Paul Krée

Dérivées de densité d'une prodistribution

Séminaire Paul Krée, tome 1 (1974-1975), exp. n° 9, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=SPK_1974-1975__1__A10_0>

Séminaire Paul KRÉE
Equations aux dérivées partielles
en dimension infinie
1re année, 1974/75, n° 9, 14 p.

DÉRIVÉES DE DENSITÉ D'UNE PRODISTRIBUTION

par Paul KRÉE

0. Introduction.

(0.1) Certains opérateurs linéaires A , ... d'un espace de u-protenseurs distributions sont remarquables : ce sont ceux qui s'expriment à l'aide de systèmes cohérents d'applications linéaires dans les tenseurs distributions sur les X_i . De la même manière, certains opérateurs linéaires B , ... d'un espace de fonctions u-cylindriques sur X ont une forme remarquable : ils s'expriment à l'aide de systèmes cohérents d'applications dans des espaces de fonctions définies sur les X_i . On dit que de tels opérateurs sont des pro-applications. En vue de généraliser en dimension infinie la formule d'intégration par parties, on cherche, dans ce paragraphe, des couples ordonnés (A , B) de pro-application "du type dérivation" vérifiant une identité du type

(0.1.1) $$(AT , \tilde{\varphi}) = (T , B\tilde{\varphi}) ,$$

les parenthèses indiquent la dualité entre protenseurs distributions et fonctions cylindriques vectorielles. On dira que A et B sont transposées l'une de l'autre et que (0.1.1) est la formule d'intégration par parties associée au couple (A,B) . On va voir ainsi apparaître les opérateurs $T \longrightarrow \tilde{D}T$ et $T \longrightarrow \widetilde{\mathrm{div}}\, T$. On montre au §1, la relation avec le calcul différentiel usuel. Signalons que les résultats de l'exposé n° 11 permettront d'étendre les identités (0.1.1) au cas où $\tilde{\varphi}$ n'est plus cylindrique, T étant alors d'un type particulier.

1. Hypothèses et définitions.

(1.2) Dans le paragraphe 1, on suppose $\mu = (\mu_i)$ telle que, pour tout i :

(a) μ_i admet une densité notée α_i par rapport à une mesure de Lebesgue sur O_i .

(b) α_i est $\mathcal{C}^\infty$, strictement positive.

(c) Pour tout vecteur V non nul de X_i , on a

dans le cas 1 : $\varphi \in \mathfrak{L}(X_i) \Longrightarrow \alpha_i^{-1} \frac{\partial}{\partial V} (\alpha_i\, \varphi) \in \mathfrak{L}(X_i)$

dans le cas 2 : $\varphi \in \mathfrak{D}\mathfrak{L}(O_i) \Longrightarrow \alpha_i^{-1} \frac{\partial}{\partial V} (\alpha_i\, \varphi) \in \mathfrak{D}\mathfrak{L}(O_i)$

(d) Dans le cas 1 (resp. 2) et pour tout p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, toutes les fonctions de $\mathfrak{L}(X_i)$ (resp. $\mathfrak{D}\mathfrak{L}(O_i)$) sont de puissance p-ième sommable.

(1.3) Dans le paragraphe 2, on supposera en plus que X est hilbertien et,

<u>pour tout sous-espace</u> X_i <u>de dimension finie de</u> X , μ <u>est le produit tensoriel de</u> μ_i <u>est d'une promesure</u> $\mu_i^!$ <u>sur</u> $X_i^\perp$.

(1.4) <u>Notations</u> : Dans le cas 1 (resp. 2), on travaille avec l'ensemble $\mathcal{L}'^p_q(X)$ (resp. $\mathcal{O}\mathcal{L}'^p_q(0)$) des protenseurs distributions $T = (T_i)$ sur X (resp. 0) de variance $\binom{p}{q}$ tels que pour tout i , T_i ait ses coefficients dans $0_c^! = \mathcal{L}'$ (resp. $\mathcal{O}\mathcal{L}'$) . On note de même $\mathcal{L}_q(X_i)$ (resp. $\mathcal{O}\mathcal{L}_q(0_i)$) l'espace des fonctions φ , définies sur X_i , à croissance lente ainsi que leurs dérivées (resp. définies sur 0_i à support dans une "bande verticale à base compacte dans $0'$ ", à croissance lente ainsi que leurs dérivées). La limite inductive de ces espaces, lorsque i varie, est notée $\mathcal{L}_q(X)$ (resp. $\mathcal{O}\mathcal{L}_q(0)$) . Dans le cas où X est hilbertien, on note $\mathcal{O}\mathcal{L}'(0\ ,\ q)$ l'espace $\mathcal{O}\mathcal{L}'^q(0)$.

