Paul Krée

Protenseurs distributions

Séminaire Paul Krée, tome 1 (1974-1975), exp. nº 6, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SPK_1974-1975__1__A7_0>

Séminaire Paul KRÉE
Equations aux dérivées partielles
en dimension infinie
1re année, 1974/75, n° 6, 9 p.

PROTENSEURS DISTRIBUTIONS

par Paul KRÉE

1. Introduction et rappels.

Soit O_i un ouvert de l'espace vectoriel réel de dimension finie X_i. Si p et q sont deux entiers positifs, on note $F = (\bigotimes_p X_i^c) \otimes (\bigotimes_q X_i'^c)$ l'espace des tenseurs de degré $p + q$ sur le complexifié X_i^c de X_i, qui sont contravariants par rapport aux p premiers facteurs, et covariants par rapport aux q derniers facteurs. On dit que ces tenseurs sont de variance $\binom{p}{q}$. On note $\mathcal{D}_q^p(O_i)$ l'espace $\mathcal{D}(O_i) \otimes F$ des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact définies sur O_i à valeurs dans F ; et on munit cet espace de la topologie de L. SCHWARTZ. Le dual de cet espace est un espace de propagateurs ou tenseurs distributions

$$(\mathcal{D}_q^p(O_i))' \simeq \mathcal{D}'^q_p(O_i) \simeq \mathcal{D}'(O_i) \otimes F' ,$$

qui sont covariants par rapport aux p premiers facteurs, et contravariants par rapport aux q derniers facteurs. Dans cet exposé, on étudie les protenseurs distributions ou systèmes projectifs de tenseurs distributions. De façon à mieux faire apparaître les difficultés dues à l'introduction de fonctions et de distributions à valeurs vectorielles, on limite l'exposé au cas où $O = X$, toutes les distributions vectorielles considérées étant à coefficients distributions intégrables.

(1.1) Motivations.

(a) Soit $T = (T_i)$ une prodistribution (bornée) sur l'espace de Hilbert réel X, et cherchons à définir la dérivée première globale DT de T. Adoptons les coordonnées, décrites ci-dessous en (2.6). La dérivée globale de T_i est caractérisée par la collection de ses dérivées dans n directions orthogonales :

(1.1.1) $$DT_i = \left(\frac{\partial T_i}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial T_i}{\partial x^n}\right) \in \mathcal{B}'(X_i, X_i) .$$

Lorsque i varie, les DT_i vérifient certaines relations de cohérences. Par exemple, si l'on a une surjection s_{ij} de X_i sur X_j, on a

(1.1.2) $$s_{ij}\left(\frac{\partial T_i}{\partial x^k}\right) = \begin{cases} \partial T_j/\partial x^k & \text{si } 1 \leq k \leq n' \\ 0 & \text{si } n' < k \leq n \end{cases}$$

D'où la nécessité d'étudier ces êtres mathématiques.

(b) Il y a aussi la nécessité d'étudier la généralisation en dimension infinie des champs de tenseurs, des champs de formes extérieures, en vue par exemple d'étudier les complexes ...

2. Définitions.

(2.2) Protenseurs distributions q fois contravariants : Pour tout i, notons $\mathcal{B}(X_i, \bigotimes_q X_i')$ l'espace des fonctions indéfiniment dérivables

$$X_i \longrightarrow \bigotimes_q X_i'^c$$

dont toutes les dérivées sont bornées. Si $i \geq j$, on a une injection canonique de $\mathcal{B}(X_j, \bigotimes_q X_j'^c)$ dans $\mathcal{B}(X_i, \bigotimes_q X_i'^c)$: $\varphi \longmapsto (\bigotimes_q s_{ij}') \circ \varphi \circ s_{ij}$. On définit $\mathcal{B}_{cyl}(X, \bigotimes_q X'^c)$ comme la limite inductive des $\mathcal{B}(X_i, \bigotimes_q X_i'^c)$.

