} \circ G \quad \text{où} \quad G(y) = \sum_{\ell>1, j>p_j\geq 0} C_{\ell,p} D^\ell k(x)(D^{p_1} k_1, \ldots, D^{p_\ell} k_1)$$

mais il résulte de l'hypothèse de récurrence que $G(y) \in C_b^0(\tilde{V}, X \hat{\otimes} \hat{\odot}_j X)$ en appliquant les lemmes 1 et 2 de [10]. On déduit le résultat cherché pour $D^j k_1(y)$ en utilisant le raisonnement fait ci-dessus pour $j = 1$.

Comme (iii) est évident pour $(\tilde{V}, \alpha^{-1})$, on a le résultat cherché.

Remarque. $F \in \mathbb{R}(V)$ si et seulement si, $\alpha(F) \in R(\tilde{V})$.

PROPOSITION (5.2). – *Soit* $g \in HSC_b^\infty(\Omega)$, $\operatorname{supp} g \subset V$, *si* (V, α) *vérifie* (I), *on a*

$$g \circ \alpha^{-1} \in HSC_b^\infty(\Omega) \text{ et } \operatorname{supp} g \circ \alpha^{-1} \subset \tilde{V}$$

et, en outre,

$$\|D^j g \circ \alpha^{-1}(y)\|_j < C_j \sum_{\ell=1}^j \|D^\ell g(\alpha^{-1}(y))\|_\ell, \quad \forall y \in \tilde{V}, \quad j \in \underset{\sim}{N}.$$

Démonstration. – Comme $\operatorname{supp} g \subset V$, la fonction $g \circ \alpha^{-1}$, définie sur $\tilde{V}$, se prolonge naturellement à Ω, par 0 en dehors de $\tilde{V}$.

Le fait que $g \circ \alpha^{-1}$ est XC^{∞} résulte de ce que :

$$g \circ \alpha^{-1}(y+h) = g(y+h+k_1(y+h)) = g(\alpha^{-1}(y)+\lambda) \quad \text{avec} \quad \lambda = k_1(y+h)-k_1(y)+h ,$$

et on a $\lambda \in X$ en vertu des hypothèses faites.

On a calculé

$$\frac{D^j g \circ \alpha^{-1}(y)}{j!} = \sum_{\ell=1\ldots j, p_1+\cdots+p_\ell=j} \frac{D^\ell g(\alpha^{-1}(y))}{\ell!} \left(\frac{D^{p_1}\alpha^{-1}}{p_1!}, \ldots, \frac{D^{p_\ell}\alpha^{-1}}{p_\ell!}\right) ,$$

$\alpha^{-1} = Id + k_1$, si $p = 1$, on écrit $D\alpha^{-1} = Id + Dk_1$; il suffit d'utiliser à ce propos la remarque faite dans la démonstration ci-dessus ainsi que la proposition 5.1, et on a :

$$\|D^j g \circ \alpha^{-1}(y)\|_j \leq C \sum_{\ell=1}^{j} \|D^\ell g(\alpha^{-1}(y))\|_\ell \times [\sup_{1\leq \ell \leq j} \|D^\ell k_1(y)\|_\ell]^j$$

comme les $D^\ell k_1 \in C_b^0(\tilde{V}, X \otimes \hat{\odot}_\ell X)$, on a la conclusion.

PROPOSITION (5.3). - <u>Soit</u> (V, α) <u>vérifiant</u> (I), <u>l'image de la probabilité</u> dP <u>par l'application</u> α <u>est une mesure de base</u> dP, <u>et on a</u>

(i) $\alpha(dP) = \mathfrak{J}_\alpha^{-1} \circ \alpha^{-1} dP$ <u>avec</u>

$$\mathfrak{J}_\alpha(x) = |\det(Id + Dk(x))| \exp(-\tfrac{1}{2} |k(x)|^2 - (k(x)|x))$$

(ii) $\forall j \in \underset{\sim}{N}$, $D^j \mathfrak{J}_\alpha \in C_b^0(V, \hat{\odot}_j X)$ <u>et</u> $D^j \mathfrak{J}_\alpha^{-1} \circ \alpha^{-1} \in C_b^0(\tilde{V}, \hat{\odot}_j X)$.

<u>Démonstration</u>. - (i) résulte de [12], et même, comme nos hypothèses sont plus restrictives, on pourrait le déduire du résultat de dimension finie d'une manière très élémentaire.

Pour la démonstration de (ii), nous allons étudier chaque terme séparément.

LEMME (5.1). - <u>L'application</u> $x \to D^j \det(Id + Dk(x))$ <u>appartient à</u>

$$C_b^0(V, \hat{\odot}_j X), \quad \forall j \in \underset{\sim}{N} .$$

<u>Démonstration du lemme</u>. - Soit $(e_1 \ldots e_N)$ une base orthonormale de Ω_N', on pose

$$k(x) = \sum_{i=1}^N k^i(x)\, e_i .$$

Soit P_N la projection orthogonale de Ω sur Ω_N', on a

$$\det(Id + Dk(x)) = \sum_{\sigma\in S_N} \varepsilon(\sigma) (\delta_{\sigma(1),1} + \frac{\partial k^1}{\partial x_{\sigma(1)}} \times \cdots \times (\delta_{\sigma(N),N} + \frac{\partial k^N}{\partial x_{\sigma(N)}})$$

d'où

$$\frac{D^j \det(Id + Dk(x))}{j!} = \sum_{\sigma\in S_N} \sum_{j_1+\cdots+j_N=j} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^N \frac{D^{j_i}}{j_i!} (\delta_{\sigma(i),i} + \frac{\partial k^i}{\partial x_{\sigma(i)}}) ,$$

si $j_i \geq 1$, on a

$$\|D^{j_i}(\delta_{\sigma(i),i} + \frac{\partial k^i}{\partial x_{\sigma(i)}})\|_{j_i} \leq \|D^{j_i+1} k^i\|_{j_i+1} \leq \|D^{j_i+1} k(x)\|_{j_i+1} ;$$

si $j_i = 0$, on utilise

$$|\delta_{\sigma(i),i} + \frac{\partial k^i}{\partial x_{\sigma(i)}}| \leq 1 + |\frac{\partial k_i}{\partial x_{\sigma(i)}}| \leq 1 + \|Dk(x)\|_1 .$$

Finalement, en considérant les lemmes 1 et 2, le lemme en résulte.

Si $\lambda_i(x)$ désigne les valeurs propres de $Dk(x)$, on a

$$\det(Id + Dk(x)) = \Pi_i(1 + \lambda_i) ,$$

mais

$$\|D\alpha^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} = \|(D\alpha)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \geq \sup_i \frac{1}{|1 + \lambda_i|}$$

et, d'après (ii), $\exists\, C > 0$, $|1 + \lambda_i| > C$, mais comme $Dk(x)$ est à valeur dans Ω_N' , on a

$$|\det(Id + Dk(x))| \geq C^N \text{ sur } V .$$

Comme V est connexe, on peut supposer que $\det(Id + Dk(x)) > 0$ sur V , et il résulte donc du lemme 5.1 que $|\det(Id + Dk(x))|$ et que $|\det(Id + Dk(x))|^{-1}$ vérifient également le lemme 5.1.

LEMME (5.2). - <u>L'application</u> $x \to D^j \exp(\frac{1}{2} |k(x)|^2)$ <u>appartient à</u>

$$\mathcal{C}_b^0(V , \hat{\odot}_j X) , \forall j \in \underset{\sim}{N} .$$

<u>Démonstration du lemme</u>. - La X-différentiabilité de $x \to \frac{1}{2}|k(x)|^2$ résulte de celle de k et de celle de la norme.

On a

$$\frac{1}{j!} D^j \exp\frac{1}{2}|k(x)|^2 = \sum_{\ell=1\ldots j, j_1+\ldots+j_\ell=j} \exp(\frac{1}{2}|k(x)|^2) \frac{D^{j_1}(\frac{1}{2}|k(x)|^2}{j_1!} \times \ldots \times \frac{D^{j_\ell}\frac{1}{2}|k(x)|^2}{j_\ell!}.$$

D'après l'hypothèse (iii), le terme $\exp(\frac{1}{2}|k(x)|^2)$ ne pose pas de problèmes.

Etudions donc $D^j|k(x)|^2$. Nous avons

$$\frac{1}{j!} D^j|k(x)|^2 = 2 \sum_{j_1+j_2=j, j_i>0} \frac{(D^{j_1} k \mid D^{j_2} k)}{j_1! \quad j_2!} + (k(x)|D^j k(x))$$

pour $\|(k(x)|D^j k(x))\|_j \leq |k(x)| \, \|D^j k(x)\|_j$.

Pour les autres termes, il nous faut faire une étude particulière car le produit scalaire de X n'est pas une forme bilinéaire de Hilbert-Schmidt. On écrit donc

$$D^{j_1} k = \sum_{i, |\alpha|=j_1} g_{i\alpha} e_i \otimes e_\alpha \qquad \|D^{j_1} k\|_{j_1} = \sum_{i,\alpha} |g_{i\alpha}|^2 \frac{\alpha!}{|\alpha|!}$$

$$D^{j_2} k = \sum_{i,\beta} h_{i\beta} e_i \otimes e_\beta$$

$$h \to (D^{j_1} k\, h^{j_1}, D^{j_2} k\, h^{j_2}) = \Sigma_{|\gamma|=j} h^\gamma \Sigma_{\alpha+\beta=\gamma} \Sigma_i g_{i\alpha} h_{i\beta}$$

et

$$\|(D^{j_1}k|D^{j_2}k)\|_j^2 = \Sigma_{|\gamma|=j} \frac{\gamma!}{|\gamma|!}(\Sigma_{\alpha+\beta=\gamma} \Sigma_i g_{i\alpha} h_{i\beta})^2$$

$$\leq \Sigma_{|\gamma|=\gamma} \frac{\gamma!}{|\gamma|!}[\Sigma_{\alpha+\beta=\gamma}(\Sigma_i |g_{i\alpha}|^2)^{\frac{1}{2}}(\Sigma_i |h_{i\beta}|^2)^{\frac{1}{2}}]^2 \text{ .}$$

On utilise alors

$$\frac{\gamma!}{|\gamma|!} [\Sigma_{\alpha+\beta=\gamma}(\Sigma_i |g_{i\alpha}|^2)^{\frac{1}{2}}(\Sigma_i |h_{i\beta}|^2)^{\frac{1}{2}}]^2 \leq C(j_1, j_2) \Sigma_{\gamma=\alpha+\beta}(\Sigma_i |g_{i\alpha}|^2 \frac{\alpha!}{|\alpha|!})(\Sigma_i |h_{i\beta}|^2 \frac{\beta!}{|\beta|!})$$

à cause de la remarque faite au cours de la démonstration du lemme 1, et on conclut

$$\|(D^{j_1}k|D^{j_2}k)\|_j \leq C(j_1, j_2) \|D^{j_1}k\|_{j_1} \|D^{j_2}k\|_{j_2} \text{ .}$$

Cette considération achève la démonstration du lemme 5.2. Mais comme, d'après (I) (iii), $x \to |k(x)|$ est bornée, la fonction $x \to \exp - \frac{1}{2}|k(x)|^2$ vérifie également le lemme 5.2.

LEMME (5.3). - <u>L'application</u> $x \to D^j \exp(k(x)|x)$ <u>appartient à</u>

$$C_b^0(V, \hat{\odot}_j X), \forall j \in \mathbb{N} \text{ .}$$

<u>Démonstration</u>. - Comme ci-dessus, on étudie les termes $D^j(k(x)|x)$. Soit :

$$D^j(k(x)|x)\, h^j = (x|D^j k(x)\, h^j) + (h|D^{j-1} k(x)\, h^{j-1}) \text{ .}$$

Pour chacun de ces deux termes, il faut faire une étude particulière.

$$D^{j-1} k(x) = \Sigma_{i,|\alpha|=j-1} \lambda_{i\alpha}\, e_i \otimes e_\alpha \text{ ,}$$

d'où

$$h \to (h|D^{j-1} k(x)\, h^{j-1}) = \Sigma_{|\gamma|=j} h^\gamma \Sigma_{\gamma=\alpha+(i)} \lambda_{i\alpha} \text{ .}$$

Soit

$$\|D^{j-1} k(x)|Id\|_j^2 = \Sigma_{|\gamma|=j} \frac{\gamma!}{|\gamma|!} |\Sigma_{\gamma=\alpha+(i)} \lambda_{i\alpha}|^2 \leq C(j) \Sigma_{i,\alpha} |\lambda_{i\alpha}|^2 \frac{\alpha!}{|\alpha|!}$$

comme plus haut. Soit

$$\|(D^{j-1} k(x)|Id)\|_j \leq C \|D^{j-1} k(x)\|_{j-1}$$

pour le premier terme $(x|D^j k(x)\, h^j)$, on écrit

$$D^j k(x) = \Sigma_{i=1\ldots N, |\alpha|=j} \lambda_{i\alpha}\, e_i \otimes e_\alpha$$

car $D^j k(x)\, h^j$ appartient à $\Omega_N^!$. Soit

$$(x|D^j k(x)\, h^j) = \Sigma_{1\leq i\leq N, |\alpha|=j} \lambda_{i\alpha}\, h^\alpha (x|e_i) \text{ ,}$$

d'où

$$\|(x|D^j k(x))\|_j \leq C \|D^j k(x)\|_j \times |\Pi_N(x)| \text{ ,}$$

où Π_N est la projection sur $\Omega_N^!$, et c'est en vertu de l'hypothèse (ii) de (I) que ce terme reste borné, d'où le lemme 5.2, et il est clair que l'on a également le lemme 5.2 pour $x \to \exp(-(k(x)|x))$. La preuve de la proposition (5.3) résulte alors directement des lemmes (5.1) (5.2) et (5.3) car on a montré également que $\mathfrak{J}_\alpha^{-1}$ vérifie, $\forall j \in \underset{\sim}{N}$, $D^j \mathfrak{J}_\alpha^{-1} \in C_b^0(V, \hat{\odot}_j X)$ et, en vertu de la proposition (5.1), il en est de même de $\mathfrak{J}_\alpha^{-1} \circ \alpha^{-1}$. Nous avons donc achevé la démonstration de la proposition (5.3).