(1.5) <u>Définition d'une pro-application linéaire</u> $\mathcal{O}\mathcal{L}'^q(0) \longrightarrow \mathcal{O}\mathcal{L}'^{q+p}(0)$: <u>Soit</u> p <u>un entier relatif, et</u> $q \geq \max(0\ ,\ -p)$. <u>Une pro-application linéaire</u>

$$\mathcal{O}\mathcal{L}'^q(0) \longrightarrow \mathcal{O}\mathcal{L}'^{q+p}(0)$$

<u>est une application linéaire</u> A <u>entre les espaces indiqués ayant la propriété suivante</u> :

(1.6) <u>Pour tout</u> i , <u>il existe une application linéaire</u> A_i <u>de</u> $\mathcal{O}\mathcal{L}'^q(0_i)$ <u>dans</u> $\mathcal{O}\mathcal{L}'^{p+q}(0_i)$ <u>telle que</u> $(AT)_i = A_i\, T_i$.

On dit encore que A est de degré p , et que (1.6) est la propriété de cohérence des A_i .

(1.7) <u>Définition d'une pro-application linéaire</u> : $\mathcal{O}\mathcal{L}_{q+p}(0) \longrightarrow \mathcal{O}\mathcal{L}_q(0)$: <u>Soient</u> p <u>un entier relatif, et</u> $q \geq \max(0\ ,\ -p)$. <u>Une pro-application linéaire</u>

$$\mathcal{O}\mathcal{L}_{q+p}(0) \longrightarrow \mathcal{O}\mathcal{L}_q(0)$$

<u>est une application linéaire opérant entre les espaces indiqués, ayant la propriété suivante</u> :

(1.8) <u>Pour tout</u> i , <u>il existe une application linéaire</u> B_i <u>de</u> $\mathcal{O}\mathcal{L}_{q+p}(0_i)$ <u>dans</u> $\mathcal{O}\mathcal{L}_q(0_i)$ <u>telle que, pour toute</u> $\tilde{\varphi} = \varphi \circ s_i$ <u>de</u> $\mathcal{O}\mathcal{L}_{q+p}(0)$, <u>basée sur</u> 0_i , <u>on a</u> :

$$B(\tilde{\varphi}) = (B_i\, \varphi) \circ s_i \ .$$

On dit encore que B est de degré $-p$, et que (1.8) est la propriété de cohérences des B_i .

(1.9) <u>Exemples de pro-applications</u>.

(a) La convolution par une prodistribution scalaire réalise, pour tout q une pro-application de degré zéro de $\mathcal{L}'^q(X)$.

(b) Pour tout $q \geqslant 1$, l'opérateur de divergence est une pro-application de $\mathcal{L}'^q(X)$ dans $\mathcal{L}'^{q-1}(X)$. C'est aussi une pro-application de $\mathcal{O}\mathcal{L}'^q(0)$ dans $\mathcal{O}\mathcal{L}'^{q-1}(0)$.

(c) Soit $\tilde{\varphi} \in \mathcal{L}_q(X)$ admettant une base dans X_i , donc $\tilde{\varphi} = \varphi \circ s_i$ avec $\varphi \in \mathcal{L}_q(X_i)$. On pose $D\tilde{\varphi} = (D\varphi) \circ s_i$. On a $D\tilde{\varphi} \in \mathcal{L}_{q+1}(X)$, et $D\tilde{\varphi}$ ne dépend pas de la base choisie pour $\tilde{\varphi}$. On définit ainsi, pour tout $q \geqslant 0$, une pro-application D de degré 1 , opérant de $\mathcal{L}_q(X)$ dans $\mathcal{L}_{q+1}(X)$. Puisque D est différentiel, D opère aussi de $\mathcal{O}\mathcal{L}_q(0)$ dans $\mathcal{O}\mathcal{L}_{q+1}(0)$.

(d) On définit de même la dérivation $\frac{\partial}{\partial V}$ suivant un vecteur V non nul de X et la dérivation dans la direction d'un hyperplan de X .

(1.10) <u>Pro-applications transposées</u> : <u>Soit</u> A <u>une pro-application de degré</u> p : $\mathcal{O}\mathcal{L}'^q(0) \longrightarrow \mathcal{O}\mathcal{L}'^{q+p}(0)$.

<u>Soit</u> B <u>une pro-application de degré</u> p : $\mathcal{O}\mathcal{L}_{q+p}(0) \longrightarrow \mathcal{O}\mathcal{L}_q(0)$.

<u>On dit que les pro-applications</u> A <u>et</u> B <u>sont transposées l'une de l'autre si, pour toute</u> T <u>de</u> $\mathcal{O}\mathcal{L}'^q(0)$ <u>et pour toute</u> $\tilde{\varphi}$ <u>de</u> $\mathcal{O}\mathcal{L}_{q+p}(0)$, <u>on a</u>

(1.10.1) $$(AT , \tilde{\varphi}) = (T , B\tilde{\varphi}) .$$

<u>Cette formule est appelée formule d'intégration par parties associées au couple</u> (A , B) .

