PAUL KRÉE

Classes L^p de protenseurs distributions contravariants

Séminaire Paul Krée, tome 1 (1974-1975), exp. n° 8, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=SPK_1974-1975__1__A9_0>

Séminaire Paul KRÉE
Equations aux dérivées partielles
en dimension infinie
1re année, 1974/75, n° 8, 13 p.

CLASSES L^p DE PROTENSEURS DISTRIBUTIONS CONTRAVARIANTS

par Paul KRÉE

En dimension finie, les solutions de nombreuses équations aux dérivées partielles et de problèmes aux limites relatifs à ces équations sont du type $f\,dx$, où f désigne une fonction d'une certaine classe de Lebesgue L^p. Autrement dit, la distribution cherchée est représentée par une fonction usuelle, mais les dérivées de $f\,dx$ intervenant dans les équations sont souvent des dérivées généralisées, prises au sens de la théorie des espaces de Sobolev, ou bien définies par le procédé d'extension des opérateurs non bornés (K. O. FRIEDRICHS), ou bien au sens de la théorie des distributions. Il en est de même en dimension infinie, d'où l'intérêt des classes $L^p(O)$ de u-prodistributions et des classes $L^p(O, k)$ de u-protenseurs distributions qui sont définies dans cet exposé, l'ouvert O étant équipé d'une u-promesure fixée μ. Si $O = X$, et si $p = 2$, on retrouve la classe $L^2(X)$ de I. SEGAL. Il faut bien noter que tout élément de $L^2(X)$ correspond à une classe d'équivalence de fonctions f égales presque partout, qui ne sont pas définies sur X mais sur un espace Ω plus grand que X en général, l'injection de X dans Ω transformant la promesure μ en une mesure de Radon sur Ω.

On peut se demander pourquoi on ajoute un nouveau formalisme aux formalismes déjà existants concernant l'intégration et les classes L^p en dimension infinie. Pour montrer l'intérêt du présent travail, situons-le par rapport aux travaux existants :

Dans son travail fondamental de 1956, I. SEGAL [5] définit la classe L^2 relative à un Hilbert réel X (et à la promesure normale sur cet Hilbert) en plongeant X dans X'^*, et en considérant les éléments de L^2 comme des classes de fonctions définies sur X'^*.

Dans le tome IV du traité sur les fonctions généralisées, GEL'FAND et VILENKIN [4] travaillent, avec une promesure normale μ, sur le dual X d'un espace nucléaire. Ceci a l'avantage de réaliser μ comme une vraie mesure sur X, mais ceci a l'inconvénient de faire disparaître la structure hilbertienne. Or cette structure est importante en théorie des champs puisqu'elle permet par exemple de construire l'espace de Fock.

K. O. FRIEDRICHS et SHAPIRO [3] modifient la construction de I. SEGAL en remplaçant la bonne famille maximale de l'Hilbert X par une bonne famille quelconque.

Ces bonnes familles apparaissent aussi dans un travail de BEREZIN [2], qui utilise des systèmes cohérents de fonctions φ_i sur les espaces X_i. Mais BEREZIN équipe chaque X_i de sa mesure de Lebesgue canonique, au lieu de l'équiper avec la mesure μ_i associée à une promesure sur X.

Dans le présent travail, il intervient une bonne famille quelconque, et les classes L^p sont caractérisées directement à l'aide de l'espace X muni d'une promesure, sans faire intervenir une réalisation de la promesure en vraie mesure. Cette caractérisation ne fait intervenir que des espaces X_i de dimension finie et une majoration uniforme sur les normes. On étudie aussi les classes L^p vectorielles. Ces classes nous semblent très importantes en dimension infinie, car en dimension infinie, on doit travailler globalement sur les dérivées, ce qui n'est pas indispensable en dimension finie.

1. Les données.

(1.1) La promesure μ sur $\mathcal{O}$: Soient X un e. v. l. c. s. réel, $F_u(X)$ une bonne famille, et Z le plus petit sous-espace fermé de X qui contient les éléments de $F_u(X)$. Dans toute la suite, on suppose que la u-promesure μ sur $\mathcal{O}$ vérifie les conditions suivantes :

(a) Dans le cas 1, c'est-à-dire si $Z = X$, on suppose que $\mathcal{O} = X$, et que μ est une promesure de probabilité de type zéro au sens suivant. Notons L^0 l'espace des variables aléatoires relatives à un espace probabilisé, muni de la topologie de la convergence en probabilité. On suppose qu'il existe une topologie localement convexe θ sur X' , compatible avec la dualité avec X , telle que tout processus linéaire de la classe d'isonomie de μ définisse une application linéaire continue de X muni de la topologie θ , dans L^0 ;

(b) Dans le cas 2, c'est-à-dire si $\mathcal{O} = \mathcal{O}' \times Z$ avec $\mathcal{O}'$ ouvert de $Z^\perp$, on suppose que μ est le produit tensoriel d'une mesure dt positive sur $\mathcal{O}'$ et d'une promesure de probabilité de type zéro sur Z .

(1.2) Radonification de μ : On complète la donnée précédente :

(a) Dans le cas 1, soient Ω' un espace de Fréchet séparable, et Ω son dual. Soit ℓ une injection faiblement continue à image dense de X dans Ω . On suppose que les éléments de $F_u^\perp$, contenus dans Ω' , engendrent un sous-espace dense de Ω' , et que $P = \ell(\mu)$ est une probabilité de Radon sur Ω faible.