Ceci nous permet de donner le théorème suivant.

THÉORÈME (5.1). - <u>Si</u> (V, α) <u>vérifie</u> (I). $\zeta \in HSC_b^\infty(\Omega)$ <u>telle que</u> $\operatorname{supp} \zeta \in R(V)$, <u>alors</u>, $\forall s \in \underset{\sim}{R}$, <u>les opérateurs</u>

$$g \in HSC_b^\infty(\Omega) \to \zeta \circ \alpha^{-1} g \circ \alpha^{-1} \quad \text{et} \quad g \to \mathfrak{J}_\alpha^{-1} \circ \alpha^{-1} (\zeta g) \circ \alpha^{-1}$$

<u>se prolongent en des opérateurs continus de</u> $K^s(X) \to K^s(X)$.

<u>Démonstration</u>. - Si $g \in HSC_b^\infty(\Omega)$, il est clair que la fonction

$$\zeta \circ \alpha^{-1}(y)\, g \circ \alpha^{-1}(y),$$

définie sur $\tilde{V}$ et prolongée par zéro en dehors de $\tilde{V}$, est dans $HSC_b^\infty(\Omega)$ et vérifie

$$\|\zeta \circ \alpha^{-1}(y)\, g \circ \alpha^{-1}(y)\|_k \leq C \|g\|_k \quad \text{si} \quad k \in \underset{\sim}{N}.$$

Par prolongement continu, puis par interpolation, on obtient pour $s \geq 0$ un opérateur $g \to g \circ \alpha^{-1} \zeta \circ \alpha^{-1}$ continu de $K^s \to K^s$. Vu la proposition (5.3), il en est de même de l'opérateur $g \to g \circ \alpha^{-1} \zeta \circ \alpha^{-1} \mathfrak{J}_\alpha^{-1} \circ \alpha^{-1}$.

Soit $v \in K^{-s}(X)$, on définit un opérateur continu $K^{-s} \to K^{-s}$ par

$$(\ell(v), g) = (v, g \circ \alpha^{-1} \zeta \circ \alpha^{-1})$$

qui s'écrit lorsque $v \in HSC_b^\infty(\Omega)$:

$$(\ell(v), g) = \int g \circ \alpha^{-1} \zeta \circ \alpha^{-1} v(y)\, dP(y) = \int_V g(x) \zeta(x) \mathfrak{J}_\alpha(x)\, v \circ \alpha(x)\, dP(x).$$

Soit

$$\ell(v) = \zeta(x) \mathfrak{J}_\alpha\, v \circ \alpha, \; v \in HSC_b^\infty,$$

et donc

$$\|\zeta\, v \circ \alpha\, \mathfrak{J}_\alpha\|_{-s} \leq C \|v\|_{-s}.$$

De même,

$$\|\zeta\, v \circ \alpha\|_{-s} \leq C \|v\|_{-s}, \quad s \in \underset{\sim}{R}^+, \quad v \in HSC_b^\infty(\Omega).$$

Remplaçant maintenant ζ par $\zeta \circ \alpha^{-1}$, α par α^{-1}, V par $\tilde{V}$, on obtient le résultat du théorème (5.1), $\forall s \in \underset{\sim}{R}$. Pour se débarasser de la fonction de troncature ζ, on introduit les définitions suivantes :

<u>Définition</u> (5.1). - Soit V un ouvert de Ω ; on définit

$$HSC_b^\infty(V^O) = \{f \in HSC_b^\infty(\Omega) \ ; \ \text{supp } f \in R(V)\} \ ,$$

puis

$$\hat{K}^s(V) = \{u \in K^s(X) \ ; \ \text{supp } u \in R(V)\} \ ,$$

muni de la topologie limite inductive associée. On note par $\check{K}^s(V)$ le dual de $\hat{K}^{-s}(V)$.

PROPOSITION (5.4). – $HSC_b^\infty(V^O)$ <u>est dense dans</u> $\hat{K}^s(V)$. $\check{K}^s(V)$ <u>est l'espace des formes linéaires</u> u <u>sur</u> $HSC_b^\infty(V^O)$ <u>telles que</u>, $\forall \varphi \in HSC_b^\infty(V^O)$, $\varphi u \in K^s(X)$.

Soit $u \in \hat{K}^s(V)$, $u_n \in HSC_b^\infty(\Omega)$, $u_n \to u$ dans K^s , soit $\zeta \equiv 1$ sur un voisinage du support de u , $\zeta \in HSC_b^\infty(V^O)$, alors $\zeta u = u$ et $\zeta u_n \to u$ dans K^s .

Soit $u \in \check{K}^s(V)$, $\varphi \in HSC_b^\infty(V^O)$, l'application $g \in HSC_b^\infty(\Omega) \to (u , \varphi g)$ est continue pour la norme de $K^{-s}(X)$, soit $\varphi u \in K^s(X)$. Réciproquement, soit ℓ une forme linéaire sur $HSC_b^\infty(V^O)$ telle que $\varphi\ell \in K^s$, c'est-à-dire $g \in HSC_b^\infty(\Omega)$, $|(\ell , \varphi g)| \leq C_\varphi \|g\|_{-s}$. Soit $g \in HSC_b^\infty(V^O)$, supp $g \subset A$, soit $\varphi \in HSC_b^\infty(V^O)$ égale à 1 sur un voisinage de A . On a $g\varphi = g$ et donc

$$|(\ell , g)| = |(\ell , \varphi g)| \leq C_A \|g\|_{-s} \ ,$$

donc ℓ se prolohge en un unique élément de $\check{K}^s(V)$.

Si V' ouvert contenu dans V , $u \in \check{K}^s(V)$ détermine par restriction à $\hat{K}^{-s}(V')$ un élément de $\check{K}^s(V')$ noté $u|V'$.

PROPOSITION (5.5). – <u>Soit</u> (V , α) <u>qui vérifie</u> (I). <u>Chacune des applications</u> $g \to g \circ \alpha^{-1}$ et $g \to g \circ \alpha^{-1} \mathfrak{J}_\alpha^{-1} \circ \alpha^{-1}$, <u>définies sur</u> $HSC_b^\infty(V^O) \to HSC_b^\infty(\tilde{V}^O)$, <u>se prolonge de</u> $\hat{K}^s(V)$ <u>vers</u> $\hat{K}^s(\tilde{V})$, $\forall s \in \mathbb{R}$.

<u>Démonstration</u>. – Soit $g \in HSC_b^\infty(V^O)$, supp $g \subset A$, soit $\zeta \in HSC_b^\infty(V^O)$, $\zeta \equiv 1$ sur un voisinage de A , $\zeta \circ \alpha^{-1}\, g \circ \alpha^{-1} = g \circ \alpha^{-1}$ a son support dans $\alpha(A)$ et vérifie $\|g \circ \alpha^{-1}\|_s \leq C_A \|g\|_s$ d'après le théorème (5.1). Ceci permet d'obtenir la proposition.

COROLLAIRE. – <u>Par transposition, on obtient un opérateur continu</u> $\check{K}^s(\tilde{V}) \to \check{K}^s(V)$, <u>noté</u> $u \to u \circ \alpha$ <u>tel que</u> $(u \circ \alpha , \varphi) = (u , \mathfrak{J}_\alpha^{-1} \varphi \circ \alpha^{-1})$ <u>pour</u> $\varphi \in HSC_b^\infty(V^O)$.

Ceci exprime une propriété d'invariance par difféomorphisme que l'on va utiliser pour définir l'espace K^s d'une variété.

6. Variétés X-C^∞ modelées sur Ω .

Nous allons définir ici des variétés qui seront les analogues des variétés bornées sans bord de $\mathbb{R}^n$.

<u>Définition</u> (6.1). – Soit S un espace topologique, on appelle <u>carte locale</u> un couple $(\mathcal{O}_\alpha , \alpha)$, où $\mathcal{O}_\alpha$ est un ouvert de S , α homéomorphisme de $\mathcal{O}_\alpha$ sur un ouvert Θ_α de Ω .

<u>Définition</u> (6.2). – Deux cartes $(\mathcal{O}_\alpha , \alpha)$ et $(\mathcal{O}_\beta , \beta)$ sont <u>compatibles</u> si $\mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta = \emptyset$ ou si le couple $(\beta(\mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta) , \alpha \circ \beta^{-1})$ vérifie les hypothèses (I).

On appelle <u>atlas</u> de S une famille de cartes compatibles telles que $S = \bigcup_\alpha \mathcal{O}_\alpha$. <u>Deux atlas sont compatibles</u> si leur réunion est un atlas.

DÉFINITION (6.2). – <u>On définit l'espace</u> $HSC_b^\infty(S)$ (<u>resp.</u> $H\tilde{S}C_0^\infty(S)$) <u>comme l'espace des fonctions sur</u> S <u>dont le forme locale est une fonction de</u> $HSC_b^\infty(\mathcal{O})$ (<u>resp.</u> $H\tilde{S}C_0^\infty(\mathcal{O})$).

Nous supposerons qu'il existe un atlas fini $S = \bigcup_\alpha \mathcal{O}_\alpha$ pour lequel il existe des $\varphi_\alpha \in HSC_b^\infty(S)$, $\operatorname{supp} \varphi_\alpha \subset \mathcal{O}_\alpha$, φ_α lipschitzienne, avec $1 = \sum_\alpha \varphi_\alpha$. Nous renvoyons à l'appendice pour une étude de cette condition. Lorsque les conditions ci-dessus sont satisfaites, nous dirons que S est une X-C^∞ variété modelée sur Ω.

DÉFINITION (6.5). – <u>Soit</u> S <u>une</u> X-C^∞ <u>variété différentiable sur</u> Ω. <u>On appel-</u> $K^s(S)$ <u>l'espace formé par les collections</u> u_α <u>où</u> $u_\alpha \in \check{K}^s(\tilde{\mathcal{O}}_\alpha)$ <u>et</u>

$$u_\beta = u_\alpha \circ (\alpha \circ \beta^{-1}) \quad \underline{\text{sur}} \quad \beta(\mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta)$$

<u>lorsque</u> $(\mathcal{O}_\alpha , \alpha)$ <u>et</u> $(\mathcal{O}_\beta , \beta)$ <u>sont deux cartes compatibles</u> (c'est-à-dire que l'image par l'application $\alpha \circ \beta^{-1}$ de la restriction de u_α à $\alpha(\mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta)$ coincide avec la restriction de u_β à $\beta(\mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta)$). <u>Nous appellerons</u> u <u>l'ensemble des</u> u_α.

Nous inspirant de [4], nous donnons le théorème suivant.

THÉORÈME (6.1). – <u>Soit</u> $\mathfrak{a}$ <u>un atlas fini de</u> S, <u>vérifiant les conditions de</u> (6.2), $\mathfrak{a} = \{(\mathcal{O}_\alpha , \alpha)\}$, <u>la donnée pour chaque</u> $(\mathcal{O}_\alpha , \alpha) \in \mathfrak{a}$ <u>d'un</u> $u_\alpha \in \check{K}^s(\tilde{\mathcal{O}}_\alpha)$ <u>avec</u> $u_\beta = u_\alpha \circ (\alpha \circ \beta^{-1})$ <u>sur</u> $\beta(\mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta)$ <u>pour</u> $(\mathcal{O}_\beta , \beta) \in \mathfrak{a}$ <u>détermine un, et un seul, élément de</u> $K^s(S)$.

<u>Démonstration</u>. – On prouve d'abord le lemme suivant.

LEMME. – <u>L'hypothèse</u> (6.2) <u>implique qu'il existe un atlas</u> $(\alpha , \mathcal{O}_\alpha)$, $\bigcup_\alpha \mathcal{O}_\alpha = S$ <u>et des fonctions</u> $\zeta_\alpha \in HSC_b^\infty(S) \cap \operatorname{Lip}(S)$ <u>avec supp</u> $\zeta \subset \mathcal{O}_\alpha$ <u>et même</u>

$$\operatorname{supp} \zeta_\alpha \circ \alpha^{-1} \in R(\tilde{\mathcal{O}}_\alpha)$$

<u>telles que</u> $\sum_{\alpha \in \mathfrak{a}} \zeta_\alpha = 1$ <u>sur</u> S.

