Séminaire Paul Krée

Paul Krée

Produits tensoriels complétés d'espaces de Hilbert

Séminaire Paul Krée, tome 1 (1974-1975), exp. nº 7, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=SPK_1974-1975__1__A8_0>

Séminaire Paul KRÉE
Equations aux dérivées partielles
en dimension infinie
1re année, 1974/75, n° 7, 14 p.

PRODUITS TENSORIELS COMPLÉTÉS D'ESPACES DE HILBERT

par Paul KRÉE

Le but de cet exposé est l'étude des produits tensoriels hilbertiens. On illustre cette théorie par de nombreuses applications : complété du produit tensoriel de classes de Lebesgue L^2, opérateurs de Hilbert-Schmidt d'un espace hilbertien, fonctions polynomiales du type Hilbert-Schmidt sur un espace de Hilbert. Pour simplifier la présentation, on examine d'abord le cas des espaces de Hilbert réels. Les modifications à la théorie dues à la structure complexe sont présentées dans le paragraphe 5.

1. Produits tensoriels complétés d'espaces de Hilbert.

Les espaces de Hilbert considérés seront des e. v. réels (sauf au paragraphe 5). Le produit scalaire dans l'espace de Hilbert H_i est noté $(. , .)_i$.

(1.1) PROPOSITION. - *Soient* H_1 *et* H_2 *deux espaces de Hilbert.*

(a) *A l'aide de la propriété universelle du produit tensoriel, la forme quadralinéaire* β

$$H_1 \times H_2 \times H_1 \times H_2 \longrightarrow \underset{\sim}{R}$$
$$(f_1 , f_2 , f_1' , f_2') \longmapsto (f_1 , f_1')(f_2 , f_2')$$

définit une forme bilinéaire $\tilde{\beta}$ *sur* $H_1 \otimes H_2$ *telle que*

$$\tilde{\beta}(f_1 \otimes f_2 , f_1' \otimes f_2) = (f_1 , f_1')(f_2 , f_2')$$

et $\tilde{\beta}$ *est un produit scalaire sur* $H_1 \otimes H_2$;

(b) *De plus, soit* $(e_1 , e_2 ,\dots, e_n)$ (*resp.* $(f_1 ,\dots, f_m)$) *un système orthonormal de* H_1 (*resp. de* H_2) . *Alors quels que soient les systèmes de scalaires* λ_{ij} *et* μ_{ij} $(i = 1 ,\dots, n ; \ j = 1 ,\dots, m)$, *on a*

$$(1.1.1) \qquad \tilde{\beta}(\textstyle\sum_{i,j} \lambda_{ij}\, e_i \otimes f_j , \ \sum \mu_{ij}\, e_i \otimes f_j) = \sum_{i,j} \lambda_{ij}\, \mu_{ij} .$$

Démonstration : En appliquant deux fois la propriété universelle du produit tensoriel, on voit que β définit canoniquement une forme bilinéaire symétrique $\tilde{\beta}$

$$H_1 \otimes H_2 \times H_1 \otimes H_2 \longrightarrow \underset{\sim}{R}$$
$$(\textstyle\sum_{i=1}^M f_i \otimes g_i ; \ \sum_{j=1}^N f_j' \otimes g_j') \longmapsto \sum_{i,j}(f_i , f_j')(g_i , g_j') .$$

Montrons que $\tilde{\beta}(t , t) \geq 0$ pour tout t dans $H_1 \otimes H_2$, et que $\tilde{\beta}(t , t) = 0$ entraîne $t = 0$. Si $t = \sum_{i=1}^M f_i \otimes g_i$, introduisons des systèmes orthonormés $(e_i)_i$ et $(f_j)_j$ dans H_1 et H_2 respectivement tels que $f_1 \dots f_M$ (resp.

$g_1 \ldots g_M$) soient combinaisons linéaires de $e_1 \ldots e_M$ (resp. $f_1 \ldots f_M$). On voit alors que

$$\tilde{\beta}(\sum \lambda_{ij}\, e_i \otimes f_j \,,\, \sum \mu_{k\ell}\, e_k \otimes f_\ell) = \sum \lambda_{ij}\, \mu_{k\ell}(e_k \,,\, e_\ell)(f_k \,,\, f_\ell)$$
$$= \sum \lambda_{ij}\, \mu_{ij}$$

et en particulier, si $t = \sum \lambda_{ij}\, e_i \otimes f_j$, $\tilde{\beta}(t \,,\, t) \geqslant 0$; alors

$$\hat{\beta}(t \,,\, t) = 0 \text{ entraîne } t = 0 .$$

(1.2) DÉFINITION. - <u>On note</u> $H_1 \otimes_2 H_2$ <u>l'espace vectoriel muni du produit scalaire</u> $\tilde{\beta}$ <u>(ou ce qui revient au même, de la norme associée à ce produit scalaire)</u>. <u>On note</u> $H_1 \hat{\otimes} H_2$ <u>ou</u> $H_1 \hat{\otimes} H_2$ <u>le complété de l'espace préhilbertien</u> $H_1 \otimes H_2$.

<u>Remarques</u>.

(a) Pour tout a dans H_1 et tout b dans H_2, on a

$$\|a \otimes b\| = \|a\| . \|b\| .$$

En effet,

$$\|a \otimes b\|^2 = \beta(a \otimes b \,,\, a \otimes b) = (a \,,\, a)(b \,,\, b) = \|a\|^2 . \|b\|^2 .$$

(b) On identifie en général $H_1 \otimes H_2$ à un sous-espace de $H_1 \hat{\otimes} H_2$.

(1.3) PROPOSITION. - <u>Soit</u> $(e_i)_{i\in I}$ <u>une base orthonormée dans</u> H_1. <u>Soit</u> $(f_j)_{j\in J}$ <u>une base orthonormée dans</u> H_2. <u>Alors le système des</u> $e_i \otimes f_j$ $(i \in I \,,\, j \in J)$ <u>est une base orthonormée de</u> $H_1 \hat{\otimes} H_2$.

