Bernard Lascar

Propriétés locales d'espaces de type Sobolev en dimension infinie

Séminaire Paul Krée, tome 1 (1974-1975), exp. n° 11, p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=SPK_1974-1975__1__A12_0>

Séminaire Paul KRÉE
Equations aux dérivées partielles
en dimension infinie
1re année, 1974/75, n° 11, 16 p.

PROPRIÉTÉS LOCALES D'ESPACES DE TYPE SOBOLEV EN DIMENSION INFINIE

par Bernard LASCAR

Soit X un espace de Hilbert réel. On peut définir, relativement à X, des espaces analogues aux espaces de Sobolev usuels, la mesure de Lebesgue étant remplacée par la prodistribution normale canonique ν de X. Ces espaces sont étudiés par Paul KRÉE [8] dans le cadre de la théorie des prodistributions sur X. L'objet de ce travail est d'étudier les propriétés locales de ces espaces, ce qui permet de construire des analogues aux espaces $H^s(0)$, et d'étudier le problème de Dirichlet pour des ouverts réguliers. Mais le cadre choisi est différent de celui de [8], puisqu'un espace de Wiener abstrait $X \xrightarrow{j} \Omega$ est utilisé, et que nous étudions les images par i des prodistributions du type Sobolev sur X. L'outil essentiel est l'utilisation de fonctions d'épreuve $X - C^\infty$, introduites par L. GROSS dans [3], dont certaines peuvent être prises à support compact, ce qui permet de définir une notion de support, et de donner un théorème du type Paley-Wiener.

1. Notations et lemmes.

Nous utilisons un couple d'espaces $X \overset{i}{\hookrightarrow} \Omega$, où X est un espace de Hilbert séparable, $\Omega' \hookrightarrow X \hookrightarrow \Omega$ formant un triplet de Wiener (L. GROSS [3]). Il ne nous est pas nécessaire d'utiliser la théorie des applications radonifiantes de L. SCHWARTZ [12], car nous nous servirons seulement de promesures gaussiennes sur X. Un exemple fondamental des espaces utilisés est $X = \ell^2$, $\Omega = \ell^2_\lambda$, $i : \ell^2 \hookrightarrow \ell^2_\lambda$ étant de Hilbert-Schmidt. La norme de X est notée $|x|$, celle de Ω $\|x\|$, celle de Ω' $\|x\|_1$.

Les fonctions $X - C^\infty$, définies dans [1], sont des fonctions universellement Lusin-mesurables f de Ω dans un espace de Banach F telles que, pour tout x de Ω, la fonction suivante, définie sur X, $h \xrightarrow{g_x} f(x+h)$ est indéfiniment différentiable sur X.

Si X et Y sont des espaces de Hilbert, $X \hat{\otimes} Y$ désigne le complété de $X \otimes Y$ pour la norme tensorielle hilbertienne. Et $\hat{\odot}_p X$ désigne le produit tensoriel symétrique hilbertien complété de p espaces de Hilbert X ; la norme de ce produit tensoriel est notée $\|.\|_p$. Le complexifié d'un espace de Banach Y est noté Y^c.

Les espaces $K^s(X)$ que nous utilisons sont définis par P. KRÉE dans [7], et nous utiliserons en particulier le développement en série de polynômes d'Hermite, les propriétés de trace et d'interpolation linéaire (voir [5], et l'exposé précédent).

Les X-distributions sur Ω sont définies dans [8]. Ce sont les prodistributions

T sur Ω qui s'écrivent $T = \sum_{j=0}^{k} \operatorname{div}_j \mu_j$, où μ_j appartient à l'espace $M(\Omega, \hat{\odot}_j X^c)$ des mesures de Radon vectorielles à variation bornée sur Ω , à valeurs dans $\hat{\odot}_j X^c$. L'ensemble de ces distributions est noté $XB'(\Omega)$. Pour toute $U \in K^s(X)$, $i(U) \in XB'(\Omega)$ car, vu [7], U admet la représentation

$$U = \sum_{j=0}^{k} \operatorname{div}_j(g_j\ \nu) \text{ , avec } g_j \in L^2(\Omega, \hat{\odot}_j X^c) .$$

Pour ne pas alourdir l'écriture, on note $i(U) \in K^s(X)$. Nous rappelons quelques lemmes concernant les produits tensoriels.

LEMME 1.1. - Soit g une forme bilinéaire sur un espace de Hilbert F , avec $g \in F \hat{\otimes} F$, si h_1 (resp. h_2) est une forme p-linéaire symétrique sur X à valeur dans F , et si $h_1 \in \hat{\odot}_p X \hat{\otimes} F$ (resp. $h_2 \in \hat{\odot}_q X \hat{\otimes} F$) , alors la forme $(p+q)$-linéaire symétrique sur X , définie par le polynôme $h \longrightarrow g(h_1.h^p, h_2.h^q)$, notée $g(h_1, h_2)$, appartient à $\hat{\odot}_{p+q} X$.

$$\|g(h_1, h_2)\|_{p+q} \leqslant C_{(p,q)} \|h_1\|_p \|h_2\|_q .$$

Démonstration.

$g = \sum_{i,j} C_{ij}\, \varepsilon_i \otimes \varepsilon_j$, ε_i base de F .

$h_1 = \sum_{i,|\alpha|=p} \lambda_{i,\alpha}\, \varepsilon_i \otimes e_\alpha$, où $e_\alpha : h \longrightarrow h^\alpha = h_1^{\alpha_1} \ldots h_n^{\alpha_n}$, on a

$$\|e_\alpha\|_p^2 = \frac{\alpha!}{|\alpha|!} , \quad h_2 = \sum \mu_{i\beta}\, \varepsilon_i \otimes e_\beta$$

$$g(h_1.h^p, h_2.h^q) = \sum_{|\gamma|=p+q} h^\gamma \Big(\sum_{\gamma=\alpha+\beta,i,j} \lambda_{i\alpha}\, \mu_{j\beta}\, C_{ij}\Big)$$

soit

$$\|g(h_1,h_2)\|_{p+q}^2 = \sum_{|\gamma|=p+q} \frac{\gamma!}{|\gamma|!} \Big(\sum_{\gamma=\alpha+\beta,i,j} \lambda_{i\alpha}\, \mu_{j\beta}\, C_{ij}\Big)^2$$
$$\leqslant \sum_{i,j} |C_{ij}|^2 \sum_{|\gamma|=p+q,i,j} \frac{\gamma!}{|\gamma|!} \Big(\sum_{\gamma=\alpha+\beta} \lambda_{i\alpha}\, \mu_{j\beta}\Big)^2 .$$

On utilise alors

$$\frac{\gamma!}{|\gamma|!} \Big(\sum_{\gamma=\alpha+\beta} \lambda_{i\alpha}\, \mu_{j\beta}\Big)^2 \leqslant C_{(p,q)} \sum_{\gamma=\alpha+\beta} |\lambda_{i\alpha}|^2 \frac{\alpha!}{|\alpha|!} |\mu_{j\beta}|^2 \frac{\beta!}{|\beta|!} .$$

En effet, pour γ fixé, de longueur $p + q$, le nombre de multi-indices α , β , vérifiant $\gamma = \alpha + \beta$, peut être majoré par un nombre fixe dépendant seulement de p et q , d'où

$$\|g(h_1,h_2)\|_{p+q}^2 \leqslant C_{(p,q)} \sum_{i,j} |C_{ij}|^2 \times \sum_i |\lambda_{i\alpha}|^2 \frac{\alpha!}{|\alpha|!} \times \sum_j |\mu_{j\beta}|^2 \frac{\beta!}{|\beta|!} .$$

Ce qui démontre le lemme.

LEMME 1.2. - Avec les notations du lemme 1.1, on prend $F = X$, si on note $g \in X \hat{\otimes} X$ une forme bilinéaire sur X . Si h_1 est une forme p-linéaire symétrique à valeur dans X , alors la forme $(p+1)$-linéaire symétrique sur X , définie par $h \in X \longrightarrow g(h, h_1.h^p)$, appartient à $\hat{\odot}_{p+1} X$, et vérifie $\|g(\mathrm{Id},h_1)\|_{p+1} \leqslant C_{(p)} \|h_1\|_p$,

Démonstration. - $h_1 = \sum_{i,|\alpha|=p} \lambda_{i,\alpha}\, e_i \otimes e_\alpha$, $g = \sum_{i,j} C_{ij}\, e_i \otimes e_j$

$$g(h, h_1.h^p) = \sum_{|\gamma|=} h^\gamma \sum_{\gamma=\alpha+(j),|\alpha|=p,i} C_{ij}\, \lambda_{i\alpha} ,$$

d'où

$$\|g(\mathrm{Id},h_1)\|^2_{p+1} = \Sigma_{|\gamma|=p+1} \frac{\gamma!}{|\gamma|!} \,\Big| \sum_{\substack{i,\alpha,j \\ \gamma=\alpha+(j)}} c_{ij}\,\lambda_{i\alpha}\Big|^2$$

$$\leqslant \Sigma_{|\gamma|=p+1} \frac{\gamma!}{|\gamma|!} \Big[\sum_{\substack{j,\alpha \\ \gamma=\alpha+|j|}} (\Sigma_i |c_{ij}|^2)^{\frac{1}{2}} (\Sigma_i |\lambda_{i\alpha}|^2)^{\frac{1}{2}}\Big]^2 .$$

On remarque, comme dans le lemme 1.1, que pour γ fixé, $|\gamma| = p + 1$, le nombre de termes de la 2e somme reste majoré par $C(p)$, d'où

$$\|g(\mathrm{Id},h)\|^2_{p+1} \leqslant C(p)\, \Sigma_{|\gamma|=p+1} \sum_{\substack{j,\alpha \\ \gamma=\alpha+(j)}} (\,{}_i|c_{ij}|^2) \times (\,{}_i|\lambda_{i\alpha}|^2 \frac{\alpha!}{|\alpha|!}) ,$$

d'où

$$\|g(\mathrm{Id}\ ,\ h)\|^2_{p+1} \leqslant C(p)\, \Sigma_{i,j}|c_{ij}|^2\, \Sigma_{i,\alpha}|\lambda_{i\alpha}|^2 \frac{\alpha!}{|\alpha|!} ,$$

ce qui donne le lemme.