(1.11) <u>Exemples</u>.

(a) Le couple formé par $A = -\operatorname{div}$, où div est défini par (1.9.b) et par $B=D$, où D est définie en (1.9.c).

(b) Dans le cas où X est hilbertien, soit $T = (T_i) \in \mathcal{O}\mathcal{L}'^q(0)$. Pour une surjection s_{ij} , les composantes de T_i et de T_j sont données dans (2.6) de l'exposé 6 ; mais l'on suppose maintenant que la base de X_i est orthonormée. Pour tout i , on pose

$$DT_i = \sum \frac{\partial}{\partial x^{k_0}} T_i^{k_1,\dots,k_q} dx^{k_0} \otimes \dots \otimes dx^{k_q} .$$

Vérifions que les DT_i définissent un protenseur distribution, $(q + 1)$ fois contravariant. Il suffit de vérifier que les coordonnées des DT_i vérifient les relations de cohérence du type (2.6.1). On a

$$DT_j = \sum \frac{\partial}{\partial x^{\ell_0}} T_j^{\ell_1,\dots,\ell_q} dx^{\ell_0} \otimes \dots \otimes dx^{\ell_q} .$$

Donc, pour tout ψ dans $\mathcal{O}\mathcal{L}(0_j)$, on a

$$((DT_j)^{\ell_0\ell_1\dots\ell_q} , \psi) = (\frac{\partial}{\partial x^{\ell_0}} T_j^{\ell_1\dots\ell_q} , \psi) = -(T_j^{\ell_1\dots\ell_q} , \frac{\partial\psi}{\partial x^{\ell_0}}) ,$$

donc, vu (2.6.1) de l'exposé 6 :

$$= - (T_i^{\ell_1,\dots,\ell_q}, (\frac{\partial\psi}{\partial x^{\ell_0}}) \circ s_{ij}) = - (T_i^{\ell_1\dots\ell_q}, \frac{\partial}{\partial x^{\ell_0}} (\psi \circ s_{ij}))$$

$$= (\frac{\partial}{\partial x^{\ell_0}} T_i^{\ell_1\dots\ell_q}, \psi \circ s_{ij}) = ((DT_i)^{\ell_0,\dots,\ell_q}, \psi \circ s_{ij}) .$$

Le protenseur distribution $(DT_i)_i$ est noté DT . Symétriquement, soit $\tilde{\varphi} = \varphi \circ s_i \in \mathcal{D}\mathcal{L}_{q+1}(0)$ avec

$$\varphi = \sum \varphi_{k_0,\dots,k_q} dx^{k_0} \otimes \dots \otimes dx^{k_q} ,$$

les coefficients étant à croissance lente. On pose

$$\operatorname{div} \varphi = \frac{\partial}{\partial x^{k_0}} \varphi_{k_1,\dots,k_q} dx^{k_1} \otimes dx^{k_2} \otimes \dots \otimes dx^{k_q} .$$

Puis

$$\operatorname{div}(\tilde{\varphi}) = \widetilde{\operatorname{div}} \varphi = (\operatorname{div} \varphi) \circ s_i .$$

On peut vérifier que cette définition ne dépend pas de la base X_i de la fonction cylindrique φ . On définit ainsi une pro-application notée div de $\mathcal{D}\mathcal{L}_{q+1}(0)$ dans $\mathcal{D}\mathcal{L}_q(0)$. Les pro-applications D et $-\operatorname{div}$ sont transposées l'une de l'autre.

2. Opérateurs différentiels scalaires.

L'exposé est relatif au cas 2, où 0 est un ouvert cylindrique. On va définir des couples de pro-application en dualité contenant les pro-applications du type dérivation définies jusqu'ici. On utilise les coordonnées décrites au (2.6) de l'exposé 6. On définit dans $\mathcal{D}'(0_i)$ deux opérateurs de dérivations relatifs à la coordonnées x_k de X_i . Dans tout ce qui suit, ces opérateurs vont jouer des rôles symétriques, mais contrairement à ce qui se passe au cas où $\alpha_i \equiv 1$, il convient de bien distinguer l'opérateur ∂_k agissant dans les distributions sur 0_i et l'opérateur ∂_k agissant dans $\mathcal{D}(0_i)$, car

(2.12.1) $$\partial_k(\alpha_i \varphi\, dx) \neq (\partial_k \varphi)\alpha_i\, dx .$$

Nous commençons donc par écrire les formules d'intégration par parties relatives à la dimension finie en utilisant un langage analogue à celui qui vient d'être défini.