<u>Démonstration</u> : Vu (1.1), le système des $e_i \otimes f_j$ est orthonormal. Pour montrer qu'il forme une base orthonormée de $H_1 \hat{\otimes} H_2$, il suffit de montrer qu'il est total dans $H_1 \otimes H_2$. Il suffit même de montrer que, pour tout $x \in H_1$ et tout $y \in H_2$, $x \otimes y$ appartient au sous-espace fermé engendré par les $e_i \otimes f_j$. Or

$$x = \sum x_i\, e_i \quad \text{avec} \quad \sum_{i\in I} |x_i|^2 < \infty .$$

Les x_i sont nuls sauf si i appartient à une partie dénombrable D de I, on peut donc trouver une suite $x^1 , x^2 \ldots$ de combinaisons linéaires finies des e_i qui converge vers x dans H_1. Symétriquement, il existe une suite $y^1 , y^2 \ldots$ de combinaisons linéaires finies des f_j qui converge vers y dans H_2. Comme l'application bilinéaire

$$H_1 \times H_2 \longrightarrow H_1 \otimes H_2$$
$$f \,,\, g \longrightarrow f \otimes g$$

est continue, on a

$$(x^n) \longrightarrow x \text{ et } (y^n) \longrightarrow y \Longrightarrow x^n \otimes y^n \longrightarrow x \otimes y .$$

2. Premier exemple : classe L^2 d'un espace produit.

(2.4) LEMME. - Soient Ω_1 et Ω_2 deux ensembles. Posons

$$E = \underset{\sim}{R}^{\Omega_1} , \quad F = \underset{\sim}{R}^{\Omega_2} , \quad G = \underset{\sim}{R}^{\Omega_1 \times \Omega_2} .$$

Alors l'application bilinéaire

$$E \times F \xrightarrow{\beta} G$$

$$(f(\omega_1) \, , \, g(\omega_1)) \longmapsto f(\omega_1) \, g(\omega_2)$$

définit par la propriété universelle du produit tensoriel une injection $\tilde{\beta}$ de $E \otimes F$ dans G.

En effet, soit t dans $E \otimes F$ tel que $\tilde{\beta}(t) = 0$; montrons que t est nul. Si $t = \sum_{i=1}^{N} f_i \otimes g_i$, on a $\tilde{\beta}(t) = \sum_{i=1}^{N} f_i \, g_i$. On peut supposer que les g_i sont des éléments linéairement indépendants de F. On a, pour tout ω_1 fixé dans Ω_1,

$$\sum_{i=1} f_i(\omega_1) \, g_i = 0 .$$

Donc $f_i(\omega_1) = 0$ pour tout ω_1 de Ω_1.

Ceci entraîne $f_i = 0$ pour tout i et t est nul.

(2.5) LEMME. - Soient $(\Omega_1 , \mathcal{B}_1 , \mu_1)$ et $(\Omega_2 , \mathcal{B}_2 , \mu_2)$ deux espaces mesurés, les mesures μ_1 et μ_2 étant σ-finies. On note $L^0(\Omega_j)$, pour $j = 1$ et 2, l'espace des classes d'équivalence de fonctions mesurables, égales μ_j-presque partout. On pose

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 , \quad \mu = \mu_1 \times \mu_2 ,$$

et l'on note $L^0(\Omega)$ l'espace correspondant de classes de fonctions numériques mesurables sur Ω. Alors l'application bilinéaire

$$L^0(\Omega_1) \times L^0(\Omega_2 \xrightarrow{\beta} L^0(\Omega)$$

$$(f \; ; \; g) \longmapsto fg$$

définit, par la propriété universelle du produit tensoriel, une injection $\tilde{\beta}$ de $L^0(\Omega_1) \otimes L^0(\Omega_2)$ dans $L^0(\Omega)$.

Démonstration : Les classes d'équivalence des fonctions mesurables $f = f(\omega_1)$ et $g = g(\omega_2)$ sont notées $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ respectivement. Soit $t = \sum \tilde{f}_j \otimes \tilde{g}_j$ dans $L^0(\Omega_1) \otimes L^0(\Omega_2)$ tel que $\hat{\beta}(t)$ soit nul. On a donc

$$\sum f_j \, g_j = 0$$

en dehors d'une partie μ-négligeable N de Ω. Comme la coupe ω_1 = constante de N est μ_2 négligeable pour presque tout ω_1, on a

$$\sum f_j(\omega_1) \, \tilde{g}_j = 0 \text{ pour presque tout } \omega_1 .$$

Supposant les $\tilde{g}_j$ linéairement indépendants, ceci entraîne, pour tout j, que $f_j(\omega_1) = 0$ pour presque tout ω_1. D'où $\tilde{f}_j = 0$, et t est nul.

Par la suite, on identifie $L^0(\Omega_1) \otimes L^0(\Omega_2)$ à un sous-espace de $L^0(\Omega)$ et, pour tout couple $(\tilde{f}, \tilde{g}) \in L^0(\Omega_1) \times L^0(\Omega_2)$, la classe de fonctions $\tilde{f}\tilde{g}$ est notée $\tilde{f} \otimes \tilde{g}$. Comme d'habitude, pour simplifier le langage, les éléments de $L^0(\Omega)$ sont notés comme des fonctions.

(2.6) PROPOSITION. - $L^2(\Omega_1) \hat{\otimes} L^2(\Omega_2)$ <u>est isométrique à</u> $L^2(\Omega)$.