(b) Dans le cas 2, $\mathcal{O} = \mathcal{O}' \times Z$, $\mu = dt \otimes \mu'$, et soit ℓ_1 une injection faiblement continue à image dense de Z dans un e. v. Ω_1 en dualité séparante avec Ω_1' , et vérifiant des hypothèses analogues à celles du point (a). Plus précisément, $P' = \ell_1(P)$ est une probabilité de Radon et pour la dualité $Z - Z'$, les éléments de $F_u^\perp$ contenus dans Ω_1' engendrent un sous-espace dense de Ω_1' .

On note alors ℓ l'application $\mathrm{Id}(\mathcal{O}') \times \ell_1$ de $\mathcal{O}$ dans $\Omega = \mathcal{O}' \times \Omega_1$; on a

$$\ell(\mu) = P \quad \text{avec} \quad P = dt \otimes P' .$$

(1.3) Construction du système cohérent des f_i qui décompose μ .

(a) Dans le cas 1, ℓ identifie X à un sous-espace de Ω et ℓ' identifie Ω' à un sous-espace de X' . Considérons Ω comme un espace probabilisé. L'application qui à tout ω' de Ω' associe la variable aléatoire linéaire (ω' , ω) est la restriction ρ à Ω' d'un processus linéaire R de la classe d'isonomie de μ . Comme μ est de type zéro, R est le prolongement par continuité de ρ . Par conséquent, pour tout i , il existe une seule classe f_i d'application P-Lusin mesurables de Ω dans X_i , telle que

$\mu_i = f_i(P)$

$i \geqslant j$ entraîne $f_j = s_{ij} \circ f_i$ presque sûrement.

(b) Dans le cas 2, par la construction qui précède on construit un système cohérent d'applications P'-Lusin mesurables $f_i^! : \Omega_1 \longrightarrow A/A_i$ et telles que $f_i^!(P') = \mu_i^!$ pour tout i . Si l'on pose $f_i = \mathrm{Id}(O') \times f_i^!$, on obtient un système cohérent d'applications P-Lusin mesurables $f_i : \Omega \longrightarrow X_i$ et telles que $f_i(P) = \mu_i$ pour tout i .

On voit donc que, dans les cas 1 et 2, on a une figure du genre :

(1.3.1)
$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\ell"] \arrow[dr, "s_i"] \arrow[dd, "s_j"'] & & \Omega \arrow[dl, "f_i"'] \arrow[ddll, "f_j"] \\
& X_i \arrow[dl, "s_{ij}"] & \\
X_j & &
\end{tikzcd}$$

(1.4) LEMME. - La tribu engendrée par les f_i (i décrivant I) est la tribu borélienne faible P-complétée de Ω .

On peut se limiter au cas 1. Soit I' l'ensemble des i de I tels que $A_i^{\perp}$ soit contenu dans $f'(\Omega') = \Omega'$. Il suffit de montrer que la tribu borélienne faible $\mathcal{T}$ de Ω est engendrée par les f_i , i décrivant I' .

Notons Ω_i l'orthogonal de $A_i^{\perp}$ pour la dualité $\Omega - \Omega'$. Les Ω_i forment une bonne famille $F_1(\Omega)$ d'après (1.2.c) de l'exposé 2 et d'après l'hypothèse (1.2.a) ci-dessus. Comme $A_i \subset \Omega_i$, on a une surjection naturelle ℓ_i de $X_i = X/A_i$ sur $Y_i = \Omega/\Omega_i$. Cette surjection est bijective car c'est la transposée de l'application identique de $A_i^{\perp}$. Si t_i est la surjection canonique de Ω sur Y_i , on a $f_i = \ell_i^{-1} \circ t_i$. Il s'agit donc de montrer que $\mathcal{T}$ est engendrée par l'algèbre de Boole de cylindres de Ω , basés sur les $Y_i = \Omega/\Omega_i$, Ω_i décrivant une bonne famille. Il suffit de remarquer que les résultats de [1] (exposé 3, numéro 3) sont encore valables si l'on y remplace la bonne famille usuelle de la théorie des probabilités cylindriques par une bonne famille quelconque.

(1.4') LEMME (dualité mesurable entre X' et Ω). - Supposons que dans le cas 1, la promesure μ sur X soit de type $p \geqslant 1$, c'est-à-dire que tout processus linéaire de la classe d'isonomie de μ définit une application linéaire continue de X' (muni d'une topologie métrisable θ compatible avec la dualité avec X) à valeurs dans L^p . Il en est donc ainsi du processus R défini en (1.3.a). Alors, pour tout x' de X' , la variable aléatoire Rx' est presque sûrement linéaire sur Ω .

Cette propriété est très utile dans la théorie des promesures normales.

Démonstration : Soit (ω'_n) une suite de points de ω' qui converge vers x' pour la topologie θ . Alors la suite $(R\omega'_n)_n$ converge vers Rx' dans L^p , et il existe une suite extraite qui converge presque sûrement vers Rx' . Comme les variables aléatoires $R\omega'_n$ sont des formes linéaires sur Ω , Rx' est presque sûrement linéaire.

2. Classes L^p de prodistributions.

Une promesure μ , satisfaisant aux hypothèses précédentes, est donnée sur X . On limite la présentation au cas 1.

(2.5) Espace $L^p(X)$ $(1 \leq p \leq \infty)$: Pour toute g dans $L^p(\Omega)$, on note gP la mesure sur Ω , de densité g par rapport à la mesure P . Lorsque i varie, les $f_i(gP)$ définissent une promesure sur X notée $g\mu$ ou même g ; ces notations sont abusives mais commodes. Lorsque g varie dans $L^p(\Omega)$, l'espace décrit par $g\mu$ est noté $L^p(X)$.