On pose

(2.12.2) $$\check{\partial}_k = \frac{\check{\partial}}{\partial x_k} = \alpha_i^{-1} \partial_k \alpha_i .$$

Notons que, pour tout multi-indice $\beta = (\beta_i \dots \beta_n)$, et toute φ dans $\mathcal{D}(0_i)$, on a

(2.12.3) $$(\frac{\check{\partial}}{\partial x})^\beta \varphi = \alpha_i^{-1}(\frac{\partial}{\partial x})^\beta (\alpha_i \varphi) .$$

De plus, ∂_k ne dépend pas de la mesure de Lebesgue sur X_i qui a servi à définir α_i .

(2.13) Formule d'intégration par partie, relative au couple $(\tilde{\partial}_k , - \check{\partial}_k)$: Pour toute h_i dans $\mathcal{C}^\infty(O_i)$ et φ dans $\mathcal{D}(O_i)$, on a

(2.13.1) $$(\partial_k h_i , \varphi) = \int (\partial_k h_i)\varphi \, d\mu_i = - (h_i , \check{\partial}_k \varphi) .$$

On définit donc l'opérateur $\tilde{\partial}_k$ dans $\mathcal{D}'(O_i)$ comme le transposé de l'opérateur $\check{\partial}_k$ de $\mathcal{D}(O_i)$. Comme ∂_k prolonge aux distributions l'opérateur

$$h_i \mu_i \longrightarrow (\partial_k h_i)\mu_i ,$$

on dit que $\tilde{\partial}_k$ est l'opérateur de dérivation de densité par rapport à μ_i , dans la direction x_k . On a

(2.13.2) $$\forall\, T \in \mathcal{D}'(O_i) , \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(O_i) , \quad (\tilde{\partial}_k T , \varphi) = - (T , \check{\partial}_k \varphi) .$$

Si T a une densité φ_i par rapport à μ_i , on écrit encore

(2.13.3) $$\tilde{\partial}_k(T) = (\partial_k \varphi_i)\mu_i .$$

(2.14) Formule d'intégration par parties relatives au couple $(\partial_k , - \partial_k)$: Permutant les rôles de ∂_k et $\check{\partial}_k$ dans (2.13.1), il vient :

$$(\check{\partial}_k h_i , \varphi) = - (h_i , \partial_k \varphi) .$$

Notons que

$$(\check{\partial}_k h_i)\mu_i = (\partial_k(\alpha h_i)) \, dx .$$

On est donc amené à définir l'opérateur ∂_k dans $\mathcal{D}'(O_i)$ comme le transposé de l'opérateur $- \partial_k$ dans $\mathcal{D}(O_i)$. Et l'on retrouve la formule usuelle

(2.14.1) $$\forall\, T \in \mathcal{D}'(O_i) , \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(O_i) , \quad (\partial_k T , \varphi) = - (T , \partial_k , \varphi) .$$

De même si $T = \varphi_i \mu_i$, on écrit encore

(2.14.2) $$\partial_k T = (\check{\partial}_k \varphi)\mu_i .$$

On voit donc que l'opérateur ∂_k de $\mathcal{D}'(O_i)$ prolonge l'opérateur $\check{\partial}_k$ de $\mathcal{D}(O_i)$, alors que l'opérateur ∂_k de $\mathcal{D}'(O_i)$ prolonge l'opérateur ∂_k de $\mathcal{D}(O_i)$, ce qui motive encore les notations (2.13.3) et (2.14.2).

(2.15) Remarque : applications et pro-applications adjointes : on a une antidualité séparante $(T|\varphi)$ entre $\mathcal{D}(O_i)$ et l'ensemble $'\mathcal{D}(O_i)$ des formes antilinéaires continues sur $\mathcal{D}(O_i)$. Au lieu de (2.13.1), on peut écrire :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{-1}} \partial_k h_i | \varphi\right) = \int \frac{1}{\sqrt{-1}} (\partial_k h_i)\overline{\varphi} \, d\mu_i = \left(h_i | \frac{1}{\sqrt{-1}} \check{\partial}_k \varphi\right) .$$

On a donc pour $T \in {}'\mathcal{D}(O_i)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(O_i)$,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{-1}} \partial_k T | \varphi\right) = \left(T | \frac{1}{\sqrt{-1}} \check{\partial}_k \varphi\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{\sqrt{-1}} \partial_k T | \varphi\right) = \left(T , \frac{1}{\sqrt{-1}} \partial_k \varphi\right) .$$

De la même manière si $'\mathcal{T}_0$ est l'ensemble des systèmes cohérents de tenseurs à coefficients antidistributions sur les X_i , une pro-application A de $'\mathcal{T}_0$ de degré nul et une pro-application B de $\mathcal{T}_0$ sont adjointes l'une de l'autre si

$$(2.15.1) \qquad (AT|\varphi) = (T|B\varphi) \; .$$

On commence par donner une formule d'intégration par partie relative à un opérateur différentiel à coefficients constants opérant dans les prodistributions.