(2.3) Notons que $\mathcal{B}_{cyl}(X, \bigotimes_q X'^c) \simeq \mathcal{B}_{cyl}(X) \otimes (\bigotimes_q \Xi^c)$. En effet, montrons d'abord qu'on a une application bilinéaire

$$\mathcal{B}_{cyl}(X) \times (\bigotimes_q \Xi^c) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{B}_{cyl}(X, \bigotimes_q X'^c) .$$

Soient $\tilde{\varphi} = \varphi_j \circ s_j$ avec $\varphi_j \in \mathcal{B}(X_j)$, et $X_j = X/A_j$. Soit $t \in \bigotimes_q X'^c$ s'exprimant comme combinaison linéaire de produits tensoriels de vecteurs appartenant à un sous-espace $X_{j'}'^c$ de dimension finie de Ξ^c. Soit alors i supérieur à j et j'. Notons qu'on a des injections canoniques

$$\bigotimes_q X_{j'}'^c \longrightarrow \bigotimes_q X_i'^c \quad \text{et} \quad \bigotimes_q X_i'^c \longrightarrow \bigotimes_q X'^c .$$

On pose

$$\alpha(\tilde{\varphi} ; t) = (\varphi_j \circ s_i) \otimes t .$$

(2.4) <u>Définition de</u> $\mathcal{B}'^q_{cyl}(X)$: <u>Un protenseur distribution</u> T <u>sur</u> X, q <u>fois contravariant</u>, <u>est une forme linéaire</u> T <u>sur</u> $\mathcal{B}_{cyl}(X, \bigotimes_q X'^c)$ <u>dont la restriction à chaque</u> $\mathcal{B}(X_i, \bigotimes_q X_i'^c)$ <u>est représentée par une distribution</u> T_i <u>à valeurs dans</u> $\bigotimes_q X_i^c$, <u>à coefficients distributions bornées</u> :

$$T = (T_i) \quad \underline{\text{avec}} \quad T_i \in \mathcal{B}'(X_i, \bigotimes_q X_i^c) .$$

<u>L'espace vectoriel de ces protenseurs distributions est noté</u> $\mathcal{B}'^q_{cyl}(X)$.

(2.5) <u>Explicitons la relation de cohérence entre les</u> T_i : Soit s_{ij} une surjection canonique : $X_i \longrightarrow X_j$. On a des injections canoniques

$$\bigotimes s_{ij}'^c : \bigotimes X_j'^c \longrightarrow \bigotimes X_i'^c \quad \text{et} \quad \bigotimes s_i'^c : \bigotimes X_i'^c \longrightarrow \bigotimes X'^c .$$

Supposons que

$$\tilde{\varphi} = \varphi_i \circ s_i = \varphi_j \circ s_j \quad \text{avec} \quad \varphi_i \in \mathcal{B}(X_i, \bigotimes X_i'^c) \quad \text{et} \quad \varphi_j \in \mathcal{B}(X_j, \bigotimes X_j'^c) .$$

Alors

(2.5.1) $$(T_j, \varphi_j) = (T_i, \varphi_i) .$$

(2.6) <u>Explicitons la relation de cohérence en termes de coordonnées</u> : On a $X_j \sim X_i/\ker s_{ij}$. On identifie ce quotient à un supplémentaire $\overline{X}_j$ de $\ker s_{ij}$ dans X_i. On pose $\dim X_i = n$ et $\dim X_j = n'$. On rapporte X_i à une base formée par la réunion d'une base de $\overline{X}_j$ et d'une base de $\ker s_{ij}$. D'où des coordonnées :

$$(x_1^1 , \dots , x_n^n) = (x_1^1 , \dots , x'^n_n , \dots , x_n^n) = (x' , x'') .$$

Pour tout $T = (T_i) \in \mathcal{B}'^q_{cyl}(X)$, on a

$$T_i = \sum T_{i,k_1\dots k_q} \, dx_{k_1}^{k_1} \otimes \dots \otimes dx_{k_q}^{k_q} .$$

