Paul Krée

Symboles et noyaux des opérateurs différentiels

Séminaire Paul Krée, tome 2 (1975-1976), exp. n° 1, p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=SPK_1975-1976__2__A1_0>

Séminaire Paul KREE
(Equations aux dérivées partielles
en dimension infinie)
2e année, 1975/76, n° 1, 16 p.

SYMBOLES ET NOYAUX DES OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS

par Paul KRÉE

Les champs quantiques font intervenir des opérateurs différentiels en dimension infinie et une certaine notion de symbole pour ces opérateurs.

Souvent les physiciens étudient la théorie quantique des champs (T. Q. C.) ne se soucient guère des problèmes de rigueur mathématique. En effet, suite aux travaux de SCHWINGER, DYSON, TOMAWAGA ... ces physiciens savent en utilisant les théorèmes (et surtout les techniques) de l'analyse en dimension finie, écrire des "équations", y reconnaître les termes infinis, les négliger ou les "compenser" en ajoutant des "contre-termes infinis" pour obtenir finalement des relations entre termes finis. Ils savent aussi travailler avec des "symboles", définir des produits de Wick par des passages à la limite formelle ... Or les travaux mathématiques sur les opérateurs différentiels en dimension infinie n'utilisent pas de symbole ou utilisent implicitement la même notion de symbole qu'en dimension finie. De plus, la plupart de ces travaux ne s'appliquent pas aux operateurs différentiels de la T. Q. C.

Cet exposé qui utilise un modèle physique heuristique de dimension 1 a pour but de montrer que la notion usuelle de symbole des opérateurs différentiels est inadaptée à la T. Q. C. Une nouvelle notion de symbole est construite, des techniques nouvelles permettant une méthode générale de seconde quantification, une définition générale et rigoureuse des produits de Wick, des calculs de moyenne de champs à l'aide d'une formule de dualité sont introduites. Il est donné un exemple montrant comment l'emploi de la notion usuelle de symbole en T. Q. C. introduit un terme infini.

La présentation complète de ces résultats ([13][16][17]) avec le vrai modèle physique de dimension infinie n'est pas effectuée ici, car ceci nécessiterait des préliminaires concernant la physique, et surtout des outils mathématiques dont certains seulement sont présentés dans les exposés 3 à 6 du présent séminaire. Dans ces conditions, le but essentiel visé est de servir d'introduction heuristique à [16][17] et [19], de motiver l'orientation du présent séminaire.

Les résultats de cet exposé sont vrais en dimension quelconque. Ils sont exposés en dimension 1, car, en plus de la simplicité, il y a d'autres avantages :

(a) On voit mieux comment les techniques, introduites pour manier ces nouveaux symboles, sont nouvelles, même en dimension finie, et comment elles permettent de résoudre quelques problèmes d'analyse en dimension finie, posés par la physique.

(b) L'emploi extensif de coordonnées en théorie des équations aux dérivées partielles, conduit à des écritures non intrinsèques, parfois compliquées. Or, en dimension quelconque (infinie même), on peut toujours choisir des notations, pour tout écrire comme en dimension 1.

1. Règle de quantification de H. WEYL et symbole usuel des opérateurs différentiels.

Intuitivement, la T. Q. C. concerne la théorie quantique des systèmes physiques ayant un nombre infini de degrés de liberté. Pour commencer, il est peut être utile de faire quelques rappels concernant la théorie quantique des systèmes ayant un nombre fini n de degrés de liberté : voir l'exposé 2. Dans le cas simple, un observable classique est une fonction $q , p \to \Phi(q , p)$, définie sur $(\underset{\sim}{R}^n) \times (\underset{\sim}{R}^n)^*$. L'observable quantique, associé à Φ, est un opérateur autoadjoint $\hat{\Phi}$ de l'espace de Hilbert $L^2(\underset{\sim}{R}^n)$. L'opération consistant à passer de Φ à $\hat{\Phi}$ est appelée première quantification. Par exemple, pour $j = 1 , \dots , n$,

$$\Phi(q , p) = q_j \Longrightarrow \hat{\Phi} = Q_j = \text{multiplication par la coordonnée } q_j ,$$

$$\Phi(q , p) = p_j \Longrightarrow \hat{\Phi} = P_j = \frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{\partial}{\partial q_j} .$$

Pour simplifier l'écriture, on suppose dès lors $n = 1$, et l'on écrit respectivement Q et P au lieu de Q_1 et P_1. Les opérateurs iQ et iP sont générateurs infinitésimaux des groupes unitaires (t réel) :

(1.1) $$e^{itQ} : g \to e^{itq} g(q)$$

(1.2) $$e^{itP} : g \to g(q + t) .$$

On a $[Q , P] = QP - PQ = i$.

Quels que soient p' et q' réels, on pose

$$e^{i(p'Q-q'P)} = e^{-i(p'q'/2)} e^{ip'Q} e^{-iq'P} .$$

Ceci peut être "justifié" par la formule de Campbell-Hausdorf donnant en particulier l'expression de l'exponentielle de la somme de deux matrices carrées A et B, qui commutent avec leur crochet :

$$\exp(A + B) = \exp A \exp B \exp(- 1/2[A , B]) .$$

La règle de quantification de H. WEYL quantifie l'observable

$$q , p \to \exp i(p'q - q'p)$$

en l'opérateur $\exp i(p'Q - q'P)$. Or la T. F. montre que toute fonction $\Phi(q , p)$ est une "superposition" de telles fonctions exponentielles :

$$\Phi(q , p) = (2\pi)^{-1} \iint_{\underset{\sim}{R}^2} e^{i(p'q-q'p)} \tilde{\Phi}(p' , q') \, dp' \, dq' .$$

Par linéarité, H. WEYL a été amené à quantifier Φ en

(1.3) $$\hat{\Phi} = (2\pi)^{-1} \iint_{\underset{\sim}{R}^2} e^{i(p'Q-q'P)} \tilde{\Phi}(p' , q') \, dp' \, dq' .$$

Prenons, par exemple, $\Phi \in \mathcal{O}_M(\underset{\sim}{R}^2)$, d'où $\tilde{\Phi} \in \mathcal{O}'_C(\underset{\sim}{R}^2)$. Cette formule heuristique signifie précisément que, pour $f \in \mathcal{D}(\underset{\sim}{R})$, $\hat{\Phi}f$ est la fonction suivante

$$(1.4)\qquad \begin{aligned}(\hat{\Phi}f)(q) &= (2\pi)^{-1}\iint e^{-i(p'q'/2)}(e^{ip'Q}\, e^{-iq'P} f)\, d\tilde{\Phi}(p'\,,\,q') \\ &= (2\pi)^{-1}\iint e^{-i(p'q'/2)+ip'q} f(q-q')\, d\tilde{\Phi}(p'\,,\,q')\,.\end{aligned}$$

Par exemple, les fonctions $\Phi = q$, $\Phi = p$ et $\Phi = p^2 + q^2$ sont respectivement quantifiées en Q , P et $-(d^2/dq^2) + q^2$.