<u>Démonstration du lemme</u>. – L'hypothèse (6.2) affirme qu'il y a un atlas $(\alpha , \mathcal{O}_\alpha)$, $\bigcup_\alpha \mathcal{O}_\alpha = S$ et $\varphi_\alpha \in HSC_b^\infty(S) \cap \operatorname{Lip} S$, $\operatorname{supp} \varphi_\alpha \subset \mathcal{O}_\alpha$, $\sum_{\alpha \in \mathfrak{a}} \varphi_\alpha = 1$. Soit N le nombre d'ouverts qui interviennent dans $\mathfrak{a}$, η et η' nombres > 0 tels que $\eta < \eta' < \frac{1}{N}$,

$$\mathcal{U}_{\alpha,\eta'} = \{x \in S \ ; \ \varphi_\alpha(x) > \eta'\} , \quad \mathcal{U}_{\alpha,\eta} = \{x \in S \ ; \ \varphi_\alpha(x) > \eta\} ,$$

il est clair que $\mathcal{U}_{\alpha,\eta'}$ et $\mathcal{U}_{\alpha,\eta}$ ouverts, $\overline{\mathcal{U}}_{\alpha,\eta'} \subset \mathcal{U}_{\alpha,\eta} \subset \overline{\mathcal{U}}_{\alpha,\eta} \subset \mathcal{O}_\alpha$, $\bigcup_\alpha \mathcal{U}_{\alpha,\eta'} = S$

(sinon $x \in S$, $\varphi_\alpha(x) \leq \eta'$, $\forall \alpha$, donc $1 = \sum_\alpha \varphi_\alpha(x) \leq N\eta'$ impossible).

$$V_{\alpha,\eta'} , V_{\alpha,\eta} = \alpha(\mathcal{U}_{\alpha,\eta'}) \quad (\text{resp. } \alpha(\mathcal{U}_{\alpha,\eta})) .$$

$\varphi_\alpha \circ \alpha^{-1} > \eta'$ sur $V_{\alpha,\eta'}$; $\varphi_\alpha \circ \alpha^{-1} > \eta$ sur $V_{\alpha,\eta}$; $\operatorname{supp}(\varphi_\alpha \circ \alpha^{-1}) \subset \tilde{\mathcal{O}}_\alpha$,

$\varphi_\alpha \circ \alpha^{-1}$ est lipschitzienne, donc $d(\overline{V}_{\alpha,\eta'} , V^c_{\alpha,\eta}) > 0$ et aussi

$$d(\overline{V}_{\alpha,\eta} , \tilde{\mathcal{O}}^c_\alpha) > 0 .$$

On construit ainsi

$$\psi_\alpha \in HSC^\infty_b(\tilde{\mathcal{O}}^0_\alpha) \cap \mathrm{Lip}(\Omega) , \quad \psi_\alpha \equiv 1 \text{ sur } \overline{V}_{\alpha,\eta'} , \quad \operatorname{supp} \psi_\alpha \subset V_{\alpha,\eta} .$$

Soit $\zeta'_\alpha = \psi_\alpha \circ \alpha^{-1}$. On voit que

$$\zeta'_\alpha = 1 \text{ sur } \mathcal{U}_{\alpha,\eta'} , \quad \operatorname{supp} \zeta'_\alpha \subset \mathcal{U}_{\alpha,\eta} , \quad \zeta' = \sum_{\alpha\in\mathfrak{A}} \zeta'_\alpha \geq 1 \text{ sur } S$$

puisque $\bigcup_{\alpha\in\mathfrak{A}} \mathcal{U}_{\alpha,\eta'} = S$. On pose $\zeta_\alpha = \zeta'_\alpha / \sum_{\alpha\in\mathfrak{A}} \zeta'_\alpha$. Ceci prouve le lemme.

Soit $(\psi, \mathcal{O}_\psi)$ une carte locale sur S , il faut prouver qu'il existe $\mathcal{U}_\psi$ unique dans $\check{K}^s(\mathcal{O}_\psi)$ tel que $\mathcal{U}_\psi = u_\alpha \circ (\alpha \circ \psi^{-1})$ sur $\psi(\mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\psi)$, on constate d'abord que les $u_\alpha \circ (\alpha \circ \psi^{-1})$ sont compatibles. On simplifie la notation en posant u pour $\mathcal{U}_\psi$ et u'_α pour $u_\alpha \circ (\alpha \circ \psi^{-1})$. Si $g \in HSC^\infty_b(\tilde{\mathcal{O}}^0_\psi)$, soit

$$F = \operatorname{supp} g , \quad \lambda \in \mathrm{Lip}(\Omega) \cap HSC^\infty_b(\tilde{\mathcal{O}}^0_\psi) , \quad \lambda \equiv 1$$

au voisinage de F . On a

$$\lambda = \sum_{\alpha\in\mathfrak{A}} \lambda\, \zeta_\alpha \circ \psi^{-1} , \quad \forall x \in \tilde{\mathcal{O}}_\psi$$

$\lambda\, \zeta_\alpha \circ \psi^{-1} \in HSC^\infty_b(\psi(\mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\psi)^0)$, on aura donc

$$g = \sum_{\alpha\in\mathfrak{A}} g\, \tilde{\varphi}_\alpha ; \quad \tilde{\varphi}_\alpha = \lambda(\zeta_\alpha \circ \psi^{-1}) \in HSC^\infty_b(\psi(\mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\psi)^0) .$$

Il faut voir ainsi que si $g \in HSC^\infty_b(\mathcal{O}^0_\psi)$,

$$g = \sum_{\alpha\in\mathfrak{A}} g_\alpha , \quad g_\alpha \in HSC^\infty_b(\psi(\mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\psi)^0) ,$$

on définit une forme linéaire sur $HSC^\infty_b(\tilde{\mathcal{O}}^0_\psi)$ par $(u , g) = \sum_{a\in\mathfrak{A}}(u_\alpha , g_\alpha)$ soit :

$$\sum_{\alpha\in\mathfrak{A}} g_\alpha = 0 \text{ implique } \sum_{\alpha\in\mathfrak{A}} u_\alpha(g_\alpha) = 0 .$$

Soit $F = \bigcup_\alpha(\operatorname{supp} g_\alpha) \in R(\tilde{\mathcal{O}}_\psi)$. La remarque ci-dessus permet d'écrire

$$1 = \sum_{\beta\in\mathfrak{A}} \tilde{\varphi}_\beta ; \quad \tilde{\varphi}_\beta \in HSC^\infty_b(\psi(\mathcal{O}_\beta \cap \mathcal{O}_\psi)^0) \text{ au voisinage de } F ,$$

donc

$$g_\alpha = \sum_\beta \tilde{\varphi}_\beta\, g_\alpha ; \quad \tilde{\varphi}_\beta\, g_\alpha \in HSC^\infty_b(\psi(\mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta \cap \mathcal{O}_\psi)^0) ,$$

d'où $u_\beta(\tilde{\varphi}_\beta\, g_\alpha) = u_\alpha(\tilde{\varphi}_\beta\, g_\alpha)$ et donc

$$\sum_{\alpha\in\mathfrak{A}} u_\alpha(g_\alpha) = \sum_{\beta\in\mathfrak{A}} u_\beta(\sum_\alpha g_\alpha\, \varphi_\beta) = 0 \text{ puisque } \sum_{\alpha\in\mathfrak{A}} g_\alpha = 0 .$$

On a donc bien défini u comme forme linéaire sur $HSC^\infty_b(\tilde{\mathcal{O}}^0_\psi)$. Elle appartient en fait à $\check{K}^s(\tilde{\mathcal{O}}_\psi)$, car $F \in R(\psi)$, $\exists\, \tilde{\varphi}_\alpha$ tel que $\sum_\alpha \tilde{\varphi}_\alpha = 1$ au voisinage de F

$$g = \sum_\alpha \tilde{\varphi}_\alpha\, g \Longrightarrow |(u , g)| \leq \sum_{\alpha\in\mathfrak{A}} |(u_\alpha\, \tilde{\varphi}_\alpha , g)| \leq C_F \|g\|_{-s} \quad \operatorname{supp} g \subset F .$$

L'unicité de u est par ailleurs évidente. D'où le théorème.

DÉFINITION (6.6). – Soit $(\mathcal{O}_\alpha, \alpha)$ une carte locale $\zeta \in HSC_b^\infty(S)$, $\operatorname{supp} \zeta \subset \mathcal{O}_\alpha$, $\zeta \circ \alpha \in HSC_b^\infty(\widetilde{\mathcal{O}}_\alpha^0)$ les seminormes $u \to \|\zeta u_\alpha\|_s$ définissent, lorsque ζ et α varient, une topologie séparée.

PROPOSITION (6.2). – La topologie définie ci dessus est équivalente à la topologie hilbertienne, définie par

$$\|u\|_s^2 = \Sigma_{\alpha\in\mathfrak{A}} \|\zeta_\alpha \circ \alpha^{-1} u_\alpha\|_s^2$$

où les ζ_α sont construites dans le lemme précédent et vérifient

$$\zeta_\alpha \circ \alpha^{-1} \in HSC_b^\infty(\widetilde{\mathcal{O}}_\alpha^0) .$$

Démonstration. – Soit $\zeta \in HSC_b^\infty(\widetilde{\mathcal{O}}_\lambda^0)$ et $(\mathcal{O}_\lambda, \lambda)$ une carte locale. Il s'agit de montrer qu'on peut majorer $\|\zeta u_\lambda\|_s$ par $\sum_{\alpha\in\mathfrak{A}} \|\zeta_\alpha \circ \alpha^{-1} u_\alpha\|_s$.

Reprenant la preuve du lemme, en remplaçant les φ_α par les ζ_α, on voit qu'il existe $\eta > 0$ et des fonctions η_α, $\operatorname{supp} \eta_\alpha \subset \{x \in \mathcal{O}_\alpha ; \zeta_\alpha(x) > \eta\}$, $\Sigma_{\alpha\in\mathfrak{A}}\eta_\alpha = 1$, $(\eta_\alpha \circ \alpha) \in HSC_b^\infty(\widetilde{\mathcal{O}}_\alpha^0) \cap \operatorname{Lip}(\Omega)$. Reprenant également la preuve du théorème (6.1), on voit que si $\theta \in HSC_b^\infty(\widetilde{\mathcal{O}}_\lambda^0)$, $\theta \equiv 1$ au voisinage du support de ζ, on peut exprimer ζu_λ par

$$\zeta u_\lambda = \Sigma_{\alpha\in\mathfrak{A}}\, \zeta\, \theta(\eta_\alpha \circ \lambda^{-1})\, u_\alpha \circ \alpha \circ \lambda^{-1}$$

au sens où $g \in HSC_b^\infty(\Omega)$

$$(\zeta u_\lambda , g) = \Sigma_{\alpha\in\mathfrak{A}}(u_\alpha \circ (\alpha \circ \lambda^{-1}) , g\zeta\theta(\eta_\alpha \circ \lambda^{-1}))$$

$\theta(\eta_\alpha \circ \lambda^{-1}) \in HSC_b^\infty(\lambda(\mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\lambda)^0)$, mais

$$\zeta\, \eta_\alpha \circ \lambda^{-1} = \zeta \frac{\eta_\alpha \circ \lambda^{-1}}{\zeta_\alpha \circ \lambda^{-1}} \times \zeta_\alpha \circ \lambda^{-1} , \quad \tau_\alpha = \zeta \frac{\eta_\alpha \circ \lambda^{-1}}{\zeta_\alpha \circ \lambda^{-1}} \in HSC_b^\infty(\Omega) ,$$

donc

$$\zeta u_\lambda = \Sigma_{\alpha\in\mathfrak{A}}\, \theta\, \tau_\alpha\, \zeta_\alpha \circ \lambda^{-1}\, u_\alpha \circ (\alpha \circ \lambda^{-1}) , \quad (\theta\, \zeta_\alpha \circ \lambda^{-1}) \in HSC_b^\infty(\lambda(\mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\psi)^0) .$$

L'application du théorème (4.1) donne

$$\|\zeta u_\lambda\|_s \leq C\, \Sigma_{\alpha\in\mathfrak{A}} \|\zeta_\alpha \circ \alpha^{-1} \times u_\alpha\|_s ,$$

ce qui prouve la proposition.

PROPOSITION (6.3). – L'espace $HSC_b^\infty(S)$ est dense dans $K^s(S)$.

Démonstration. – Soit $u_\alpha \in \check{K}^s(\widetilde{\mathcal{O}}_\alpha)$, $(\zeta_\alpha \circ \alpha^{-1} u_\alpha) \in K^s(X)$ et

$$\operatorname{supp}(\zeta_\alpha \circ \alpha^{-1} u_\alpha) \in R(\widetilde{\mathcal{O}}_\alpha) ,$$

on détermine donc $w_\alpha \in HSC_b^\infty(\widetilde{\mathcal{O}}_\alpha^0)$ tel que $\|w_\alpha - \zeta_\alpha \circ \alpha^{-1} u_\alpha\|_s \leq \varepsilon$.