(2.6) Remarque : La moyenne conditionnelle de g par rapport à f_i est la classe d'équivalence $\mathfrak{M}(g|f_i)$ de fonctions φ_i sur X_i telle que

$$\forall\ D \text{ borélien de } X_i\ ,\quad \int_D \varphi_i\, d\mu_i = \int_{f_i^{-1}(D)} (\varphi_i \circ f_i) dp\ .$$

Parfois, c'est $\varphi_i \circ f_i$ qu'on appellera espérance conditionnelle de g .

Si $\mathfrak{M}(g|f_i)$ est nul pour tout i , alors $g = 0$. En effet, la mesure gP étant nulle sur l'algèbre de Boole $\bigcup_i \mathcal{T}_i$ qui engendre $\mathcal{T}$ modulo les négligeables, il en résulte que la mesure gP est nulle ; donc $g = 0$ presque partout.

(2.7) LEMME DE DENSITÉ. - Soit $1 \leq p < \infty$. Pour tout i , on se donne un sous-espace vectoriel Φ_i dense dans $L^p_{\mu_i}$. On pose $\tilde{\Phi}_i = \{\varphi_i \circ f_i\ ,\ \varphi_i \in \Phi_i\}$. Alors le sous-espace vectoriel de $L^p(\Omega)$, engendré par les $\tilde{\Phi}_i$, est dense dans $L^p(\Omega)$.

Preuve : Notons d'abord que $\tilde{\Phi}_i \subset L^p(\Omega)$, car

$$\int |\varphi_i \circ f_i|\ dP = \int |\varphi_i|\ d\mu_i\ .$$

Raisonnons par polarité. Il suffit de montrer que si $g \in L^{p'}(\Omega)$ est orthogonale aux sous-espaces $\tilde{\Phi}_i$ de $L^p(\Omega)$, alors $g = 0$. Vu la remarque précédente, il suffit de montrer que, pour tout i , et tout B de $\mathcal{B}_i$, l'intégrale de g sur

B est nulle. Or ceci résulte du fait que la fonction caractéristique de B est limite d'une suite de fonctions φ_i^n de Φ_i.

(2.8) PROPOSITION.

(a) Soit $1 \leq p \leq \infty$. Pour tout $g \in L^p(\Omega)$, et tout i, $\varphi_i = \mathcal{M}(g|f_i)$ est tel que

$$\varphi_i \mu_i = f_i(gP) \quad \text{et} \quad \int |\varphi_i|^p \, d\mu_i \leq \int |g|^p \, dP .$$

L'application $g \longrightarrow g\mu$ est bijective ; elle permet de munir $L^p(X)$ d'une structure d'espace de Banach.

(b) Soit $1 < p < \infty$. Soit $(\varphi_i)_i$ une famille de fonctions telles que

(i) $\varphi_i \in L^p_{\mu_i}(O_i)$ et $\sup \int |\varphi_i|^p \, d\mu_i < \infty$;

(ii) les mesures $\varphi_i \mu_i$ sont cohérentes.

Alors les fonctions $\varphi_i \circ f_i$ convergent dans $L^p(\Omega)$ fort selon le filtre engendré par les images des sections terminales de I. La limite g est telle que

$$g\mu = (\varphi_i \mu_i)_i .$$

L'application qui à $g \in L^p(\Omega)$ associe la collection des $\varphi_i = \mathcal{M}(g|f_i)$ est une isométrie de $L^p(\Omega)$ sur l'espace des φ_i vérifiant (i) et (ii).

Preuve.

(a) résulte de (2.6) et du fait que l'application $g \longrightarrow \varphi_i \circ f_i$ est une contraction dans L^p, et de (1.3).

(b) Les fonctions $\varphi_i \circ f_i$ décrivant un borné de $L^p(\Omega)$, l'ensemble filtré des $\varphi_i \circ f_i$ admet au moins un point adhérent g dans $L^p(\Omega)$ faible. Pour tout i, tout B de $\mathcal{C}_i$, et tout $j \geq i$:

$$\int_B \varphi_i \circ f_i \, dP = \int_B \varphi_j \circ f_j \, dP .$$

En prenant la limite du second membre d'après le filtre plus fin selon lequel $\varphi_j \circ f_j$ converge vers g dans $L^p(\Omega)$ faible, on obtient

$$\int_B \varphi_i \circ f_i \, dP = \int_B g \, dP .$$

Vu (2.6), cette relation montre que la famille des $\varphi_i \circ f_i$ a un seul point adhérent ; elle converge donc dans L^p faible. De plus, cette relation montre que l'on a, pour tout i,

$$\varphi_i \circ f_i = \mathcal{M}(g|f_i) .$$

Par conséquent, les $\varphi_i \circ f_i$ convergent vers g dans L^p fort.

La proposition (2.8.b) montre que l'on peut définir complètement $L^p(X)$ sans faire intervenir Ω. L'espace Ω permet de donner une interprétation commode de $L^p(X)$, mais il joue un rôle auxiliaire. Autrement dit, Ω a dans cette théorie un rôle analogue à celui des espaces probabilisés en théorie élémentaire des probabilités : Ω facilite les raisonnements, mais Ω n'est pas canonique.

(2.9) *Topologie faible de* L^p *, topologie cylindrique et topologie naturelle : Soient* g , g_1 , ... , g_m , ... *des éléments de* $L^p(\Omega)$. *On suppose que la suite* (g_m) *converge faiblement vers* g *dans* $L^p(\Omega)$. *Alors la suite des promesures* $g_m\,\mu$ *converge cylindriquement et naturellement vers la promesure* $g\mu$.