LEMME 1.3. - Soit $g \in \mathcal{L}(X)$ avec $g \in X \hat{\otimes} X$. Soit u une application n-linéaire symétrique à valeur dans X , et $u \in (\hat{\odot}_n X) \hat{\otimes} X$; alors l'application n-linéaire symétrique sur X , à valeur dans X , définie par $h \in X \longrightarrow g(u\ ,\ h^n)$, appartient à $\hat{\odot}_n X \hat{\otimes} X$, et $\|g(u\ ,\ .)\|_2 \leqslant \|g\|_2\, \|u\|_n$.

La démonstration est analogue aux démonstrations précédentes.

2. Compléments sur l'étude des $K^s(X)$. Support.

Nous commençons par donner quelques définitions.

DÉFINITION 2.4.

Nous notons $HSC^\infty(\Omega)$ l'ensemble des fonctions $f : \Omega \longrightarrow \underset{\sim}{R}$ qui sont $X.C^\infty$-différentiables avec, pour tout $j \in \underset{\sim}{N}$, $D^j f$ est une application dP-Lusin-mesurable de Ω à valeurs dans $\hat{\odot}_j X$.

$HSC^\infty_b(\Omega)$ désignera les fonctions f de $HSC^\infty(\Omega)$ qui vérifient, en outre, $\forall\ j \in \underset{\sim}{N}$, $\exists\ C_j > 0$, $\sup_{x\in\Omega}\|D^j f(x)\|_j < C_j$.

$HSC^\infty_0(\Omega)$ désigne les éléments de $HSC^\infty_b(\Omega)$ qui ont leur support compact dans Ω .

Remarque. - $C^\infty_{cyl}(X) \subset HSC^\infty(\Omega)$ et $C^\infty_{cyl\ b}(X) \subset HSC^\infty_b(\Omega)$ avec les notations de [5]. Les espaces $HSC^\infty_b(\Omega)$ et $XB'(\Omega)$ sont en dualité car, si $T = \Sigma\, \mathrm{div}_j\, \mu_j \in XB'(\Omega)$, on peut poser $\langle T\ ,\ f\rangle = \Sigma\,(-1)^j \int_\Omega D^j f(x)\, d\mu_j(x)$, pour toute $f \in HSC^\infty_b(\Omega)$.

PROPOSITION 2.5. - Soient f et g dans $HSC^\infty_b(\Omega)$, alors fg est aussi dans $HSC^\infty_b(\Omega)$, et on a $\forall\ j \in \underset{\sim}{N}$, $\forall\ x \in \Omega$, $\|D^j(fg)(x)\|_j \leqslant C \sup_{0\leqslant \ell \leqslant j}\|D^\ell f(x)\|_\ell \sum_{\ell=0} \|D^\ell g(x)\|_\ell$.

Démonstration. - Il est clair que fg est également une fonction XC^∞ . On va seulement montrer que les dérivées sont des polynômes de Hilbert-Schmidt. La formule de Taylor donne $(D^j(fg)(x)/j!)h^j = \Sigma_{\ell+k=j}\, (D^\ell f(x)/\ell!)h^\ell \times (D^k g(x)/k!)h^k$.

Pour obtenir le résultat cherché, il suffit alors d'appliquer le lemme 1.1.

PROPOSITION 2.6. - Soient α dans $C_b^\infty(\underset{\sim}{R})$, et f appartenant à $HSC_b^\infty(\Omega)$, alors $\alpha \circ f$ appartient aussi à $HSC_b^\infty(\Omega)$, et on a :

$$\|D^j(\alpha \circ f(x))\|_j \leq C \sup_{1\leq \ell\leq j}|\alpha^{(\ell)}(f(x))| \times [\sup_{1\leq \ell\leq j}\|D^\ell f(x)\|_\ell]^j .$$

Démonstration. - On utilise ici encore la formule de Taylor pour montrer que, pour $h \in X$, $x \in \Omega$,

$$\frac{D^j(\alpha \circ f)(x)}{j!} h^j = \sum_{\substack{\ell=1\ldots j \\ k_1+\ldots+k_\ell=j}} \frac{\alpha^{(\ell)}(f(x))}{\ell!} \frac{D^{k_1} f(x)}{k_1!} h^{k_1} \times \ldots \times \frac{D^{k_\ell} f(x)}{k_\ell!} h^{k_\ell} .$$

Là encore la conclusion est une conséquence évidente du lemme 1.1.

PROPOSITION 2.7. - Pour tout $s \in \underset{\sim}{R}$, l'application qui à f appartenant à $HSC_b^\infty(\Omega)$ associe la mesure (fdP) a une image dense dans $K^s(X)$.

Démonstration. - Il est établi dans [8] que les fonctions polynomiales cylindriques sont denses dans $K^s(X)$, $\forall\ s \in \underset{\sim}{R}$. Il est clair qu'il suffit de montrer la densité de $HSC_b^\infty(\Omega)$ dans $K^s(X_n)$, et ceci pour $s \in \underset{\sim}{N}$ arbitraire.

Soit $f \in K^s(X_n)$ polynomiale, i. e. $\sum_{j=0}^s \int \|D^j f(x)\|^2 d\mu_n < +\infty$. On détermine $R > 0$ de sorte que $\sum_{j=0}^s \int_{|x|>R}\|D^j f(x)\|_j^2 d\mu_n < \varepsilon$.

On choisit ensuite $\zeta \in C_b^\infty(\underset{\sim}{R})$ avec $\zeta \equiv 1$ si $|x| < R$, on a $\zeta f \in HSC_b^\infty(\Omega)$, et $\|f(1 - \zeta\|_s < C\varepsilon$, d'où le résultat.

PROPOSITION 2.8. - Soit ζ appartenant à $HSC_b^\infty(\Omega)$; on définit, par prolongement continu, une application $\varphi : K^s(X) \longrightarrow K^s(X)$ par $u \in HSC_b^\infty(\Omega)$, $\varphi : u \longrightarrow \zeta u$, et $\|\zeta u\|_s \leq C(s)\ \|u\|_s \sup(\|D^\ell \zeta(x)\|_\ell , x \in \Omega , 0 \leq \ell \leq m)$, où $m \in \underset{\sim}{N}$, $|s| \leq m$.

Pour $s \in \underset{\sim}{N}$, la proposition résulte directement des propositions 2.5 et 2.7, pour $s \in \underset{\sim}{R}^+$ la proposition s'obtient par interpolation. Pour s $\underset{\sim}{R}^-$, on obtient, par transposition de l'application définie ci-dessus, une application $u \longrightarrow \zeta u$ qui vérifie $(\zeta u , \varphi) = (u , \zeta\varphi)$, $u \in K^s$ et $\varphi \in K^{-s}$, d'où

$$\|\zeta u\|_s = \sup(|u , \zeta\varphi)| , \|\varphi\|_{-s} \leq 1) \leq \|u\|_{+s}\ \|\zeta\varphi\|_{-s} ,$$

soit

$$\|\zeta u\|_s \leq C\ \|u\|_s \sup(\|D^\ell \zeta(x)\|_\ell , x \quad \Omega , 0 \leq \ell \leq s) \quad \text{avec} \quad -s \leq m ,$$

ce qui fournit le résultat.

PROPOSITION 2.9. - Soit f une fonction universellement Lusin-mesurable et bornée sur Ω , alors la fonction $\varphi_t(x) = \int_\Omega f(x + y)\ dP_t(y)$ est dans l'espace $HSC_b^\infty(\Omega)$, et on a $\|D^n \varphi_t(x)\|_n^2 \leq C\ t^{-n} \int |f(x + y)|^2\ dP_t(y)$.

Si on suppose, en outre, f lipschitzienne sur Ω , alors φ_t converge uniformément vers f dans Ω quand t tend vers 0 .

Démonstration. - Cette proposition, et en particulier la deuxième partie, est partiellement montrée dans [3]. Nous montrons donc seulement le 1er point, et en utilisant une méthode analogue à celle de L. GROSS dans [3].

Il s'agit donc de montrer que les dérivées de φ_t sont des polynômes de Hilbert-Schmidt. Soit $h \in X$,

$$\varphi_t(x+h) = \int f(x+y+h)\, dP_t(y) = \int f(x+y) \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{|h|^2}{t} + \frac{(y|h)}{t}\right) dP_t(y)$$

on pose $g(h, y) = \exp\left(-\frac{1}{2}((|h|^2)/t) + \frac{(y|h)}{t}\right)$, on écrit la formule de Taylor pour g en $h = 0$.