On définit une fonction $v \in HSC_b^\infty(S)$ par $v = \Sigma_\beta (\eta_\beta/\zeta_\beta) \times (w_\beta \circ \beta)$, il lui correspond l'élément de $K^s(S)$ défini par les

$$v_\alpha = v \circ \alpha^{-1} = \sum_\beta (\eta_\beta/\zeta_\beta) \circ \alpha^{-1} w_\beta \circ \beta \circ \alpha^{-1}$$

$$\zeta_\alpha \circ \alpha^{-1}(u_\alpha - v_\alpha) = \sum_\beta \zeta_\alpha \circ \alpha^{-1} \frac{\eta_\beta \circ \alpha^{-1}}{\zeta_\beta \circ \alpha^{-1}}(w_\beta \circ \beta \circ \alpha^{-1} - \zeta_\beta \circ \alpha^{-1} u_\beta \circ \beta \circ \alpha^{-1}),$$

car

$$\zeta_\alpha \circ \alpha^{-1} u_\alpha = \sum_\beta \zeta_\alpha \circ \alpha^{-1} \eta_\beta \circ \alpha^{-1} u_\beta \circ \beta \circ \alpha^{-1} .$$

On déduit ensuite du théorème (4.1)

$$\left\|\zeta_\alpha \circ \alpha^{-1} \frac{\eta_\beta \circ \alpha^{-1}}{\zeta_\beta \circ \alpha^{-1}}(w_\beta \circ \beta \circ \alpha^{-1} - \zeta_\beta \circ \alpha^{-1} u_\beta \circ_\beta \circ \alpha^{-1})\right\|_s$$

$$\leqslant C \left\|\zeta_\alpha \circ \beta^{-1} \frac{\eta_\beta \circ \beta^{-1}}{\zeta_\beta \circ \beta^{-1}}(w_\beta - \zeta_\beta \circ \beta^{-1} u_\beta)\right\|_s \leqslant C\varepsilon .$$

Ceci prouve la proposition.

Nous arrêtons là l'étude de ces variétés pour étudier des variétés à bord et, par souci de simplification, nous étudierons seulement les ouverts $\mathcal{O}$ dont l'adhérence est une variété à bord. Il faut maintenant faire remarquer que si nous avons limité l'étude aux atlas finis, c'était pour pouvoir faire de $K^s(S)$ un espace de Hilbert, ce qui est utile pour traiter de problèmes aux limites, mais cela limite aussi les exemples. Nous donnerons, dans le paragraphe suivant, des exemples de surfaces plongées dans Ω qui vérifient nos conditions.

7. Variétés à bord plongées dans Ω .

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de Ω , on dira que $\overline{\mathcal{O}}$ est une X-C^∞ variété à bord plongée dans Ω s'il existe un nombre fini d'ouverts $(\mathcal{O}_i)_{0\leq i\leq N}$ vérifiant :

(i) $\overline{\mathcal{O}} \subset \bigcup_{i=0}^N \mathcal{O}_i$, $\overline{\mathcal{O}}_0 \subset \mathcal{O}$, $\Gamma = \partial\mathcal{O} \subset \bigcup_{i=1}^N \mathcal{O}_i$.

(ii) Pour $1 \leqslant i \leqslant N$, il existe une application $\alpha_i : \mathcal{O}_i \to \tilde{\mathcal{O}}_i$ qui vérifie (I), et

$$\alpha_i(\mathcal{O} \cap \mathcal{O}_i) = \Omega_1^+ \cap \alpha_i(\mathcal{O}_i) , \quad \alpha_i(\Gamma \cap \mathcal{O}_i) = \Omega_1 \cap \alpha_i(\mathcal{O}_i) , \quad \Omega_1 = \partial\Omega_1^+ ,$$

Ω_1^+ est un demi espace défini par $\Omega_1^+ = \{x \in \Omega ; \ (x|e) > 0 , \text{ où } e \in \Omega'\}$.

(iii) Les ouverts $\overline{\mathcal{O}}^c$, $\mathcal{O}_i$, $0 \leq i \leq N$, satisfont à la condition (H) de l'appendice. De sorte qu'on peut trouver $\psi , \varphi_0 , \varphi_1 \ldots \varphi_N \in \mathrm{Lip}(\Omega) \cap HSC_b^\infty(\Omega)$,

$$\operatorname{supp} \psi \subset \overline{\mathcal{O}}^c , \quad \operatorname{supp} \varphi_i \in R(\mathcal{O}_i) , \quad 1 = \sum_{i=0}^N \varphi_i + \psi .$$

Commençons par donner quelques exemples :

1° $\mathcal{O} = \mathcal{O}_N \times {}^N\Omega$, où $\mathcal{O}_N$ est un ouvert régulier relativement compact d'un sous-espace vectoriel Ω_N de dimension finie de Ω' , $\Omega = \Omega_N \oplus {}^N\Omega$, ${}^N\Omega$ est le noyau de l'extension à Ω de la projedtion orthogonale $X \to \Omega_N$. $\mathcal{O}$ est un ouvert cylindrique régulier.

2° On considère toujours une décomposition de la forme $\Omega = \Omega_N \oplus {}^N\Omega$, soit

$$x = (x^N , x')$$

Ω^N est identifié à $\underset{\sim}{R}^N$ par le choix d'une base.

Soit $\varphi(x^N) \in C^\infty(\underset{\sim}{R}^N)$, $\zeta \in HSC_b^{\infty'}({}^N\Omega) \cap Lip({}^N\Omega)$ telle que $\zeta(x') \in [\alpha , \beta] = I \subset \underset{\sim}{R}$.

On suppose que $\{x^N \in \underset{\sim}{R}^N ; \varphi(x^N) \leq \beta_1\}$ est compact pour un $\beta_1 > \beta$, et que $(D\varphi)(x^N) \neq 0$ lorsque $\alpha_1 \leq \varphi(x^N) \leq \beta_1$, $\alpha_1 < \alpha$ et $\beta_1 > \beta$. Alors l'ensemble $\mathcal{O} = \{x \in \Omega ; \varphi(x^N) < \zeta(x')\}$ vérifie les conditions (i), (ii) et (iii).

L'hypothèse que $D\varphi(x^N) \neq 0$ au voisinage de I implique que

$$\overline{\mathcal{O}} = \{x \in \Omega ; \varphi(x^N) \leq \zeta(x')\} .$$

De plus, ceci permet de construire dans $\underset{\sim}{R}^N$ un recouvrement de

$$\{x^N ; \alpha_1 \leq \varphi(x^N) \leq \beta_1\}$$

par des ouverts relativement compacts $\mathcal{U}_i$, $1 \leq i \leq \underset{\sim}{p}$ tels qu'au voisinage de $\overline{\mathcal{U}}_i$ il existe un C^∞ difféomorphisme θ_i , $\theta_i \mathcal{U}_i \to \mathcal{U}_i$ avec $\theta_i^1(x) = \varphi(x)$.

On posera

$$\mathcal{O}_0 = \{x \in \Omega ; \varphi(x^N) < \alpha_1\} , \quad \mathcal{O}_i = \Pi_N^{-1}(\mathcal{U}_i) , \quad 1 \leq i \leq p .$$

Il est clair que

$$\overline{\mathcal{O}}_0 \subset \mathcal{O} , \quad \overline{\mathcal{O}} \subset \cup_{i=0}^p \mathcal{O}_i , \quad \partial\mathcal{O} \subset \cup_{i=1}^p \mathcal{O}_i .$$

On construit $\alpha_i(x) = \theta_i(x^N) - \zeta(x') e_i + x'$. Il est clair que $\alpha_i(x)$ est lipschitzienne. $\alpha_i^{-1}(y) = \theta_i^{-1}(y^N + \zeta(y') e_i) + y'$ est lipschitzienne sur

$$\tilde{\mathcal{O}}_i = \{(y^N , y') ; y^N + \zeta(y') e_i \in \tilde{\mathcal{U}}_i\} .$$

α_i est de la forme Id + k avec $k(\mathcal{O}_i) \subset \Omega^N = \underset{\sim}{R}^N$, $\Pi_N(\mathcal{O}_i) = \mathcal{U}_i$ partie bornée. α_i est X-C^∞ à dérivées de Hilbert-Schmidt.

$$(D\alpha_i)^{-1}(x) \, k = k' + (D\theta_i)^{-1}(x^N) \, (k_N + (D\zeta)(x') \, k' \, e_1)$$

et

$$|D\alpha_i^{-1}(x) \, k| \leq C \, |k| , \quad k \in X , \quad x \in \mathcal{U}_i .$$

On a donc vérifié (i) et (ii).

$$\mathcal{U}_0 = \{x^N ; \varphi(x^N) < \alpha_1\} , \quad \overline{\mathcal{U}} = \{x ; \varphi(x^N) \leq \beta_1\} ,$$

$\cup_{i=0}^p \mathcal{U}_i$ recouvrent $\overline{\mathcal{U}}$, $\mathcal{U}_i$ relativement compact, $\overline{\mathcal{U}}$ compact. Ceci permet de déterminer des fonctions

$\varphi_j \in C_0^\infty(\mathcal{U}_j)$, $1 \leq j \leq p$ avec $\sum_{j=0}^p \varphi_j(x) \leq 1$, et $= 1$ dans un voisinage de $\overline{\mathcal{U}}$.

On posera $\psi = 1 - \sum_{j=0}^p \varphi_j(x)$ de sorte que $\psi \in Lip$ et supp $\psi \subset \overline{\mathcal{U}}^c$. On pose

$$\theta_i(x) = \varphi_i(x^N) , \quad 0 \leq i \leq p , \quad \tau(x) = \psi(x^N) ,$$

on voit que

$$\operatorname{supp} \theta_i(x) \subset \Pi_N^{-1}(\mathcal{U}_i) = \mathcal{O}_i \ , \quad \operatorname{supp} \tau(x) \subset \Pi_N^{-1}(\overline{\mathcal{U}}^c) = (\Pi_N^{-1}(\overline{\mathcal{U}}))^c \ ,$$

mais $(\Pi_N^{-1}(\overline{\mathcal{U}}))^c \subset \overline{\mathcal{O}}^c$, et on a donc (iii).

PROPOSITION (7.1). - <u>Si</u> $\overline{\mathcal{O}}$ <u>est une</u> X-C^∞ <u>variété à bord sur</u> Ω , <u>alors</u> $\Gamma = \partial\mathcal{O}$ <u>a une structure de</u> X_1-C^∞ <u>variété différentiable modelée sur</u> Ω_1 , <u>et les</u>

$$(\mathcal{O}_i \cap \Gamma \ , \ \alpha_i|\Gamma)$$

<u>forment un atlas de</u> Γ . <u>On notera</u> $\mathcal{U}_i = \Gamma \cap \mathcal{O}_i$, $\gamma_i = \alpha_i|\Gamma$, $1 \leq i \leq N$.

<u>Démonstration</u>. - Les applications $(\gamma_i \circ \gamma_j^{-1})(x') = (\alpha_i \circ \alpha_j^{-1})(0 \ , x')$ pour $(0 \ , x') \in \alpha_j(\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j)$ ou encore $x' \in \gamma_j(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)$ vérifient en effet les conditions (I). En outre, les fonctions $\varphi_j|\Gamma$, $1 \leq j \leq N$, constituent une partition de l'unité X_1-C_b^∞ et lipschitzienne de Γ , car leur forme locale $\varphi_j|\Gamma \circ \gamma_i^{-1}$ sur $\gamma_i(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)$ est égale à $(\varphi_j \circ \alpha_i^{-1})(0 \ , x')$, $(0 \ , x') \in \alpha_i(\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j)$ qui est bien une fonction X-C_b^∞ et lipschitzienne sur Ω_1 $\alpha_i(\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j)$.

PROPOSITION (7.2). - <u>Si</u> $\overline{\mathcal{O}}$ <u>est une</u> X-C_b^∞ <u>variété qui vérifie par exemple la condition</u> 7.2° , <u>alors</u> $\Gamma = \partial\mathcal{O}$ <u>est une</u> X_1-C^∞ <u>surface au sens de V. GOODMANN</u> [1], <u>donc</u> Γ <u>a une mesure de surface</u> σ (<u>de masse finie ici</u>) <u>qui permet d'identifier</u> $K^0(\Gamma)$ <u>à</u> $L^2(\Gamma \ , \sigma)$.

<u>Démonstration</u>. - Pour $x \in \Gamma \cap \mathcal{U}_i$, $\alpha_i^1(x) = 0$, $\overline{\mathcal{O}} \cap \mathcal{U}_i$ est défini par $\alpha_i^1(x)>0$. $D\alpha_i^1(x) \in \Omega'$, car α_i^1 est X différentiable et lipschitzienne, $D\alpha_i^1(x)\, h = k_1$ si $(D\alpha_i)(x)\, h = (k_1 \ , 0)$. Soit $h = (D\alpha_i(x))^{-1}(k_1 \ , 0)$ et $|k_1| = 1$ implique $|h| < C$; soit

$$\forall\, x \in \mathcal{O}_i \ , \quad |D\alpha_i^1(x)| > \varepsilon \ .$$

On a donc bien prouvé le premier point.