(1.5) Relation avec les o. p. d. classiques ([8][10]). — Voici une autre manière d'associer un opérateur à une fonction. Si à l'exponentielle

$$(q\,,\,p) \to \exp(-i(p'q - q'p))$$

est associé l'opérateur $e^{ip'Q}\, e^{-iq'P}$, on est amené par linéarité à associer à Φ l'opérateur

$$(1.6)\qquad \mathrm{Op}_\Phi = (2\pi)^{-1}\iint e^{ip'Q}\, e^{-iq'P}\,\tilde{\Phi}(p'\,,\,q')\, dp'\, dq'\,.$$

Introduisant la transformée de Fourier $\tilde{\Phi}$ de la "fonction" $q \to \Phi(q\,,\,p)$, la formule heuristique (1.6) signifie que

$$\begin{aligned}(\mathrm{Op}_\Phi f)(x) &= (2\pi)^{-1}\iint e^{ip'Q}\,\tilde{\Phi}(p'\,,\,q')\,\varphi(q-q')\, dp'\, dq' \\ &= (2\pi)^{-1}\iint e^{ip'q}\,\tilde{\Phi}(p'\,,\,q')\,\varphi(q-q')\, dp'\, dq' \quad (\text{Posons } q-q' = y) \\ &= (2\pi)^{-1}\int \varphi(y)\, dy \int \tilde{\Phi}(p'\,,\,q-y)\, e^{ip'q}\, dp' = \int \Phi(q\,,\,q-y)\,\varphi(y)\, dy\end{aligned}$$

Moyennant certaines conditions sur Φ , Op_Φ est l'o. p. d. classique de symbole $\Phi(q\,,\,p)$. Il apparait ainsi une relation entre les o. p. d. classiques (en dimension finie) et le fait que les translations et les multiplications par les exponentielles imaginaires engendrent des groupes unitaires dans $L^2_{dq}(\mathbb{R})$. Ainsi les o. p. d. classiques sont adaptés à la mesure de Lebesgue.

2. Les problèmes.

(2.1) Les trois représentations unitaires classiques des relations de commutation $[P\,,\,P] = [Q\,,\,Q] = 0$, $[P\,,\,Q] = i$. — Introduisons les mesures normales canoniques sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$:

$$\nu = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\exp(-\frac{q^2}{2})\, dq \qquad \nu' = \pi^{-1}\, e^{-z\bar{z}}\, d^2z$$

aved $d^2z = dx\, dy$, $z = x + iy$. Pour tout $p > 1$, $F^p(\mathbb{C})$ désigne le sous-espace des $\varphi \in L^p_{\nu'}(\mathbb{C})$ qui sont entières. Pour $p = 2$, on obtient l'espace de Fock $F(\mathbb{C}) = F^2(\mathbb{C})$; où les fonctions $z^k/\sqrt{k!}$ $(k = 0\,,\,1\,,\,\ldots)$ forment un système orthonormal. On a

$$L^2_\nu(\mathbb{R}) = \{\varphi\ ;\ \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(q)|^2\, e^{-q^2/2}\,\frac{dq}{\sqrt{2\pi}} < \infty\}\,.$$

Par conséquent, l'application $\varphi \to \varphi(q)(2\pi)^{-1/4}\exp(-q^2/4)$ **réalise une isométrie** J de $L^2_\nu(\mathbb{R})$ sur $L^2_{dq}(\mathbb{R})$. Pour $k = 0\,,\,1\,,\,\ldots$ posons

$$(2.2)\qquad H_k(q) = \int_{-\infty}^{+\infty} (q + it)^k\, d\nu(t)\,.$$

Ce sont les polynômes d'Hermite normalisés. Ils vérifient

$$(2.3)\qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} H_k(q) = \exp(-\frac{z^2}{2} + zq)$$

et les polynômes $(k!)^{-\frac{1}{2}} H_k$ forment une base orthonormée de $L^2_\nu(\underset{\sim}{R})$. Donc l'application linéaire $\theta : L^2_\nu(\underset{\sim}{R}) \to F(\underset{\sim}{C})$ appliquant H_k sur z^k pour $k = 0, 1, \ldots,$ est une isométrie. Vu (2.2) et (2.3), il vient

$$(2.4)\qquad \forall \varphi \in L^2_\nu(\underset{\sim}{R}),\ \forall z,\ (\theta\varphi)(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2 + zq} \varphi(q)\, d\nu(q).$$

Inversement, vu (2.2), pour tout polynôme $\Phi(z)$ et tout q réel

$$(2.5)\qquad (\theta^{-1} \Phi)(q) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(q + it)\, d\nu(t).$$

On a donc deux isométries,

$$(2.6)\qquad L^2_{dq}(\underset{\sim}{R}) \xrightarrow{J^{-1}} L^2_\nu(\underset{\sim}{R}) \xrightarrow{\theta} F(\underset{\sim}{C}).$$

On peut transporter par J^{-1} et par $\theta \cdot J^{-1}$ les opérateurs non bornés Q et P de $L^2_{dq}(\underset{\sim}{R})$ et les groupes unitaires (1.1) et (1.2) engendrés par iQ et iP respectivement. Naturellement, comme il n'y a pas de mesure invariante par translation sur un e. v. de dimension infinie, on s'intéresse uniquement par la suite aux espaces $L^2_\nu(\underset{\sim}{R})$ et $F(\underset{\sim}{C})$. On verra que la transformation θ en dimension infinie joue un rôle "analogue" à la transformation de Fourier sur $\underset{\sim}{R}^n$.

(2.7) Etats cohérents $e^{\bar{Z}}$, $Z \in C$. — L'exponentielle $z' \to \exp \bar{z}z'$ est appelée un état cohérent ; elle est notée $e^{\bar{Z}} = \exp \bar{Z}$.

(2.8) PROPRIÉTÉ de noyau reproduisant. — Pour tout $z \in \underset{\sim}{C}$ et tout $\Phi \in F^p(\underset{\sim}{C})$, on a

$$\Phi(z) = \int_C \Phi(z')\, e^{z\bar{z}'}\, d\nu'(z').$$

Principe de la preuve : les deux membres sont des fonctions entières de z, et ont même développement de Taylor. Dans le cas particulier où $p = 2$, on écrit (2.8) sous la forme

$$(2.9)\qquad \Phi(z) = \langle \Phi \mid e^{Z} \rangle,$$

le produit scalaire étant celui de Fock $F(\underset{\sim}{C})$.

(2.10) Annihilateur et créateur. — En T. Q. C., les rôles fondamentaux ne sont plus joués par les opérateurs Q et P mais par les opérateurs A et A^*, s'écrivant de la manière suivante en utilisant la représentation de Fock :

L'annihilateur A est l'opérateur de dérivation $\Phi \to \Phi'$. Son adjoint A^* est appelé le créateur ; il est représenté par la multiplication par z. Cette terminologie est justifiée par le fait que le degré d'un polynôme homogène s'interprète comme un nombre de particules.

Pour tout α complexe, on introduit les opérateurs

(2.11) $\qquad e^{A^*\alpha} : \Phi \to \Phi(z)\, e^{\alpha z} ; \qquad e^{A\bar{\alpha}} : \Phi \to \Phi(z + \bar{\alpha})$.

Du point de vue de la physique, ce sont des groupes non unitaires et extrêmement singuliers, indexés dans $\underset{\sim}{C}$, qui remplaçent en T. Q. C., les groupes unitaires (1.1) et (1.2).

Les praticiens de l'électrodynamique quantique utilisent souvent des modèles heuristiques de dimension 1 , où le Fock est représenté par $F(\underset{\sim}{C})$.

(2.12) Leurs travaux posent les problèmes suivants d'analyse en dimension finie.

(a) Trouver une large classe $Op(\underset{\sim}{C})$ d'opérateurs linéaires Q de $F(\underset{\sim}{C})$ pour lesquels il existe des mesures généralisées μ_Q et μ'_Q sur $\underset{\sim}{C}^2$, telles que

(2.13) $\qquad Q = \iint e^{A^*\bar{\alpha}}\, e^{A\alpha'}\, d\mu_Q(\bar{\alpha}, \alpha')$: représentation normale de Q

(2.14) $\qquad Q = \iint e^{\bar{z}} \otimes e^{\bar{z}'}\, d\mu'_Q(\bar{z}, z')$: représentation diagonale de Q .

(b) Quelle relation existe-t-il entre ces mesures et le noyau de Bargman

$$B_Q(\bar{z}, z') = \langle Qe^{\bar{z}} \mid e^{\bar{z}'} \rangle ,$$

défini dans [2] dans le cas particulier où $Qe^{\bar{z}} \in F(\underset{\sim}{C})$?