(2.16) <u>Formules d'intégration par parties pour</u> $P(1/\sqrt{-1} \times \partial/\partial x)$: Soit P une fonction complexe définie sur $\Xi = \bigcup X_i^!$, dont la restriction à chaque $X_i^!$ est un polynôme P_i . Rapportons X_i à une base, et $X_i^!$ à la base duale ; d'où des coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ dans X_i et $\xi_1, \ldots, \xi_n$ dans $X_i^!$. Avec la notation des multi-indices, on a

$$P_i(\xi) = \sum a_k \xi^k ,$$

la somme étant finie, les a_k étant des nombres complexes. Soit $\overline{P}$ la fonction complexe conjuguée de P . Pour toute $T = (T_i) \in \mathcal{OB}'_{cyl}(0)$ et pour tout i , on note U_i la distribution sur O_i obtenue en faisant agir l'opérateur différentiel $P_i(1/\sqrt{-1} \times \partial/\partial x)$ de symbole $P_i(\xi)$ sur T_i . On définit ainsi une pro-application $(T_i) \longrightarrow (U_i)$ de degré zéro dans $\mathcal{OB}'_{cyl}(0)$. Symétriquement à $\tilde{\varphi} = \varphi \circ s_i$ dans $\mathcal{OB}_{cyl}(0)$ on associe $\tilde{\psi} = \psi \circ s_i$ avec

$$\psi = \overline{P}(\frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{\partial}{\partial x})\varphi \; .$$

On vérifie que l'application $\tilde{\varphi} \longrightarrow \tilde{\psi}$ ne dépend pas de i ; c'est une pro-application de degré zéro notée $\overline{P}(1/\sqrt{-1} \times \partial/\partial x)$ opérant dans $\mathcal{OB}_{cyl}(0)$. Les pro-applications $A = P(1/\sqrt{-1} \times \partial/\partial x)$ et $B = \overline{P}(1/\sqrt{-1} \times \partial/\partial k)$ sont en anti-dualité :

$$(P(\frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{\partial}{\partial x})T|\varphi) = (T|P(\frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{\partial}{\partial x})\varphi) \; .$$

Pour tout i , introduisons les opérateurs suivants

$$\mathcal{OL}'(O_i) \xrightarrow{A_i} \mathcal{OL}'(O_i) \; , \qquad \mathcal{OL}(O_i) \xrightarrow{B_i} \mathcal{OL}(O_i)$$

$$T_i \longmapsto \sum a_k (\frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{\tilde{\partial}}{\partial x})^k T_i \; , \qquad \varphi_i \longmapsto \sum \bar{a}_k (\frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{\check{\partial}}{\partial x})^k \varphi$$

Ils donnent lieu à la formule d'intégration par partie

$$\forall\, T \in \mathcal{OL}'(O_i) \; , \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{OL}(O_i) \; ; \quad (A_i T_i|\varphi_i) = (T_i|B_i \varphi) \; .$$

En considérant la restriction de A_i aux distributions à densité $\mathcal{C}^\infty$, on voit que A_i ne dépend pas de la base choisie. Il en est de même de son adjoint B_i . Lorsque i varie les A_i (resp. B_i) définissent une pro-application :

$$P(\frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{\tilde{\partial}}{\partial x}) \text{ dans } '\mathcal{OL}_{cyl}(0) \; , \quad \text{resp. } \overline{P}(\frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{\check{\partial}}{\partial x}) \text{ dans } \mathcal{OL}_{cyl}(0) \; .$$

On obtient ainsi une seconde formule d'intégration par parties relatives à l'opérateur P

$$(2.16.1) \qquad (P(\frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{\tilde{\partial}}{\partial x})T|\varphi) = (T|P(\frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{\check{\partial}}{\partial x})\varphi)$$

pour toute T de $'\mathcal{OL}_{cyl}(0)$ et toute φ de $\mathcal{OL}_{cyl}(0)$.

(2.17) Exemple de la dérivée dans une direction de vecteur : Au vecteur V non nul de X , on associe la fonction polynôme

$$P(\xi) = \sqrt{-1}\ (V\ ,\ \xi)$$

définie sur X' . Cette fonction est la transformée de Fourier d'une prodistribution bornée sur X notée $\frac{\partial}{\partial V}\delta_0$. Pour fixer les idées, prenons X hilbertien séparable identifié à son dual muni de la promesure normale canonique ν . Soit $e_1\ ,\ \dots\ ,\ e_n$ une base orthonormée du sous-espace X_i de dimension finie. La restriction de P à X_i est le polynôme

$$P_i(x) = \sqrt{-1}\ (a_1\, x_1 + \dots + a_n\, x_n)\ ,\ \text{avec}\ \ a_j = (V\ ,\ e_j)\ .$$