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{|h|^2}{t} + \frac{(y|h)}{t}\right) = 1 + \sum_{n=1}^{N} \sum_{p+2q=n} (-1)^{p+q} \frac{t^{-p-q}}{p!q!} (h|y)^p (h|h)^q + R_N \text{, avec}$$

$$R_N = \int_0^1 \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{s^2|h|^2}{t} + \frac{s(y|h)}{t}\right) \sum_{p+2q=N+1} (-1)^{p+q} \frac{t^{-p-q}}{p!q!} [(y|h) - s(h|h)]^p (h|h)^q\, ds .$$

Pour montrer que φ_t est $X - C^\infty$, il suffit de prouver que

$$\int f(x+y)\, R_N(y,h)\, dP_t(y) \text{ tend vers } 0 \text{ avec } |h|^{N+1} .$$

On écrit :

$$\int f(x+y)\, R_N(y,h)\, dP_t(y)$$
$$= \int_0^1 ds \int f(x+y) \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{s^2|h|^2 + s(y|h)}{t}\right) \sum_{p+2q=N+1} (-1)^{p+q} \frac{t^{-p-q}}{p!q!} (y - sh|h)^p (h|h)^q\, dP_t(y) .$$

Dans la 2e intégrale, on fait le changement de variable $z = y - sh$, soit

$$\int f(x+y) R_N(y,h) dP_t(y) = \int_0^1 ds \int f(x+z+sh) \sum_{p+2q=N+1} (-1)^{p+q} \frac{t^{-p-q}}{p!q!} (z|h)^p (h|h)^q\, dP_t(z) .$$

On applique alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left|\int f(x+y)\, R_N(y,h)\, dP_t(y)\right| \leqslant C\left(\int \left[\sum_{p+2q=N+1} (-1)^{p+q} \frac{t^{-p-q}}{p!q!} (z|h)^p (h|h)^q\right]^2 dP_t(z)\right)^{\frac{1}{2}} .$$

Or $\int (z|h)^k\, dP_t(z) = C_k(t)|h|^k$, d'où $\int f(x+y)\, R_N(y,h)\, dP_t(y) = O(|h|^{N+1})$, et l'on a

$$\frac{D^n \varphi_t(x)}{n!} h^n = \sum_{p+2q=n} (-1)^{p+q} \frac{t^{-p-q}}{p!q!} \int f(x+y)(y|h)^p (h|h)^q\, dP_t(y) .$$

Pour compléter la preuve, il s'agit de prouver que ceci est un polynôme de Hilbert-Schmidt. On écrit :

$$\frac{D^n \varphi_t(x)}{n!} h^n = \sum_{|\gamma|=n} h^\gamma \sum_{2\alpha+\beta=\gamma} (-1)^{|\alpha|+|\beta|} \frac{t^{-|\alpha|-|\beta|}}{2^{|\alpha|}\, \alpha!\beta!} \int f(x+y)\, y^\beta\, dP_t(y) .$$

Soit $T \in \hat{\bigodot}_n X$ avec $T = \sum_{|\gamma|=n} T_\gamma e_\gamma$, où seul un nombre fini des T_γ sont non nuls. On a

$$\langle T, D^n \varphi_t(x)\rangle = n! \sum_{|\gamma|=n} |\gamma|! \sum_{2\alpha+\beta=\gamma} T_\gamma (-1)^{|\alpha|+|\beta|} \frac{t^{-|\alpha|-|\beta|}}{2^{|\alpha|}\, \alpha!\beta!} \int f(x+y)\, y^\beta\, dP_t(y) .$$

On pose $C_\gamma(y) = \sum_{2\alpha+\beta=\gamma} (-1)^{|\alpha|+|\beta|} (t^{-|\alpha|-|\beta|}/2^{|\alpha|})(\gamma!/\alpha!\,\beta!) y^\beta$. On remarque que l'on a $C_\gamma(y) = \exp(|y|^2/2t)(\partial/\partial y)^\gamma \exp(|y|^2/2t)$ c'est-à-dire

$$C_\gamma(y) = (\gamma!)^{-\frac{1}{2}}\, t^{-(|\gamma|/2)}\, \mathcal{H}_\gamma(t^{-\frac{1}{2}} y) ,$$

d'où l'on déduit que $\int C_\gamma(y)\, C_{\gamma'}(y)\, dP_t(y) = \delta_{\gamma\gamma'}\, \gamma!\, t^{-|\gamma|}$. Or

$$\langle D^n \varphi_t(x), T\rangle = \sum_{|\gamma|=n} T_\gamma \int f(x+y)\, C_\gamma(x)\, dP_t(y) = \int f(x+y)\left(\sum_{|\gamma|=n} T_\gamma C_\gamma(y)\, dP_t(y)\right) ,$$

d'où $|\langle D^n \varphi_t(x), T\rangle| \leqslant \left[\int |f(x+y)|^2\, dP_t(y)\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int \sum_{|\gamma|=n} T_\gamma^2\, C_\gamma^2(y)\, dP_t(y)\right]^{\frac{1}{2}}$.

Soit $|\langle D^n \varphi_t(x), T\rangle|^2 \leqslant \sum_{|\gamma|=n} |T_\gamma|^2 (\gamma!/|\gamma|!) \times n!\, t^{-n} \int |f(x+y)|^2 \, dP_t(y)$, d'où le résultat $\|D^n \varphi_t(x)\|_n^2 \leqslant n!\, t^{-n} \int |f(x+y)|^2 \, dP_t(y)$, ce qui termine la preuve.

Remarque importante. - Si f est lipschitzienne, on a en outre

$$D^n \varphi_t(x) \in C_b^0(\Omega, \hat{\bigodot}_n X) .$$

PROPOSITION 2.10. - Si $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ est un recouvrement ouvert de Ω , il existe une partition de l'unité localement finie subordonnée au recouvrement (U_α) formée par des fonctions (φ_α) $\varphi_\alpha \in HSC_b^\infty(\Omega)$, et vérifiant en outre $\forall\, j \in \underset{\sim}{N}$,

$$D^j \varphi_\alpha(x) \in C_b^0(\Omega, \hat{\bigodot}_n X) .$$

Démonstration. - La démonstration de ce résultat est classique, et est donnée dans [1] pour des fonctions C^1 . Nous allons vérifier que l'on peut obtenir ce résultat avec des fonctions $X - C^\infty$ à dérivées de Hilbert-Schmidt.

Il suffit de montrer que, si $B(x, r)$ et $B(x, r')$ $(r < r')$ sont deux boules de Ω , on peut construire une fonction $\varphi \in HSC_b^\infty(\Omega)$, vérifiant les hypothèses de la proposition 2.10 et $\varphi \equiv 1$ sur B_r , $\varphi \equiv 0$ en dehors de $B_{r'}$ et

$$D^j \varphi \in C_b^0(\Omega, \hat{\bigodot}_j X) .$$

On considère $f(y) = \inf(\|y - x\|, \rho)$ avec $\rho > r'$, on a $f \leqslant r$ sur B_r et $f \geqslant r'$ sur $\complement B_{r'}$. Utilisant la proposition 2.9, on construit $g \in HSC_b^\infty(\Omega)$ et même, avec $D^j g \in C_b^0(\Omega, \hat{\bigodot}_j X)$ qui vérifie $0 \leqslant g < r + \varepsilon$ sur B_r , $g \geqslant r' - \varepsilon$ sur $B_{r'}$ avec $r + \varepsilon < r' - \varepsilon$. On considère ensuite $\alpha \in C_b^\infty(\underset{\sim}{R})$ avec $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, et $\alpha \equiv 1$ si $x \leqslant r + \varepsilon$, $\alpha \equiv 0$ pour $x > r' - \varepsilon$; on pose $\varphi = \alpha \circ g$, et on constate, en utilisant la proposition 2.6, que φ convient.

PROPOSITION 2.11. - Il existe une suite (g_n) , g_n appartenant à $HSC_0^\infty(\Omega)$, qui vérifie les propriétés suivantes

(i) $g_n \longmapsto 1$ et $|g_n| < M$ presque partout pour chacune des mesures dP_t .

(ii) $D^j g_n \longrightarrow 0$ et $\|D^j g_n\|_j < M_j$ presque partout pour chaque mesure dP_t et pour tout $j \geqslant 1$.

Démonstration. - Dans [3], GROSS construit une suite de semi-normes cylindriques "mesurables" sur X $\|\ \|_j$ qui vérifient, $\forall\, x \in X$, $\sum_{j=1}^\infty \|x\|_j \leqslant C|x|$, et telles que, si $K_r = \{x \in \Omega ; \sum_{j=1}^\infty \|x\|_j < r\}$, on ait : K_r est relativement compact dans Ω et $s \in \underset{\sim}{R}^+$, $\lim_{r\to\infty} P_s(K_r) = 1$. La construction est évidente si Ω est un espace de Hilbert.