(c) Peut-on donner une règle de seconde quantification des fonctions sesquiholomorphes, en accord avec la règle de quantification de Wick (définie seulement pour les fonctions sesquipolynomiales) ?

(d) Peut-on donner une formule du type Wigner donnant la trace du composé de deux opérateurs ?

(e) Peut-on définir la trace d'un opérateur non borné du Fock (voir les formules de [7]) ?

(f) Peut-on utiliser le calcul symbolique ainsi développé pour résoudre des problèmes de champs en interaction ?

La méthode proposée ci-après pour résoudre ces problèmes consiste à sortir du Fock, en introduisant un espace $\mathcal{E}$ de fonctions d'épreuves, l'injection

$$j : \mathcal{E} \to F(\underset{\sim}{C})$$

étant continue à image dense, puis en introduisant l'adjointe de j

$$\mathcal{E} \xrightarrow{j} F(\underset{\sim}{C}) \xrightarrow{j^*} {}'\mathcal{E} .$$

(2.15) Remarque. - Une autre méthode pour sortir du Fock a été proposée par BEREZIN [4]. Elle consiste à introduire $F^p(\underset{\sim}{C})$ aved $1 < p < 2$. Mais dès que l'adjoint d'un opérateur à valeurs dans $F^p(\underset{\sim}{C})$ est introduit, on est amené à se demander si l'antidual de $F^p(\underset{\sim}{C})$ est $F^{p'}(\underset{\sim}{C})$ avec $p^{-1} + p'^{-1} = 1$. La réponse est donnée par l'exposé 10. Signalons que le schéma abstrait de [5] ne s'applique pas en dimension infinie. Par ailleurs, une réponse à la question (c) est annoncée dans [1] pour le cas particulier de la dimension finie et de fonctions sesquiholomorphes à croissance exponentielle.

Le problème (a) est posé dans [9], pour les opérateurs bornés du Fock. Dans ce cas, l'existence de μ_Q a été prouvée dans [6], en dimension 1 , en utilisant l'espace $Z'(\underset{\sim}{C})$ défini ci-après.

3. Antifonctionnelles analytiques de type exponentiel.

Une fonctionnelle analytique est une forme linéaire continue sur un e. l. c. s. de fonctions holomorphes.

Dans les traités d'analyse, on considère presque exclusivement les deux e. l. c. s. suivants de fonctions holomorphes, et leurs duals :

-l'e. l. c. s. $Z(\underset{\sim}{C})$ des transformées de Fourier des fonctions de l'espace de Schwartz $\mathcal{D}(\underset{\sim}{R})$. Pour simplifier l'écriture de ce qui suit, on modifie la définition usuelle de $Z(\underset{\sim}{C})$

$$Z(\underset{\sim}{C}) = \{\varphi \text{ entières, } \exists\, \ell \text{ , } \forall\, k \text{ , } \sup|\varphi(z)|\,(1 + |z|)^{-k}\, e^{-\ell|\mathrm{Re}\, z|} < \infty\} \text{ ,}$$

-l'e. l. c. s. $H(\underset{\sim}{C})$ des fonctions entières, muni de la topologie de la convergence compacte.

Par la suite, nous ne considérons pas les duals, mais les antiduals $'Z(\underset{\sim}{C})$ et $'H(\underset{\sim}{C})$ de ces espaces. Les éléments de ces antiduals sont des antifonctionnelles analytiques. La transformée de Borel de $T \in {}'H(\underset{\sim}{C})$ est la fonction holomorphe :

$$z \to (\beta T)(z) = \{T\}(z) = \langle T \mid e^{\bar{z}} \rangle \text{ .} \tag{3.1}$$

(3.2) PROPOSITION. - <u>Soit</u> $\mathrm{Exp}^m(\underset{\sim}{C})$ <u>l'espace de Banach des fonctions entières</u> φ <u>telles que</u> $\sup|\varphi(z)|\exp(-m|z|) < \infty$. <u>Soit</u> $\mathrm{Exp}(\underset{\sim}{C})$ <u>la limite inductive</u> ($m = 1,2 \ldots$) <u>des espaces</u> $\mathrm{Exp}^m(\underset{\sim}{C})$. <u>Alors la transformation de Borel</u> $\beta : T \to \beta T = \{T\}$ <u>réalise une bijection bicontinue de</u> $'H(\underset{\sim}{C})$ <u>fort sur</u> $\mathrm{Exp}(\underset{\sim}{C})$.

<u>Principe de la preuve</u>. - On munit $'H(\underset{\sim}{C})$ de la bornologie équicontinue, et $\mathrm{Exp}\,\underset{\sim}{C}$ de sa bornologie naturelle : voir exposés 3 et 6. Par un argument facile de série de Taylor (voir exp. 6), on vérifie que β est bijective, bornée ainsi que son inverse. On en déduit que β est continue en appliquant la proposition (4.12) de l'exposé 3. En dimension finie, on peut aussi utiliser un argument de graphe fermé généralisé [21]. Comme β applique bijectivement et bicontinûment $\mathcal{D}(\underset{\sim}{R})$ sur $Z(\underset{\sim}{C})$, on déduit par adjonction que β est définie, bijective et bicontinue de $Z'(\underset{\sim}{C})$ sur $'\mathcal{D}(\underset{\sim}{R})$.

Par la suite, il est commode d'introduire un troisième e. l. c. s. de fonctions holomorphes, à savoir $\mathrm{Exp}\,\underset{\sim}{C}$, et son antidual $'\mathrm{Exp}(\underset{\sim}{C})$. Cet espace est compris entre $'H(\underset{\sim}{C})$ et $'\mathcal{D}(\underset{\sim}{R})$, et la transformation de Borel β agit remarquablement sur cet espace.

(3.3) PROPOSITION. - <u>On a des injections continues canoniques à image dense</u>

$$Z(\underset{\sim}{C}) \to Exp(\underset{\sim}{C}) \to H(\underset{\sim}{C}) .$$

<u>En considérant les adjointes de ces injections, puis en faisant agir</u> β , <u>on obtient le diagrame commutatif</u> :

$$\begin{array}{ccccc} 'Z(\underset{\sim}{C}) & \longleftarrow & 'Exp(\underset{\sim}{C}) & \longleftarrow & 'H(\underset{\sim}{C}) \\ \simeq\downarrow\beta & & \simeq\downarrow\beta & & \simeq\downarrow\beta \\ '\mathcal{D}(\underset{\sim}{R}) & \longleftarrow & H(\underset{\sim}{C}) & \longleftarrow & Exp\ \underset{\sim}{C} \end{array}$$

<u>Principe de la preuve</u>. - Remarquer que la flèche verticale centrale est l'adjointe de l'application β décrite dans (3.2).

(3.4) <u>Intérêt des antifonctionnelles analytiques de type exponentiel, i. e. des éléments de</u> $'Exp\ \underset{\sim}{C}$.

(a) Ces fonctionnelles servent dans la théorie des opérateurs différentiels d'ordre infini [22].

(b) Il est difficile d'utiliser en physique les éléments de $'Z(\underset{\sim}{C})$, car ils sont très singuliers.

Symétriquement, il est souvent impossible d'utiliser les éléments de $'H(\underset{\sim}{C})$ car, vu Hahn-Banach, ils sont représentables par des mesures <u>à support compact</u> sur $\underset{\sim}{C}$. Ainsi l'extension $\nu(0)$ à $\underset{\sim}{C}$ de la mesure gaussienne ν sur l'axe réel, ne représente pas un élément de $'H(\underset{\sim}{C})$.