<u>Démonstration</u> : Pour tout $t = \sum_1^n f_j \otimes g_j$ de $L^2(\Omega_1) \otimes L^2(\Omega_2)$, on a

$$\|\textstyle\sum_1^n f_i \otimes g_j\|^2_{L^2(\Omega)} = \iint (\sum f_j\, g_j)^2\, d\mu_1\, d\mu_2$$

$$= \iint (\textstyle\sum_j f_j\, g_j)(\sum_k f_k\, g_k) d\mu_1\, d\mu_2 = \iint \sum_{jk} f_j\, f_k\, g_j\, g_k\, d\mu_1\, d\mu_2 .$$

Vu le théorème de Fubini, on obtient

$$= \textstyle\sum_{jk}(\int f_j\, f_k\, d\mu_1)(\int g_j\, g_k\, d\mu_2) = \sum_{j,k}(f_j,f_k)_{L^2(\Omega_1)}(g_j,g_k)_{L^2(\Omega_2)}$$

$$= \|\textstyle\sum f_j \otimes g_j\|^2 ,$$

cette dernière norme étant prise dans $L^2(\Omega_1) \otimes L^2(\Omega_2)$.

Comme $L^2(\Omega_1) \otimes L^2(\Omega_2)$ est dense dans $L^2(\Omega)$ d'une part, et dans

$$L^2(\Omega_1) \hat{\otimes} L^2(\Omega_2)$$

d'autre part, l'isométrie ci-dessus se prolonge par continuité en une isométrie de $L^2(\Omega)$ sur $L^2(\Omega_1) \hat{\otimes} L^2(\Omega_2)$.

(2.7) <u>Remarque</u>. - <u>Espace</u> $L^2(\Omega) \hat{\otimes} H$: Soit μ une mesure σ-finie sur l'espace mesurable $(\Omega, \mathcal{B})$, et soit H un espace de Hilbert réel. On peut montrer la proposition suivante un peu plus générale que (2.6).

$L^2(\Omega) \hat{\otimes} H$ <u>est isométrique à</u> $L^2(\Omega, H)$.

Ceci se démontre comme précédemment, en partant de l'injection

$$L^2(\Omega) \otimes H \longrightarrow L^2(\Omega, H)$$

$$\textstyle\sum_{i=1}^N f_i \otimes e_i \longrightarrow \sum_{i=1}^N f_i(.)\, e_i$$

puis en montrant que c'est une isométrie à image dense.

3. <u>Deuxième exemple</u> : <u>opérateurs de Hilbert-Schmidt</u>.

On rappelle que si E et F sont deux espaces localement convexes, on a une injection linéaire

$$E' \otimes F \longrightarrow \mathcal{L}(E, F)$$

$$\textstyle\sum e'_j \otimes f_j \longmapsto (e \longmapsto \sum_j e'_j(e)\, f_j) .$$

En particulier, si H et K sont deux espaces de Hilbert, H étant identifié à son dual, on a une injection

$$H \otimes K \overset{j}{\hookrightarrow} \mathcal{L}(H , K) .$$

(3.8) PROPOSITION. - Soit $u = \sum_1^n x_j \otimes y_j$, avec $x_j \in H$ et $y_j \in K$.

(a) Pour tout x de H et tout y de K

$$(u , x \otimes y) = (ju(x) , y)_K .$$

(b) L'application j est continue, de norme ≤ 1 .

(c) Soit $\hat{j} : H \hat{\otimes} K \longrightarrow \mathcal{L}(H , K)$, définie par prolongement continu de j . Alors $\hat{j}$ est injective.

Démonstration.

(a) On a

$$(u , x \otimes y) = (\sum x_j \otimes y_j , x \otimes y) = \sum_j (x_j , x)(y_j , y)$$
$$= (\sum (x_i , x) y_i , y) = (ju(x) , y) .$$

(b) Montrons $\|j\| \leq 1$.

$$\|ju\|_{\mathcal{L}(H,K)} = \sup \{|(ju(x) , y)| , \|x\| \leq 1 , \|y\| \leq 1\} .$$

Comme les tenseurs $x \otimes y$, tels que $\|x\| \leq 1$ et $\|y\| \leq 1$, sont contenus dans la boule unité de $H \otimes K$, on a

$$\leq \sup \{|(u , t)| ; \|t\| \leq 1\} = \|u\| .$$

(c) Soit $u \in H \hat{\otimes} K$, tel que $\hat{j}(u) = 0$, et montrons que u est nul. Or, pour tout couple (x , y) de $H \times K$, on a

$$((\hat{j}u(x) , y) = 0 .$$

Vu (a), ceci entraîne que

$$(u , x \otimes y) = 0 .$$

Comme les $x \otimes y$ forment un système total dans $H \hat{\otimes} K$, on a $u = 0$.

(3.9) Définition des opérateurs de Hilbert-Schmidt de H dans K : Ce sont les opérateurs de $\mathcal{L}(H , K)$ contenus dans $\operatorname{Im} \hat{j}$.

L'ensemble des opérateurs de Hilbert-Schmidt de H dans K est noté $\mathcal{L}_{HS}(H , K)$ ou $\mathcal{L}_2(H , K)$.

(3.10) Corollaires : De cette définition, il résulte :

(a) Pour tout opérateur de Hilbert-Schmidt u de H dans K , il existe une suite λ_n de carré sommable, et deux systèmes orthonormés (e_n) et (f_n) de H et K respectivement, tels que

$$u = \sum_1^\infty \lambda_n \, e_n \otimes f_n .$$

Soit

$$u : h \longmapsto \sum_1^\infty \lambda_n (e_n , h) f_n$$

(b) Tout opérateur de Hilbert-Schmidt est compact. En effet, posant

$$u^N = \sum_{i=1}^N \lambda_i \, e_i \otimes f_i ,$$

on a

$$\|u - u^N\|_{\mathcal{L}(H,K)} \leq \|u - u^N\|_{HS} = (\sum_{N+1}^\infty \lambda_i^2)^{\frac{1}{2}} \longrightarrow \infty .$$

Donc u , limite en norme d'une suite d'opérateurs de rang fini, est un opérateur compact.