En considérant T_j comme un tenseur distribution sur $\overline{X}_j$, on a :

$$T_j = T_{j,\ell_1\dots\ell_q} \, dx_{\ell_1}^{\ell_1} \otimes \dots \otimes dx_{\ell_q}^{\ell_q} ,$$

où les indices $k_1 \dots k_q$ décrivent $\{1 ,\dots, n\}$ et les indices

$$\ell_1 \dots \ell_q \{1 , \dots , n'\} .$$

Alors, la relation de cohérence s'écrit :

(2.6.1) $\forall \ \Psi \in \mathcal{B}(X_j) \ , \ \forall \ (\ell_1,\dots,\ell_q) \ , \quad (T_j^{\ell_1\dots\ell_q},\Psi)=(T_i^{\ell_1\dots\ell_q},(\Psi \circ s_{ij}))$.

(2.7) <u>Application linéaire</u> $\mathcal{B}_{cyl}(X) \longrightarrow (\bigotimes_q \Xi^c)^*$: D'après (2.3) et (2.4), tout protenseur distribution T , qui est q fois contravariant, définit une forme bilinéaire sur $\mathcal{B}_{cyl}(X) \times \bigotimes_q (\Xi^c)$; donc T définit une application linéaire de $\mathcal{B}_{cyl}(X)$ dans le dual algébrique de $\bigotimes_q (\Xi^c)$.

(2.8) <u>Définition des protenseurs</u> q <u>fois covariants</u> : <u>Un protenseur</u> q <u>fois covariant sur</u> X <u>est une application linéaire</u> T <u>de</u> $\mathcal{B}_{cyl}(X)$ <u>dans</u> $\bigotimes_q (\Xi^c)$, <u>dont la restriction à chaque</u> $\mathcal{B}(X_i)$ <u>est représentée par un protenseur distribution</u> T_i <u>sur</u> X_i , <u>à valeurs dans</u> $\bigotimes_q (X_i'^c)$ <u>à coefficients distributions intégrables</u> :

$$T = (T_i)_i \quad \text{avec} \quad T_i \in \mathcal{B}'(X_i , \bigotimes_q X_i'^c) .$$

<u>L'ensemble de ces protenseurs est noté</u> $\mathcal{B}'_{q-cyl}(X)$.

(2.9) <u>Relations de cohérence entre les</u> T_i : Avec les mêmes conventions qu'au point (2.5), on a

(2.9.1) $$(T_j , \Psi) = (T_i , \Psi \circ s_{ij})$$

pour toute Ψ dans $\mathcal{B}(X_j)$ et toute surjection s_{ij} . Si T_i et T_j sont donnés par leurs coordonnées covariantes, on a

(2.9.2) $$\begin{aligned} (T_j , \Psi) &= \sum (T_{j;\ell_1\dots\ell_q} , \Psi) \, dx^{\ell_1} \otimes \dots \otimes dx^{\ell_q} \\ (T_i , \Psi \circ s_{ij}) &= \sum (T_{i;k_1\dots k_q} , \Psi \circ s_{ij}) \, dx^{k_1} \otimes \dots \otimes dx^{k_q} \end{aligned}$$

La relation (2.9.1), valable pour toute Ψ , équivaut donc aux deux systèmes d'égalité :

(2.9.3)

(a) $\forall \ \Psi , \ \forall \ (\ell_1 \dots \ell_q) \qquad (T_{j;\ell_1\dots\ell_q} , \Psi) = (T_{i;\ell_1\dots\ell_q} , \Psi \circ s_{ij})$

(b) $\forall \ \Psi$, pour toute famille $k_1 \dots k_q$ dont l'un des éléments est supérieur à n'

$$(T_{i;k_1 \dots k_q} , \Psi \circ s_{ij}) = 0 .$$

Dans le cas hilbertien, on suppose que la base de X_i définie en (2.6) est orthonormée de façon à égaler composantes covariantes et contravariantes ; donc (2.6.1) équivaut à (2.9.3a). Mais les composantes des T_i définissant un protenseur contravariant ne vérifient pas forcément (2.9.3b). On a donc, dans le cas hilbertien, une injection stricte de l'espace des protenseurs covariants de degré q dans l'espace des protenseurs contravariants de degré q .