Pour $y \in \mathcal{U}_i$, on pose

$$\varphi_i(y) = \alpha_i^1(y) \ , \quad n_i(y) = \frac{D\varphi_i(y)}{|D\varphi_i(y)|} = \frac{Dg(x)}{|Dg(x)|}$$

où $g(x) = \varphi(x^N) - \zeta(x')$, est un vecteur unitaire normal en x à la surface Γ . Reprenant la preuve de 7,2°, on peut effectivement supposer que, relativement à $\mathcal{U}_i$, il existe un vecteur e_k unitaire de Ω_N , tel que l'application

$$\Phi \ : \ x^N \to \varphi(x^N)\, e_k + p_k(x^N) \quad (\ p_k \text{ projection orthogonale sur } (e_k)^\perp\ )$$

soit un difféomorphisme de $\mathcal{U}_i$ sur $\Phi(\mathcal{U}_i)$ avec $|\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(x^N)| > \alpha > 0$ sur $\mathcal{U}_i$, ce qui détermine une application $\lambda(y_1 \ , \dots \ , y_N)$, définie sur $\Phi(\mathcal{U}_i)$, qui vérifie : $\varphi(y_1 \ , \dots \ , \lambda(y) \ , \dots \ , y_N) = y_k$, puis une application

$$\beta(x) = (\varphi(x^N) - \zeta(x'))\, e_k + p_k(x)$$

qui réalise un difféomorphisme de $\mathcal{O}_i = \Pi_N^{-1}(\mathcal{U}_i)$ sur

$$\tilde{\mathcal{O}}_i = \{(y_1 \ , \dots \ , y_k \ , \dots \ , y_N \ , y') \ ; \ (y_1 \ , \dots \ , y_k + \zeta(y') \ , \dots \ , y_N) \in \Phi(\mathcal{U}_i)\}$$

$$\beta^{-1}(y) = y' + y_1 e_1 + \dots + \lambda(y_1, \dots, y_k + \zeta(y'), \dots, y_N) e_k + \dots + y_N e_N ,$$

de sorte que l'application α_i, définie plus haut, est obtenue par $\alpha_i = \ell_k \beta$, où ℓ_k est l'application orthogonale qui échange les coordonnées y_1 et y_k,

$$\alpha_i(\mathcal{O}_i) = \tilde{\mathcal{O}}_i = \{(z_1,\dots,z_k,\dots,z_N,z') , (z_k,z_2,\dots,z_1 + \zeta(z'),\dots,z_N) \in \Phi(\mathcal{U}_i)\} .$$

Supposons i fixé, et abandonnons cet indice. On désigne par δ la restriction de β à Γ (par γ celle de α à Γ) de sorte que, dans $\mathcal{U} \cap \Gamma$, Γ est paramétrée par $w \in (e_k)^{\perp} = (w_1,\dots,0,\dots,w_N,w')$, $w = \delta(x)$,

$$x = \delta^{-1}(w) = w + \lambda(w_1,\dots,\zeta(w'),\dots,w_N)\, e_k$$

et $w = p_k(x)$.

Nous voulons calculer la densité dans la carte $(\Gamma \cap \mathcal{U}, \delta)$ de la mesure gaussienne canonique de surface σ. A l'aide d'un résultat de J. EELLS, nous savons que σ est obtenue par

$$\sigma = \exp(-\tfrac{1}{2}(n_x|x)^2)\, \mu(G_\Gamma , Z_\Gamma) ,$$

où n_x est le vecteur unitaire normal en x. $\mu(G_\Gamma , Z_\Gamma)$ est la mesure obtenue à l'aide de la métrique rienanienne sur Γ_x obtenue par restriction du produit scalaire de x, ζ_Γ est le champ de vecteur obtenu par projection orthogonale de x sur l'espace tangent $T_x \Gamma$. Nous allons, à l'aide du résultat de J. EALLS calculer la densité de $\mu(G_\Gamma , Z_\Gamma)$ dans la carte $(\Gamma \cap \mathcal{U}, \delta)$.

Soit

$$\delta^*(Z(x)) = Z'(w) = w - (x|n_x)\, n'_x , \quad n'_x = P_k(n_x) ;$$

pour $\delta^*(G_\Gamma)$ le calcul est plus compliqué, on obtient :

$$\delta^*(G_\Gamma) = G'_w : \quad u \in (e_k)^{\perp} \to u + \frac{(u|n'_x)\, n'_x}{|n_k|(1 + |n_k|)} \in (e_k)^{\perp} \quad \text{avec} \quad n_k = (n_x|e_k) ,$$

$$\delta^*(\mu) = \rho(w) = |\det G'_w|^{-1} \exp(-\tfrac{1}{2}(2(G'_w Z'(w) - (w|w) + |w - G'_w Z'(w)|^2)) .$$

Soit $\rho(w) = |n_k|^{-1} \exp(-\frac{1}{2} |\tau(w)|^2 + \frac{1}{2}(x|n_k)^2)$, où

$$\tau(w) = (x|e_k) = \lambda(w_1,\dots,\zeta(w'),\dots,w_N) ,$$

donc

$$\delta^*(\sigma) = |n_k|^{-1} \exp(-\tfrac{1}{2}|\tau(w)|^2)\, dP'(w) \quad (P' \text{ mesure gaussienne de } (e_k)^{\perp}) .$$

$n_k = (\partial\varphi/\partial x_k)/|D g|(\delta^{-1}(w))$, il résulte des hypothèses que $\alpha M^{-1} \leq |n_k| \leq 1$ sur $\delta(\mathcal{U} \cap \Gamma)$ où $M = \sup|Dg(x)|$, d'autre part $|\tau(w)| = |(x|e_k)|$, $x = \delta^{-1}(w)$ est borné car $\Pi_N(\mathcal{U})$ estrelativement compact. Comme nous avons vu l'hypothèse qu'un nombre fini de carte $(\Gamma \cap \mathcal{U}, \delta)$ suffit, on obtient bien $K^0(\Gamma) = L^2(\Gamma, d\sigma)$.

PROPOSITION (7.3). - <u>Soit</u> $\mathcal{O}$ <u>un ouvert de</u> Ω, $\alpha : \mathcal{O} \to \tilde{\mathcal{O}}$ <u>vérifiant</u> (I), $g \in K^s(X)$, $s \in \underset{\sim}{N}$ <u>et</u> supp $g \in R(\mathcal{O})$, <u>on a</u> $g \circ \alpha^{-1} \in K^s(X)$ <u>et</u>, $\forall\ 0 \leq j \leq s$, on a

$$(*) \quad \frac{D^j(g \circ \alpha^{-1})}{j!} = \sum_{\ell=1\ldots j, k_1+\cdots+k_\ell=j} \frac{D^\ell g(\alpha^{-1}(x))}{\ell!} \left(\frac{D^{k_1}\alpha^{-1}(x)}{k_1!}, \ldots, \frac{D^{k_\ell}\alpha^{-1}(x)}{k_\ell!}\right)$$

P presque partout dans $\hat{\odot}_j X$.

Démonstration. - Si $h \in HSC_b^\infty(\Omega)$, ceci résulte de la proposition (4.e) on peut également déduire de la proposition (4.5) que $g \circ \alpha^{-1} \in K^s(X)$ car $g \in \hat{K}^s(\mathcal{O})$, donc $g \circ \alpha^{-1} \in \hat{\tilde{K}}^s(\mathcal{O})$. L'égalité (*) résulte de ce que, si .

$$h_n \in HSC_b^\infty(\Omega), \quad \text{supp}\ h_n \in R(\mathcal{O}) \quad \text{et} \quad h_n \to g \quad \text{dans} \quad K^s,$$

on a

$$h_n \circ \alpha^{-1} \to g \circ \alpha^{-1} \quad \text{dans} \quad K^s ;$$

donc $D^j(g \circ \alpha^{-1})$ est la limite presque partout de $D^j(h_n \circ \alpha^{-1})$ au moins pour une sous-suite de h_n, mais comme l'égalité (*) a lieu pour h_n et que en prenant éventuellement encore une sous-suite, on peut supposer que $D^j h_n$ tend presque partout vers $D^j g$, $\forall\ 0 \leq j \leq \ell$, on a l'égalité (*) pour g presque partout sur Ω.

PROPOSITION (7.4). - Si $\mathcal{O}$ désigne un ouvert de Ω, $\bar{\mathcal{O}}$ étant une X-C^∞ variété à bord sur Ω, $s \in \underset{\sim}{N}$, φ_i désignant une partition de l'unité sur $\bar{\mathcal{O}}$ relative au recouvrement $(\mathcal{O}_i)_{0 \leq i \leq N}$, on a

$$u \in \mathcal{H}^s(\mathcal{O}) \iff \varphi_0 u \in K^s(X) \quad \text{et} \quad \widetilde{(\varphi_i u) \circ \alpha_i^{-1}} \in \mathcal{H}^s(\Omega_1^+),$$

et on a

$$\|u\|'_s \quad \text{est une norme équivalente à} \quad [\|\varphi_0 u\|_s^2 + \textstyle\sum_i \|\varphi_i u \circ \alpha_i^{-1}\|^2_{\mathcal{H}^s(\Omega_1^+)}]^{\frac{1}{2}}$$

($\sim$ représente le prolongement par zéro hors de $\alpha_i(\mathcal{O}_i)$ à Ω_1^+).

Démonstration. - Soit $u \in \mathcal{H}^s(\mathcal{O})$, il suffit de voir que

$$(\varphi_i u) \circ \alpha_i^{-1} \in \mathcal{H}^s(\Omega_1^+ \cap \alpha_i(\mathcal{O}_i)).$$

Soit $\zeta \in HSC_b^\infty(\Omega)$, supp $\zeta \in R(\mathcal{O})$, on a $\varphi_i \zeta u \in K^s(X)$, $\forall\ 0 \leq i \leq N$ et supp $\varphi_i \zeta u \in R(\mathcal{O})$, on applique la proposition (7.3) à $\varphi_i \zeta u$, et on en déduit que, sur $\alpha_i(\mathcal{O} \cap \mathcal{O}_i) \subset \Omega_1^+$,

$$\frac{D^j}{j!}[(\varphi_i u) \circ \alpha_i^{-1}] = \sum_{\ell=1\ldots j, k_1\ldots k_\ell} \frac{D^\ell}{\ell!}(\varphi_i u)(\alpha_i^{-1}(x)) \times \left(\frac{D^{k_1}\alpha^{-1}}{k_1!}, \ldots, \frac{D^{k_\ell}\alpha^{-1}}{k_\ell!}\right)$$

P presque partout et comme $D^\ell u \in L^2(\mathcal{O}, \hat{\odot}_\ell X)$, on en déduit que

$$D^j[(\varphi_i u) \circ \alpha_i^{-1}] \in L^2(\alpha_i(\mathcal{O} \cap \mathcal{O}_i), \hat{\odot}_j X)$$

et même

$$\int_{\Omega_1^+} \|D^j(\varphi_i u) \circ \alpha_i^{-1}\|_j^2\, dP \leq C \sum_{\ell=0}^s \int_{\mathcal{O}\cap\mathcal{O}_i} \|D^\ell u\|_\ell^2\, dP.$$

Il est clair d'autre part que $\varphi_0 u \in K^s$ et que $\|\varphi_0 u\|_s < C\|u\|_s'$. Nous avons donc établi l'implication ($\Longrightarrow$)/ Reste à établir l'autre implication. Sur Θ, on a

$$u = \varphi_0 u + \sum_{i=1}^N \psi_i[(\varphi_i u) \circ \alpha_i^{-1}] \circ \alpha_i ,$$

où $\psi_i \in HSC_b^\infty(\Omega)$, $\psi_i \equiv 1$ sur le support de φ_i, et $\operatorname{supp} \psi_i \in R(\Theta_i)$. On pose $v_i = \varphi_i u \circ \alpha_i^{-1}$, on a

$$u = \varphi_0 u + \sum_{i=1}^N \psi_i v_i \circ \alpha_i ,$$

et il suffit alors de refaire pour chaque i la démonstration que nous venons de faire pour l'implication ($\Longrightarrow$). Donc $\psi_i v_i \circ \alpha_i \in \mathscr{H}^s(\Theta \cap \Theta_i)$, et on a également une inégalité $\|\psi_i v_i \circ \alpha_i\|_s' < C \|v_i\|_s'$, on a donc l'autre implication, ainsi que l'équivalence des normes.

PROPOSITION (7.5). - Il existe un opérateur $\tilde{P}$ continu, de prolongement

$$\mathscr{H}^s(\Theta) \to K^s(X) ,$$

$s \in \underset{\sim}{N}$, si $\bar{\Theta}$ est une X-C^∞ variété à bord sur Ω, hypothèse toujours satisfaite dans la suite.

Démonstration. — Soit $P : \mathscr{H}^s(\Omega_1^+) \to K^s(X)$ construit en (4.7), on définit $\tilde{P}$ par

$$\tilde{P}u = \varphi_0 u + \sum_{i=1}^N \psi_i[P((\varphi_i u) \circ \alpha_i^{-1})] \circ \alpha_i$$

avec les notations de (7.4) et le résultat est évident.