(c) Tout opérateur de Hilbert-Schmidt est le composé d'un opérateur partiellement isométrique U et d'un opérateur symétrique auto transposé de Hilbert-Schmidt T . En effet, adoptons les notations de (a). Soit H_1 le sous-espace fermé de H engendré par les e_n . On note U l'opérateur $H \longrightarrow K$ qui applique $H_1^\perp$ sur $\{0\}$, et qui applique, pour tout n , e_n sur f_n . On a

$$\|U(x)\| = \|x\| \quad \text{pour tout } x \text{ de } H_1 .$$

Soit K_1 le sous-espace fermé de K engendré par les f_n . Il suffit de définir T comme l'opérateur nul sur $K_1^\perp$ et laissant stable K_1 , avec $Tf_n = \lambda_n f_n$.

(3.11) THÉORÈME. - <u>Soit</u> $\{e_i , i \in I\}$ <u>une base orthonormée de</u> H , <u>et soit</u> u <u>dans</u> $\mathcal{L}(H , K)$, H <u>et</u> K <u>étant des espaces de Hilbert</u>. <u>Alors</u> $\sum \|u(e_i)\|^2 < \infty$ <u>si, et seulement si</u>, u <u>est de Hilbert-Schmidt</u>. <u>De plus</u>, <u>dans ce cas</u>,

$$\sum \|u(e_i)\|^2 = \|u\|_{HS}^2 ,$$

<u>et</u> $\sum \|u(e_i)\|^2$ <u>est indépendant de la base</u> (e_i) .

<u>Démonstration</u>.

(a) Si u est de Hilbert-Schmidt, on a, si (e_i) et (f_j) sont des bases orthonormées quelconques de H et K respectivement,

$$\|u\|_{HS}^2 = \sum_{i,j} (u , e_i \otimes f_j)^2 = \sum_{i,j} (u(e_i) , f_j)^2 = \sum \|u(e_i)\|^2$$

(b) Réciproquement, soit (e_i) une base orthonormée de H telle que

$$\sum_{i \in I} \|u(e_i)\|^2 < \infty ,$$

et montrons que u est un opérateur de Hilbert-Schmidt. On ordonne l'ensemble N au plus dénombrable des i tels que $u(e_i) \neq 0$. On suppose que N est infini, car u est de Hilbert-Schmidt si N est fini. On note u_n l'opérateur de H dans K , défini par

$$u_n(e_i) = \begin{cases} u(e_i) & \text{si } i \in N \text{ et } i \leq n \\ 0 & \text{si } i \notin N \text{ ou si } i > n . \end{cases}$$

Les opérateurs u_n sont de rang fini, donc de Hilbert-Schmidt. La suite u_n est de Cauchy pour la norme HS car, pour tout couple (m , n) tel que $m \geq n$, on a

$$\|u_m - u_n\|_{HS}^2 = \sum_{m+1}^n \|u(e_i)\|^2 \longrightarrow 0 \quad \text{si} \quad m \quad \text{et} \quad n \longrightarrow \infty .$$

La suite (u_n) converge vers un opérateur v de Hilbert-Schmidt. Comme $u(e_i) = v(e_i)$ pour tout i, on a $u = v$. Donc u est un opérateur de Hilbert-Schmidt.

(3.12) PROPOSITION. - Soient H et K deux espaces de Hilbert, et u un opérateur de Hilbert-Schmidt de H dans K. Alors le transposé ${}^t u$ de u est de Hilbert-Schmidt, et $\|{}^t u\|_2 = \|u\|_2$.

Démonstration : Par définition de ${}^t u$, on a, pour tout x de H et tout y de K,

$$({}^t uy \, , \, x)_H = (y \, , \, ux)_K .$$

Vu (3.8.a), on a donc

$$({}^t uy \, , \, x) = (u \, , \, x \otimes y) .$$

D'où le résultat, en faisant décrire à x et y des bases orthonormées de H et K respectivement.

(3.13) PROPOSITION. - Soient E, F, G, H quatre espaces de Hilbert, et u, v, w, trois applications linéaires continues

$$E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} G \xrightarrow{w} H .$$

Alors, si v est de Hilbert-Schmidt, wvu est aussi de Hilbert-Schmidt.

Preuve : Il suffit de montrer que wv et vu sont de Hilbert-Schmidt.

(a) Pour montrer que wv est de Hilbert-Schmidt, on utilise (3.11). Si (f_i) est une base orthonormée de F on a $\Sigma \|w(f_i)\|^2$ fini car w est H.S. Et comme v est continu

$$\Sigma \|wv(f_i)\|^2 \leq \|w\| \, \Sigma \|v(f_i)\|^2 < \infty$$

(b) Vu (3.12), pour montrer que vu est de Hilbert-Schmidt, il suffit de montrer que ${}^t(vu) = {}^t u \, {}^t v$ est de Hilbert-Schmidt, or ceci résulte de (a).

Cette propriété montre que $\mathcal{L}_{HS}(H)$ est un idéal bilatère de l'algèbre $\mathcal{L}(H)$. Voyons encore deux autres propriétés.

(3.14) PROPOSITIONS.

(a) Le produit tensoriel de deux opérateurs continus $u_j : H_j \longrightarrow K_j$ ($j = 1, 2$, H_j et K_j de Hilbert) se prolonge par continuité en un opérateur continu :

$$\widehat{u_1 \otimes u_2} : H_1 \hat{\otimes} H_2 \longrightarrow K_1 \hat{\otimes} K_2$$

(b) Le produit tensoriel de deux opérateurs de Hilbert-Schmidt $u_j : H_j \longrightarrow K_j$ ($j = 1$ et 2) se prolonge par continuité en un opérateur de Hilbert-Schmidt

$$\widehat{u_1 \otimes u_2} : H_1 \hat{\otimes} H_2 \longrightarrow K_1 \hat{\otimes} K_2$$

(a) On considère $u_1 \otimes u_2$ comme le composé des deux opérateurs

$$\mathrm{Id}(H_1) \otimes u_2 : H_1 \otimes H_2 \longrightarrow H_1 \otimes K_2$$
$$u_1 \otimes \mathrm{Id}(H_2) : H_1 \otimes K_2 \longrightarrow K_1 \otimes K_2 .$$