Alors les pro-applications suivantes

(2.17.1) $$A = P\Big(\frac{1}{\sqrt{-1}}\frac{\tilde{\partial}}{\partial x}\Big) = \frac{\tilde{\partial}}{\partial V}\ ,\ \text{et}\ \ B = P\Big(\frac{1}{\sqrt{-1}}\frac{\check{\partial}}{\partial x}\Big) = -\frac{\check{\partial}}{\partial V}$$

sont définies par les systèmes cohérents (A_i) et (B_i)

$$\mathcal{E}'(X_i) \xrightarrow{A_i} \mathcal{E}'(X_i)\ ,\qquad \mathcal{E}(X_i) \longrightarrow \mathcal{E}(X_i)$$

$$T_i \longmapsto \sum a_k \frac{\partial}{\partial x_k} T_i\ ,\qquad \varphi_i \longmapsto \sum a_k\Big(-\frac{\partial}{\partial x_k}\varphi_i + x_k\,\varphi_i\Big)$$

Comme en dimension finie, il est commode d'utiliser une notation différente pour AT , si $T = (T_i)$ est définie par une fonction g de $L^1(\Omega)$. On pose alors

$$\frac{\tilde{\partial}}{\partial V}\ (g\nu) = \Big(\frac{\partial}{\partial V}\, g\Big)\nu\ .$$

On a donc, pour toute g dans $L^1(\Omega)$ et toute φ de $\mathcal{E}_{cyl}(X)$,

(2.17.2) $$\int_\Omega \Big(\frac{\partial}{\partial V}\, g\Big)\varphi\ dP = -\ \Big(g\ ,\ \frac{\partial}{\partial V}\,\varphi\Big)\ .$$

La notation utilisée au premier membre est abusive mais commode. Pour expliciter le second membre de cette relation, on peut utiliser la bonne famille F_u associée à une base orthonormée e_1 , e , ... de X . Si $g\nu = (g_n\,\nu_n)$ et si $\varphi = \varphi_n \circ s_n$, il s'écrit alors

(2.17.3) $$\sum_{k=1}^{n} \int_{X_n} a_k\Big(x_s\,\varphi_n(x) - \frac{\partial}{\partial x_k}\varphi_n(x)\Big)\, g_n(x)\ d\nu_n(x)\ .$$

3. Cas hilbertien.

On rappelle que les hypothèses sont (4.27) de l'exposé 2, (1.1.1) et (1.1.2), (0.2) et (1.3) de l'exposé 4.

L'exposé est relatif au cas 2 du (4.27) de l'exposé 2. On connaît déjà deux couples de pro-applications en dualité

(3.18.1)
$$\mathcal{D}\mathcal{E}'^{\,q}_{cyl}(0) \xrightarrow{D} \mathcal{D}\mathcal{E}'^{\,q+1}_{cyl}(0) \qquad\qquad \mathcal{D}\mathcal{E}'^{\,q+1}_{cyl}(0) \xrightarrow{-\mathrm{div}} \mathcal{D}\mathcal{E}'^{\,q}_{cyl}(0)$$

$$\mathcal{D}\mathcal{E}_{q.cyl}(0) \xleftarrow{-\mathrm{div}} \mathcal{D}\mathcal{E}_{(q+1)cyl}(0) \qquad\qquad \mathcal{D}\mathcal{E}_{(q+1)cyl}(0) \xleftarrow{D} \mathcal{D}\mathcal{E}_{q.cyl}(0)$$

On va définir un nouveau couple de pro-applications en dualité

(3.18.2) $$\mathcal{O}\mathcal{L}'^{q}_{cyl}(0) \xrightarrow{\tilde{D}} \mathcal{O}\mathcal{L}'^{q+1}_{cyl}(0)$$
$$\mathcal{O}\mathcal{L}_{q.cyl}(0) \xleftarrow{-\check{div}} \mathcal{O}\mathcal{L}_{(q+1)cyl}(0)$$

A cet effet, on examine d'abord le cas de la dimension finie, en définissant un couple $(\tilde{D}\ ,\ -\ \check{div})$ d'opérateurs en dualité.