(2.10) Définition des protenseurs distributions mixtes : Définissons par exemple les protenseurs distributions de degré 3 , covariants par rapport au premier facteur, et contravariants par rapport aux deux derniers facteurs. On rappelle d'abord qu'en dimension finie, tout tenseur distribution mixte T_i sur X_i , à coefficients distributions intégrables

$$T_i = \sum T_{i;k_1}^{k_2,k_3} \, dx^{k_1} \otimes dx_{k_2} \otimes dx_{k_3} ,$$

définit canoniquement une application linéaire

$$\mathcal{B}(X_i , X_i') \longrightarrow \bigotimes_2 X_i'^{c}$$

$$\sum_\ell \varphi^\ell \, dx_\ell \longmapsto \sum_{k_1,k_2} (T_{i;k_1}^{k_2,k_3} , \varphi_\ell^{k_1}) \, dx_{k_2} \otimes dx_{k_3}$$

Cette application est indépendante des coordonnées $x^1 \dots x^n$ dans X_i , les coordonnées dans l'espace dual étant notées $x_1 \dots x_n$. L'ensemble de ces formes linéaires ou de ces tenseurs mixtes T_i est noté $\mathcal{B}_1'^2(X_i)$.

(2.11) On définit l'ensemble $\mathcal{B}'^2_{1,cyl}(X)$ comme l'espace des applications linéaires de $\mathcal{B}_{cyl}(X , X'^c)$ dans $\bigotimes_2(\Xi^c)$, dont la restriction à chaque $\mathcal{B}(X_i,X_i'^c)$ est représentée par un tenseur mixte $T_i \in \mathcal{B}_1'^2(X_i)$.

A tout $T \in \mathcal{B}'^2_{1,cyl}(X)$ est associée une application linéaire

(2.11.1) $$\mathcal{B}_{cyl}(X) \longrightarrow (\Xi^c)^* \otimes (\bigotimes_2 \Xi^c) .$$

Cette application linéaire est notée

(2.11.2) $$\tilde{\varphi} \longrightarrow \int_X \tilde{\varphi}(x) \, dT(x) .$$

Réciproquement, toute forme linéaire de ce type, dont la restriction à chaque $\mathcal{B}(X_i)$ est représentée par un tenseur distribution $T_i \in \mathcal{B}_1'^2(X_i)$, définit un élément de $\mathcal{B}'^2_{1,cyl}(X)$.

(2.12) Topologies sur les espaces de protenseurs distributions : La situation est analogue à celle du §1. On définit la topologie naturelle dans $\mathcal{D}'^p_{q,cyl}(0)$ comme la moins fine rendant continues les applications $T \longrightarrow T_i$, i décrivant I. On définit $\mathcal{D}\mathcal{B}'^{\ell,p}_{q,cyl}(0)$ comme l'espace des protenseurs distributions $T = (T_i)$ de variance $\binom{p}{q}$ sur O , tels que les T_i aient leurs coefficients dans $\mathcal{D}\mathcal{B}'^{\ell}(O_i)$. Soit $\mathcal{T}$ une base de filtre dans cet espace. On dit que $(T^k)_k$ converge cylindriquement vers T si, pour tout i et toute φ de $\mathcal{D}\mathcal{B}^{\ell}_{cyl}(O_i)$, $(T^k , \varphi \circ s_i)$ converge vers $(T , \varphi \circ s_i)$ dans $(\bigotimes_p X_i^c) \otimes (\bigotimes X_i'^c)$.

3. Opérations sur les protenseurs distributions.

Toutes les opérations relatives aux prodistributions, étudiées dans le §1, se prolongent aux protenseurs distributions, avec certaines particularités dues aux propriétés de l'algèbre des tenseurs.