En effet, plaçons-nous par exemple dans le cas 2 du (4.27) de l'exposé 2. Soit $\varphi \in \mathcal{D}\mathcal{B}^{\ell}(O_i)$. Alors $\varphi \circ f_i \in L^p$, et l'on a

$$\int (g_m - g)(\varphi \circ f_i)\, dP \longrightarrow 0 \quad \text{si} \quad m \longrightarrow \infty .$$

Comme $\mathcal{D}(O_i) \subset \mathcal{D}\mathcal{B}^{\ell}(O_i)$, ceci entraîne que $(g_m\,\mu)$ converge vers $g\mu$ pour la topologie cylindrique et pour la topologie naturelle.

3. Classes L^p de protenseurs distributions.

(3.10) *Protenseurs distributions* k *fois contravariant associé à une fonction* g *de* $L^p(\Omega\,,\,G)$ *avec* $1 \leqslant P \leqslant \infty$: Pour tout i , on note α_i l'injection de $(A_i^{\perp})^c$ dans Ξ^c . Soit σ_i : $(\bigotimes_k \Xi^c)^* \longrightarrow \bigotimes_k X_i^c$ la transposée de $\bigotimes_k \alpha_i$. Soit G un e. v. l. c. s. contenu dans l'espace $E = (\bigotimes_k \Xi^c)^*$ des formes k-linéaires sur Ξ^c , et tel que, pour tout i , la restriction de σ_i à G soit continue. On note $L^p(\Omega\,,\,G)$ l'espace des classes d'applications Lusin-mesurables g de Ω dans G telles que $\sigma_i \circ g$ soit intégrable pour tout i . On note alors φ_i la moyenne conditionnelle de $\sigma_i \circ g$ par rapport à f_i .

(3.11) LEMME.

(a) *Lorsque* i *varie, les mesures vectorielles* $\varphi_i\,\mu_i$ *sont cohérentes et définissent un protenseur distribution contravariant de degré* k .

(b) *Si ce tenseur distribution est nul, alors* g *est nulle.*

Démonstration.

(a) Pour $i \geqslant j$, on a la figure

(3.11.1)
$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, hook, "\ell"] \arrow[d, "s_i"'] & \Omega \arrow[r, "g"] \arrow[dl, "f_i"'] \arrow[ddl, "f_j"] & G \arrow[d, "\sigma_i"] \\
X_i \arrow[rr, dashed, "\varphi_i"] \arrow[d, "s_{ij}"'] & & \bigotimes X_i^c \arrow[d, dotted, "\sigma_{ij} = \bigotimes_k s_{ij}^c"] \\
X_j \arrow[rr, dashed, "\varphi_j"] & & \bigotimes X_j^c
\end{tikzcd}$$

L'injection $\bigotimes_k s'^{c}_{ij}$ identifie $\bigotimes_k X'^{c}_j$ à un sous-espace de $\bigotimes_k X'^{c}_i$. Vu (2.5.1) de l'exposé 6, il suffit de vérifier que, pour toute ψ de $\mathcal{B}(X_j)$ et tout ξ de $\bigotimes_k X_j^c$,

$$(\varphi_j\,\mu_j\,,\,\psi \otimes \xi) = (\varphi_i\,\mu_i\,,\,(\psi \circ s_{ij}) \otimes \xi)\ ,$$

soit

$$\left(\int \varphi_j\, \psi\, d\mu_j \,,\, \xi\right) = \left(\int \varphi_i(\psi \circ s_{ij})\, d\mu_i \,,\, \xi\right) .$$

Soit encore, pour tout borélien B de X_j ,

$$\int_B \varphi_j\, d\mu_j = \sigma_{ij}\left(\int_{s_{ij}^{-1}(B)} \varphi_i\, d\mu_i\right) = \int_{s_{ij}^{-1}(B)} (\sigma_{ij} \circ \varphi_i)\, d\mu_i .$$

Or ceci résulte de la définition des φ_i .

(b) Soit g telle que le protenseur distribution $(\varphi_i\, \mu_i)$ soit nul ; donc φ_i est nul pour tout i . Comme la tribu de Ω est engendrée par les f_j , on a $\sigma_i \circ g = 0$ pour tout i . Or, l'origine de G est l'intersection de l'ensemble filtrant décroissant des intersections finies des $\sigma_i^{-1}(\{0\})$.

Notant m la mesure de Radon $g(P)$ sur G , on a $m(\sigma_i^{-1}(\{0\})) = 1$ pour tout i . Donc $m(\{0\}) = 1$, et g est presque sûrement nulle.

Le lemme (3.11) permet de noter $g\mu$ (ou même g !) le protenseur distribution $(\varphi_i\, \mu_i)$ associé à toute g de $L^1(\Omega , G)$.

(3.12) <u>Remarque</u>.

(a) Supposons G contenu dans l'espace des formes k-linéaires symétriques (resp. antisymétriques sur X^c). Alors, tout g de $L^1(\Omega , G)$ définit un protenseur distribution symétrique (resp. antisymétrique).

(b) Les méthodes de ce paragraphe se généralisent naturellement pour définir les classes L^p de prodistributions Φ-vectorielles.