Soit $s \in \underset{\sim}{R}^+$ fixé, on pose $f_n(x) = \int \chi_{K_n}(x + y) \, dP_s(y)$, où χ_{K_n} représente la fonction caractéristique de K_n . On note tout d'abord que f_n est universellement Lusin-mesurable sur Ω car $K_n = \bigcap_{N\geqslant 0} K_n^N$, où les K_n^N sont des ouverts cylindriques ; la suite K_n^N étant décroissante, on voit, pour le lemme de Fatou, que $f_n(x)$ est la limite d'une suite décroissante de fonctions continues. Par la proposition 2.9, on voit que l'on a $f_n(x) \in HSC_b^\infty(\Omega)$, et que $\|D^j f_n(x)\|_j^2 < C\, s^{-j}$.

On choisit $m \in \underset{\sim}{N}$ tel que $n > m$ implique $P_s(K_n) \geqslant \frac{2}{3}$; on a alors

$$(x \in K_{n-m} \quad \text{et} \quad y \in K_m) \Longrightarrow (y - x \in K_n) ,$$

soit $K_m \subset K_n - x$, d'où $f_n(x) = P_s(K_n - x) \geqslant P_s(K_m) \geqslant \frac{2}{3}$ si $x \in K_{n-m}$.

On a également $(x \notin K_{n+m}$ et $y \in K_n) \Longrightarrow (y - x \notin K_m)$. Soit

$$f_n(x) \leqslant 1 - P_s(K_m) = \frac{1}{3} \quad \text{pour} \quad x \notin K_{n+m} .$$

Soit $\alpha \in C_b^\infty(\underset{\sim}{R})$, $\alpha \equiv 0$ si $x \geqslant 2/3$, $\alpha \equiv 1$ si $x \leqslant 1/3$. On pose $g_n = \alpha \circ f_n$, et on a

$$g_n \equiv 1 \quad \text{sur} \quad K_{n-m}$$

$$g_n \equiv 0 \quad \text{sur} \quad \complement K_{n+m}$$

et $g_n \in HSC_b^\infty(\Omega)$, $\|D^j g_n\|_j \leqslant M_j$. Comme $P_t(K_n) \longrightarrow 1$ quand $n \longrightarrow +\infty$ pour tout $t \in \underset{\sim}{R}^+$, on a donc $g_n \longrightarrow 1$ P_t-presque-partout, et $\operatorname{Supp} g_n \subset \overline{K}_{n+m}$ qui est compact. D'autre part, il est clair que si $x \in K_n$ pour $h \in X$, $|h|$ assez petit, on a encore $x + h \in K_n$; il en résulte que $\forall\, j \geqslant 1$, $D^j g_n = 0$ sur K_{n-m} , donc $D^j g_n \longrightarrow 0$ P_t-presque-partout.

COROLLAIRE 2.12. - $HSC_0^\infty(\Omega)$ <u>est une partie dense de</u> $K^s(X)$, $\forall\, s \in \underset{\sim}{R}$.

Il suffit de prouver que, si $f \in HSC_b^\infty(\Omega)$, $g_n f$ tend vers f dans $K^s(X)$ quand n tend vers l'infini, et ceci pour s entier positif. Ceci est évident par le théorème de Lebesgue en tenant compte de la proposition 2.11.

DÉFINITION 2.13.

1° On définit $HSC_0^\infty(\mathcal{O})$ pour $\mathcal{O}$ ouvert de Ω comme l'ensemble des f de $HSC_0^\infty(\Omega)$ qui ont leur support compact contenu dans $\mathcal{O}$.

2° Soit $u \in K^{-\infty}(X) = \bigcup_s K^s(X)$. On dit que u est nulle sur un ouvert $\mathcal{O}$ de Ω si, pour toute fonction φ appartenant à $HSC_0^\infty(\mathcal{O})$, on a $(u , \varphi) = 0$.

PROPOSITION 2.14. - <u>Soit</u> $u = g\, dP$ <u>avec</u> $g \in L^2(\Omega)$. <u>Alors</u> u <u>est nulle sur</u> $\mathcal{O}$ <u>au sens de la définition</u> 2.13 <u>si, et seulement si,</u> g <u>est</u> dP-<u>presque-partout nulle sur</u> $\mathcal{O}$.

<u>Démonstration</u>. - On commence par construire deux suites croissantes d'ouverts $\mathcal{O}'_n$ et $\mathcal{O}_n$ vérifiant $\overline{\mathcal{O}'_n} \subset \mathcal{O}_n$, $\overline{\mathcal{O}}_n \subset \mathcal{O}$, $\bigcup_n \mathcal{O}'_n = \mathcal{O}$. En utilisant la proposition 2.10, on choisit $\zeta_n \in HSC_b^\infty(\Omega)$, $0 \leqslant \zeta_n \leqslant 1$, $\zeta_n = 1$ sur $\mathcal{O}'_n$, $\zeta_n = 0$ sur $\complement\mathcal{O}_n$. Si g_n désigne la suite construite dans la proposition 2.11, on pose $\psi_n = g_n\, \zeta_n$, et on a

$$\psi_n = \begin{cases} 1 & \text{sur} \quad \mathcal{O}'_n \cap K_{n-m} \\ 0 & \text{sur} \quad \complement\mathcal{O}_n \cup \complement K_{n+m} \end{cases} .$$

Si on pose $K'_n = \overline{K}_{n+m} \cap \overline{\mathcal{O}}_n$, on a K'_n compact $K'_n \subset \mathcal{O}$ et $\psi_n \equiv 0$ sur $\complement K'_n$, soit $\operatorname{Supp} \psi_n$ compact contenu dans $\mathcal{O}$. On a donc $\psi_n \in HSC_0^\infty(\mathcal{O})$ et $\psi_n \longrightarrow 1$

presque partout sur $\mathcal{O}$, et même $|\psi_n| \leq 1$, donc $h\psi_n$ tend vers h dans $L^2(\mathcal{O})$ pour tout h de $L^2(\mathcal{O})$. Comme $g \in L^2(\Omega)$, on peut trouver $h \in C_b^0(\Omega)$ avec $\|g - h\|_2 < \varepsilon$. En considérant les $P_t(h)$, on voit, d'après [10], que $P_t(h)$ converge vers h uniformément sur tout compact, on peut donc construire une suite $h_n \in HSC_b^\infty(\Omega)$ telle que $\psi_n h_n \longrightarrow g$ dans $L^2(\mathcal{O})$, mais $\psi_n h_n \in HSC_0^\infty(\mathcal{O})$ et, si g est nulle sur $\mathcal{O}$ au sens de la définition 2.13, on a

$$\lim_{n\to\infty} \int g\psi_n h_n \, dP = 0 = \int_{\mathcal{O}} |g|^2 \, dP ,$$

d'où $g = 0$ presque partout sur Ω .

PROPOSITION 2.15. - Soit $u \in K^{-\infty}(X)$. Si $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ est une famille d'ouverts tels que u est nulle sur $\mathcal{O}_i$ pour chaque $i \in I$, alors u est nulle sur $\mathcal{O} = \bigcup_i \mathcal{O}_i$.

Démonstration. - Soient $\psi \in HSC_0^\infty(\mathcal{O})$, $K = \mathrm{Supp}\,\psi$, $K \subset \mathcal{O}$. K étant compact, K est recouvert par un nombre fini des ouverts $\mathcal{O}_i$, et $\complement K \cup \bigcup_i \mathcal{O}_i$ contient Ω . Donc d'après la proposition 2.10, on a $1 = \varphi_0 + \sum_{i=1}^n \varphi_i$ avec $\mathrm{Supp}\,\varphi_i \subset \mathcal{O}_i$; soit $\psi = \psi\varphi_0 + \sum_{i=1}^n \varphi_i \psi$, $\psi = \sum_{i=1}^n \varphi_i \psi$, et $\varphi_i \psi \in HSC_0^\infty(\mathcal{O}_i)$. Donc $u(\varphi_i \psi) = 0$ et $u(\psi) = 0$. Ceci permet d'énoncer la définition suivante.

DÉFINITION 2.16. - Si $u \in K^{-\infty}(X)$, on définit le support de u comme le complémentaire de la réunion des ouverts sur lesquels u est nulle.

Remarques.

1° Si $u \in K^s$, $s > 0$, u est une mesure $g\,dP$ et, d'après la proposition 2.14, le support de u , défini en 2.7, coïncide avec le support de la mesure $g dP$,

2° $x \in \Omega$, $x \in \mathrm{Supp}\,u$ si, et seulement si, pour tout ouvert $\mathcal{O}$ tel que $x \in \mathcal{O}$, il existe $\varphi \in HSC_0^\infty(\mathcal{O})$ avec $(u , \varphi) \neq 0$,

3° Vu la densité de $HSC_0^\infty(\mathcal{O})$ des $K^s(X)$, $\mathrm{Supp}\,u = \emptyset$ signifie $u = 0$,

4° Si $\varphi \in HSC_b^\infty(\Omega)$ et si $\mathrm{Supp}\,\varphi \cap \mathrm{Supp}\,u = \emptyset$, alors $u(\varphi) = 0$: il suffit d'utiliser la proposition 2.10,

5° $\mathrm{Supp}(u + v) \subset \mathrm{Supp}\,u \cup \mathrm{Supp}\,v$, $\zeta \in HSC_b^\infty(\Omega)$ $\mathrm{Supp}\,\zeta u \subset \mathrm{Supp}\,u \cap \mathrm{Supp}\,\zeta$,

6° $u \in K^s(X)$, si $v \in K^{-s}(X)$ et $\mathrm{Supp}\,u \cap \mathrm{Supp}\,v = \emptyset$, alors $\langle u , v\rangle = 0$.