(3.13) Produit tensoriel dans le but : On a caractérisé tout protenseur distribution par une application linéaire de $\mathcal{B}_{cyl}(X)$ dans un certain espace vectoriel E dépendant du nombre d'indices covariants et du nombre d'indices contravariants. Cette caractérisation permet de définir simplement le produit tensoriel de deux protenseurs distributions T et U sur X . Si T et U définissent des applications linéaires α et β de $\mathcal{B}_{cyl}(X)$ dans E et F respectivement, et si ν est l'application bilinéaire canonique de $E \times F$ dans $E \otimes F$, alors le protenseur distribution $T \otimes U$ est défini par l'application linéaire

$$\tilde{\varphi} \longmapsto \nu(\alpha\tilde{\varphi} , \beta\tilde{\varphi}) .$$

Par exemple soient $T \in \mathcal{B}'^{1}_{cyl}(X)$ et $U \in \mathcal{B}'_{2,cyl}(X)$. Alors

$$E = (\Xi^c)^* , \quad F = \bigotimes_2 (\Xi^c) , \qquad T \otimes U \in \mathcal{B}'^{1}_{2,cyl}(X) .$$

(3.14) Contraction : Soit T un protenseur distribution sur X , de variance $\binom{p}{q}$, c'est-à-dire p fois contravariant et q fois covariant. Si $pq \neq 0$, on peut contracter T sur deux facteurs de variance différente. Par exemple, soit $T \in \mathcal{B}'^{1}_{2,cyl}(X)$ caractérisé par l'application linéaire (2.11.1) ; on peut composer cette application linéaire α avec l'application de contraction $\tilde{\delta}$ du facteur contravariant avec le premier facteur covariant. Plus précisément, $\tilde{\delta}$ est définie à partir de l'application trilinéaire δ .

$$(\Xi^c)^* \times \Xi^c \times \Xi^c \longrightarrow \Xi^c$$

$$(x ; \xi ; \eta) \longmapsto (x , \xi)\eta$$

Alors, $\tilde{\delta} \circ \alpha$ caractérise un protenseur distribution sur X une fois covariant, et noté $[T]_1$.

(3.15) Transformation de Fourier : Soit T un protenseur distribution sur X de variance $\binom{p}{q}$ caractérisé par une application linéaire de $\mathcal{B}_{cyl}(X)$ dans un certain espace vectoriel E . Pour tout ξ dans X' , on pose

$$\hat{T}(\xi) = \int_X (\exp(-\sqrt{-1}(x , \xi))) \, dT(x) .$$

C'est une fonction sur X' à valeurs dans E et dont la restriction R_i à tout sous-espace $B_i = A_i$ de dimension finie de X' est une fonction continue à valeurs dans $(\bigotimes_q B_i) \otimes (\bigotimes_q A_i)$. D'ailleurs si $T = (T_i)$, où T_i est une distribution vectorielle sur $X_i = X/A_i$, alors on a $R_i = \hat{T}_i$.

(3.16) Image par une application linéaire : Soit ℓ une application linéaire faiblement continue de X dans l'e. v. l. c. s. réel Y , et soit T un protenseur distribution q fois contravariant sur X . L'application ℓ définit une application linéaire β .

$$\mathcal{B}_{cyl}(Y , \bigotimes_q Y'^c) \longrightarrow \mathcal{B}_{cyl}(X , \bigotimes_q X'^c)$$
$$\tilde{\Psi} = \Psi_j \circ t_j \longmapsto (\bigotimes_q \ell_j'^c) \circ \varphi_j \circ \ell_j \circ s_j$$

où s_j , ℓ_j et t_j sont définis comme dans (4.24) de l'exposé 1. On peut définir $\ell(T)$ par transposition de β :

$$(3.16.1) \qquad \forall\, \tilde{\Psi} ; \qquad (\ell(T) , \tilde{\Psi}) = (T , \beta\tilde{\Psi}) .$$

Dans le cas particulier où ℓ est surjective, alors chaque application ℓ_j est bijective, et β identifie $\mathcal{B}_{cyl}(Y , \bigotimes Y'^c)$ à un sous-espace de $\mathcal{B}_{cyl}(X , \bigotimes X_c')$. De même, $\bigotimes_q \ell'^c$ identifie $\bigotimes_q X'^c$. On peut alors définir $\ell(T)$ si T est un protenseur sur X de variance $\binom{p}{q}$ avec p et q quelconque, en utilisant ces deux identifications :

$$(3.16.2) \qquad \forall\, \tilde{\Psi} \qquad (\ell T , \tilde{\Psi}) = (T , \tilde{\Psi}) .$$

Le même phénomène se produit si ℓ est à image dense.