(c) Vu par exemple [19] et [20], toute $T \in {}'Exp(\underset{\sim}{C})$ est représentable par une mesure à décroissance exponentielle sur $\underset{\sim}{C}$ et réciproquement. Ainsi $\nu(0)$ représente une antifonctionnelle de transformée de Borel $\exp(\frac{i}{2} z^2)$. Soit $\nu(\theta)$ la mesure sur $\underset{\sim}{C}$ déduite de $\nu(0)$ par rotation d'un angle θ . Alors $\nu(\theta)$ représente une antifonctionnelle appartenant à $'Exp(\underset{\sim}{C})$ de transformée de Borel.

$$\{\nu(\theta)\}(z) = \{\nu(0)\}(e^{-i\theta} z) = \exp(\frac{i}{2} e^{-2i\theta} z^2) .$$

Le cas $\theta = -\pi/4$ est très important car $\nu(-\pi/4)$ coincide sur $Exp\ \underset{\sim}{C}$ avec la distribution de Feynman. Ceci s'applique en dimension infinie, et montre que la prodistribution de Feynman est tout simplement représentée par une mesure gaussienne sur un complexifié, cette mesure étant déduite d'une mesure gaussienne ordinaire par une rotation de $\pi/4$ [12]. Dans le tome 1 de son traité d'analyse, I. M. GEL'FOND avait noté que $\nu(\pi/2) \in Z'(\underset{\sim}{C})$.

(3.5) <u>Remarques</u>.

(a) L'espace $H(\underset{\sim}{C})$ est un espace de Fréchet nucléaire : voir exposé 5. Donc (même référence) son antidual est nucléaire complet.

(b) Comme β est bicontinue, $Exp\ \underset{\sim}{C}$ est nucléaire réflexif complet, $'Exp(\underset{\sim}{C})$ fort étant un espace de Fréchet nucléaire.

(c) On a des isomorphismes

$$(3.6)\quad H(\overline{\underset{\sim}{C}}) \xleftarrow{\beta_1} {}'\mathrm{Exp}(\underset{\sim}{C}) \quad H(\underset{\sim}{C}) \xleftarrow{\beta_2} {}'\mathrm{Exp}(\overline{\underset{\sim}{C}}) \quad H(\overline{\underset{\sim}{C}} \times \underset{\sim}{C}) \xleftarrow{\beta_3} {}'\mathrm{Exp}(\overline{\underset{\sim}{C}} \times \underset{\sim}{C})$$

$${}'H(\overline{\underset{\sim}{C}}) \longrightarrow \mathrm{Exp}(\overline{\underset{\sim}{C}}) \quad {}'H(\underset{\sim}{C}) \longrightarrow \mathrm{Exp}(\underset{\sim}{C}) \quad {}'H(\overline{\underset{\sim}{C}} \times \underset{\sim}{C}) \longrightarrow \mathrm{Exp}(\overline{\underset{\sim}{C}} \times \underset{\sim}{C}) \ .$$

Comme l'application linéaire β_3 prolonge $\beta_1 \otimes \beta_2$ et comme

$$H(\overline{\underset{\sim}{C}}) \hat{\otimes} H(\underset{\sim}{C}) \simeq H(\overline{\underset{\sim}{C}} \times \underset{\sim}{C}) \ ,$$

il vient

$$(3.7)\quad \begin{aligned} &H(\overline{\underset{\sim}{C}}) \hat{\otimes} H(\underset{\sim}{C}) \simeq H(\overline{\underset{\sim}{C}} \times \underset{\sim}{C}) \xleftarrow{\beta} {}'\mathrm{Exp}(\overline{\underset{\sim}{C}}) \hat{\otimes} {}'\mathrm{Exp}\ \underset{\sim}{C} \simeq {}'\mathrm{Exp}(\overline{\underset{\sim}{C}} \times \underset{\sim}{C}) \\ &{}'H(\overline{\underset{\sim}{C}} \times \underset{\sim}{C}) \longrightarrow \mathrm{Exp}(\overline{\underset{\sim}{C}} \times \underset{\sim}{C}) \simeq {}'({}'\mathrm{Exp}\ \overline{\underset{\sim}{C}} \hat{\otimes} {}'\mathrm{Exp}\ \underset{\sim}{C}) \ . \end{aligned}$$

4. Construction de triplets nucléaires en analyse complexe.

En analyse réelle de dimension finie, on a l'habitude d'utiliser une mesure de Lebesgue dx sur $\underset{\sim}{R}$ pour identifier toute $\varphi \in \mathcal{S}(\underset{\sim}{R})$ à l'antidistribution tempérée $\psi \to \int \varphi\overline{\psi}\, dx$. D'où le triplet nucléaire

$$\mathcal{S}(\underset{\sim}{R}) \to L^2(\underset{\sim}{R}) \to {}'\mathcal{S}(\underset{\sim}{R}) \ .$$

Autrement dit, on fait jouer un rôle privilégié à une mesure de Lebesgue. Cette technique ne fonctionne plus en analyse complexe de dimension finie (ou infinie), car le produit de deux fonctions entières sur $\underset{\sim}{C}$ n'est pas souvent intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue d^2z de $\underset{\sim}{C}$. Déjà dans ce cas il est donc naturel de remplacer d^2z par ν'.

(4.1) DÉFINITION du triplet nucléaire $\mathcal{T}(C)$. – L'injection j de $\mathrm{Exp}\ \underset{\sim}{C}$ dans $F(\underset{\sim}{C})$ est continue à image dense. Introduisant l'adjointe de j, il vient le triplet nucléaire

$$\mathcal{T}(\underset{\sim}{C}) = (\mathrm{Exp}(\underset{\sim}{C}) \to F(\underset{\sim}{C}) \to {}'\mathrm{Exp}(\underset{\sim}{C})) \ .$$

Alors la formule (2.9) s'écrit

$$(4.2)\qquad \Phi(z) = \langle \Phi\nu \mid e^{\overline{Z}} \rangle = \{\Phi\nu\}(z) \ ,$$

et montre que toute $\Phi \in F(\underset{\sim}{C})$ coincide avec la transformée de Borel de $\Phi\nu$. Plus généralement, on a le résultat suivant.

(4.3) LEMME. – Pour toute $T \in {}'\mathrm{Exp}(\underset{\sim}{C})$ telle que $\{T\} \in F^{1+\varepsilon}(\underset{\sim}{C})$ avec $\varepsilon > 0$, et pour toute $\Phi \in \mathrm{Exp}(\underset{\sim}{C})$, on a

$$\langle T \mid \Phi \rangle = \int_{C} \{T\}(z)\ \Phi(z)\ d\nu'(z) \ .$$

En effet, c'est clair pour $\Phi = \exp \overline{Z}$, donc pour toute combinaison linéaire finie d'états cohérents. Le cas général s'en déduit par un passage à la limite.

Le fait que $\mathrm{Exp}(\underset{\sim}{C})$ joue un rôle analogue à l'espace de Schwartz $S(\underset{\sim}{R})$ est illsutré ci-après.

(4.4) DÉFINITION <u>du triplet nucléaire</u> $\mathcal{T}(\underset{\sim}{R})$. - <u>L'injection</u> k <u>de</u> $\operatorname{Exp}(\underset{\sim}{C})$ <u>dans</u> $L^2_\nu(\underset{\sim}{R})$, <u>définie par la restriction à l'axe réel de</u> $\underset{\sim}{C}$, <u>est continue à image dense. Introduisant</u> <u>l'adjointe de</u> k , <u>il vient le triplet nucléaire</u>

$$\mathcal{T}(\underset{\sim}{R}) = (\operatorname{Exp}(\underset{\sim}{C}) \to L^2_\nu(\underset{\sim}{R}) \to {}'\operatorname{Exp}\underset{\sim}{C}) .$$

(4.5) THÉORÈME. - <u>L'isométrie</u> θ <u>se restreint en une application bijective bicon</u>-tinue θ_1 de $\operatorname{Exp}\underset{\sim}{C}$ sur $\operatorname{Exp}\underset{\sim}{C}$.