Nous donnons maintenant un théorème du type Paley-Wiener pour caractériser le support des éléments de $K^{-\infty}(X)$.

THÉORÈME 2.17. - Soient u un élément de $K^{-\infty}(X)$, et $\hat{u}(\zeta)$ la transformée de Fourier de u . Si K est un convexe fermé de Ω , on note $\alpha_K(\eta) = \sup_{x\in K} |\langle x, \eta\rangle|$ avec $\eta \in \Omega'$ l'indicatrice de K . Alors, pour que le support de u soit contenu dans K , il faut et il suffit qu'il existe $C > 0$ et $m \in \underset{\sim}{N}$ tels que

$$(*) \qquad \forall\ \zeta \in \Omega'^c , \quad |\hat{u}(\zeta)| < C(1 + \|\zeta\|_1)^m \exp(\alpha_K(\mathrm{Im}\,\zeta)) .$$

Démonstration. - $\langle x , \eta \rangle$ désigne le produit scalaire $\Omega \times \Omega'$.

1° Montrons que la condition (*) est nécessaire en suivant [13]. On note M_i le demi-espace $M_i = \{x \in \Omega ; |(x|N_i)| \leqslant B_i , \|N_i\|_1 = 1\}$. On peut trouver les B_i , les N_i , et une famille I d'indices, de manière à ce que $K = \bigcap_{i \in J} M_i$. On a $\alpha_K(\eta) = \inf_{i \in I} \alpha_{M_i}(\eta)$. On va donc montrer que l'on a

$$|\hat{u}(\zeta)| < C(1 + \|\zeta\|_1)^m \exp(\alpha_{M_i}(\eta))$$

pour tout demi-espace M_i contenant K . On pose donc $\varphi(x) = g(\|\zeta\|_1(|(x|N_i)| - B_i))$, où $g \in C_b^\infty(\underset{\sim}{R})$ avec $g \equiv 0$ si $x \geqslant 1$, et $g \equiv 1$ si $x \leqslant 1/2$. On en déduit donc que l'on a $\varphi \equiv 0$ sur $|(x|N_i)| \geqslant B_i + (1/\|\zeta\|_1)$, et $\varphi \equiv 1$ sur $|(x|N_i)| \leqslant B_i + (1/2\|\zeta\|_1)$. Comme $\varphi \equiv 1$ sur le support de u , on a $\hat{u}(\zeta) = (u , \varphi \exp(-ix\zeta))$, et donc $|\hat{u}(\zeta)| \leqslant C[\sum_{j=0}^m \int \|D^j(\varphi \exp(-ix\zeta)\|_j^2 \, dP(x)]^{\frac{1}{2}}$, où $m \geqslant |s|$.

Il est clair que $D^j \varphi(x).h^{(j)} = g^{(j)}(\|\zeta\|_1(|(x|N_i)| - B_i)) \times \|\zeta\|_1^j (h|N_i)^j$, et donc $\|D^j f(x)\|_j \leqslant C\|\zeta\|_1^j$, où C est indépendant de N_i , B_i , $\|\zeta\|_i$ et, comme on a $D^\ell \exp(-ix\zeta).h^\ell = (-i)^\ell \exp(-ix\zeta)(\zeta|h)^\ell$, soit

$$\|D^\ell \exp(-ix\zeta)\|_\ell \leqslant |\zeta|^\ell \exp(x|\eta) ,$$

donc

$$|\hat{u}(\zeta)| \leqslant C(1 + \|\zeta\|_1)^m \sup\{\exp(x|\eta) , x \in \operatorname{Supp} \varphi\} .$$

Mais pour $x \in \operatorname{Supp} \varphi$, on a :

$$x - (N_i/\|\zeta\|_1) \in M_{N_i} \quad \text{et} \quad (x|\eta) = (x - (N_i/\|\zeta\|_1) , \eta) + (N_i|\eta)/\|\zeta\|_1 ,$$

soit

$$|(x|\eta)| \leqslant \alpha_{M_i}(\eta) + (\|\eta\|_1/\|\zeta\|_1) \leqslant 1 + \alpha_{M_i}(\eta) ,$$

d'où $|\hat{u}(\zeta)| \leqslant C(1 + \|\zeta\|_1)^m \exp(\alpha_{M_i}(\eta))$.

2° Montrons que la condition (*) est suffisante. Introduisons la famille (X_i) des sous-espaces vectoriels de dimension finie de Ω' . On a des surjections $s_i : \Omega \longrightarrow X_i$ qui sont le prolongement à Ω de la projection orthogonale $X \longrightarrow X_i$. On pose $u_i = s_i(u)$. On sait, d'après [8], que $u_i \in K^s(X_i)$ si $u \in K^s(X)$, et que u_i converge fortement vers u dans $K^s(X)$ pour la base de filtre $\mathfrak{F}$, formée par les sections commençantes de I , ordonné par $i \leqslant j$ si $X_i \subset X_j$; d'autre part, il est évident que $\hat{u}_i = \hat{u}|_{X_i^c}$. On suppose donc que (*) est vérifiée. On note donc que la condition (*), appliquée à $\zeta \in X_i^c$, montre que $\operatorname{Supp} u_i \subset \overline{s_i(K)}$. En effet, $\alpha_{K|X_i} = \alpha_{s_i(K)}$, et il suffit d'utiliser alors le théorème de Paley-Wiener habituel.

On pose $L = \bigcap_i s_i^{-1}(\overline{s_i(K)})$. On a le lemme suivant.

LEMME 2.18. - Si K est un convexe fermé, on a $K = L = \bigcap_i s_i^{-1}(\overline{s_i(K)})$.

Démonstration. - On a tout d'abord $K \subset L$. Comme K est convexe et fermé, K est faiblement fermé (pour $\sigma(\Omega , \Omega')$) . Soit $x \in L$; alors, pour tout $i \in I$, on a $s_i(x) \in \overline{s_i(K)}$. Mais pour $X_i = \xi\underset{\sim}{R}$, où $\xi \in \Omega'$ est arbitraire, on a $s_i(x) = (\xi|x)\xi$. Donc $s_i(x) \in \overline{s_i(K)}$ signifie qu'il existe une suite (x_ν) de K telle que $(x_\nu|\xi) \longrightarrow (x|\xi)$. Comme K est faiblement fermé et ξ arbitraire, on a $x \in K$, d'où $L = K$. On va donc montrer que $\operatorname{Supp} u \subset L$.

Soit $x \notin L$. Alors il existe $i \in I$ avec $s_i(x) \notin \overline{s_i(K)}$; soit V_i ouvert de X_i tel que $V_i \cap \overline{s_i(K)} = \emptyset$. On pose $W_i = s_i^{-1}(V_i)$, W_i est un ouvert de Ω. Soit $j \geqslant i$; on va montrer que $s_j(W_i) \cap \overline{s_j(K)} = \emptyset$. En effet, si $y \in s_j(W_i) \cap \overline{s_j(K)}$, on a $s_i \circ s_j^{-1}(y) = s_{ij}(y) \in s_i(W_i) = V_i$, et aussi

$$s_{ij}(y) \in s_{ij}(\overline{s_j(K)}) \subset \overline{s_{ij}(s_j(K))} = \overline{s_i(K)} ,$$

soit $s_{ij}(y) \in V_i \cap \overline{s_i(K)}$, ce qui est impossible.

On a donc, pour $j \geqslant i$, $s_j(W_i) \cap \overline{s_j(K)} = \emptyset$. Soit φ arbitraire, $\varphi \in HSC_b^\infty(\Omega)$ avec $\operatorname{Supp} \varphi \subset W_i$. On a alors, pour $j \geqslant i$, $u_j(\varphi) = \int \langle \varphi(x^j, x'), u_j\rangle \, dP'(x') = 0$, car $s_j(W_i) \cap \overline{s_j(K)} = \emptyset$ et $\operatorname{Supp} u_j \subset \overline{s_j(K)}$. On en déduit donc que

$$u(\varphi) = \lim_{\mathfrak{F}} u_j(\varphi) = 0 .$$

Donc W_i étant un voisinage de x, on a $x \notin \operatorname{Supp} u$, soit $\operatorname{Supp} u \subset L$, et compte tenu du lemme, ceci achève la preuve.

Remarque. - Compte tenu du théorème donné dans [5], on a une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction entière $U(\zeta)$ sur X'^c soit la transformée de Fourier-Borel d'une distribution de $K^s(X)$ ayant son support contenu dans un convexe fermé K de Ω : $U(\zeta) \exp(-\frac{1}{2}\zeta^2) \in F^s(X^c)$, et $U(\zeta)$ vérifie l'estimation (*) pour $\zeta \in \Omega'^c$, avec $|s| \leqslant m$. Le théorème 2.17 s'étend aussi à $XB'(\Omega)$.

3. Etude d'opérateurs différentiels.

PROPOSITION 3.19. - L'application $\varphi \longrightarrow \operatorname{div}_j \varphi$, définie sur

$$C^\infty_{cyl,b}(X) \otimes \hat{\odot}_j X \longmapsto C^\infty_{cyl,b}(X) ,$$

se prolonge en une application linéaire continue de $K^s(X) \hat{\otimes} \hat{\odot}_j X$ dans $K^{s-j}(X)$.