(3.19) <u>Cas de la dimension finie</u> : l'espace X_i est rapporté à une base orthonormée. On définit les opérateurs D et $\check{div}$

(3.19.1) $$\mathcal{O}_q(0_i) \xrightarrow{D} \mathcal{O}_{q+1}(0_i)$$

$$\Sigma_{i_1\ldots i_q} \varphi_{i_1\ldots i_q} dx_{i_1} \otimes\ldots\otimes dx_{i_q} \longmapsto \Sigma_{i_{0_1}\ldots i_q} \partial_{i_0} \varphi_{i_1\ldots i_q} dx_{i_0} \otimes\ldots\otimes dx_{i_q}$$

(3.19.2) $$\mathcal{O}_{q+1}(0_i) \xrightarrow{\check{div}} \mathcal{O}_q(0_i)$$

$$\Sigma_{i_{0_1}\ldots i_q} \psi_{i_0\ldots i_q} dx_{i_0}\otimes\ldots\otimes dx_{i_q} \longmapsto \Sigma_{i_1\ldots i_q} (\Sigma_{i_0} \check{\partial}_{i_0} \psi_{i_0\ldots i_q}) dx_{i_1}\otimes\ldots\otimes dx_{i_q} .$$

Pour toute φ dans $\mathcal{O}_q(0_i)$ et toute ψ dans $\mathcal{O}_{q+1}(0_i)$, on a

(3.19.3) $$(D\varphi\ ,\ \psi) = -\ (\varphi\ ,\ \check{div}\ \psi) .$$

Comme D est indépendant du repère choisi dans X_i , il en est de même de $\check{div}$. On définit l'opérateur $\tilde{D}$: $\mathcal{O}'_q(0_i) \longrightarrow \mathcal{O}'_{q+1}(0_i)$ en transposant l'opérateur $-\ \check{div}$. Si $T \in \mathcal{O}'_q(0_i)$ a une densité par rapport à μ_i , on écrit encore

$$\tilde{D}T = \tilde{D}(\varphi_i\ \mu_i) = (D\varphi_i)\mu_i .$$

D'où la formule d'intégration par parties

(3.19.4) $$(\tilde{D}T\ ,\ \psi) = -\ (T\ ,\ \check{div}\ \psi) .$$

Notons qu'en transposant l'opérateur D , défini par (3.19.1), on retrouve l'opérateur $-$ div : $\mathcal{O}'_{q+1}(0_i) \longrightarrow \mathcal{O}'_q(0_i)$. Le couple $(D\ ,\ -\ div)$ est en dualité.

Permutant les rôles des opérateurs ∂_i et $\check{\partial}_i$ dans les formules (3.19.1) et (3.19.2), on définit les opérateurs $\check{D}$ et div

(3.19.5) $$\mathcal{O}_q(0_i) \xrightarrow{\check{D}} \mathcal{O}_{q+1}(0_i)$$

$$\Sigma_{i_1\ldots i_q} \varphi_{i_1\ldots i_q} dx_{i_1}\otimes\ldots\otimes dx_{i_q} \longrightarrow \Sigma_{i_0 i_1\ldots i_q} \check{\partial}_{i_0} \varphi_{i_1\ldots i_q} dx_{i_0}\otimes\ldots\otimes dx_{i_q}$$

(3.19.6) $$\mathcal{O}_{q+1}(0_i) \xrightarrow{div} \mathcal{O}_q(0_i)$$

$$\Sigma_{i_0\ldots i_q} \psi_{i_0 i_1\ldots i_q} dx_{i_0}\otimes\ldots\otimes dx_{i_q} \longrightarrow \Sigma_{i_1\ldots i_q} (\Sigma_{i_0} \partial_{i_0} \psi_{i_0\ldots i_q}) dx_{i_1}\otimes\ldots\otimes dx_{i_q} .$$

Et la formule (3.19.3) se change en

(3.19.7) $$(\check{D}\varphi\ ,\ \psi) = -\ (\varphi\ ,\ div\ \psi) .$$

Cette formule montre que $\check{D}$ est indépendant des coordonnées. On définit l'opérateur $-\ \widetilde{div}$: $\mathcal{O}'_{q+1}(0_i) \longrightarrow \mathcal{O}'_q(0_i)$ en transposant l'opérateur $\check{D}$; alors qu'en transposant $-$ div , on retrouve l'opérateur $D : \mathcal{D}'_q(0_i) \longrightarrow \mathcal{D}'_{q+1}(0_i)$.

(3.20) Remarque : Les opérateurs D , $\tilde{D}$, $\check{\mathrm{div}}$, $\widetilde{\mathrm{div}}$ peuvent être itérés ; on notera par exemple div_p le composé de p opérateurs égaux à div . Notons que les opérateurs $\check{\mathrm{div}}$ et div , définis par (3.19.2) et (3.19.6) transforment un champ de tenseurs symétriques en un champ de tenseurs symétriques. Les opérateurs D et $\check{D}$, définis par (3.19.1) et (3.19.5), ont encore cette propriété pour $q = 0$, mais ils ne l'ont plus en général pour $q > 0$. En utilisant ces remarques et la base (ε_α) des tenseurs symétriques explicitée au point (2.16) de l'exposé 4, on obtient les formules :

(3.20.1)
$$\mathcal{D}'_p(0_i) \otimes (\bigodot_p X_i) \xrightarrow{\mathrm{div}_p} \mathcal{D}'(0_i)$$
$$\frac{1}{\sqrt{p!}} \Sigma_{|\alpha|=p} (\alpha!)^{1/2}\, T_\alpha\, e_\alpha \longrightarrow \Sigma_{|\alpha|=p} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha T_\alpha$$

(et une formule analogue pour $\widetilde{\mathrm{div}}_p$ en remplaçant $\partial/\partial x$ par $\tilde{\partial}/\partial x$).