Par raison de symétrie, il suffit de montrer que $w = \mathrm{Id}(H_1) \otimes u_2$ admet un prolongement continu :

$$H_1 \hat{\otimes} H_2 \longrightarrow H_1 \hat{\otimes} K_2 .$$

Soit (e_i) une base orthonormée de H_1. Soient $t \in H_1 \otimes H_2$ du type

$$(t = \textstyle\sum_1^N e_i \otimes y_i) \Longrightarrow (\|t\|^2 = \sum |y_j|^2) ,$$

et $w(t) = \sum e_i \otimes u_2(y_i)$,

$$\|w(t)\|_2^2 = \textstyle\sum_1^N \|u_2(y_i)\|^2 \leqslant \|u_2\|^2 \sum \|y_i\|^2 = \|u_2\|^2 \, \|t\|^2 .$$

Donc w se prolonge en un opérateur linéaire continu : $H_1 \hat{\otimes} H_2 \longrightarrow H_1 \hat{\otimes} K_2$ de norme majorée par $\|u_2\|$.

(b) Vu (a), $u_1 \otimes u_2$ admet un prolongement linéaire continu $\widehat{u_1 \otimes u_2}$. Pour montrer que ce prolongement est de Hilbert-Schmidt, si u_1 et u_2 sont de Hilbert-Schmidt, on utilise le théorème (3.11). Si (e_i) et (f_j) sont des bases orthonormées de H_1 et de H_2 respectivement, on a

$$\textstyle\sum_i \|u_1(e_i)\|^2 < \infty \quad \text{et} \quad \sum_j \|u_2(f_j)\|^2 < \infty .$$

D'où

$$\sum \|(u_1 \otimes u_2)(e_i \otimes f_j)\|^2 = \textstyle\sum_{i,j} \|u_1(e_i)\|^2 \, \|u_2(f_j)\|^2 < \infty .$$

Comme $(e_i \otimes f_j)_{i,j}$ est une base orthonormée de $H_1 \hat{\otimes} H_2$, $\widehat{u_1 \otimes u_2}$ est de Hilbert-Schmidt.

4. Produit tensoriel symétrique d'espaces de Hilbert.

Nous pouvons généraliser toute la théorie du paragraphe 1 en remplaçant le couple (H_1 , H_2) par une famille de n espaces de Hilbert réels $H_1 \dots H_n$. On a ainsi une forme $2n$-linéaire :

$$H_1 \times \dots \times H_n \times H_1 \times \dots \times H_n \xrightarrow{\beta} \underset{\sim}{R}$$
$$(j_1 \dots j_n , j'_1 \dots j'_n) \longmapsto \Sigma(j_1 , j'_n) \dots (j_n , j'_1)$$

qui donne lieu à une forme bilinéaire $\tilde{\beta}$

$$(H_1 \otimes \dots \otimes H_n) \times (H_1 \otimes \dots \otimes H_n) \longmapsto \underset{\sim}{R}$$

définissant un produit scalaire sur $H_1 \otimes \dots \otimes H_n$.

Si $(e_{ij})_{ij \in I_j}$ est une base orthonormée de H_j, les $(e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \dots \otimes e_{i_n})$ pour $i_j \in I_j$ forment une base orthonormée $H_1 \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} H_n$.

(4.15) Notation : Soit H un espace de Hilbert réel. On pose

$$\hat{\bigotimes}_n H = \underbrace{H \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} H}_{n \text{ fois}} .$$

Soit $\mathfrak{S}_n$ le groupe symétrique des permutations de n éléments $1, \dots, n$. Faisons opérer ce groupe dans $\mathfrak{S}_n$.

(4.16) PROPOSITION. - <u>Soit</u> H <u>un espace de Hilbert réel. Pour toute permutation</u> $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, <u>il existe un opérateur unique sur</u> $\hat{\bigotimes}_n H$, <u>noté</u> U_σ, <u>tel que quel que soit</u> $(f_1, \dots, f_n) \in H^n$:

(4.16.1) $$U_\sigma(f_1 \otimes \dots \otimes f_n) = f_{\sigma 1} \otimes \dots \otimes f_{\sigma n} .$$

<u>Preuve</u> : Montrons d'abord l'existence d'un opérateur linéaire inversible unique U_σ sur $\hat{\bigotimes}_n H$ vérifiant (4.16.1). Vu la propriété universelle du produit tensoriel, l'application n-linéaire

$$H \times \dots \times H \dashrightarrow \hat{\bigotimes}_n H$$

$$(f_1 \dots f_n) \longrightarrow f_{\sigma 1} \otimes \dots \otimes f_{\sigma n}$$

se factorise d'une seule manière à travers un opérateur U_σ de $\hat{\bigotimes}_n H$ donnant lieu à (4.16.1). De plus, il est clair que l'application $\sigma \dashrightarrow U_\sigma$ est un morphisme de groupe

$$U_{(\sigma^{-1})} = (U_\sigma)^{-1} ; \quad U_{\sigma\tau} = U_\sigma U_\tau ; \quad U_{Id} = Id .$$

De plus, quels que soient $(f_1, \dots, f_n)$ et $(g_1 \dots g_n) \in H^n$, on a

$$(f_{\sigma_1} \otimes \dots \otimes f_{\sigma_n}, g_{\sigma_1} \otimes \dots \otimes g_{\sigma_n}) = (f_1 \otimes \dots \otimes f_n, g_1 \otimes \dots \otimes g_n) .$$

Ceci entraîne que U_σ est une isométrie.