<u>Principe de la preuve</u>. - Pour $\varphi \in \operatorname{Exp}\underset{\sim}{C}$, soit $\Phi = \theta_1 \varphi$. Des intégrations par parties donnent

$$\Phi^{(k)}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^{(k)}(q)\, d\nu(q)$$

qui entraine $\Phi \in \operatorname{Exp}(\underset{\sim}{C})$, et θ_1 continue. La surjectivité de θ_1 , et la continuité de son inverse résultent alors de (2.5).

(4.6) <u>Extension de la transformation</u> θ <u>à</u> $'\operatorname{Exp}(\underset{\sim}{C})$. - <u>Cette extension se définit "à la Schwartz", c'est-à-dire en considérant l'adjointe de</u> θ_1^{-1} . <u>La transformation</u> θ <u>réalise donc un isomorphisme des triplets nucléaires</u> $\mathcal{T}(\underset{\sim}{R})$ et $\mathcal{T}(\underset{\sim}{C})$.

(4.7) <u>Opérations dans les antifonctionnelles analytiques</u>. - Elles se définissent par un argument d'adjonction, comme en théorie des distributions. Ainsi A et A^* induisent des opérateurs linéaires continus dans $\operatorname{Exp}(\underset{\sim}{C})$. Leurs adjoints sont des opérateurs linéaires continus de $'\operatorname{Exp}(\underset{\sim}{C})$, notés respectivement A^* et A . Les transportés par θ^{-1} de ces opérateurs sont respectivement notés D et $-\operatorname{div}$; D est appelé l'opérateur de dérivation de densité et div est la divergence. Ils ont été d'ailleurs définis directement dans le séminaire précédent.

Les espaces de Sobolev $K^s(\underset{\sim}{C})$ se plongent dans $'\operatorname{Exp}\underset{\sim}{C}$. Noter qu'après transport par θ^{-1} , les opérateurs $\exp A\alpha$ et $\exp A^*\alpha$ deviennent respectivement

$$\varphi(q) \to \varphi(q+\alpha) \quad \text{et} \quad \varphi(q) \to \varphi(q-\alpha)\, \exp(-\tfrac{1}{2}\alpha^2 + \alpha q) .$$

Par conséquent, ces opérateurs ne peuvent être définis en utilisant seulement des fonctions d'épreuve C^∞ , puisqu'ils font intervenir des translations dans le complexe.

(4.8) <u>Variantes complexes de</u> $\mathcal{T}(\underset{\sim}{R})$ <u>et de</u> θ . - Si l'on fait de l'analyse réelle sur $\underset{\sim}{R}$, on peut utiliser $\mathcal{T}(\underset{\sim}{R})$ et la transformation θ . Si l'on désire faire de l'analyse complexe sur $\underset{\sim}{C}$, on peut l'identifier à l'antidiagonale de $\overline{\underset{\sim}{C}} \times \underset{\sim}{C}$:

$$\underset{\sim}{C} = \{(\bar{z}, z') \in \overline{\underset{\sim}{C}} \times \underset{\sim}{C} \; ; \; z = z'\} . \tag{4.9}$$

Alors $\mathcal{T}(\underset{\sim}{R})$ peut être remplacé par

$$\mathcal{T}(\underset{\sim}{C}) = (\operatorname{Exp}(\overline{\underset{\sim}{C}} \times \underset{\sim}{C}) \to L^2_{\nu'}(\underset{\sim}{C}) \to {}'\operatorname{Exp}(\overline{\underset{\sim}{C}} \times \underset{\sim}{C})) .$$

Puis l'isométrie θ peut être remplacé par Θ : $\varphi(\overline{q}, q) \to \Phi(\overline{z}, z')$ avec

(4.10) $$\Upsilon(\overline{z}, z') = \int_{\underset{\sim}{C}} \varphi(\overline{t}, t)\, e^{-\overline{z}z' + \overline{z}t + z'\overline{t}}\, d\nu'(\overline{t}, t) .$$

On reconnait la fonction génératrice des polynômes complexes de Hermite ([2] [18]).

(4.11) $$H_{k\ell}(\overline{z}, z') = \int_{\underset{\sim}{C}} (\overline{z} + i\overline{t})^k (z' + it)^\ell\, d\nu'(t) .$$

(4.12) $$\sum \frac{\overline{u}^k u'^\ell}{k!\, \ell!} H_{k\ell}(\overline{z}, z') = \exp(-\overline{u}u' + \overline{u}z' + u'\overline{z}) .$$

Les $(k!\,\ell!)^{-\frac{1}{2}} H_{k\ell}(\overline{z}, z)$ forment une base orthonormée de $L^2_{\nu'}(\underset{\sim}{C})$. Comme Θ applique $H_{k\ell}(\overline{z}, z')$ sur $\overline{z}^k z'^\ell$, Θ réalise une isométrie de $L^2_{\nu'}(\underset{\sim}{C})$ sur $F(\underset{\sim}{\overline{C}} \times \underset{\sim}{C})$. Par des raisonnements analogues à (4.5), on peut montrer que Θ réalise un isomorphisme de $\mathcal{E}(\underset{\sim}{C})$ sur $\mathcal{E}(\underset{\sim}{\overline{C}} \times \underset{\sim}{C})$.

(4.13) <u>Le problème du</u> $\overline{\partial}$. Noter que toute $T \in {}'\mathrm{Exp}(\underset{\sim}{\overline{C}} \times \underset{\sim}{C})$ est caractérisée par ses coefficients $T_{k\ell} = \langle T \mid H_{k\ell}\rangle$ suivant les polynômes complexes de Hermite. Noter aussi que $\overline{\partial}\, H_{k\ell} = k.H_{k-1,\ell}$ pour $k \geq 1$. Par une technique d'adjonction, $\overline{\partial}$ est défini dans ${}'\mathrm{Exp}(\underset{\sim}{\overline{C}} \times \underset{\sim}{C})$. Par conséquent, on peut résoudre et discuter simplement l'équation $\overline{\partial}T = U$. Extension facile en dimension infinie.

(4.14) <u>Applications aux espaces analytiques uniformes</u> : voir [15].

5. Noyaux et symboles des opérateurs.

Il a été montré au § 1 que le calcul symbolique usuel des opérateurs différentiels (ou pseudo-différentiels) est adapté du point de vue de l'analyse à la mesure de Lebesgue, et du point de vue de la physique à la première quantification. Il est construit ci-après un calcul symbolique différent qui, du point de vue de l'analyse, est adapté aux mesures gaussiennes, et du point de vue de la physique, est adapté à la seconde quantification.

On se place dans la représentation des relations de commutation utilisant $F(\underset{\sim}{C})$. Le calcul symbolique va être défini pour tout élément de l'espace $\mathrm{Op}(\underset{\sim}{C})$ des opérateurs linéaires continus de $\mathrm{Exp}(\underset{\sim}{C})$ dans ${}'\mathrm{Exp}(\underset{\sim}{C})$:

(5.1) $$\mathrm{Op}(\underset{\sim}{C}) = L(\mathrm{Exp}(\underset{\sim}{C}), {}'\mathrm{Exp}(\underset{\sim}{C})) ,$$

cet espace étant muni de la topologie de la convergence bornée. L'application qui à toute $T \in (\mathrm{Exp}\,\underset{\sim}{C})'$ fait correspondre l'élément $\psi \to \langle T \mid \overline{\psi}\rangle$ de ${}'\mathrm{Exp}(\underset{\sim}{\overline{C}})$ est un isomorphisme d'e. l. c. s.. Par conséquent, par application du théorème abstrait des noyaux (voir exposé 5), et vu (3.7), il vient

(5.2) $$\mathrm{Op}(\underset{\sim}{C}) \simeq (\mathrm{Exp}(\underset{\sim}{C}))' \hat{\otimes}\, {}'\mathrm{Exp}(\underset{\sim}{C}) \simeq {}'(\mathrm{Exp}\,\underset{\sim}{\overline{C}}) \hat{\otimes}\, {}'(\mathrm{Exp}\,\underset{\sim}{C}) \simeq {}'\mathrm{Exp}(\underset{\sim}{\overline{C}} \times \underset{\sim}{C}) .$$

Le résultat de l'action de $\theta \in {}'\mathrm{Exp}(\underset{\sim}{\overline{C}} \times \underset{\sim}{C})$ sur $\psi = \psi(\overline{z}, z') \in \mathrm{Exp}(\underset{\sim}{\overline{C}} \times \underset{\sim}{C})$ est noté

$$\langle \theta \mid \psi\rangle = \langle \theta(\overline{z}, z') \mid \psi(\overline{z}, z')\rangle = \iint \overline{\psi(\overline{z}, z')}\, d\theta(\overline{z}, z') .$$

(5.3) DÉFINITION.