(3.13) <u>Définition des espaces</u> $L^p(X , G)$: Reprenons les notations du lemme (3.11). On note $g\mu$, ou même parfois g , le protenseur distribution de variance $\binom{k}{0}$ défini par les $\varphi_i\, \mu_i$. Lorsque g décrit $L^p(\Omega , G)$, alors $g\mu$ décrit un espace noté $L^p(X , G)$.

4. Cas hilbertien.

(4.14) <u>Rappel de quelques formules sur les produits tensoriels hilbertiens</u> : Soit X un espace hilbertien réel.

On note $\bigodot_p X_i$ l'espace des p-tenseurs symétriques sur X_i .

Pour toute permutation σ de $\{1 , \dots , p\}$, on note U_σ l'opérateur linéaire de $\bigotimes_p X_i$ qui applique le tenseur décomposé $y_1 \otimes \dots \otimes y_p$ sur $y_{\sigma_1} \otimes \dots \otimes y_{\sigma_p}$.

On pose

$$(4.14.1) \qquad y_1 \odot \dots \odot y_p = \frac{1}{\sqrt{p!}} \sum_\sigma U_\sigma(y_1 \otimes \dots \otimes y_p) .$$

L'opérateur $1/\sqrt{p!}\, \sum_\sigma$, noté Sym_p , est le symétriseur de Young.

Supposons que, dans une suite $y_1 \dots y_p$ de p vecteurs de X_i , il apparaisse en fait k vecteurs différents : le vecteur g_1 apparaissant α_1 fois ... le vecteur y_k apparaissant α_k fois avec $|\alpha| = p$. Alors on pose

$$y_1 \odot \dots \odot y_p = y_1^{\odot\alpha_1} \odot \dots \odot y_k^{\odot\alpha_k} .$$

On munit $\bigotimes_p X_i$ de la norme tensorielle euclidienne, et l'on munit $\bigodot_p X_i$ de la norme induite.

Alors si $(e_1 \dots e_n)$ est une base orthonormée de X_i les vecteurs

(4.14.2) $$\vec{\varepsilon_\alpha} = \frac{e_1^{\odot\alpha_1} \odot \dots \odot e_n^{\odot\alpha_n}}{\sqrt{\alpha!}}$$

forment, lorsque α décrit la famille des multi-indices de longueur p , une base orthonormée de l'espace euclidien $\bigodot_p X_i$. Rappelons, pour terminer, qu'un polynôme P homogène de degré P sur X_i est caractérisé par une forme p-linéaire symétrique b sur X_i telle que $P(x) = b(x , \dots, x)$.

Autrement dit, on peut associer canoniquement au polynôme

$$x \xrightarrow{P} \Sigma_{|\alpha|=p}\, a_\alpha\, x^\alpha$$

le tenseur

(4.14.3) $$t = \Sigma_{|\alpha|=p}\, a_\alpha \frac{e_1^{\odot\alpha_1} \odot \dots \odot e_n^{\odot\alpha_n}}{\sqrt{p!}} \in \bigodot_p X_i ,$$

d'où la norme $\|\cdot\|$ sur l'ensemble des polynômes homogènes de degré p telle que

(4.14.4) $$\|P\|^2 = \|t\|^2 = \Sigma_{|\alpha|=p}\, |a_\alpha|^2 \frac{\alpha!}{|\alpha|!} .$$

(4.15) Définition de $L^p(0 , k)$, $L^p_s(0 , k)$, $L^p_a(0 , k)$: Soient 0 un ouvert de X , et une bonne famille $F_u(X)$ vérifiant (4.27) de l'exposé 2, et les données définies dans l'exposé 4 en (1.1.1) et (1.1.2). En reprenant la construction de l'exposé 4 en (1.10), on associe à g de $L^p(\Omega , G)$ un système projectif de protenseurs distributions sur les ouverts 0_i . Lorsque g décrit $L^p(\Omega , G)$, ce système projectif décrit une classe de protenseurs distributions sur 0 que l'on note $L^p(0 , G)$. Si en particulier $G = \hat{\bigotimes}_k X^c$ (resp. $\hat{\bigodot}_k X^c$, resp. $\hat{\bigwedge}_k X^c$), alors on simplifie l'écriture en posant :

$$L^p(0 , G) = L^p(0 , k) \quad (\text{resp. } L^p_s(0 , k) , \ \text{resp. } L^p_a(0 , k) .$$

(4.16) Quelques lemmes sur les moyennes conditionnelles : On note $(\Omega , \mathcal{T} , P)$ un espace mesuré, $\mathcal{T}$ étant P-complète, $\mathcal{T}'$ la sous-tribu de $\mathcal{T}$ engendrée par une classe f_i d'applications mesurables de Ω dans un espace localement compact 0_i . Pour simplifier, si g est une fonction intégrable sur Ω , on note $g' = \mathfrak{M}(g|f_i)$ sa moyenne conditionnelle par rapport à f_i .

(4.17) LEMME. - Soient $h_1 , \dots , h_m$ des fonctions positives intégrables, et φ une fonction convexe continue : $\underset{\sim}{R}^n_+ \to \underset{\sim}{R}$.

(a) Alors

(4.17.1) $$\varphi(h'_1 , \dots , h'_m) \le \varphi(h_1 , \dots , h_m)' .$$

(b) En particulier, pour $p \geqslant 1$,

(4.17.2) $$(\Sigma\, h_j'^{2})^{p/2} \leqslant ((\Sigma\, h_j^2)^{p/2})' .$$

(c) $\int (\Sigma_{j=1}^{m} h_j'^{2})^{p/2}\, dp \leqslant \int ((\Sigma_{j=1}^{m} h_j^2)^{p/2})\, dp$.

Preuve.