(4.17) DÉFINITION. - <u>Soit</u> $t \in \hat{\bigotimes}_n H$. <u>On dit que</u> t <u>est symétrique</u> (<u>resp. antisymétrique</u>) <u>si, pour tout</u> σ <u>de</u> $\mathfrak{S}_n$, <u>on a</u>

$$U_\sigma t = t \quad (\underline{\text{resp.}}\ U_\sigma t = \varepsilon(\sigma) t) .$$

<u>Nous noterons</u> $\hat{\bigotimes}_n H$ (<u>resp.</u> $\hat{\bigwedge}_n H$) <u>le sous-espace de</u> $\bigcirc_n H$ <u>formé par les tenseurs symétriques</u> (<u>resp. antisymétriques</u>). <u>Ces sous-espaces sont fermés, puisqu'ils sont noyaux d'opérateurs linéaires continus.</u>

(4.18) <u>Définition des opérateurs de symétrisation et d'antisymétrisation de Young</u> : Ce sont les opérateurs suivants, notés respectivement Sym et Antisym :

$$\hat{\bigotimes}_n H \xrightarrow{\text{Sym}} \hat{\bigodot}_n H \qquad\qquad \hat{\bigotimes}_n H \xrightarrow{\text{Antisym}} \hat{\bigwedge}_n H$$

$$t \longmapsto \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} U_\sigma t \qquad\qquad t \longrightarrow \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) U_\sigma t$$

(4.19) PROPOSITION. - <u>Les opérateurs</u> Sym <u>et</u> Antisym <u>de</u> $\hat{\bigotimes}_n H$ <u>sont des projecteurs orthogonaux sur les sous-espaces fermés</u> $\hat{\bigodot}_n H$ <u>et</u> $\hat{\bigwedge}_n H$ <u>respectivement</u>.

Prouvons par exemple que Sym est l'opérateur de projection orthogonale sur $\hat{\odot}_n H$. Il suffit de montrer que

$$(g\ ,\ \mathrm{Sym}\ f) = (g\ ,\ f)$$

quels que soient $g \in \hat{\odot}_n H$ et $f \in \hat{\otimes}_n H$. Or

$$(g\ ,\ \mathrm{Sym}\ f) = \frac{1}{n!}\sum_\sigma (g\ ,\ U_\sigma\ f) = \frac{1}{n!}\sum (U_{\sigma^{-1}}\ g\ ,\ U_{\sigma^{-1}}\ U_\sigma\ f)$$
$$= (\frac{1}{n!}\sum_\sigma U_{\sigma^{-1}}\ g\ ,\ f) = (g\ ,\ f)\ .$$

(4.20) DÉFINITION. - <u>Quels que soient</u> $f_1 \dots f_n \in H$, <u>on pose</u>

(a) $$f_1 \odot f_2 \odot \dots \odot f_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}\sum_\sigma U_\sigma(f_1 \otimes \dots \otimes f_n)$$

(b) $$f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}\sum \varepsilon(\sigma)\ U_\sigma(f_1 \otimes \dots \otimes f_n)\ .$$

Il faut bien noter que $f_1 \odot \dots \odot f_n$ n'est pas le symétrisé de $f_1 \otimes \dots \otimes f_n$; et qu'usuellement on utilise (calcul extérieur) une autre définition pour $f_1 \wedge \dots \wedge f_n$: on définit ceci comme étant l'antisymétrisé de $f_1 \otimes \dots \otimes f_n$.

(4.21) <u>Formulaire</u>.

(a) $f \odot \dots \odot f = \sqrt{n!}\ f \otimes \dots \otimes f$

(b) $(f_1 \odot \dots \odot f_n\ ,\ g_1 \odot \dots \odot g_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (f_1\ ,\ g_{\sigma_1}) \dots (f_n\ ,\ g_{\sigma_n})$

(c) $(f_1 \odot \dots \odot f_n\ ,\ x \otimes \dots \otimes x) = \sqrt{n!}(f_1\ ,\ x) \dots (f_n\ ,\ x)$.

<u>Preuve</u>.

(a) est évident. Prouvons (b). Posons

$$t = f_1 \otimes \dots \otimes f_n \quad \text{et} \quad t' = g_1 \otimes \dots \otimes g_n\ .$$

$$(f_1 \odot \dots \odot f_n\ ,\ g_1 \odot \dots \odot g_n) = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma,\tau}(U_\tau\ t\ ,\ U_\sigma\ t')$$
$$= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma,\tau}(U_{\tau^{-1}}\ U_\tau\ t\ ,\ U_{\tau^{-1}\sigma}\ t') = \frac{1}{n!}\ n!\ \sum_{\sigma'}(t\ ,\ U_{\sigma'}\ t')$$
$$= \sum_\sigma (f_1 \otimes \dots \otimes f_n\ ,\ g_{\sigma_1} \otimes \dots \otimes g_{\sigma_n}) = \sum (f_1, g_{\sigma_1}) \dots (f_n, g_{\sigma_n})\ .$$

Notons que (c) est un cas particulier de (b) puisque

$$x \otimes \dots \otimes x = \frac{1}{\sqrt{n!}}\ (x \odot \dots \odot x)\ .$$

(4.22) <u>Convention d'écriture</u> : Soit $t = x_1 \odot \dots \odot x_n$. On suppose que $x_1, \dots, x_n$ représentent en fait h éléments distincts $b_1, \dots, b_h$, tels que b_1 figure ℓ_1 fois, ... b_h figure ℓ_h fois, avec $\ell_1 + \dots + \ell_h = n$. La symétrie du tenseur permet d'écrire

$$t = \underbrace{b_1 \odot \dots \odot b_1}_{\ell_1 \text{ fois}} \odot \underbrace{b_2 \odot \dots \odot b_2}_{\ell_2 \text{ fois}} \dots$$

ce qu'on écrit d'une manière abrégée sous la forme

$$t = b_1^{\odot \ell_1} \odot \ldots \odot b_h^{\odot \ell_h} .$$

(4.23) PROPOSITION. - Soit $(f_i)_{i \in I}$ une base orthonormée de l'espace de Hilbert H. Alors les tenseurs

$$f = (f^{\odot n_1} \odot \ldots \odot f^{\odot n_k}) / \sqrt{n_1! \ldots n_k!} ,$$

où $f_1 , \ldots , f_k$ sont différents, et $\sum n_j = n$, forme une base orthonormée de $\hat{\bigodot}_n H$.