(a) L'antifonctionnelle analytique de type exponentiel sur $\bar{\underset{\sim}{C}} \times \underset{\sim}{C}$ associée par (5.2) à tout $Q \in \mathrm{Op}(\underset{\sim}{C})$ est appelée le noyau de Q ; elle est notée Q^K.

(b) La transformée de Borel de Q^K est appelée le noyau apparent de Q ; elle est notée $\{Q^K\}$.

(c) Le symbole de Wick de Q est la fonction sesquiholomorphe suivante sur $\bar{\underset{\sim}{C}} \times \underset{\sim}{C}$

$$Q^W(\bar{z}\,,\, z') = e^{-\bar{z}z'}\{Q^K\}(\bar{z}\,,\, z')\,.$$

Il résulte de (3.7) et de (5.2), le théorème suivant.

(5.4) THÉORÈME. - On a des homéomorphismes

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{Op}(\underset{\sim}{C}) & \to & '\mathrm{Exp}(\bar{\underset{\sim}{C}} \times \underset{\sim}{C}) & \to & H(\bar{\underset{\sim}{C}} \times \underset{\sim}{C}) & \to & H(\bar{\underset{\sim}{C}} \times \underset{\sim}{C}) \\ Q & \longrightarrow & Q^K & \longrightarrow & \{Q^K\} & \longrightarrow & Q^W \end{array}$$

(5.5) Quelques relations.

(a) Vues les définitions de Q^K et de $\{Q^K\}$

$$\forall\, \varphi\,,\, \psi \in \mathrm{Exp}\, \underset{\sim}{C}\,, \quad \langle Q\varphi \mid \psi\rangle = \langle Q^K(\bar{z}\,,\, z') \mid \overline{\varphi(z)} \otimes \psi(z')\rangle\,.$$

(b) En particulier,

$$\{Q^K\}(\bar{z}\,,\, z') = \langle Q^K \mid \overline{e^{\bar{z}}} \otimes e^{\bar{z}'}\rangle = \langle Qe^{\bar{z}} \mid e^{\bar{z}'}\rangle = \{Qe^{\bar{z}}\}(z')\,.$$

(c) L'adjoint Q^* de Q appartient à $\mathrm{Op}\, \underset{\sim}{C}$, et

$$\{Q^{*K}\}(\bar{z}\,,\, z') = \langle Q^* e^{\bar{z}} \mid e^{\bar{z}'}\rangle = \overline{\langle Qe^{\bar{z}'} \mid e^{\bar{z}}\rangle} = \overline{\{Q^K\}(\bar{z}'\,,\, z)}\,.$$

Les problèmes (2.12; a, b, c) peuvent alors être résolus.

(5.6) THÉORÈME. - Soit $Q \in \mathrm{Op}\, \underset{\sim}{C}$. Soit $\tilde{Q}^W$ l'antifonctionnelle analytique de type exponentiel, de transformée de Borel Q^W. Alors, pour toute $\varphi \in \mathrm{Exp}\, \underset{\sim}{C}$ et tout $z \in \underset{\sim}{C}$,

$$\{Q\varphi\}(z) = \iint e^{\bar{\alpha}z}\, \varphi(z + \beta)\, d\tilde{Q}^W(\bar{\beta}\,,\, \alpha) = \iint \varphi(z_1)\, e^{z\bar{z}_1'}\, dQ^K(\bar{z}_1\,,\, z_1')\,. \tag{5.7}$$

Notons que ces formules peuvent encore s'écrire

$$\{Q\varphi\}(z) = \iint (e^{A^*\bar{\alpha}}\, e^{A\beta}\, \varphi)(z)\, d\tilde{Q}^W(\bar{\beta}\,,\, \alpha) = \iint \langle \varphi \mid e^{\bar{z}_1}\rangle\, e^{z\bar{z}_1'}\, dQ^K(\bar{z}_1\,,\, z_1')\,.$$

On retrouve donc les formules (2.13) et (2.14).

Démonstration. - La représentation diagonale de Q résulte directement de la définition du noyau Q^K :

$$\{Q\varphi\}(z) = \langle Q\varphi \mid e^{\bar{z}}\rangle = \langle Q^K(\bar{z}_1\,,\, z_1') \mid \overline{\varphi(z_1)} \otimes e^{\bar{z}z_1'}\rangle\,.$$

Montrons d'abord la représentation normale de Q si φ est une exponentielle $e^{\bar{z}'} = \varphi$.

$$\iint e^{\bar\alpha z}\varphi(z+\beta)\, d\widetilde{Q}^W(\bar\beta , \alpha) = \iint e^{\bar\alpha z} e^{\bar z'(z+\beta)}\, d\widetilde{Q}^W(\bar\beta , \alpha)$$

$$= e^{\bar z' z} Q^W(\bar z' , z) = \{Q^K\}(\bar z' , z) = \{Qe^{\bar z'}\}(z) .$$

Par linéarité, la représentation normale est vraie pour toute combinaison linéaire d'exponentielles. Puis, par passage à la limite, elle est vraie pour toute $\varphi \in \mathrm{Exp}\,\underset{\sim}{C}$.

(5.8) THÉORÈME. - <u>Soient</u> $Q \in \mathrm{Op}\,\underset{\sim}{C}$ <u>et</u> z' <u>complexe tels que</u> $Q^*(e^{\bar z'}) \in F^{1+\varepsilon}(\underset{\sim}{C})$. <u>Alors, pour toute</u> $\varphi \in \mathrm{Exp}(\underset{\sim}{C})$,

$$\{Q\varphi\}(z') = \int \{Q^K\}(\bar z , z')\, \varphi(z)\, d\nu'(z) .$$

En effet $\{Q\varphi\}(z') = \langle Q\varphi \mid e^{\bar z'}\rangle = \langle Q^* e^{\bar z'} \mid \varphi\rangle$.

Il suffit alors d'appliquer (4.3).

La représentation de Q par un opérateur intégral n'est donc pas toujours vraie. Dans des cas particuliers, cette représentation est donnée dans [2].

(5.9) DÉFINITIONS. - <u>L'application inverse de l'application</u> $Q \to Q^W$ <u>est appelée seconde quantification. Le produit de Wick</u> $: Q_1 \dots Q_n :$ <u>de plusieurs opérateurs</u> $Q_1 \dots Q_n \in \mathrm{Op}\,\underset{\sim}{C}$ <u>est défini comme étant le quantifié du produit des symboles des</u> Q_j .

Le quantifié d'une fonction sesquiholomorphe $f(\bar z , z') \in H(\underset{\sim}{\bar C} \times \underset{\sim}{C})$ est noté $\hat f$ ou $: f :$. La notation $: L :$ a donc une signification différente selon que L est une suite d'opérateurs, ou une fonction sesquiholomorphe. On peut voir en dimension infinie que ces définitions prolongent des opérations effectuées par les physiciens.

(5.10) <u>Symbole de Wick du composé de deux opérateurs</u>. - <u>Soient</u> Q <u>et</u> $L \in \mathrm{Op}(\underset{\sim}{C})$ <u>tels que</u>

(a) Q <u>envoie les états cohérents dans</u> $\mathrm{Exp}(\underset{\sim}{C})$,

(b) Q^W <u>est polynomial en</u> $\bar z$, <u>ou bien</u> L^W <u>est polynomial en</u> z' .