Démonstration. - Si $\varphi = \sum_{|\beta|=j} \varphi_\beta e_\beta$, où $\varphi_\beta \in C^\infty_{cyl,b}(X)$ et où seul un nombre fini de termes sont non nuls, on a

$$\|\varphi\|^2_{K^s \hat{\otimes} \hat{\odot}_j X} = \sum_{|\beta|=j} \|\varphi_\beta\|_s^2 \frac{\beta!}{|\beta|!} .$$

On pose $(\frac{\tilde{\partial}}{\partial x})^\alpha \psi = \exp(|x|^2/2)(\partial/\partial x)^\alpha \exp(-|x|^2/2)\psi$, et on a

$$\operatorname{div}_j \varphi = \sum_{|\beta|=j} (\frac{\tilde{\partial}}{\partial x})^\beta \varphi_\beta .$$

Utilisant [5], on écrit $\varphi_\beta = \sum_\alpha a_\alpha^\beta \mathcal{H}_\alpha$. On peut montrer que l'on a

$$(\frac{\tilde{\partial}}{\partial x})^\beta \mathcal{H}_\alpha = (-1)^{|\beta|} (\alpha+1)^{\frac{1}{2}} \dots (\alpha+\beta)^{\frac{1}{2}} \mathcal{H}_{\alpha+\beta} ,$$

soit $(\frac{\tilde{\partial}}{\partial x})^\beta \varphi_\beta = \sum_\alpha (-1)^{|\beta|} a_\alpha^\beta [\frac{(\alpha+\beta)!}{\alpha!}]^{\frac{1}{2}} \mathcal{H}_{\alpha+\beta}$, d'où

$$\operatorname{div}_j \varphi = \sum_{|\gamma| \geqslant j} \mathcal{H}_\gamma \sum_{\gamma=\alpha+\alpha, |\beta|=j} (-1)^j a_\alpha^\beta [\frac{(\alpha+\beta)!}{\alpha!}]^{\frac{1}{2}} .$$

Si on pose $c_\alpha^\beta = a_\alpha^\beta(\frac{\beta!}{|\beta|!})^{\frac{1}{2}}$, on aura $\|\varphi\|_s^2 = \sum_{\alpha,\beta}|c_\alpha^\beta|^2 (1 + |\alpha|)^s$ et

$$\operatorname{div}_j \varphi = (-1)^j \sum_{|\gamma|\geq j} \mathcal{H}_\gamma \sum_{\gamma=\alpha+\beta,|\beta|=j} c_\alpha^\beta [\frac{(\alpha+\beta)!}{\alpha!\ \beta!}]^{\frac{1}{2}} \sqrt{j!} ,$$

d'où

$$\|\operatorname{div}_j \varphi\|_{s-j}^2 \leq \sum_{\gamma=\alpha+\beta}(1+|\gamma|)^{s-j}(\sum_{\gamma=\alpha+\beta}|c_\alpha^\beta|^2(1+|\alpha|)^s)(\ _{\gamma=\alpha+\beta} \frac{(\alpha+\beta)!}{\alpha!\ \beta!} j!(1+|\alpha|)^{-s}) ,$$

d'où

$$\|\operatorname{div}_j \varphi\|_{s-j}^2 \leq \sum_{\alpha,\beta}|c_\alpha^\beta|^2(1+|\alpha|)^s \sup_\gamma \sum_{\gamma=\alpha+\beta,|\beta|=j}(1+|\gamma|)^{s-j}(1+|\alpha|)^s \frac{(\alpha+\beta)!}{\alpha!\ \beta!} j! .$$

On remarque alors que $\sum_{\gamma=\alpha+\beta,|\beta|=j}((\alpha+\beta)!/\alpha!\ \beta!)$ représente le coefficient des termes en x^j dans le produit $(1+x)^{\gamma_1} \ldots (1+x)^{\gamma_q}$, où $\gamma = (\gamma_1 \ldots \gamma_q\ 0 \ldots)$, donc il est égal à $n!/((n-j)!\ j!)$, où $|\gamma| = n \geq j$. Pour terminer la démonstration, il suffit d'étudier

$$\frac{(1+n)^{s-j}}{(1+n-j)^s} \frac{n!}{(n-j)!\ j!} j! \leq \frac{(1+n)^s}{(1+n-j)^s} \leq \sup(1\ ,\ (1+j)^s) = C_{s,j} ,$$

d'où $\|\operatorname{div}_j \varphi\|_{s-j}^2 < C\|\varphi\|_{K^s\hat{\otimes}\hat{\odot}_j X}$.

PROPOSITION 3.20. - <u>L'application</u> $u \longmapsto D^j u$, <u>définie sur</u> $C_{\text{cyl b}}^\infty$ <u>à valeur dans</u> $C_{\text{cyl b}}^\infty \otimes \odot_j X$ <u>se prolonge en un opérateur linéaire continu, que nous noterons</u> $\tilde{D}^j$ <u>de</u> $K^s(X)$ <u>à valeur dans</u> $K^{s-j}(X) \hat{\otimes} \hat{\odot}_j X$. <u>Cet opérateur</u> $\tilde{D}^j$ <u>sera appelé opérateur de dérivation de densité d'ordre</u> j .

<u>Démonstration</u>. - On va se contenter de montrer une inégalité

$$\|D^j u\|_{K^{s-j}\hat{\otimes}\hat{\odot}_j X} \leq C\|u\|_s$$

pour u une fonction cylindrique qui est une somme finie de polynômes de Hermite et cela suffira à prouver 3.20.

Soit $u = \sum_\alpha a_\alpha \mathcal{H}_\alpha$. On a $D^j u = \sum_{|\beta|=j} \sum_\alpha a_\alpha(\frac{\partial}{\partial x})^\beta \mathcal{H}_\alpha \frac{|\beta|!}{\beta!} e_\beta$. Mais

$$(\frac{\partial}{\partial x})^\beta \mathcal{H}_\alpha = [\frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!}]^{\frac{1}{2}} \mathcal{H}_{\alpha-\beta} ,$$

d'où

$$D^j u = \sum_{|\beta|=j} \frac{|\beta|!}{\beta!} (\sum_\alpha a_\alpha \mathcal{H}_{\alpha-\beta}[\frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!}]^{\frac{1}{2}}) e_\beta ,$$

d'où l'on déduit

$$\|D^j u\|_{K^{s-j}\hat{\otimes}\hat{\odot}_j X}^2 = \sum_{|\beta|=j} \frac{|\beta|!}{\beta!} \sum_\alpha |a_\alpha|^2 \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!} (1+|\alpha|)^{s-j}$$

$$= \sum_\alpha |a_\alpha|^2(1+|\alpha|)^{s-j}\ j! \sum_{|\beta|=j} \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!\beta!} .$$

Mais $\sum_{|\beta|=j} \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!\ \beta!} = \frac{(|\alpha|)!}{(|\alpha|-j)!\ j!}$, d'où $j! \sum_{|\beta|=j} \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!\beta!} = O(|\alpha|^j)$, ce qui donne

$$\|\tilde{D}^j u\|_{K^{s-j}\hat{\otimes}\hat{\odot}_j X} \leq C\|u\|_s .$$

PROPOSITION 3.21. - <u>Comme</u> $-\operatorname{div}$ <u>est le transposé de</u> $\tilde{D}$ [8], <u>il en résulte que, pour tout</u> j , $(-1)^j \operatorname{div}_j$ <u>est le transposé de</u> $\tilde{D}^j$.

Nous allons utiliser ces opérateurs pour construire des opérateurs différentiels à coefficients variables.

PROPOSITION 3.22. - Si $\mathcal{L}_{\ell,k} = \mathcal{L}(\hat{\odot}_\ell X, \hat{\odot}_k X)$ désigne les applications linéaires continues de $\hat{\odot}_\ell X$ dans $\hat{\odot}_k X$, on munit cet espace de sa topologie habituelle d'espace de Banach.

Soit $a(x) \in C_b^0(\Omega, \mathcal{L}_{\ell,k})$, et $a(x)$ est X-indéfiniment différentiable, avec en outre, $\forall\, p \geqslant 1$, $D^p a(x) \in C_b^0(\Omega, \hat{\odot}_p X \hat{\otimes} (\hat{\odot}_\ell X \hat{\otimes} \hat{\odot}_k X))$. Alors l'application $u \dashrightarrow a(x).\tilde{D}^\ell u(x)$ est un opérateur linéaire continu de $K^s(X)$ dans $K^{s-\ell}(X) \hat{\otimes} \hat{\odot}_k X$.

Démonstration. - Afin de simplifier les notations, nous nous contenterons de donner la démonstration pour $\ell = k = 1$.