Avec la convention des multi-indices, le tenseur f pourra être noté

$$f^{\odot n} / \sqrt{n!} .$$

Preuve : Montrons que les $f^{\odot n}/\sqrt{n!}$ forment un système orthonormé. Considérons deux suites d'éléments de la famille (f_i) :

$$(f_{j_1} , \ldots , f_{j_n}) \text{ et } (f_{m_1} , \ldots , f_{m_n}) ,$$

où dans chacune de ces suites, un élément peut être pris plusieurs fois. On a

$$\begin{aligned}(f_{j_1} \odot \ldots \odot f_{j_n} , f_{m_1} \odot \ldots \odot f_{m_n}) &= \sum_\sigma (f_{j_1} , f_{\sigma_{m_1}}) \ldots (f_{j_n} , f_{\sigma_{m_n}}) \\ &= \sum_\sigma \delta_{j_1}^{\sigma_{m_1}} \ldots \delta_{j_n}^{\sigma_{m_n}} .\end{aligned}$$

Ce terme est donc non nul si, et seulement si, les deux suites comportent les mêmes éléments de $(f_i)_{i \in I}$, chacun répété le même nombre de fois, les ordres pouvant être différents dans les deux suites. De plus, si f_i figure n_i fois dans chacune des suites, on a

$$(f_{j_1} \odot \ldots \odot f_{j_m} , f_{m_1} \odot \ldots \odot f_{m_n}) = \prod_i n_i! .$$

Les vecteurs $f^{\odot n}/\sqrt{n!}$ forment donc un système orthonormé. Pour montrer que ce système est total, considérons g dans $\hat{\bigodot}_n H$ orthogonal aux vecteurs $f^{\odot n}/\sqrt{n!}$. Alors g est orthogonal dans $\hat{\bigotimes}_n H$ aux vecteurs $f_{j_1} \otimes \ldots \otimes f_n$, qui forment une base orthonormée. Donc g est nul.

(4.24) Fonctions polynomiales homogènes du type Hilbert-Schmidt.

(4.25) LEMME (propriété universelle du produit tensoriel symétrique). - Soient E et F deux espaces vectoriels, et $n > 0$.

(a) Soit β une application n-linéaire symétrique de $E \times \ldots \times E$ dans F, et soit $\tilde{\beta}$ l'application linéaire associée de $\bigotimes_n E$ dans F. Alors, pour tout t de $\bigotimes_n E$, on a

$$\tilde{\beta}(t) = \tilde{\beta}(\mathrm{Sym}\ t) ,$$

et par conséquent, $\tilde{\beta}$ est caractérisée par sa restriction à $\bigodot_n E$.

(b) De même, si β est antisymétrique, $\hat{\beta}$ est caractérisée par sa restriction à l'ensemble des tenseurs antisymétriques.

Preuve.

$$\forall\ t \in \bigotimes_n E\ , \qquad \hat{\beta}(t) = \frac{1}{n!}\ \hat{\beta}(\textstyle\sum_\sigma U_\sigma\ t) = \hat{\beta}(\mathrm{Sym}\ t)\ .$$

Conclusion : L'espace vectoriel $\mathcal{L}_{sym}(E\ , \ldots\ , E\ ;\ F)$ est isomorphe à $\mathcal{L}(\bigodot_n E\ , F)$. De même, $\mathcal{L}_{antisym}(E\ , \ldots\ , E\ ;\ F) \sim \mathcal{L}(\bigwedge_n E\ , F)$.

(4.26) Fonction polynomiale associée à tout élément de $\hat{\bigodot}_n H$: On rappelle qu'une fonction polynomiale homogène de degré n sur H est une application P de H dans $\underset{\sim}{R}$ du type $P(x) = f(x\ , \ldots\ , x)$, où f est une forme n-linéaire symétrique continue sur H.

(a) Notons d'abord qu'à tout $t \in \hat{\bigotimes}_n H$ est associée la forme n-linéaire

$$H \times \ldots \times H \xrightarrow{\beta} \underset{\sim}{R}$$

$$x_1 \ldots x_n \longmapsto (t\ , x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_n)\ .$$

Cette forme est continue, car

$$\begin{aligned} |\beta(x_1\ , \ldots\ , x_n)| &\leq \|t\| . \|x_1 \otimes \ldots \otimes x_n\| \\ &\leq \|t\| . \|x_1\| \ldots \|x_n\|\ . \end{aligned}$$

(b) Dans le cas particulier où t est symétrique, la forme linéaire β est symétrique, car pour toute permutation σ d'ordre n,

$$\begin{aligned} (t\ , x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) &= (U_\sigma\ t\ , x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) \\ &= (t\ , U_{\sigma^{-1}}(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n))\ . \end{aligned}$$

On a donc associé à tout t de $\hat{\bigodot}_n H$ un polynôme homogène P de degré n tel que

$$P(x) = \beta(x\ , \ldots\ , x)\ .$$

L'identité de polarisation montre que l'application $\beta \longmapsto P$ est injective.

On définit la norme de Hilbert-Schmidt du polynôme P comme étant la norme dans $\hat{\bigotimes}_n H$ du tenseur symétrique associé.