<u>Alors</u> $QL \in \mathrm{Op}\,\underset{\sim}{C}$ <u>et a pour symbole de Wick</u>

(5.11) $$(QL)^W(\bar z , z') = \sum_{k=0}^{\infty} k!^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial z'}\right) L^W(\bar z , z') \times \left(\frac{\partial}{\partial \bar z}\right)^k Q^W(\bar z , z') .$$

En effet, $\{Le^{\bar z}\}(t) = e^{\bar z t} L^W(\bar z , t)$.

Cette fonction de t coincide avec $Le^{\bar z}$, car, par hypothèse, $Le^{\bar z} \in \mathrm{Exp}\,\underset{\sim}{C}$. Utilisant la représentation normale pour Q , il vient

$$\{QLe^{\bar z}\}(z') = \int e^{\bar z(z'+\beta)} L^W(\bar z , z'+\beta)\, e^{\bar\alpha z'}\, d\widetilde{Q}^W(\bar\beta , \alpha) .$$

D'où

$$(QL)^W(\bar z , z') = \int e^{\bar z\beta + \bar\alpha z'} L^W(\bar z , z'+\beta)\, d\widetilde{Q}^W(\bar\beta , \alpha) .$$

Il suffit alors de faire un développement de Taylor de $t \to L^W(\bar z , t)$, au voisinage du point $t = z'$.

La formule (5.11) est analogue à la formule de Kohn-Nirenberg [10] à ceci près que p et q ont été respectivement remplacés par $\bar{z}$ et z'. Elle montre que si $L^W = L^W(\bar{z})$ ou si $Q^W = Q^W(z')$, alors $(QL)^W = Q^W L^W$ soit $QL = : QL :$. Autrement dit, l'ordre normal des opérateurs est obtenu en faisant d'abord agir les opérateurs fonction de l'annihilateur A, puis en faisant agir les opérateurs fonction du créateur A^* : c'est l'ordre de Wick.

(5.12) On peut faire une table

Opérateur	Symbole de Weyl	Symbole de Wick	Opérateur dans la représentation utilisant : $L^2(\underset{\sim}{R})$	$L^2_\nu(\underset{\sim}{R})$	$F(\underset{\sim}{C})$
A	$\frac{q+2ip}{2}$	$\bar{z}$	$\frac{Q+2iP}{2}$	$\frac{d}{dq} = D$	$\frac{d}{dz}$
A^*	$\frac{q-2ip}{2}$	z'	$\frac{Q-2iP}{2}$	$-(\frac{d}{dq} - q) = -\operatorname{div}$	z
A^*A	$\frac{q^2+p^2}{4} - \frac{1}{2}$	$\bar{z}z'$	$-\frac{d^2}{dq^2} + \frac{q^2}{4} - \frac{1}{2}$	$-\frac{d^2}{dq^2} + q\frac{d}{dq} = -\operatorname{div} D$	$z\frac{d}{dz}$

Par ailleurs, la règle de Weyl quantifie $\frac{q^2+p^2}{4}$ en un opérateur s'écrivant ainsi dans les trois représentations

$$-\frac{d^2}{dq^2} + \frac{q^2}{4} \; ; \; -\operatorname{div} D + \boxed{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad z\frac{d}{dz} + \boxed{\frac{1}{2}} \, .$$

Pour un système ayant n degré de liberté, le terme perturbateur encadré doit être remplacé par $n/2$. Du point de vue de la physique, la règle de quantification de H. WEYL fait ainsi apparaître un "terme infini" en T. Q. C..

6. Dualité en calcul symbolique [16].

(6.1) DÉFINITION de Optr $\underset{\sim}{C}$. - Soit L un opérateur linéaire $'\mathrm{Exp}\,\underset{\sim}{C} \to \mathrm{Exp}\,\underset{\sim}{C}$ appliquant un certain voisinage disqué de l'origine de $'\mathrm{Exp}\,\underset{\sim}{C}$ dans un certain borné disqué de $\mathrm{Exp}\,\underset{\sim}{C}$. On dit que L est très régulier, l'ensemble de ces opérateurs est noté Optr $\underset{\sim}{C}$.

Cet espace est muni d'une bornologie naturelle. Cet espace est isomorphe à l'espace des formes linéaires continues sur $('\mathrm{Exp}\,\underset{\sim}{C}) \times (\overline{'\mathrm{Exp}\,\underset{\sim}{C}})$ muni de la bornologie équicontinue. Donc, vu (3.7),

(6.2) $\quad \mathrm{Optr}\, T \simeq {}'(\overline{'\mathrm{Exp}(\underset{\sim}{C})} \hat{\otimes} {}'\mathrm{Exp}\,\underset{\sim}{C}) \simeq {}'('\mathrm{Exp}(\underset{\sim}{\bar{C}}) \hat{\otimes} {}'\mathrm{Exp}(\underset{\sim}{C})) \simeq \mathrm{Exp}(\underset{\sim}{\bar{C}} \times \underset{\sim}{C})$.

D'où le théorème suivant.

(6.3) THÉORÈME. - Le triplet nucléaire associé à $\underset{\sim}{\overline{C}} \times \underset{\sim}{C}$ est

$$\mathcal{E}(\underset{\sim}{\overline{C}} \times \underset{\sim}{C}) = (\mathrm{Exp}(\underset{\sim}{\overline{C}} \times \underset{\sim}{C}) \to F(\underset{\sim}{\overline{C}} \times \underset{\sim}{C}) \to {}'\mathrm{Exp}(\underset{\sim}{\overline{C}} \times \underset{\sim}{C})).$$

Ce triplet est isomorphe au triplet nucléaire

$$(\mathrm{Optr}(\underset{\sim}{C}) \to L^2(F(\underset{\sim}{C})) \to \mathrm{Op}(\underset{\sim}{C})),$$

où le terme central est l'espace des opérateurs de Hilbert-Schmidt du Fock.

(6.4) COROLLAIRE. - Les espaces $\mathrm{Optr}(\underset{\sim}{C})$ et $\mathrm{Op}(\underset{\sim}{C})$ sont en antidualité, cette antidualité prolongeant celle donnée par la forme sesquilinéaire de trace sur

$$L_2(F(\underset{\sim}{C})) .$$

Cette antidualité est donc notée $\mathrm{tr}(QL^*)$.

Vu (3.7), on a donc, pour $Q \in \mathrm{Op}\,\underset{\sim}{C}$, $L \in \mathrm{Optr}\,\underset{\sim}{C}$,

$$\mathrm{tr}(QL^*) = \langle Q^K(\overline{z}\,,\,z') \mid \{L^K\}(\overline{z}\,,\,z')\rangle = \overline{\langle L^K(\overline{z}\,,\,z') \mid \{Q^K\}(\overline{z}\,,\,z')\rangle} .$$

Ces deux formules peuvent être considérées comme des extensions de la formule de Wigner en dimension infinie. Elles peuvent être utilisées pour calculer des moyennes de grandeurs si le champ quantique est dans un état impur. On a aussi résolu le problème (2.12,e) puisque le noyau Q^K de Q peut être identifié à la forme antilinéaire de trace qu'il définit sur $\mathrm{Exp}(\underset{\sim}{\overline{C}} \times \underset{\sim}{C})$.