(a) Pour toute forme affine $a_0 + \Sigma_1^m a_j u_j$ dont le graphe est situé en dessous du graphe de $u \dashrightarrow \varphi(u)$,

$$a_0 + \Sigma\, a_j h_j \leqslant \varphi(h_1 , \ldots , h_n) .$$

D'où

$$(a_0 + \Sigma\, a_j h_j)' = a_0 + \Sigma\, a_j h_j' \leqslant \varphi(h_1 , \ldots , h_n)'$$

et

$$\varphi(h_1' , \ldots , h_n') = \sup(a_0 + \Sigma\, a_j h_j') \leqslant (h_1 , \ldots , h_n)' .$$

(c) résulte de (b) et du fait que l'opération de conditionnement réalise une contraction dans la classe de Lebesgue L^1 .

(4.18) LEMME. - Soient H un espace de Hilbert séparable réel, et H^c son complexifié. Soit g dans la classe de Lebesgue vectorielle $L^p(\mathcal{T} , H^c)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

(a) Il existe une seule $g' \in L^p(\mathcal{T}' , H^c)$ telle que :

(4.18.1) $$\forall\, B \in \mathcal{T}' , \quad \int_B g\, dP = \int_B g'\, dP ;$$

(b) L'application $g \dashrightarrow g'$ est une contraction $L^p(\mathcal{T} , H^c) \dashrightarrow L^p(\mathcal{T}' , H^c)$.

(c) Si (ε_n) est une base orthonormée de H , posant $g = \Sigma\, g_n \varepsilon_n$, $g_n' = \mathfrak{M}(g|f_i)$, on a

(4.18.2) $$g' = \text{limite forte dans } L^{p'}(\ ' , H^c) \text{ de } \Sigma_1^n g_n' \varepsilon_n .$$

Preuve : De (3.10), on déduit que

$$\forall\, n , \quad \forall\, B \in \mathcal{T}' , \quad \int_B g_n\, dP = \int_B \varepsilon_n(g' , \varepsilon_n)\, dP .$$

Par conséquent, $(g' , \varepsilon_n) = \mathfrak{M}(g_n|\mathcal{T}') = g_n'$. Donc

$$\forall\, N , \quad \forall\, B \in \mathcal{T}' , \quad \int_B(\Sigma_1^N g_n \varepsilon_n)\, dP = \int (\Sigma_1^N g_n' \varepsilon_n)\, dP .$$

Introduisant le projecteur P^N de H sur le sous-espace de H^c engendré par $\varepsilon_1 , \ldots , \varepsilon_N$, cette relation s'écrit

$$\forall\, N , \quad \forall\, B , \quad \int_B(P^N g)(\omega)\, dP(\omega) = \int_B(\Sigma_1^N g_n' \varepsilon_n)\, dP .$$

Vu le théorème de Lebesgue, le premier membre tend vers $\int_B g\, dP$ lorsque N tend vers l'infini. Or, vu (2.6),

$$\int \| \Sigma_{Q+1}^{R} g_n' \varepsilon_n \|^p\, dP = \int (\Sigma_{Q+1}^{R} g_n'^{2})^{p/2}\, dP < \int \| \Sigma_{Q+1}^{R} g_n \varepsilon_n \|^p\, dP = \int |P^Q g - P^R g|^p\, dP .$$

Donc la suite $(\Sigma_1^N g_n' \varepsilon_n)_N$ vérifie le critère de Cauchy dans l'espace $L^p(\mathcal{T}', H')$; elle converge vers g' , noté $\Sigma_1^\infty g_n' \varepsilon_n$. On a donc montré (3,11). Pour montrer que

$g \longrightarrow g'$ est une contraction, on note que

$$\int_B |P^N g'|^p \, dP \leqslant \int_B |P^N g|^p \, dP ,$$

et l'on fait tendre N vers $+\infty$.

(4.19) LEMME DE DENSITÉ. – Soit k un entier $\geqslant 0$, et soit $1 \leqslant P < \infty$. On se donne, pour tout i, un sous-espace vectoriel Φ_i dense dans $L^p_{\mu_i}(X_i, \bigotimes_k X_i^c)$. On pose

$$\tilde{\Phi}_i = \{\tilde{\varphi}_i , \ \varphi_i \circ f_i , \ \varphi_i \in \Phi_i\} .$$

Alors la réunion des $\tilde{\Phi}_i$ engendre un sous-espace vectoriel dense dans $L^p(\Omega, k)$.

Preuve : Notons d'abord que $\tilde{\Phi}_i$ est contenu dans $L^p(\Omega, \bigotimes_k X^c)$, car

$$\int_\Omega \|\tilde{\varphi}_i\|^p \, dP = \int_{X_i} \|\varphi_i\|^p \, d\mu_i .$$

Raisonnons par polarité. Il suffit de montrer que si $g \in L^{p'}(\Omega, k)$ est orthogonale au sous-espace $\tilde{\Phi}_i$ de $L^p(\Omega, k)$, alors g est nulle. Vu la preuve de (3.11.b), il suffit de montrer que $\sigma_i \circ g$ est nulle pour tout i. Comme la tribu complétée de Ω est engendrée par les cylindres, il suffit de montrer que $\varphi_j = \mathcal{E}(\sigma_i \circ g | f_j) = 0$, pour tout j. Comme l'ensemble des indices i est filtrant à droite, on peut supposer que $i = j$. Donc $\varphi_i = 0$ car, pour toute $\tilde{\psi}_i = \psi_i \circ f_i$ dans $\tilde{\Phi}_i$, on a

$$0 = \int (\tilde{\psi}_i , g) \, dP = \int (\psi_i , \varphi_i) \, d\mu_i .$$

(4.20) Comparaison de topologies : Soient k un entier $\geqslant 0$, et $1 \leqslant p < \infty$. Alors la topologie faible de $L^p(\Omega, k)$ est plus fine que la topologie cylindrique de $L^p(X, k)$.