On pose $a(x) = \sum_{i,j} a_{ij}(x)\, e_i \otimes e_j$, On a $a(x).\tilde{D}u = \sum_{i,j} a_{ij}(x)(\tilde{D}u(x).e_j)e_i$. On va d'abord montrer le résultat pour $s \geqslant \ell$, $s \in \underset{\sim}{N}$; on en déduira le résultat pour s positif quelconque, $s \geqslant \ell$ par interpolation. Si $s \leqslant \ell$, on considère $v \in K^{-s+\ell} \hat{\otimes} \hat{\odot}_k X$. On constate que $\langle a(x).\tilde{D}^\ell u(x), v\rangle = (-1)^\ell \langle u, \mathrm{div}_\ell\, {}^t a(x).v\rangle$; mais comme $-s+\ell \geqslant 0$, $v \longmapsto {}^t a(x)v$ est continue de

$$K^{-s+\ell} \hat{\otimes} \hat{\odot}_k X \dashrightarrow K^{-s+\ell} \hat{\otimes} \hat{\odot}_\ell X ,$$

et donc que $u \longmapsto a(x)\, \tilde{D}^\ell u(x)$ est continue de $K^s \longrightarrow K^{+s-\ell} \hat{\otimes} \hat{\odot}_k X$ pour $s \leqslant \ell$. Montrons donc que $u \dashrightarrow a(x)\, \tilde{D}^\ell u$ est continue de $K^s(X) \longrightarrow K^{s-\ell} \hat{\otimes} \hat{\odot}_k X$ pour $s \in \underset{\sim}{N}$, $s \geqslant k$,et par souci de simplification avec $\ell = k = 1$.

Il s'agit donc d'évaluer les $\|D^\lambda(a(x)\, D^\lambda u)\|_\lambda$ si $0 \leqslant \lambda \leqslant s$. On écrit

$$D^\lambda(a(x)\, \tilde{D}u)\, h^\lambda = \sum_{i,j} e_i \sum_{p+q=\lambda} \frac{\lambda!}{p!\, q!} D^p a_{ij}(x).h^p \times D^q(\tilde{D}u(x).e_j)\, h^j .$$

Soit

$$\|D^\lambda(a.\tilde{D}u)\|^2_{\hat{\odot}_\lambda X \hat{\otimes} X} = \sum_i \|\sum_j \sum_{p+q=\lambda} \frac{\lambda!}{p!\, q!} D^p a_{ij} \times D^q(\tilde{D}u(x).e_j)\|^2_\lambda .$$

Il suffit en fait d'évaluer $\sup_{p,q,p+q=\lambda} \sum_i \|\sum_j D^p a_{ij}\, D^q(\tilde{D}u(x).e_j)\|^2_\lambda$. On distingue deux cas. D'abord si $p > 1$

$$\sum_i \|\sum_j D^p a_{ij}\, D^q Du(x).e_j\|^2_\lambda \leqslant \sum_i (\sum_j \|D^p a_{ij}\|^2_p)(\sum_j \|D^q Du.e_j)\|^2_q .$$

On a donc

$$\sum_i \|\sum_j D^p a_{ij}\, D^q Du.e_j\|^2_\lambda \leqslant (\sum_{i,j} \|D^p a_{ij}\|^2_p) \sum_j \|D^q(Du(x).e_j)\|^2_q$$
$$\leqslant C \sum_{i,j} \|D^p a_{ij}\|^2_p \times \|D^{q+1} u\|^2_{q+1} .$$

D'autre part, si $p = 0$, on a $q = \lambda$. On étudie $\sum_i \|\sum_j a_{ij}\, D^\lambda(Du(x).e_j)\|^2_\lambda$. On écrit $D^\lambda(Du(x).e_j) = \sum_{|\beta|=\lambda} \lambda_{j\beta}\, e_\beta \sqrt{|\beta|!/\beta!}$, on a

$$\sum_j a_{ij}\, D^\lambda(Du(x).e_j) = \sum_\beta (\sum_j a_{ij}\, \lambda_{j\beta})\, e'_\beta$$

et

$$\|\sum_j a_{ij}\, D^\lambda(Du(x).e_j)\|^2_\lambda = \sum_\beta |\sum_j a_{ij}\, \lambda_{j\beta}|^2 ,$$

et donc

$$\sum_i \| \sum_j a_{ij} D^\lambda(Du(x).e_j) \|^2_\lambda = \sum_\beta \sum_i | \sum_j a_{ij} \lambda_{j\beta} |^2 .$$

Mais comme $a(x)$ est un opérateur continu $X \longrightarrow X$, on a

$$\sum_i | \sum_j a_{ij} \lambda_{j\beta} |^2 \leqslant \|a(x)\| \sum_j |\lambda_{j\beta}|^2 ,$$

mais $\sum_\beta |\lambda_{j\beta}|^2 = \|D^\lambda(Du(x).e_j)\|^2_\lambda$ et $\sum_j \|D^\lambda(Du(x).e_j)\|^2_\lambda \leqslant C\|D^{\lambda+1} u(x)\|^2_{\lambda+1}$. On obtient donc, pour tout $x \in \Omega$,

$$\|D^\lambda(a.\tilde{D}u)(x)\|^2_{\bigodot_\lambda X\hat{\otimes}X} \leqslant C \sum_{q=0}^{\lambda+1} \|D^q u(x)\|^2_q \times \sup(\sum_{i,j} \|D^p a_{ij}(x)\|^2_p , \|a(x)\| , \lambda \geqslant p \geqslant 1) .$$

Comme l'hypothèse faite signifie que le second terme est une fonction bornée sur Ω , le résultat s'obtient d'une manière évidente.

COROLLAIRE 3.23. - <u>Si on pose</u> $P(x , D) = \sum_{\ell,k} \mathrm{div}_k\, a_{\ell k}.\tilde{D}u$, <u>où</u> $0 \leqslant \ell + k \leqslant m$ <u>et où les</u> $a_{\ell k}(x)$ <u>appartiennent à</u> $C^0_b(\Omega , \mathcal{E}_{\ell,k})$ <u>et vérifient les hypothèses de la proposition</u> 3.22, <u>on a</u> $P(x , D)$ <u>est un opérateur continu</u> $K^s(X) \longrightarrow K^{s-m}(X)$.

DÉFINITION 3.24. - <u>Soit</u> F <u>un espace de Hilbert séparable</u> ; $u \in K^s(X) \hat{\otimes} F$; <u>on dit que</u> u <u>est nulle sur un ouvert</u> $\mathcal{O}$ <u>de</u> Ω <u>si, pour toute</u> $\varphi \in HSC^\infty_0(\mathcal{O}) \otimes F$, <u>on a</u> $u(\varphi) = 0$. <u>Le support de</u> u <u>est le complémentaire de la réunion de ces ouverts</u>.

PROPOSITION 3.25. - <u>Soit</u> $u \in L^2(\Omega) \hat{\otimes} F$. <u>Le support de</u> u , <u>défini en</u> 3.24, <u>coïncide avec le support de la mesure</u> $u \in L^2(\Omega , F)$.

<u>Démonstration</u>. - Il s'agit de montrer que si u est nulle sur $\mathcal{O}$ au sens de la définition 3.24, alors $u = 0$ presque partout sur $\mathcal{O}$. Utilisant la démonstration de la proposition 2.14, il est clair que l'on peut construire une suite (v_n) de fonctions décomposables appartenant à $HSC^\infty_0(\mathcal{O}) \otimes F$ qui converge vers u dans $L^2(\mathcal{O} , F)$, et ceci permet de conclure.

PROPOSITION 3.26. - <u>Soit</u> $u \in K^s(X)$; <u>alors</u> $\mathrm{Supp}\, \tilde{D}^j u \subset \mathrm{Supp}\, u$, <u>et on a également</u> $\mathrm{Supp}\, \mathrm{div}_j\, u \subset \mathrm{Supp}\, u$ <u>pour</u> u <u>appartenant à</u> $K^s(X) \hat{\otimes} \hat{\bigodot}_j X$.

<u>Démonstration</u>. - Démontrons le 1er point : Supposons u nulle sur $\mathcal{O}$. Il s'agit de montrer que $\tilde{D}^j u$ est nulle sur $\mathcal{O}$. Soit $\varphi \in HSC^\infty_0(\mathcal{O}) \otimes \hat{\bigodot}_j X$, $\varphi = \sum_{\beta \in \mathfrak{J}} \varphi_\beta e_\beta$, $\mathfrak{J}$ partie finie. On a $\langle \tilde{D}^j u , \varphi \rangle = (-1)^j (u , \mathrm{div}_j\, \varphi)$, mais $\mathrm{div}_j\, \varphi \in HSC^\infty_0(\mathcal{O})$, et $(\tilde{D}^j u , \varphi) = 0$.

Démontrons le 2e point : $u \in K^s(X) \hat{\otimes} \hat{\bigodot}_j X$. Soit $\varphi \in HSC^\infty_0(\mathcal{O})$, avec u nulle sur $\mathcal{O}$. On a $\langle \mathrm{div}_j\, u , \varphi \rangle = (-1)^j (u , D^j \varphi)$, mais

$$D^j \varphi = \lim_{\mathfrak{J} \to I} \sum_{\beta \in \mathfrak{J}} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\beta \varphi \frac{|\beta|!}{\beta!} e_\beta ,$$

où la limite a lieu dans $K^{-s}(X) \hat{\otimes} \hat{\bigodot}_j X$. Mais on a $(u , (\frac{\partial}{\partial x})^\beta \varphi) = 0$, d'où $(u , D^j \varphi) = 0$, et $\mathrm{div}_j\, u$ est nulle sur $\mathcal{O}$.