(3.17) Produit tensoriel : Le produit tensoriel de T et de U , de variances $\binom{p}{q}$ et $\binom{r}{s}$ respectivement, est $T \otimes U$ de variance $\binom{p+r}{q+s}$. Si

$$(p + r)(q + s) > 0 ,$$

on peut faire suivre l'opération $\otimes$ d'une contraction ; on définit ainsi un produit tensoriel contracté.

(3.18) Convolution : Le produit de convolution du protenseur distribution $T = (T_i)$ de variance $\binom{p}{q}$, et du protenseur distribution $U = (U_i)$ de variance $\binom{r}{s}$, est le protenseur distribution $V = (V_i)$ de variance $\binom{p+r}{q+s}$. On a d'ailleurs $V_i = T_i * U_i$ pour tout i , le signe $*$ désignant le produit de convolution des distributions vectorielles T_i et V_i relativement à l'application bilinéaire de produit tensoriel. On obtient V en formant d'abord $T \otimes U$, puis en prenant son image par l'application somme. On peut éventuellement intercaler entre ces deux opérations une contraction sur des couples d'indices de T et de U . Si on contracte les premiers indices (resp. les deux premiers indices), le tenseur obtenu est noté $[T * U]_1$, (resp. $[T * U]_2$) . Si en particulier $p = s$ et $q = r$, et si l'on contracte sur tous les indices, on obtient $\langle T * U \rangle$. On a alors :

$$\widehat{\langle T * U \rangle} = \langle \hat{T} , \hat{U} \rangle .$$

Si on n'effectue aucune contraction, on a

$$\widehat{T * U} = \hat{T} \otimes \hat{U} .$$

On dit encore que $\hat{T}\otimes$ (resp. $[T\otimes\ ]_1$, resp. $\langle\hat{T}\ ,\ \rangle$) est le symbole de l'opérateur de convolution $U \longrightarrow T * U$ (resp. $U \longrightarrow [T * U]_1$; resp. $U \longrightarrow \langle T * U\rangle$) . Cet opérateur est dit de degré $\binom{p}{q}$ (resp. $\begin{smallmatrix} p-1 \\ q-1 \end{smallmatrix}$, resp. $\binom{-r}{-s}$) .

(3.19) Exemples.

(a) Opérateur D de symbole $\sqrt{-1}\,\xi\otimes$ et de degré $\binom{0}{1}$: C'est l'opérateur $U \longrightarrow T * U$ avec $\hat{T}(\xi) = \sqrt{-1}\,\xi$. Si $U = (U_i)$, pour tout i , $(DU)_i$ est le gradient de U_i . Par exemple, si X est hilbertien, et si

$$(3.19.1)\qquad U_i = \sum U^{k_1,\dots,k_p}_{i;\ell_1,\dots,\ell_q}\, dx_{k_1}\otimes\dots\otimes dx_{k_q}\otimes dx_{\ell_1}\otimes\dots\otimes dx_{\ell_q}\ ,$$

alors

$$(3.19.2)\qquad (DU)_i = \sum \partial_{\ell_0} U^{k_1,\dots,k_p}_{i;\ell_1,\dots,\ell_q}\, dx_{\ell_0}\otimes\dots\otimes dx_{k_q}\otimes dx_{\ell_1}\otimes\dots\otimes dx_{\ell_q}\ .$$

L'opérateur D est l'opérateur de dérivation totale ; il peut être itéré pour former des dérivées d'ordre supérieur de T .