En effet, soit (g_m) une base de filtre de $L^p(\Omega, k)$ qui converge faiblement vers l'élément g de $L^p(\Omega, k)$. Alors, pour toute φ de $\mathcal{B}^\ell(X_j, \bigotimes X_j^c)$, on a $\tilde{\varphi} = \varphi \circ f_i$ dans $L^{p'}(\Omega, k)$, et

$$\int ((g_m - g) , \tilde{\varphi}) \, dP \longrightarrow 0 \quad \text{si} \quad m \longrightarrow \infty .$$

(4.21) PROPOSITION. – Soit $1 < p < \infty$, et k entier $\geqslant 0$. Soit (φ_i) une famille de fonctions telles que

(i) Pour tout i, $\varphi_i \in L^p_{\mu_i}(X_i, \bigotimes_k X_i)$ et $\sup_i \int |\varphi_i|^p \, d\mu_i < \infty$.

(ii) Les mesures $\varphi_i \mu_i$ sont cohérentes : pour toute surjection s_{ij}, on a $\varphi_j = \mathcal{E}(\sigma_{ij} \circ \varphi_i | s_{ij})$.

Alors les fonctions $\varphi_i \circ f_i$ convergent dans $L^p(\Omega, k)$ fort selon le filtre F engendré par les images de sections terminales de I. Et la limite g est telle que $g\mu = (\varphi_i \mu_i)_i$.

Autrement dit, l'application qui à g fait correspondre la famille des $\mathcal{M}(\sigma_i \circ g | f_i)$ est une isométrie de $L^p(\Omega, \hat{\bigotimes} X^c)$ sur l'espace des φ_i vérifiant

(i) <u>et</u> (ii).

<u>Démonstration</u> : Les fonctions $\varphi_i \circ f_i$ décrivant un borné de $L^p(\Omega , k)$, l'ensemble filtré des $\varphi_i \circ f_i$ admet au moins un point adhérent g dans $L^p(\Omega , k)$ faible. Pour tout i , pour tout B de τ_i , et tout $j \geqslant i$, on a

$$\int_B \varphi_i \circ f_i \, dP = \sigma_{ji} \int_B (\varphi_j \circ f_j) \, dP ,$$

où σ_{ji} est la projection orthogonale de $\bigotimes_k X_j^c$ sur $\bigotimes_k X_i^c$. En prenant la limite du second membre selon le filtre plus fin que F selon lequel $(\varphi_j \circ f_j)_j$ converge vers g dans $L^p(\Omega , k)$ faible, il vient

$$\int_B \varphi_i \circ f_i \, dP = \sigma_i(\int_B g \, dP) = \int_B (\sigma_i \circ g) \, dP .$$

Donc $\varphi_i = \mathcal{E}(\sigma_i \circ g | f_i)$, et la suite $(\varphi_i \circ f_i)$ converge vers g selon F dans $L^p(\Omega , k)$ fort. Notons que Y. LEJEAN a simplifié cette démonstration et l'a étendue (en particulier aux cas $p = 1$ et $p = + \infty$) en utilisant le théorème de convergence des martingales vectorielles.

(4.22) <u>Propriétés de la classe</u> $L^p(0 , k)$: On peut alors reprendre tous les raisonnements du §2, en particulier :

(a) la moyenne conditionnelle de $\sigma_i \circ g$ par rapport à f_i définit une fonction $\varphi_i \in L^p_{\mu_i}(0_i , \bigodot_k X_i^c)$ telle que

$$\int \|\varphi_i\|^p \, d\mu_i \leqslant \int \|g\|^p \, dP .$$

(b) si $g \in L^p(\Omega , k)$ est telle que $\mathfrak{M}(g|f_i) = 0$ pour tout i , alors $g = 0$.

(c) lemme de densité : Soit k un entier $\geqslant 0$. On se donne, pour tout i , un sous-espace vectoriel Φ_i dense dans $L^p_{\mu_i}(0_i , \bigodot_k X_i^c)$. Posons

$$\tilde{\Phi}_i = \{\varphi f_i , \quad \varphi \in \Phi_i\} .$$

Alors, si $1 \leqslant p < \infty$, la réunion des $\tilde{\Phi}_i$ engendre un sous-espace vectoriel dense de $L^p(\Omega , k)$.

(d) L'application $g \longrightarrow g\mu$ est bijective de $L^p(\Omega , k)$ sur $L^p(0 , k)$; d'où une structure d'espace de Banach sur ce dernier espace.

(4.23) <u>Opérations dans les classes</u> L^p <u>de protenseurs distributions</u> : On peut définir très simplement certaines opérations linéaires ou même non linéaires dans les classes L^p de protenseurs distributions, par exemple :

(a) L'application $g\mu \longrightarrow g^3 \mu$ est continue de $L^{4/3}(X)$ dans $L^4(X)$;

(b) Soit $V \in L^\infty(X , 1)$. Alors la multiplication par V définit un opérateur linéaire continu

$$\alpha : \; g\mu \longrightarrow (gV)\mu \quad \text{de} \quad L^2(X) \quad \text{dans} \quad L^2(X , 1) .$$

L'adjoint de α est $\alpha : \; h\mu \longrightarrow (h|V)\mu$.