COROLLAIRE 3.27. - <u>Si</u> $P(x , D)u = \sum_{\ell+k \leqslant m} \mathrm{div}_k\, a_{\ell k} \tilde{D}^\ell u$, <u>on a</u> $\mathrm{Supp}\, Pu \subset \mathrm{Supp}\, u$.

PROPOSITION 3.28. - Si on pose $\operatorname{div} \tilde{D} = \Delta - x \operatorname{grad}$, on a : $\Delta - x \operatorname{grad}$ est un opérateur auto-adjoint, et $-(\Delta - x \operatorname{grad}) + 1$ on réalise un isomorphisme de $K^s(X)$ sur $K^{s-2}(X)$.

On note que l'écriture $\Delta - x \operatorname{grad}$ est formelle, car Δ n'est pas en général défini sur $K^s(X)$.

Démonstration. - La démonstration est évidente, et résulte du résultat suivant : si $u = \sum_\alpha a_\alpha \mathcal{H}_\alpha$, on a $\operatorname{div} \tilde{D}u = - \sum_\alpha a_\alpha |\alpha| \mathcal{H}_\alpha$, d'où $-\operatorname{div} \tilde{D}u+u = \mathcal{H}_\alpha(1+|\alpha|)_\alpha$, et la conclusion en résulte.

Nous donnons maintenant un résultat négatif.

PROPOSITION 3.29. - Soit $t < s$; l'injection de $K^s(X) \longrightarrow K^t(X)$ est compacte si $\dim X < +\infty$, il n'en est plus de même si $\dim X = +\infty$.

Démonstration. - Pour le 1er point, la méthode est classique, et résulte du développement en série de Fourier.

En ce qui concerne le 2e point, nous donnons un contre-exemple pour $s = 1$, $t = 0$; mais, à quelques modifications près, il permettrait de conclure dans tous les cas.

On construit une suite $(T^k)_k$, où $T^k \in K^1(X)$. On pose $T^k_n = s_n(T^k)$. On définit $T^k_n = \sum_{i,j\leq n} a^k_{ij} \mathcal{H}_i(x_j)$, c'est-à-dire $a^k_\alpha = 0$ sauf si α est du type $\alpha = (\underbrace{0 \ldots}_{j} i\ 0 \ldots)$, et on pose

$$|a^k_{ij}|^2 = \frac{1}{(1+i)^3} \frac{1}{(j+k)^2} \frac{1}{f(k)} \quad \text{avec} \quad f(k) = \sum_{j\geq 0} \frac{1}{(j+k)^2} .$$

On constate que

$$\|T^k\|^2_1 = \sum_{i,j} |a^k_{ij}|^2 (1+i) = \sum_i \frac{1}{(1+i)^2} \times \sum_j \frac{1}{(j+k)^2} \frac{1}{f(k)} = \sum_i \frac{1}{(1+i)^2} \leq M .$$

Donc T^k est une suite bornée dans $K^1(X)$.

T^k converge faiblement vers 0 : $a^k_{ij} \longrightarrow 0$ quand $k \longrightarrow +\infty$. En effet, comme on peut montrer que $f(k) \geq 1/k$, on a $|a^k_{ij}|^2 \leq (1/(1+i)^3)(k/(j+k)^2)$, ce qui tend vers 0 quand k tend vers l'infini, donc T^k converge faiblement vers 0 sur le sous-espace engendré par les combinaisons linéaires finies des $\mathcal{H}_\alpha$, donc sur K^1 tout entier, car T^k est fortement bornée.

$\|T^k\|^2_0 = \sum_i (1/(1+i)^3) \sum_j (1/(j+k)^2)(1/f(k)) = \sum_i 1/(1+i)^3 \geq C$, donc il est impossible que l'une des sous-suites de la suite T^k puisse converger fortement vers 0 dans L^2.

Nous terminerons cette étude en donnant une nouvelle démonstration plus simple de la surjectivité dans $L^2(\Omega)$ des opérateurs différentiels à coefficient constant, le résultat, cité par P. KRÉE [7], s'appuyait sur une inégalité montrée par D. DWYER dans les espaces de Fock. Nous nous appuyons sur une méthode désormais classique développée par F. TRÈVES [14].

THÉORÈME 3.30. - Soit $P(D) = \sum_{j=0}^{m} a_j \tilde{D}^j$ un opérateur différentiel à coefficients constants, alors P et P^* sont surjectifs dans $L^2(\Omega)$.

Démonstration. - On va montrer des inégalités $\|u\| < C\|Pu\|$ ($\| \ \|$ désigne la norme L^2) et $\|u\| < C\|P^* u\|$. $P^* = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \operatorname{div}_j (a_j^*)$, $a_j \in \hat{\odot}_j X$; on écrit que $a_j = \sum_{|\alpha|=j} a_\alpha e_\alpha$, de sorte que $P(D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha (\partial/\partial x)^\alpha$ et

$$P^*(D) = \sum_{|\alpha|\leq m} \overline{a}_\alpha (A^*)^\alpha ,$$

avec $A = (A_1 , \dots , A_j , \dots)$, $A_j = \partial/\partial x_j$, $A_j^* = -((\partial/\partial x_j) - x_j)$, et on a les relations :

$$j \neq k , \quad [A_j , A_k] = [A_j^* , A_k^*] = [A_j , A_k^*] = 0$$

$$\forall j , \quad [A_j , A_j^*] = 1 .$$

On a alors le lemme suivant qui est purement algébrique.

LEMME 3.31. - $P^*(A)\, P(A) = \sum_p \frac{1}{p!} P^{(p)}(A)\, (P^{(p)}(A))^*$.

Pour la démonstration de ce lemme voir [10].

D'où l'on déduit $\|P(A).u\|^2 = \sum_p \frac{1}{p!} \|P^{(p)}(A)u\|^2$, et également :

$$\frac{1}{q!} \|P^{(q)}(A).u\|^2 = \sum_p \frac{(p+q)!}{p!\, q!} \frac{1}{(p+q)!} \|P^{(p+q)}(A).u\|^2 .$$

Or $\frac{(p+q)!}{p!\, q!} \leq 2^m$, car $|p|$ et $|q| \leq m$, d'où :

$$\frac{1}{q!} \|P^{(q)}(A).u\|^2 \leq 2^m \sum_p \frac{1}{p!} \|P^{(p)}(A).u\|^2 = 2^m \|P(A).u\|^2 ,$$

et en prenant $|q| = m$, on en déduit $u \in HSC_b^\infty(\Omega)$, $\|u\|^2 \leq C\|Pu\|^2$ (en supposant par exemple que $a_q \neq 0$).

On déduit alors, par des arguments classiques, la surjectivité des L^2 de l'opérateur P^* ; pour la surjectivité de l'opérateur P, on constate que la démonstration est identique, car $P^*(A) = \overline{P}(A^*)$, et on utilise les arguments précédents en remplaçant P par $\overline{P}$ et A par A^*.

BIBLIOGRAPHIE

[1] GOODMANN (V.). - A divergence theorem for Hilbert spaces, Trans. Amer. math. Soc., t. 164, 1972, p. 411-426.

[2] GOULAOUIC (C.). - Introduction aux équations aux dérivées partielles, Cours professé à l'Ecole Polytechnique, 1973/74 (multigraphié).

[3] GROSS (L.). - Potential theory of Hilbert spaces, J. of funct. Anal., t. 1, 1967, p. 123-181.

[4] HÖRMANDER (L.). - Linear partial differential operators. - Berlin, Springer-Verlag, 1963 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 116).

[5] KRÉE (M.). - Propriété de trace de dimension infinie d'espaces du type Sobolev, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 279, 1974, Série A, p. 157-160.

[6] KRÉE (P.). - Exemples d'utilisation de la théorie des distributions et des fonctionnelles linéaires sur les espaces de Hilbert, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 278, 1974, Série A, p. 335-337.

[7] KRÉE (P.). - Application des méthodes variationnelles aux équations aux dérivées partielles sur un espace de Hilbert, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 278, 1974, Série A, p. 753-755.

[8] KRÉE (P.). - Solutions faibles d'équations aux dérivées fonctionnelles, Séminaire Lelong : Analyse, 1972/73, p. 142-181 ; 1973/74, p. 16-47 ; 1974/75 (à paraître) (Lecture Notes in Mathematics, 410, 474)

[9] KRÉE (P.). - Utilisation des distributions pour l'étude des équations aux dérivées partielles en dimension infinie, Séminaire Leray, Collège de France, année 1972/73, fascicule 4, 19 p.

[10] LASCAR (B.). - Propriétés d'espaces de Sobolev en dimension infinie, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 280, 1975, Série A, p. 1587-1590.

[11] RAMER (R.). - On nonlinear transformations of gaussian measures, J. of funct. Anal., t. 15, 1974, p. 166-187.

[12] Séminaire Schwartz : Applications radonifiantes, 1969/70. - Paris, Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique, 1970.

[13] TRÈVES (F.). - Topological vector spaces, distributions and kernels. - New York, Academic Press, 1967 (Pure and applied Mathematics. Academic Press, 25).

[14] TRÈVES (F.). - Linear partial differential operators with constant coefficients. - New York, Gordon and Breach, 1966 (Mathematics and its Applications, 6).

Bernard LASCAR
36 rue du Pré Saint Gervais
93500 PANTIN