(b) Opérateur div de symbole $\sqrt{-1}[\xi\otimes\ ]$ de degré $\binom{-1}{0}$: Dans le cas hilbertien, l'opérateur div associe au protenseur $U = U_i$ avec U_i exprimé par (3.19.1), le protenseur div U tel que :

$$(3.19.3)\qquad (\operatorname{div} U)_i = \sum\Big(\sum_{k_1} \partial_{k_1} U^{k_1,\dots,k_p}_{i;\ell_1,\dots,\ell_q}\Big) dx_{k_2}\otimes\dots\otimes dx_{k_p}\otimes dx_{\ell_1}\otimes\dots\otimes dx_{\ell_p}$$

(c) Soit V un vecteur de X . L'opérateur $\partial/\partial V$ de dérivation dans la direction V est l'opérateur de convolution de symbole $(\xi\ ,\ V)\sqrt{-1}$ et de degré $\binom{0}{0}$.

(d) On suppose $X = X_1 \oplus X_2$, où X_1 est de dimension finie. D'où $X' = X'_1 \oplus X'_2$, et tout ξ de X' s'écrit d'une façon unique $\xi = \xi_1 + \xi_2$ avec $\xi_1 \in X'_1$ et $\xi_2 \in X'_2$. Alors on peut modifier les exemples (a) et (b) en y remplaçant ξ par ξ_1 . On obtient ainsi l'opération de dérivation et l'opérateur de divergence dans la direction d'hyperplan définie par X_1 .

4. Symétrie et antisymétrie.

Soient q un entier positif, et Y un espace vectoriel complexe. On rappelle qu'on définit le produit tensoriel symétrique $\bigodot_q Y$ (resp. antisymétrique $\bigwedge_q Y$) comme le sous-espace de $\bigotimes_q Y$ correspondant par la propriété universelle aux applications q-linéaires symétriques (resp. antisymétriques) sur Y . L'opérateur de symétrisation Sym (resp. d'antisymétrisation Antisym) est un projecteur de $\bigotimes_q Y$ sur $\bigodot_q Y$ (resp. $\bigwedge_q Y$) . On définit aussi des opérateurs linéaires Sym et Antisym dans $(\bigotimes_q Y)^*$. Si par exemple $\tilde{\ell} \in (\bigotimes_q Y)^*$ est définie par la forme q-linéaire ℓ sur Y , on pose :

$$(\operatorname{Sym}\ell)(y_1\ ,\ \dots\ ,\ y_q) = \frac{1}{q!}\sum_\sigma \ell(y_{\sigma_1}\ ,\ \dots\ ,\ y_{\sigma_q})\ ,$$

la somme étant étendue aux permutations σ de $\{1\ ,\ \dots\ ,\ q\}$.

Une application linéaire m d'un espace vectoriel Z dans $\bigotimes_q Y$ (resp. $(\bigotimes_q Y)^*$)

est dite symétrique si $mz = \mathrm{Sym}(mz)$ pour tout z de Z. Définition analogue de l'antisymétrie. En appliquant ceci à $Z = \mathcal{B}_{cyl}(X)$ et aux applications linéaires caractérisant les protenseurs distributions de variance $\binom{0}{p}$ ou $\binom{q}{0}$, on définit les protenseurs distributions symétriques (resp. antisymétriques). Les protenseurs distributions antisymétriques q fois covariants sont encore appelés procourants d de degré q. L'opérateur d appliquant les procourants de degré q dans les procourants de degré $q+1$ est défini composant D avec l'opérateur d'antisymétrisation. On a $d^2 = d \circ d = 0$. Les protenseurs distributions symétriques sont importants, car les dérivées successives DT, $D^2 T \ldots$ d'une prodistribution T sont symétriques.

(4.20) <u>Prodistributions Φ-vectorielles</u> : On introduit une généralisation de la notion de protenseur distribution, qui intervient dans la détermination de valeurs au bord de protenseurs distributions. On limite la présentation au cas contravariant.

On se donne un certain foncteur Φ contravariant de la catégorie $\pi_u(X)$, dans la catégorie des espaces vectoriels complexes de dimension finie. Plus précisément, pour tout i dans I, on se donne un e. v. complexe Z'_i de dimension finie, et pour tout couple (i, j) avec $i \geq j$, on se donne un morphisme injectif $\Phi(s_{ij})$ de Z'_j dans Z'_i. On suppose que l'on a :

(4.20.1) $\quad i \geq j \geq k$ entraîne $\Phi(s_{jk} \circ s_{ij}) = \Phi(s_{ij})\, \Phi(s_{jk})$.