Décomplexification des résultats. - On a utilisé deux complexifications conjuguées $\underset{\sim}{\overline{C}}$ et $\underset{\sim}{C}$ de $\underset{\sim}{R}$, les noyaux et les symboles étant définis sur $\underset{\sim}{\overline{C}} \times \underset{\sim}{C}$. Le prolongement (4.9) identifiant $\underset{\sim}{C}$ à l'antidiagonale Δ de $\underset{\sim}{\overline{C}} \times \underset{\sim}{C}$ identifie $\mathrm{Exp}(\underset{\sim}{\overline{C}} \times \underset{\sim}{C})$ à l'espace $\mathrm{Exp}_r(\underset{\sim}{C})$ de restriction à Δ des éléments de $\mathrm{Exp}(\underset{\sim}{\overline{C}} \times \underset{\sim}{C})$. Or $\mathrm{Exp}_r(\underset{\sim}{C})$ est un sous-espace dense de l'espace des fonctions continues à croissance exponentielle sur $\underset{\sim}{C}$, muni de sa topologie naturelle de limite inductive. Ceci montre que si $\mathbb{T} \in {}'\mathrm{Exp}(\underset{\sim}{\overline{C}} \times \underset{\sim}{C})$ est représentable par l'extension à $\underset{\sim}{\overline{C}} \times \underset{\sim}{C}$ d'une mesure à décroissance exponentielle sur Δ , cette mesure est unique. Sous certaines conditions, on peut donc faire $\alpha = \alpha'$ dans (2.13) , $z = z'$ dans (2.14), et remplacer les intégrales doubles correspondantes par des intégrales simples relatives à Δ . C'est en particulier le cas pour les opérateurs pseudodifférentiels définis et étudiés dans [18], [19], [20]. Mais l'on peut montrer [17] qu'il existe des $Q \in \mathrm{Op}\,\underset{\sim}{C}$, et même des Q auto-adjoints tels que Q^K ne soit pas représentable par l'extension à $\underset{\sim}{\overline{C}} \times \underset{\sim}{C}$ d'une mesure à décroissance exponentielle sur Δ .

Commentaires. - Le but des méthodes présentées dans le séminaire de l'an dernier était de donner un sens aux opérateurs différentiels en dimension infinie. En aout 1975, en collaboration avec R. RAEZKA, le calcul symbolique a été établi en dimension quelconque [11], d'où les notions de symbole et de noyau d'un opérateur différentiel. Restreints à la dimension finie, ces résultats prolongent [4] [5] [9].

Ces notions de symbole et de noyau ont permis à B. LASCAR [18] [19] [20] d'étudier des majorations L^2-elliptiques, et de construire des opd en dimension ifinie, dont les analogues en dimension finie n'étaient pas connus. Par ailleurs, l'étude approfondie des calculs différentiels et des distributions sur un espace de Banach B, a montré [14] qu'il existe une infinité de calculs différentiels et de types de distributions, car, pour tout entier $k \geqslant 0$, il existe une infinité de topologies localement convexes raisonnables sur $\bigotimes_k B'$. D'où l'intérêt des espaces nucléaires en dimension infinie [12]. D'ailleurs, ([13] [16]) l'emploi de triplets nucléaires a permis d'améliorer les résultats de [11] et d'en éliminer le formalisme cylindrique. Ainsi, pour l'instant, nous serions amenés à penser que le bon cadre pour l'analyse en dimension infinie, n'est pas le cadre banachique traditionnel, mais plutôt celui des triplets nucléaires, avec de bons Fréchet nucléaires. Ceci motive les exposés 3 à 6 du présent séminaire.

En général, une difficulté rencontrée actuellement en analyse de dimension infinie est une difficulté d'orientation des recherches, car beaucoup de voies sont à prospecter, en dehors des voies formelles correspondant à des analogies avec la dimension finie. Nous pensons que l'étude des problèmes posés par la physique peut servir de guide pour trouver des structures mathématiques efficaces et non pathologiques.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BABITT (D.). — Certain Hilbert spaces of analytic functions associated with the Heisenberg group, "Studies in mathematical physics, Essays in honor of V. Bargmann", p. 19-82. — Princeton, Princeton University Press, 1976 (Princeton Series in Physics).

[2] BARGMANN (V.). - On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform, Part I, Comm. pure and appl. Math., t. 14, 1961, p. 187-214; et Part II, t. 20, 1967, p. 1-101.

[3] BEREZIN (F. A.). - The method of second quantization. Translated from the (1965) russian edition. - New York, Academic Press, 1966 (Pure and applied Physics, 24).

[4] BEREZIN (F. A.). - Wick and anti-wick operators symbols, Math.-USSR Sbornik, t. 15, 1971, p. 577-606; et [en russe] Mat. Sbornik, t. 86 (128), 1971, p. 578-610.

[5] BEREZIN (F. A.). - Covariant and contravariant symbols of operators, Math.-USSR Izvestija, t. 6, 1972, p. 1117-1151 ; et [en russe] Izt. Akad. Nauk SSSR, t. 36, 1972, p. 1134-1167.

[6] CAHILL (K. E.). - Regularization of the P-representation, Phys. Review, t. 180, 1969, p. 1244-1255.

[7] CAHILL (K. E.) and GLAUBER (R. J.). - Ordered expansions in boson amplitude operators, Phys. Review, t. 177, 1969, p. 1857-1881.

[8] HÖRMANDER (L.). - Pseudo-differential operators, Comm. pure and appl. Math., t. 18, 1965, p. 501-517.

[9] KLAUDER (R.) and SUDARSHAN (E. C. G.). - Fundamentals of quantum optics. - New York, Benjamin, 1968.

[10] KOHN (J.) and NIRENBERG (L.). - An algebra of pseudo-differential operators, Comm. pure and appl. Math., t. 18, 1965, p. 269-305.

[11] KRÉE (P.) and RACZKA (R.). - Kernels and symbols of operators in quantum field theory, Ann. Inst. H. Poincaré, Série B (à paraître).

[12] KRÉE (P.). - Théorie des distributions et holomorphie en dimension infinie, "Proceedings of the Symposium on infinite dimensional holomorphy [1975. Campinas]" (à paraître).

[13] KRÉE (P.). - Noyaux et symboles des opérateurs en théorie quantique des champs, Séminaire Leray : Equations aux dérivées partielles, 1975/76, 3 exposés (à paraître).

[14] KRÉE (P.). - Théorie des distributions et calculs différentiels sur un espace de Banach, "Séminaire Lelong : Analyse, 1974/75, p. 163-192. - Berlin, Springer-Verlag, 1976 (Lecture Notes in Mathematics, 524).

[15] KRÉE (P.). - Théorie de la mesure et holomorphie en dimension infinie, Séminaire Lelong : Analyse, 1975/76 (à paraître).

[16] KRÉE (P.). - Calcul symbolique et seconde quantification des fonctions sesquiholomorphes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 284, 1977, Série A, p. 25-28.

[17] KRÉE (P.). - Symbole des opérateurs différentiels en dimension infinie (en préparation).

[18] LASCAR (B.). - Méthodes L^2 pour des équations aux dérivées partielles dépendant d'une infinité de variables, Séminaire Goulaouic-Schwartz : Equations aux dérivées partielles et analyse fonctionnelle, 1975/76, n° 5, 10 p. - Palaiseau, Ecole Polytechnique, Centre de Mathématiques, 1976.

[19] LASCAR (B.). - Propriétés d'espaces de Sobolev en dimension infinie, Comm. in part. diff. equat., 1976 (à paraître).

[20] LASCAR (B.). - Une C. N. S. d'ellipticité en dimension infinie, Comm. in part. diff. équat., 1977 (à paraître).

[21] MARTINEAU (A.). - Sur les fonctionnelles analytiques et la transformation de Fourier-Borel, J. Anal. math. Jérusalem, t. 11, 1963, p. 1-164 (Thèse Sc. math. Paris, 1963).

[22] MARTINEAU (A.). - Equations différentielles d'ordre infini, Séminaire Leray : Equations aux dérivées partielles, 1965/66, fasc. 2, exposé n° 4, p. 49-112.

[23] NACHBIN (L.). - Topology on spaces of holomorphic mappings. - Berlin, Springer-Verlag, 1969, (Ergebnisse der mathematik, 47).

Paul KREE
32 rue Miollis
75015 PARIS