COROLLAIRE (7.1). - Si $s \in \underset{\sim}{N}$, et $\bar{\Theta}$ X-C^∞ variété à bord sur Ω, alors

$$K^s(\Theta) = \mathscr{H}^s(\Theta)$$

et leurs normes sont équivalentes.

On avait déjà vu $K^s(\Theta) \to \mathscr{H}^s(\Theta)$, l'autre inclusion s'obtient par $R \circ \tilde{P}u$ pour $u \in \mathscr{H}^s(\Theta)$, $R : K^s(X) \to K^s(\Theta)$.

PROPOSITION (7.6). - Si $u \in K^s(X)$ et $\operatorname{supp} u \subset \bar{\Theta}$, alors u est la limite dans $K^s(X)$ d'une suite de fonctions de $HSC_b^\infty(\Omega)$ dont les supports sont contenus dans Θ.

Démonstration. - On se ramène tout d'abord à $\Theta = \Omega_1^+$ par

$$u = \varphi_0 u + \sum_{i=1}^N \psi_i[(\varphi_i u) \circ \alpha_i^{-1}] \circ \alpha_i ,$$

pour $\varphi_0 u$ la proposition est évidente. On note que $\operatorname{supp}(\varphi_i u) \in R(\Theta_i) \cap \bar{\Theta}$ et comme

$$\operatorname{supp}(\varphi_i u) \circ \alpha_i^{-1} \in \overline{\Omega_1^+} \cap R(\tilde{\Theta}_i) ,$$

si on sait obtenir le résultat pour $\Theta = \Omega_1^+$ on l'aura pour Θ à cause du théorème (5.1).

Soit donc $\Theta = \Omega_1^+$, par troncature, on peut supposer le support de u borné dans la direction e_1, les $\tau_n u = u(x_1 - h, x') \zeta(x_1 - h)$, où ζ a son support dans $\{|x_1| \leq M\}$, forment un ensemble borné avec $|h| \leq 1$ d'opérateurs de

$$K^s(X) \to K^s(X), \ \forall s \in \underset{\sim}{R};$$

en outre, $\forall u \in K^s$, $\operatorname{supp}(\tau_n u) \subset he_1 + \operatorname{supp} u$. Choisissant convenablement maintenant ζ et M, on peut supposer que $\zeta(x_1) \equiv 1$ au voisinage du support de u. Lorsque φ est une fonction de B^∞_{cyl}, $\tau_n \varphi(x)$ tend vers $\varphi\zeta$ dans K^s, $\forall s$, donc $\tau_n u \to \zeta u$ dans K^s, $\forall s$. On peut donc supposer que $\operatorname{supp} u \subset \{x_1 \geq h\}$, et il suffit alors d'utiliser le raisonnement de la proposition (5.4).

COROLLAIRE (7.2). - <u>On a</u> $K^{+\infty}(\Theta) = \bigcap_s K^s(\Theta)$, <u>où</u> $K^{+\infty}(\Theta) = K^{+\infty}(X)/\mathbb{B}$.

Il suffit de montrer ceci pour $\Theta = \Omega_1^+$, et pour cela on construit un prolongement indépendant de s, le procédé de Mittag-Leffler de [2] convient, et s'applique compte-tenu de la proposition (7.6).

PROPOSITION (7.6). - <u>Si</u> $s > \frac{1}{2}$, <u>l'application</u> $u \to u|_\Gamma$, <u>définie sur les fonctions</u> X-C^∞ <u>continues et bornées</u>, <u>se prolonge en une application continue et surjective</u> $K^s(\Theta) \to K^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

<u>Démonstration</u>. - Dans [6], il est montré que $u \to u|_\Gamma$ est continue et surjective $K^s(X) \to K^{s-\frac{1}{2}}(X_1)$.

La proposition (7.5) montre que : si u et $v \in K^s(X)$ avec $\operatorname{supp}(u - v) \subset \overline{\Omega_1^-}$, on a $u - v|_{x_1=0} = 0$ dans $K^{s-\frac{1}{2}}$, donc, pour $u \in K^s(\Omega_1^+)$,

$$\|u|_{x_1=0}\|_{s-\frac{1}{2}} = \|v|_{x_1=0}\|_{s-\frac{1}{2}} \leq C\,\|v\|_s$$

pour v quelconque dans $K^s(X)$ et $u = v|_{\Omega_1^+}$, donc

$$\|u|_{x_1=0}\|_{s-\frac{1}{2}} \leq C\,\|u\|_s .$$

Soit $u \in K^s(\Theta)$ égal à la restriction à Θ d'une fonction v de $HSC_b^{\infty\prime}(\Omega)$. On a

$$(\varphi_i u)|_\Gamma \circ \gamma_i^{-1} = (\varphi_i v) \circ \alpha_i^{-1}|_{x_1=0} \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq N ,$$

mais

$$\|u\|^2_{s-\frac{1}{2}} = \sum_i \|\varphi_i u \circ \gamma_i^{-1}\|^2_{s-\frac{1}{2}},$$

or

$$\|\varphi_i u \circ |\gamma_i^{-1}|\|_{s-\frac{1}{2}} \leq C\,\|(\varphi_i v) \circ \alpha_i^{-1}\|_{K^s}$$

mais si $w \in K^s(X)$ avec $w|_\Theta = v|_\Theta = u$, on a $\operatorname{supp}(\varphi_i(w - v) \circ \alpha_i^{-1}) \subset \overline{\Omega_1^-}$, et donc, utilisant ce qui précède,

$$\|(\varphi_i u)|_\Gamma \circ \gamma_i^{-1}\|_{s-\frac{1}{2}} \leq C\,\|w\|_s ,$$

donc

$$\|u\|_{s-\frac{1}{2}} < C\,\|u\|_s \quad \text{avec} \quad \|u\|_s = \inf_W \|w\|_s \,.$$

Pour la surjectivité, les arguments sont classiques, compte tenu de [6].

PROPOSITION (7.7). - <u>On a</u> $(K_0^s(\mathcal{O}))' = K^{-s}(\mathcal{O})$.

<u>Démonstration</u>. - Soit $u \in K^{-s}(\mathcal{O})$, $v \in K^{-s}(X)$ avec $v|_{\mathcal{O}} = u$. v définit une forme linéaire continue sur $K^s(X)$, sa restriction à $K_0^s(\mathcal{O})$ ne dépend pas du choix de v . En effet, $v|_{\mathcal{O}} = 0$ implique que $(v\,,\varphi) = 0$, $\forall\ \varphi \in HSC_0^\infty(\mathcal{O})$, donc pour $\varphi \in K_0^s(\mathcal{O})$ à cause de la proposition (7.6), d'où $K^{-s}(\mathcal{O}) \subset (K_0^s(\mathcal{O}))'$.

Réciproquement, si $\ell \in (K_0^s(\mathcal{O}))'$, par Hahn-Banach ℓ se prolonge en $\tilde{\ell} \in K^{-s}(X)$, et il suffit de montrer que $\ell|_{\mathcal{O}}$ ne dépend pas du choix du prolongement : si ℓ_1 et $\ell_2 \in K^{-s}(X)$ et si $\ell_1 - \ell_2$ est nulle sur K_0^s , alors

$$\operatorname{supp} \ell_1 - \ell_2 \subset \complement\mathcal{O} \quad \text{et} \quad \ell_1|_{\mathcal{O}} = \ell_2|_{\mathcal{O}} \,,$$

d'où $(K_0^s(\mathcal{O}))' = K^{-s}(\mathcal{O})$.

8. <u>Formule de Green</u>. <u>Problème de Dirichlet dans un ouvert</u>.

Nous donnons une formule de Green qui étend aux distributions celle de GOODMAN [1].

THEOREME (8.1). - <u>Si</u> $\mathcal{O}$ <u>désigne un ouvert de</u> Ω <u>qui vérifie l'hypothèse de la proposition</u> (7.2), <u>on a</u> :

$$(*)\ \forall\ \varphi \in K^1(\mathcal{O})\ ,\ \forall\ U \in K^1(\mathcal{O}) \hat{\otimes} X\ ,\ \int_{\mathcal{O}} (D\varphi|U)\,dP + \int_{\mathcal{O}} \varphi \operatorname{div} U\,dP = \int_\Gamma \varphi(U|n)\,d\sigma \,.$$

<u>Démonstration</u>. - Nous allons d'abord vérifier que chacun des termes est une forme bilinéaire continue sur $K^1(\mathcal{O}) \times K^1(\mathcal{O}) \hat{\otimes} X$. Pour les deux premiers termes, cela résulte du paragraphe 2, pour le troisième terme, on montre que $U \to (U|n)|_\Gamma$ est continue de $K^1(\mathcal{O}) \hat{\otimes} X$ dans $L^2(\Gamma)$, ce qui est une conséquence évidente de la proposition (7.6). Il suffit alors de considérer $U \in HSC_b^\infty(\mathcal{O}) \otimes X$ et $\varphi \in HSC_b^\infty(\mathcal{O})$, et de vérifier que les conditions de [1] sont réalisées avec $F = \varphi U$:

- F est mesurable et bornée (dans X) sur $\bar{\mathcal{O}}$, et F est X-C^1 .
- $DF(x) = \varphi DU + D\varphi U$ est bien X-continue à valeur dans $\mathcal{L}(X)$.
- $(F(x)|h)$ et $|(DF(x)|h)|$ sont dans L^2 pour $h \in X$.
- $F|_\Gamma$ est mesurable et bornée sur Γ , donc σ-intégrable.

On obtient donc (*) par passage à la limite.

<u>Remarque</u>. - Si $u \in K^2(\mathcal{O})$, on a $Du \in K^1(\mathcal{O}) \hat{\otimes} X$, et la formule (*) est alors la formule de Green pour le laplacien.

PROPOSITION (8.1). - <u>On a</u> $K_0^1(\mathcal{O}) = \{u \in K^1(\mathcal{O})\ ;\ u|_\Gamma = 0\}$.

<u>Démonstration</u>. - Il est évident que si $u \in K_0^1(\mathcal{O})$, on a $u|_\Gamma = 0$ à cause de la

proposition (7.6).

Soit $u \in K^1(\mathcal{O})$ avec $u|_\Gamma = 0$. Soit $\tilde{u}$ le prolongement de u par zéro en dehors de $\mathcal{O}$. On a $\tilde{u} \in L^2(\Omega)$, et on va montrer que $\widetilde{\widetilde{Du}} \in L^2(\Omega, X)$. Si

$$\varphi \in K^1(X) \otimes_2 X ,$$

on a

$$(\widetilde{Du}, \varphi) = -(\tilde{u}, \operatorname{div} \varphi) = -\int_{\mathcal{O}} u \operatorname{div} \varphi \, dP$$

mais si on applique le théorème (8.1), ce qui est possible car $u \in K^1(\mathcal{O})$, on a

$$(\widetilde{\widetilde{Du}}, \varphi) = \int_{\mathcal{O}} (Du, \varphi) \, dP - \int_\Gamma u (\varphi|n) \, dv ,$$

mais comme $u|_\Gamma = 0$ et que $Du \in L^2(\mathcal{O}, X)$, on a $\widetilde{\widetilde{Du}} \in L^2(\Omega, X)$, soit $\tilde{u} \in K^1(X)$.

THEOREME (8.2). - <u>Si</u> $\mathcal{O}$ <u>vérifie les hypothèses</u> (7.2), <u>alors, pour tout</u> f <u>dans</u> $K^{-1}(\mathcal{O})$, <u>le problème aux limites a une solution unique dans</u> $K^1(\mathcal{O})$:

$$-(\Delta - x \operatorname{grad})u + u = f$$

$$u|_\Gamma = 0 .$$

<u>Démonstration</u>. - Soit $a(u, v)$ la forme bilinéaire sur K_0^1, définie par

$$a(u, v) = \int (Du|Dv) \, dP + \int uv \, dP .$$

On a :

- $a(u, v)$ est bilinéaire et continue,
- $a(u, v)$ est coercive.

Donc l'opérateur A, défini par $K_0^1(\mathcal{O}) \to K^{-1}(\mathcal{O})$ pour $\langle Au, v\rangle = a(u, v)$ réalise un isomorphisme de K_0^1 sur K^{-1}, et on a

$$a(u, v) = (\widetilde{Du}|\widetilde{Dv}) + (u, v) = -(v, \operatorname{div} \widetilde{Du}) + (v, u) ,$$

car $\tilde{D}$ a pour transposé $-\operatorname{div}$, donc $A = -\operatorname{div} D + 1$, ce qui fournit le résultat.

On donne un résultat de régularité locale.

THEOREME (8.3). - <u>L'opérateur</u> $-(\Delta - x \operatorname{grad}) + 1$ <u>réalise un isomorphisme de</u> $K_0^1(\mathcal{O}) \cap \check{K}^{s+2}(\mathcal{O})$ <u>sur</u> $K^{-1}(\mathcal{O}) \cap \check{K}^s(\mathcal{O})$.