5. Caractérisation des suites de coefficients associées aux éléments de $L_s^2(X, k)$.

Nous commençons par étudier le cas scalaire, soit $k = 0$. Notons d'abord que si $T \in \mathcal{E}'_{cyl}(X)$ est considérée comme une forme antilinéaire sur $\mathcal{E}_{cyl}(X)$, on remplace la définition (4.24.1) de l'exposé 2 de $a_\alpha(T)$ par la suivante

(5.24.1) $$a_\alpha = (T|\tilde{\theta}_\alpha) \text{ ; avec } \alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_n) .$$

On va définir la base (θ_α) de fonctions cylindriques à partir de la donnée d'une promesure sur X. Plus précisément, on se donne une suite $m_1, m_2, \dots$ de lois de probabilité sur $\underset{\sim}{R}$. Soit μ la v-promesure sur ℓ^2 définie par les lois de probabilité $\mu_n = m_1 \otimes \dots \otimes m_n$ sur les espaces

$$X_n = \{\textstyle\sum_{i=1}^n x_i \ell_i \text{ ; } x_i \text{ réels}\} .$$

Pour tout k, soit $\{\theta_0^k, \theta_1^k, \dots\}$ une base orthonormée de l'espace de Hilbert complexe $L^2_{m_k}$. Pour tout multiindice $\alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_n)$, on pose i.

(5.24.2) $$\theta_\alpha(x) = \theta^1_{\alpha_1}(x_1) \dots \theta^n_{\alpha_n}(x_n) .$$

Ces θ_α vérifient les hypothèses énoncées, pour les φ_α, dans (5.31), où l'on suppose que, pour tout k,

$\theta_0^k(t) \equiv 1$,

Les fonctions $\theta_0^k, \theta_1^k \dots$ forment un système total de $\mathcal{O}_M(\underset{\sim}{R})$ pour la topologie faible associée à la dualité avec $\tilde{\mathcal{E}}(\underset{\sim}{R})$.

(5.25) LEMME. - <u>On prend pour base de fonctions cylindriques sur</u> X <u>les fonctions</u> $\theta_\alpha = \theta_\alpha \circ s_n$. <u>Soit</u> (a_α) <u>la suite des coefficients d'une</u> v-<u>prodistribution</u> T <u>à décroissance très rapide. Alors, pour que</u> T <u>appartienne à</u> $L^2(X)$, <u>il faut et il suffit que</u>

(5.25.1) $$\sup_n \sum_{\alpha_1,\dots,\alpha_n} |a_k|^2 < \infty .$$

En effet, comme pour n fixé, les θ_α forment une base orthonormée de

$$L^2_{\mu_n} = L^2_{m_1} \otimes \dots \otimes L^2_{m_1} .$$

On voit que la condition $\sum |a_\alpha|^2 < \infty$ équivaut à $T_n = \varphi_n \mu_n$ avec $\varphi_n \in L^2_{\mu_n}$. Par conséquent, la condition (5.25.1) équivaut à la condition

$$\sup_n \int |\varphi_m|^2 \, d\mu_n < \infty ,$$

et il suffit d'appliquer (2.8).

Notons que les $\theta_\alpha \circ f_n$ forment une base orthonormée de $L^2(\Omega)$. Donc, pour toute g de $L^2(\Omega)$, on a

(5.25.2) $$g = \sum_\alpha a_\alpha (\theta_\alpha \circ f_n) ,$$

cette série étant convergente dans $L^2(\Omega)$.

Etudions le cas vectoriel. Pour tout n, on rapporte $\bigodot_k X_n$ à la base orthonormée (ε_α) donnée par (4.14.2). On définit les coefficients de

$$T \in \mathcal{E}'_{cyl}(X , \bigodot_k \Xi^c))$$

par

$$a_{\alpha;\beta} = (T | \theta_\alpha \otimes \varepsilon_\beta) \tag{5.25.3}$$

avec $\alpha = (\alpha_1 \ldots \alpha_n)$, et $\beta = (\beta_1 , \ldots , \beta_n)$. Alors, pour que T appartienne à $L^2_s(X , k)$, il faut et il suffit que

$$\sup_n \sum_{\alpha,\beta} |a_{\alpha;\beta}|^2 < \infty . \tag{5.25.4}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] BADRIKIAN (A.). - Séminaire sur les fonctions aléatoires linéaires et les me-mesures cylindriques. - Berlin, Springer-Verlag, 1970 (Lecture Notes in Mathematics, 139).

[2] BEREZIN (F. A.). - The method of second quantization. Translated from the Russian by N. Mugibayashi and A. Jeffrey. - New York, Academic Press, 1966 (Pure and applied Physics, 24).

[3] FRIEDRICHS (K. O.) and SHAPIRO (H. N.). - Integration over Hilbert space and outer extensions, Proc. nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 43, 1957, p. 336-338.

[4] GEL'FAND (I. M.) et VILENKIN (N. Ja). - Les distributions. Vol. 4 : Applications à l'analyse harmonique. Traduit [du russe : Fonctions généralisées. Tome 4] par G. Rideau. - Paris, Dunod, 1967 (Collection universitaire de Mathématiques, 23).

[5] SEGAL (I. M.). - Tensor algebras over Hilbert spaces, I., Trans. Amer. math. Soc., t. 81, 1956, p. 106-134.

Paul KRÉE
Tour Mexico, B. P. 1325
65 rue du Javelot
75645 PARIS CEDEX 13