Pour tout i,

$$\Phi(\mathrm{Id}(X_i)) = \mathrm{Id}(Z'_i) .$$

On note $Z' = \bigcup_i Z'_i$ la limite inductive des Z'_i. On note Z_i le dual de Z'_i, et σ_{ij} la transposée (surjective) de $\Phi(s_{ij})$. Notons que la limite projective du système projectif (Z_i, σ_{ij}) est le dual algébrique L^* de Z'. Par exemple, pour le foncteur $X_i \longrightarrow X_i'^c$, on a $Z'^* = (\Xi'^c)^*$. Et pour le foncteur

$$X_i \longrightarrow X_i'^c \otimes X_i'^c ,$$

on a $Z'^* = (\Xi'^c \otimes \Xi'^c)^*$.

Pour tout i, on définit l'espace $\mathcal{B}(X_i, Z'_i)$ des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à dérivées bornées de X_i dans Z'_i. Soit $\mathcal{B}_{cyl}(X, Z')$ la limite inductive des $\mathcal{B}(X_i, Z'_i)$.

(4.21) <u>Prodistributions Φ-vectorielles bornées</u> : Une prodistribution Φ-vectorielle bornée sur X est une forme linéaire T sur $\mathcal{B}_{cyl}(X, Z')$ dont la restriction à chaque $\mathcal{B}(X_i, Z'_i)$ est représentée par une distribution T_i à valeurs dans Z_i, à coefficients distributions intégrables.

(4.22) <u>Prodistributions Φ-vectorielles à décroissance rapide</u> : Soit $\mathcal{L}_{cyl}(X, Z')$ l'espace des fonctions cylindriques sur X à valeurs dans Z', du type $\tilde{\varphi} = \varphi \circ s_i$, avec $i \in I$ et $\varphi \in \mathcal{L}(X_i, Z'_i)$. Une prodistribution Φ-vectorielle sur X à croissance lente est une distribution Φ-vectorielle T sur

X , dont la restriction à chaque $\mathcal{B}(X_i , Z_i')$ est représentée par T_i , à coefficients distributions à décroissance rapide sur X_i . Donc T se prolonge en une forme linéaire sur $\mathcal{E}_{cyl}(X , Z')$. L'ensemble de ces prodistributions est noté $\mathcal{E}'_{cyl}(X , Z)$.

(4.23) Coefficients d'une prodistribution Φ-vectorielle à décroissance très rapide : On reprend les hypothèses (4.24) de l'exposé 1 du cas scalaire.

Si $\dim Z_n' = m(n)$, on se donne pour tout n une base $\varepsilon_1 , \ldots , \varepsilon_m$ de Z_n' . On suppose

$$\forall\, n , \quad \{\varepsilon_1 , \ldots , \varepsilon_{m(n-1)}\} \text{ est une base de } Z'_{n-1} .$$

Autrement dit, les bases des espaces Z_n' forment une suite croissante.

Pour toute T de $\tilde{\mathcal{E}}'_{cyl}(X , Z)$, on définit la suite de ses coefficients

$$a_{k;\ell}(T) = (T , \varphi_k \otimes \varepsilon_\ell)$$

avec $k = (k_1 , k_2 , \ldots , k_n)$; $1 \leqslant \ell \leqslant m$; $\varphi_k = s_n \circ \varphi_k$. Cette suite caractérise T . De plus, la condition de cohérence des T_n est traduite par l'ensemble des relations

$$a_{k_1,k_2,\ldots k_n,0;\ell}(T) = a_{k_1,\ldots,k_n;\ell}(T)$$

valable pour tout n et pour tout $k = (k_1 \ldots k_n)$, lorsque $\ell \leqslant m(n)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] KRÉE (P.). - Application des méthodes variationnelles aux équations aux dérivées partielles sur un espace de Hilbert, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 278, 1974, Série A, p. 753-755.

Paul KRÉE
Tour Mexico, B. P. 1325
65 rue du Javelot
75645 PARIS CEDEX 13