<u>Démonstration</u>. - On rappelle qu'on a prouvé dans [10] que

$$P = -(\Delta - x \operatorname{grad}) + 1$$

réalise un isomorphisme de $K^s(X)$ sur $K^{s-2}(X)$, $\forall s \in \underset{\sim}{R}$. Il s'agit de voir que, $\forall \psi \in HSC_b^\infty(\mathcal{O}^0)$, $\psi u \in K^{s+2}(X)$ si, $\forall \varphi \in HSC_b^\infty(\mathcal{O}^0)$, $\varphi Pu = \varphi f \in K^s(X)$. On va prouver que, $u \in \check{K}^{s+1}(\mathcal{O})$, $Pu \in \check{K}^s(\mathcal{O})$ implique $u \in \check{K}^{s+2}(\mathcal{O})$, la proposition s'en déduira par induction. Soit $\psi \in HSC_b^\infty(\mathcal{O}^0)$, on détermine $\varphi \in HSC_b^\infty(\mathcal{O}^0)$ telle que $\varphi \equiv 1$ au voisinage du support de ψ, donc

$$\psi P u = \psi P \varphi u + \psi P(1 - \varphi)\, u = \psi P(\varphi u) .$$

Soit $\psi P(\varphi u) \in K^s(X)$, soit $v = \varphi u$,

$$\psi P v \in K^s(X) , \quad v \in K^{s+1}(X) ,$$

mais $P\psi v = \psi P v + [P , \psi]\, v$, et on utilise le lemme suivant.

LEMME. - <u>Soit</u> $P = (\Delta - x \text{ grad})$, $\psi \in HSC_b^\infty(\Omega)$, <u>alors</u> $[P , \psi]$ <u>opère continument de</u> $K^s(X)$ <u>vers</u> $K^{s-1}(X)$, $\forall s$.

<u>Démonstration du lemme</u>. - $P = \text{div}\, D$, il suffit de voir que

$$[D , \psi] \text{ opère de } K^s \text{ vers } K^s \hat{\otimes} X , \quad \forall s \in \underset{\sim}{R} .$$

Or $[D , \psi]\, u = (D\psi)\, u$. On va prouver que

$$[D^\ell , \psi] : K^s \to K^{s-\ell+1} \hat{\otimes} \hat{\odot}_\ell X , \quad \forall \ell \in \underset{\sim}{N} .$$

$[D^\ell , \psi]\, u = \sum_{j+k=\ell, j\neq\ell} \frac{\ell!}{j!k!} D^k \psi\, D^j u$, $D^k \psi \times D^j u(x) = \text{sym}(D^k \psi(x) \otimes D^j u(x))$, posant $U = D^j u(x) \in K^{s-j} \hat{\otimes} \hat{\odot}_j X$, il nous suffit de voir que l'opérateur

$$a_k(x) : U \in \hat{\odot}_j X \to \text{sym}(D^k \psi \otimes U) \in \hat{\odot}_{j+k} X$$

opère de $K^s(X) \hat{\otimes} \hat{\odot}_j X$ dans $K^s(X) \hat{\otimes} \hat{\odot}_{j+k} X$. Ceci résulte des deux inégalités suivantes

$$\sum_{|\gamma|=p} \|\text{sym}(\partial^\gamma D^k \psi \otimes U)\|^2_{j+k} < (\sum_{|\gamma|=p} \|\partial^\gamma D^k \psi\|^2_k) \times \|U\|^2_j < C\, \|D^{k+p}\psi(x)\|^2_k\, \|U\|^2_j$$

$$\|\sum_{|\gamma|=p} \text{sym}(\partial^\gamma D^k \psi \otimes U_\gamma)\|^2_{j+k} < (\sum_{|\gamma|=p} \|\partial^\gamma D^k \psi\|_k\, \|U_\gamma\|_j)^2 < C \sum_{|\gamma|=p} \|U_\gamma\|^2_j \times \|D^{k+p}\psi(x)\|^2_k .$$

On a donc $[P , \psi]\, v \in K^s(X)$, donc $P(\psi v) \in K^s$, donc

$$\psi v \in K^{s+2}(X) \quad \text{et} \quad \psi v = \psi \varphi u = \psi u \in K^{s+2}(X) ,$$

et on a donc la proposition.

PROPOSITION (8.2). - <u>Avec les notations du théorème</u> (8.3), <u>on a également la régularité jusqu'au bord</u> :

$$- (\Delta - x \text{ grad})\, u + u = f , \quad f \in K^{-1}(\mathcal{O}) \cap L^2(\mathcal{O}) ,$$

<u>alors</u> $u \in K^2(\mathcal{O})$ <u>si</u> $\mathcal{O} = \Omega_1^+$ <u>et si</u> supp u <u>est une partie bornée de</u> $\overline{\Omega_1^+}$.

<u>Démonstration</u>. - On utilise la méthode classique. On peut également supposer que

$$\text{supp } u \subset B(\|x\| < R) \cap \overline{\Omega_1^+} .$$

On utilise les semi-groupes :

$$H_t^i u = \frac{u(x + te_i) - u(x)}{t} \quad \text{pour } i > 1 \text{ et } \Omega_1 = \{(x|e_1) = 0\} ,$$

on a

$$H_t^i u = \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x_i}(x + t\theta e_i)\, d\theta$$

d'où

$$\|H_t^i u\|_s \leq C_i \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_s \quad \text{pour} \quad s \in \underset{\sim}{R}^+$$

en raisonnant avec une fonction de troncature comme dans la proposition (7.6). On pose également

$$K_t^i v = \frac{v(x - te)\exp(-\frac{1}{2}t^2 + tx_i) - v}{t} ,$$

on a

$$K_t^i v(x) = x_i v(x) + tv(x) \int_0^1 \exp(-\frac{\theta^2 t^2}{2} + \frac{\theta t x_i}{2})(-1+(t\theta - x_i)^2)d\theta$$
$$+ \exp(-\frac{t^2}{2} + tx_i) \int_0^1 \frac{\partial v}{\partial x_i}(x - t\theta e_i)\, d\theta ,$$

et on vérife donc que

$$\|K_t^i v\|_s \leq C_i(\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\|_s + \|v\|_s) , \quad s \in \underset{\sim}{R}^+ .$$

On a évidemment

$$H_t^i u \to \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{et} \quad K_t^i v \to \frac{\partial v}{\partial x_i} + x_i v \quad \text{dans} \quad K^s \quad \text{quand} \quad t \to 0 ,$$

pour $u \in C^\infty$, et donc pour $u \in K^{s+1}$, car on a montré que, pour i fixé, on a des ensembles bornés d'opérateurs de K^{s+1} dans K^s.

On pose

$$a(u , v) = (u , v)_0 + (Du|Dv)_0 .$$

Soit

$$a(H_t^i u,v) = (H_t^i u,v) + (DH_t^i u,v) = (u,K_t^i v) + (H_t^i Du,Dv) = a(u,K_t^i v) = (f,K_t^i v) = (H_t^i f,v),$$

$\forall\, v$. On prend $v = H_t^i u$, et donc

$$\|H_t^i u\|_1^2 \leq \|H_t^i f\|_{-1} \|H_t^i u\|_1 ,$$

d'où

$$\|H_t^i u\|_1 \leq \|H_t^i f\|_{-1}$$

on fait tendre t vers zéro et on obtient

$$\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_1^2 \leq \|\frac{\partial f}{\partial x_i}\|_{-1}^2 , \quad \forall\, i > 1 .$$

Comme on a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} = f - \sum_{i>1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} ,$$

on en déduit que

$$\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\|_0^2 \leq C \|\frac{\partial u}{\partial x_1}\|_0^2 + \|f\|_0^2 + \sum_{i>1} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_1^2 .$$

Or

$$\sum_{i>1} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_1^2 \leq \sum_{i\geq 1} \|\frac{\partial f}{\partial x_i}\|_{-1}^2 \leq \|f\|_0^2 .$$

donc on a bien $u \in K^2(\Omega_1^+)$ Q. E. D.

On peut donc également résoudre des problèmes de Neumann.

Appendice

Nous étudions le problème de la construction des partitions de l'unité lipschitziennes.

PROPOSITION. - Soit E un espace métrique (resp. l'espace Ω d'un triplet de Wiener), soit $(F_i)_{i\in I^*}$ une famille finie de fermés de E tels que $\bigcap_{i\in I^*} F_i = \emptyset$. Pour qu'il existe une partition de l'unité lipschitzienne (resp. formées de fonctions de $\mathrm{Lip}(\Omega) \cap HSC_b^\infty(\Omega)$) subordonnée au recouvrement de E par les F_i^c, il faut et il suffit que (H) soit vérifiée :

(H) Il existe $I \subset I^*$ avec $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$ et des nombres $\rho_i > 0$, $i \in I$ tels que :

$$G_{i,\mathfrak{J}} = \{x \in \bigcap_{\ell\in I\setminus\mathfrak{J}\cup\{i\}} F_\ell \ ; \ \sum_{\ell\in\mathfrak{J}} \frac{d(x , F_\ell)}{\rho_\ell} \leq 1\}$$

pour $\mathfrak{J} \subset I$, $i \in I$, vérifie $d(G_{i,\mathfrak{J}} , F_i) \geq \rho_i$.

Démonstration.

1°) La condition (H) est nécessaire. Supposons $1 = \sum_{i\in I^*} \varphi_i$, $\mathrm{supp}\ \varphi_i \subset \mathcal{U}_i$. On pose $I = \{i \in I^* \ ; \ \varphi_i(x) \neq 0\}$. On a $1 = \sum_{i\in I} \varphi_i(x)$, mais $x \in F_i$, $\varphi_i(x) = 0$, donc $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$. Soit C_i la constante de Lipschitz de φ_i, on a

$$\varphi_i(x) \leq C_i\ d(x , F_i) .$$

Soit $\rho_i = \frac{1}{2C_i}$, $C_i \neq 0$, car $\varphi_i(x) \neq 0$. Soit $x \in G_{i,\mathfrak{J}}$, alors

$$\sum_{\ell\in\mathfrak{J}} \varphi_\ell(x) \leq \sum_{\ell\in\mathfrak{J}} \frac{d(x , F_\ell)}{2\rho_\ell} \leq \frac{1}{2} ,$$

d'où $\varphi_i(x) \geq \frac{1}{2}$; soit $d(x , F_i) \geq \frac{1}{2C_i} = \rho_i$, on a donc (H).

2°) La condition (H) est suffisante. Supposons (H) satisfaite, on a donc I et des nombres $\rho_i > 0$, $i \in I$. L'étape essentielle est de construire une famille $(F_i')_{i\in I}$ de fermés tels que :

$$\bigcap_{i\in I} F_i' = \emptyset \quad \text{et} \quad d(F_i'^c , F_i) > 0 .$$

Pour cela, on suppose qu'on a écrit $I = \{1 , 2 , \dots\}$, et on montre, par réccurence, qu'il est possible de construire $F_1' , \dots , F_{m-1}'$ vérifiant :

$$\mathcal{P}_{m-1} \begin{cases} d(F_\ell , F_1' \cap \dots \cap F_{m-1}' \cap \bigcap_{j\notin\{1,\dots,m-1,\ell\}} F_j) \geq \frac{\rho_\ell}{2} & \text{pour } \ell > m-1 \\ F_j \subset F_j' \\ d(F_j' , F_j) \leq \frac{\rho_j}{2j(j+1)} \end{cases}$$

Tout d'abord, on constate que (H) permet de construire, $\forall\, i \in I$, $\forall\, \mathfrak{J} \subset I$, un ouvert $H_{i,\mathfrak{I}}$ contenant $G_{i,\mathfrak{I}}$ et tel que

$$d(H_{i,\mathfrak{I}}, F_i) \geq \frac{\rho_i}{2}, \quad F_i \subset H^c_{i,\mathfrak{I}} .$$

On pose donc :

$$F'_1 = \{x \in E \; ; \; d(x, \cap_{j\geq 2} F_j) \geq \frac{\rho_1}{4}\} \cap \{x \; ; \; d(x, F_1) \leq \frac{\rho_1}{2\times 2}\} \cap \cap_{j>1} H^c_{1j} .$$

On voit que F'_1 est fermée ; $F_1 \subset F'_1$, car (H) avec $\mathfrak{I} = \emptyset$ $i = 1$ implique $d(\cap_{j\geq 2} F_j, F_1) \geq \rho_1$. Etudions $\ell > 1$, $d(F_\ell, F'_1 \cap \cap_{j\geq 2, j\neq \ell} F_j)$. Soit

$$x \in F'_1 \Longrightarrow x \in H^c_{1,\ell} \subset G^c_{1,\ell},$$

mais

$$G^c_{1\ell} = (\cap_{j\notin\{1,\ell\}} F_j)^c \cup \{x \; ; \; d(x, F_\ell) > \rho_\ell\},$$

donc

$$x \in F'_1 \cap \cap_{j\notin\{1,\ell\}} F_j \text{ implique } d(x, F_\ell) > \rho_\ell$$

et a fortiori

$$d(F_\ell, F'_1 \cap \cap_{j\notin\{1,\ell\}} F_j) \geq \frac{\rho_\ell}{2},$$

puis $d(F'_1, F_1) < \frac{\rho_1}{2\times 2}$, et on a donc vérifié $\mathcal{P}_1$.