(4.27) Calcul des coefficients et de la norme d'un polynôme homogène du type Hilbert-Schmidt : Rapportons H à une base $(e_i)_{i\in I}$. Supposons que $t \in \hat{\bigodot}_n H$ s'écrive :

$$t = \sum \frac{e_{j_1}^{\odot k_1} \odot \ldots \odot e_{j_h}^{\odot k_h}}{(\sum_1^h k_j)!^{\frac{1}{2}}}\ a_{j_1 \ldots j_n}^{k_1 \ldots k_h} = \sum \frac{e_{j_1}^{\odot k_1} \odot \ldots \odot e_{j_h}^{\odot k_h}}{(k_1! \ldots k_h!)^{\frac{1}{2}}}\ \left(\frac{k_1! \ldots k_h!}{|k|!}\right)^{\frac{1}{2}}\ a_{j_1 \ldots j_h}^{k_1 \ldots k_h}\ .$$

La somme étendue de manière que $(e_1^{\odot j_1} \ldots e_{j_h}^{\odot k_1})/(k_1! \ldots k_h!)^{\frac{1}{2}}$ décrive une base orthonormée de $\hat{\bigodot}_n H$: donc on a $j_1 \ldots j_n$ différents, et $k_1 \ldots k_h$ variables avec $\sum k_j = n$. On a

$$\|t\|^2 = \sum_{(j_1\ldots j_h),(k_1\ldots k_n)} \frac{k!}{|k|!} |a^{k_1\ldots k_h}_{j_1\ldots j_h}|^2 .$$

Alors la fonction polynomiale P homogène de degré n associée à t associe à tout vecteur x de H, de composantes $x_i = (x ; e_i)$, le nombre :

$$P(x) = \sum a^{k_1\ldots k_h}_{j_1\ldots j_h} x^{j_1}_{k_1} \ldots x^{i_h}_{k_h} .$$

En effet, en utilisant (27.1), il vient

$$\begin{aligned} P(x) &= (t , x \otimes \ldots \otimes x) \\ &= \sum (a^{k_1\ldots k_h}_{j_1\ldots j_k})/(|k|!^{\frac{1}{2}})(e_{j_1}^{\odot k_1} \odot \ldots \odot e_{j_h}^{\odot k_h} , x \otimes \ldots \otimes x) \\ &= \sum a^{k_1\ldots k_h}_{j_1\ldots j_k} \underbrace{(e_{j_1} , x) \ldots}_{k_1 \text{ fois}} \underbrace{(e_{j_2} , x) \ldots}_{k_2 \text{ fois}} \ldots (e_{j_n} , x) \\ &= \sum a^{k_1\ldots k_h}_{j_1\ldots j_h} x^{k_1}_{j_1} \ldots x^{k_h}_{j_n} . \end{aligned}$$

(4.28) PROPOSITION. - Soit P un polynôme homogène de degré p de Hilbert-Schmidt sur H. Soit Q un polynôme homogène de Hilbert-Schmidt de degré q sur H. Alors PQ est de Hilbert-Schmidt homogène de degré $p + q$, et l'application produit $P , Q \longrightarrow PQ$ a une norme inférieure ou égale à 1.

Démonstrations : Soient t et t' dans $\hat{\bigodot}_p H$ et $\hat{\bigodot}_q H$ respectivement associés aux polynômes P et Q. On commence par remarquer que l'application $t , t' \longrightarrow t \otimes t'$ est bilinéaire de norme 1 de $\hat{\bigotimes}_p H \times \hat{\bigotimes}_q H$ dans $\hat{\bigotimes}_{p+q} H$. De plus, posant $R = P.Q$, on a

$$\begin{aligned} R(x) = P(x).Q(x) &= (t \otimes t' , \textstyle\bigotimes_{p+q} x) \\ &= (\mathrm{Sym}\, t \otimes t' , \textstyle\bigotimes_{p+q} x) . \end{aligned}$$

Donc R est défini par $t'' = \mathrm{Sym}\, t \otimes t'$, et

$$\|t''\| \leq \|t \otimes t'\| = \|t\|.\|t'\| .$$

5. Modification de la théorie dans le cas d'espaces complexes.

On indique brièvement ci-après comment la théorie peut être adaptée au cas d'espaces de Hilbert complexes.

Si H est un espace de Hilbert complexe, on note $'H$ son antidual : ensemble des formes antilinéaires continues sur H. On a un "anti-isomorphisme" d'e. v. entre H' et $'H$: $\ell \longrightarrow \overline{\ell}$

$$H' \longrightarrow {}'H$$

$$x \longrightarrow \ell(x) \longmapsto x \longmapsto \overline{\ell(x)} = \overline{(\ell , x)} .$$

Cette application est isométrique : Alors que l'on notait (ℓ , x) la forme bilinéaire de dualité sur $H \times H'$, la forme sesquilinéaire antidualité est notée $(\bar{\ell}|x)$ ou $\langle\bar{\ell}|x\rangle$. Tout espace de Hilbert complexe est isomorphe à son antidual, d'où la possibilité de définir $\langle x_1|x_2\rangle$ pour x_1 et $x_2 \in H$.

Au paragraphe 1, on considérait l'application β

$$H_1 \times H_2 \times H_1 \times H_2 \xrightarrow{\beta} \underset{\sim}{C}$$
$$(x_1 ; x_2 ; \ell_1 ; \ell_2) \longmapsto \langle f_1|\ell_1\rangle \langle f_2|\ell_2\rangle$$

qui est linéaire par rapport aux deux derniers facteurs et antilinéaire par rapport aux deux premiers. Cette forme donne lieu à la forme sesquilinéaire

$$H_1 \otimes H_2 \quad H_1 \otimes H_2 \longrightarrow \underset{\sim}{C}$$
$$x_1 \otimes x_2 \quad y_1 \otimes y_2 \longrightarrow (x_1|y_1)(x_2|y_2)$$

et cette forme définit un produit scalaire complexe sur l'espace vectoriel $H_1 \otimes H_2$.

Au paragraphe 2, il remplaçait naturellement les espaces $L^2(\Omega_j)$ $j = 1 , 2$ par les espaces complexes correspondants.

Au paragraphe 3, on part de

$$'E \otimes F \longrightarrow \mathcal{L}(E , F)$$
$$\sum \varepsilon_i \otimes f_i \longmapsto (e \longmapsto \sum\langle\varepsilon_i|e\rangle f_i) .$$

Paul KRÉE
Tour Mexico, B. P. 1325
65 rue du Javelot
75645 PARIS CEDEX 13