On suppose donc construits $F'_1, \dots, F'_{m-1}$ vérifiant $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_{m-1}$. Soit

$$F'_m = \{x \in E \; ; \; d(x, F'_1 \cap \dots \cap F'_{m-1} \cap \cap_{j>m} F_j) \geq \frac{\rho_m}{4}\}$$

$$\cap \{x \; ; \; d(x, F_m) \leq \frac{\rho_m}{2m(m+1)}\} \cap \cap_{\ell>m} H^c_{m\{1,\dots,m-1,\ell\}} .$$

Tout d'abord, $F_m \subset F'_m$, car il résulte de $\mathcal{P}_{m-1}$, appliqué avec $\ell = m$, que

$$d(F_m, F'_1 \cap \dots \cap F'_{m-1} \cap \cap_{j>m} F_j) \geq \frac{\rho_m}{2},$$

et clairement $d(F'_m, F_m) \leq \frac{\rho_m}{2m(m+1)}$.

Soit $\ell > m$, on étudie $d(F_\ell, F'_1 \cap \dots \cap F'_m \cap \cap_{j\notin\{1,\dots,m,\ell\}} F_j)$, soit $x \in F'_m$ implique

$$x \in (\cap_{j\notin\{1,\dots,m,\ell\}} F_j)^c \cup \{x \,|\, \Sigma_{i=1}^{m-1} \frac{d(x, F_i)}{\rho_i} + \frac{d(x, F_\ell)}{\rho_\ell} > 1\}$$

si $x \in F'_m \cap \cap_{j\notin\{1,\dots,m,\ell\}} F_j$ nécessairement

$$\frac{d(x, F_\ell)}{\rho_\ell} > 1 - \Sigma_{i=1}^{m-1} \frac{d(x, F_i)}{\rho_i} ;$$

si x appartient en outre à $F'_1 \cap \dots \cap F'_{m-1}$,

$$d(x, F_i) \leq \frac{\rho_i}{2i(i+1)} \quad \text{si} \quad 1 \leq i \leq m-1$$

donc

$$\frac{d(x, F_\ell)}{\rho_\ell} > 1 - \frac{1}{2} \Sigma_{i=1}^{m-1} \frac{1}{i(i+1)} > 1 - \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{m}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2m} \geq \frac{1}{2},$$

soit $d(F_\ell, F'_1 \cap \dots \cap F'_m \cap \cap_{j\notin\{1,\dots,m,\ell\}} F_j) \geq \frac{\rho_\ell}{2}$. Ceci prouve $\mathcal{P}_m$.

Comme $\mathcal{P}_m$ implique $F'_1 \cap \dots \cap F'_m \cap \bigcap_{j>m} F_j = \emptyset$, on voit que $\bigcap_{i\in I} F'_i = \emptyset$ (on note que supposer I dénombrable et (F_i) localement finie suffit pour ces arguments).

$$F'^{c}_j = \{x \; ; \; d(x \,, F'_1 \cap \dots \cap F'_{j-1} \cap \bigcap_{\ell>j} F_\ell) < \frac{\rho_j}{4}\}$$

$$\cup \{x \,|\, d(x \,, F_j) > \frac{\rho_j}{2j(j+1)}\} \cup \bigcup_{\ell>j} H_{j,\{1,\dots,j-1,\ell\}} .$$

Comme $d(F_j \,, F'_1 \cap \dots \cap F'_{j-1} \cap \bigcap_{\ell>j} F_\ell) \geq \frac{\rho_j}{2}$ et que $d(H_{j,\{1\dots j-1,\ell\}} \,, F_j) \geq \frac{\rho_j}{2}$, il est clair que

$$d(F'^{c}_j \,, F_j) \geq \frac{\rho_j}{2j(j+1)} = \rho'_j .$$

On pose $\mathcal{U}'_j = F'^{c}_j$, $\mathcal{U}_j = F^c_j$. On note que $\mathcal{U}'_j \subset \mathcal{U}_j$ et que

$$d(\mathcal{U}'_j \,, \mathcal{U}^c_j) \geq \rho'_j > 0 \,, \quad \bigcup_{j\in I} \mathcal{U}'_j = E .$$

Soit $V_j = \{x \in E \; ; \; d(x \,, \mathcal{U}^c_j) > \frac{\rho'_j}{2}\}$, on a

$$\mathcal{U}'_j \subset \overline{\mathcal{U}'_j} \subset V_j \subset \overline{V}_j \subset \mathcal{U}_j \quad \text{et} \quad d(\mathcal{U}'_j \,, V^c_j) \geq \frac{\rho'_j}{2} \,, \quad d(\overline{V}_j \,, \mathcal{U}^c_j) \geq \frac{\rho'_j}{2} .$$

Soit $f_j(x) = \inf(M \,, d(x \,, V^c_j))$, où $M > \frac{\rho'_j}{2}$. f_j est lipschitzienne et bornée

$$f_j(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in V^c_j \\ > \rho'_j/2 & \text{si } x \in \mathcal{U}'_j . \end{cases}$$

Si on est dans le cas où $\Omega = E$, on régularise f_j de façon à avoir une fonction $\tilde{f}_j$ de $HSC'^{\infty}_b \cap Lip(\Omega)$ telle que

$$\tilde{f}_j(x) = \begin{cases} < \alpha & \text{sur } V^c_j \\ > \beta & \text{sur } \mathcal{U}'_j \quad \text{avec } \beta > \alpha , \end{cases}$$

considérant $\lambda \in C^\infty_b(\underset{\sim}{R})$, $\lambda \equiv 1$ si $x \geq \beta$, $\lambda \equiv 0$ si $x \leq \alpha$

$$g_j = \lambda \circ f_j \begin{cases} 0 & \text{si } x \in V^c_j \\ 1 & \text{si } x \in \mathcal{U}'_j \end{cases}$$

soit

$$\operatorname{supp} g_j \subset \overline{V}_j \subset \{d(x \,, \mathcal{U}^c_j) \geq \rho'_j/4\} \subset \mathcal{U}_j$$

et

$$g_j \in HSC^{\infty'}_b(E) \cap Lip(E) .$$

Posant $g_j \equiv 1$ sur $\mathcal{U}'_j$, $g = \sum_{j\in I} g_j$, on note que $g \in HSC^\infty_b \cap Lip(E)$ (on utilise ici seulement le fait que I est fini) et $g \geq 1$ sur E. Les fonctions $\varphi_j(x) = g_j/g$, $j \in I$, égales à 0 si $j \in I^* - I$ sont une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $(\mathcal{U}_j)_{j\in I^*}$.

Nous faisons enfin la remarque suivante.

<u>Remarque</u>. – Soit K un espace compact et $(\mathcal{U}_\ell)_{\ell\in L}$ un recouvrement ouvert de K; on trouve par Borel-Lebesgue un sous-recouvrement ouvert fini $(\mathcal{U}_i)_{i=1\dots r}$ de K, on note que l'hypothèse (H) est alors satisfaite avec $I^* = I = \{0, 1, \dots, r\}$ en posant $K = F_0$. En effet, si ce n'était pas le cas, on pourrait, en prenant

$$\rho_0 = \dots = \rho_r = \frac{1}{n},$$

construire une suite $\mathfrak{I}_n$ de parties de I, $i_n \in I$ telle que

$$d(G^n_{i_n,\mathfrak{I}_n}, F_{i_n}) < \frac{1}{n}.$$

Comme I et $\mathcal{P}(I)$ sont finies, pour $\mathfrak{I}_0 \subset I$ et $i_0 \in I$ $(i_0 \notin \mathfrak{I}_0)$ et pour une suite $n_j \to \infty$, on a

$$d(G^{n_j}_{i_0,\mathfrak{I}_0}, F_{i_0}) < \frac{1}{n_j}$$

c'est-à-dire, $\exists\, x^j \in F_{i_0}$, $y^j \in G^{n_j}_{i_0,\mathfrak{I}_0}$, $d(x^j, y^j) < \frac{1}{n_j}$.

1°) Si $i_0 = 0$, $F_{i_0} = K$ compact, la suite x^j a une valeur d'adhérence $x \in K$, et en prenant une sous-suite $x^{j_k} \to x$, $k \to \infty$, $n'_k = n_{j_k}$ et $x'^k = x^{j_k}$ $y'^k = y^{j_k}$, on a

$$y'^k \in \cap_{\ell\notin\mathfrak{I}_0\cup\{0\}} F_\ell, \quad d(y'^k, F_\ell) \leq \frac{1}{n'_k}, \quad \ell \in \mathfrak{I}_0 \quad \text{et} \quad d(x'^k, y'^k) < \frac{1}{n'_k},$$

donc

$$d(x, F_\ell) \leq \frac{1}{n'_k} + \frac{1}{n'_k} + d(x, x'^k) \quad \text{pour} \quad \ell \neq 0,$$

donc $x \in F_\ell$, $\ell \neq 0$ et $x \in K \cap \cap_{\ell\neq 0} F_\ell$ impossible.

2°) $i_0 \neq 0$.

(a) $0 \in \mathfrak{I}_0$, $d(x^j, y^j) \leq \frac{1}{n_j}$, $x^j \in F_{i_0}$, $d(y^j, K) \leq \frac{1}{n_j}$, $d(y^j, F_\ell) \leq \frac{1}{n_j}$, $\ell \in \mathfrak{I}_0$, $y^j \in \cap_{\ell\neq i_0, \ell\notin\mathfrak{I}_0} F_\ell$, on construit donc $z^j \in K$, $d(y^j, z^j) \leq \frac{1}{n_j}$, $z^{j_k} \to z \in K$. On pose

$$z'^k = z^{j_k}, \quad y'^k = y^{j_k}, \quad n'^k = n_{j_k},$$

soit

$$d(z, F_\ell) \leq \frac{2}{n'_k} + d(z'^k, z), \quad \ell \neq i_0,$$

soit $z \in F_\ell$, $\ell \neq i_0$, mais également

$$d(x'^k, z) \leq \frac{2}{n'_k} + d(z'^k, z)$$

et donc $z \in F_{i_0}$, d'où une contradiction.

(b) $0 \notin \mathfrak{I}_0$, $i_0 \neq 0$, $y^j \in \bigcap_{\ell \notin (i_0 \cup \mathfrak{I}_0)} F_\ell$, soit $y^j \in K$, d'où une sous-suite $y'^k \to y \in K$, $y \in K \cap \bigcap_{\ell \neq i_0 \cup \mathfrak{I}_0} F_\ell$, puis $\ell \in \mathfrak{I}_0$ $d(y'^k , F_\ell) < \frac{1}{n'_k}$ montre que $y \in F_\ell$, $\ell \in \mathfrak{I}_0$, soit $y \in \bigcap_{\ell \neq i_0} F_\ell$, mais $d(y'^k , F_{i_0}) \leq d(y'^k , x'^k) < \frac{1}{n'_k}$ et $y \in F_{i_0}$, soit une contradiction.

BIBLIOGRAPHIE

[1] GOODMAN (V.). - A divergence theorem for Hilbert spaces, Trans. Amer. math. Soc., t. 164, 1972, p. 411-426.

[2] GOULAOUIC (C.). - Voie d'approfondissement en équations aux dérivées partielles, Cours professé à l'Ecole Polytechnique, 1973 (multigraphié).

[3] GROSS (L.). - Potential theory of Hilbert spaces, J. funct. Anal., t. 1, 1967, p. 123-181.

[4] HÖRMANDER (L.). - Linear partial differential operators. - Berlin, Springer-Verlag, 1963 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 116).

[5] KRÉE (Mirella). - Propriété de trace en dimension infinie d'espaces du type Sobolev, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 279, 1974, Série A, p. 157-160;et article à paraitre au Bulletin de la Société mathématique de France.

[6] KRÉE (P.). - Exemples d'utilisation de la théorie des distributions et des fonctionnelles linéaires sur les espaces de Hilbert, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 278, Série A, p. 335-337.

[7] KRÉE (P.). - Application des méthodes variationnelles aux équations aux dérivées partielles sur un espace de Hilbert, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 278, 1974, Série A, p. 753-755.

[8] KRÉE (P.). - Théorie de la mesure et holomorphie en dimension infinie, Sémi-Lelong : Analyse, 1975/76 (à paraître).

[9] KRÉE (P.). - Utilisation des distributions pour l'étude des équations aux dérivéds partielles en dimension infinie, Séminaire Leray : Equations aux dérivées partielles, 1972/73, fascicule 4, n° 1, 19 p.

[10] LASCAR (B.). - Propriétés d'espaces de Sobolev en dimension infinie, Comm. in part. diff. Equat., 1976 (à paraître).

[11] LASCAR (B.). - Une C. N. S. d'ellipticité en dimension infinie, Comm. in part. diff. Equat., 1977 (à paraître).

[12] RAMER (R.). - On non linear transformations of gaussian measures, J. funct. Anal., t. 15, 1974, p. 166-187.

[13] Séminaire Schwartz : Applications radonifiantes, 1969/70. - Paris, Ecole Polytechnique, Centre de Mathématiques, 1970.

[14] TRÈVES (F.). - Topological vector spaces, distributions and kernels. - New York, Academic Press, 1967.

[15] TRÈVES (F.). - Linear partial differential equations with constant coefficients. - New York, Gordon and Breach, 1966 (Mathematics and its applications, 6).

Bernard LASCAR
Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
Plateau de Palaiseau
91128 PALAISEAU CEDEX