(3.20.2)
$$\mathcal{D}'(0_i) \xrightarrow{D^p} \mathcal{D}'(0_i) \otimes (\bigodot_p X_i)$$
$$T \longmapsto \sqrt{p!}\, \Sigma_{|\beta|=p} \frac{1}{\sqrt{\beta!}} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\beta T\right) e_\beta$$

(formule analogue pour $\tilde{D}^p$ en remplaçant $\partial/\partial x$ par $\tilde{\partial}/\partial x$).

(3.21) Cas de la dimension infinie : Soit $T = (T_i)_i$ un u-protenseur distribution de degré q sur l'ouvert cylindrique 0 de l'espace de Hilbert séparable X . Les tenseurs distributions T_i sur les ouverts 0_i des espaces euclidiens X_i vérifient les relations de cohérence qui sont explicitées à l'aide de coordonnées par les relations (2.5.1) et (2.6) de l'exposé 6, s_{ij} étant la surjection canonique de X_i sur X_j . Ceci entraîne que les protenseurs $\tilde{D}T_i$ vérifient des relations de cohérence, et définissent ainsi un nouveau protenseur :

(3.22) Proposition et définition de $\tilde{D}(g\mu) = (Dg)\mu$: Soit $T = (T_i)$ un protenseur distribution q fois contravariant sur 0 tel que, pour tout i , les coefficients de T_i appartiennent à $\mathcal{D}\mathcal{L}'(0_i)$. Alors les $\tilde{D}T_i$ définissent un protenseur distribution $(q + 1)$ fois contravariant noté $\tilde{D}T$, ou encore $(Dg)\mu$ si T a pour densité g par rapport à μ : c'est la dérivée de densité de T . Par itération de la pro-application $\tilde{D}$, on définit $\tilde{D}^2 T$, $\tilde{D}^3 T$, ... , et ces protenseurs sont symétriques si $q = 0$.

Démonstration.

(a) Si $T_i = \Sigma_{k_1 \ldots k_q} T_{i;k_1 \ldots k_q}\, dx_{k_1} \otimes \ldots \otimes dx_{k_q}$, alors
$$\tilde{D}T_i = \Sigma_{k_1 \ldots k_q} \tilde{\partial}_\ell\, T_{i;k_1 \ldots k_q}\, dx_{k_1} \otimes \ldots \otimes dx_{k_q} .$$

Soit s_{ij} la surjection canonique de X_i sur X_j . Alors, pour $\varphi \in \mathcal{D}\mathcal{L}(0_j)$,

$$((\bigotimes_{q+1} s_{ij})\tilde{D}T_i\ ,\ \varphi \circ s_{ij})$$
$$= (\bigotimes_{q+1} s_{ij}) \sum_{\ell;k_1\ldots k_q<n}(\tilde{\partial}_\ell\ T_{i;k_1\ldots k_q}\ ,\ \varphi)dx_\ell \otimes dx_{k_1} \otimes\ldots\otimes dx_{k_q}$$
$$= \sum_{\ell;k_1\ldots k_q} \bigotimes_{q+1} s_{ij})((T_{i;k_1\ldots k_q}\ ,\ \check{\partial}_\ell(\varphi \circ s_{ij}))dx_\ell \otimes dx_{k_1} \otimes\ldots\otimes dx_{k_q})\ .$$

Or, d'après l'hypothèse (1.3), on a

$$\alpha_i(x) = \alpha_i(x'\ ,\ x'') = \alpha_j(x')\ \alpha_k(x'')\ ,$$

où $\alpha_k(x'')$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ des variables $x_{n'+1} \ldots x_n$. Donc

$$= \Sigma(\bigotimes_{q+1} s_{ij})((T_{i;k_1\ldots k_q}\ ,\ \alpha_j(x')\ \alpha_k(x'')\ \partial_\ell[\alpha_j^{-1}\ \alpha_k^{-1}\ \varphi(x')]dx_\ell \otimes dx_{k_1} \otimes\ldots\otimes dx_{k_q}\ .$$

Le terme général de cette somme est nul si l'un des indices ℓ , $k_1 \ldots k_q$ est supérieur à n'

$$= \sum_{\ell;k_1\ldots k_q\leq n'}(T_{i;k_1\ldots k_q}\ ,\ \alpha_j(x')\ \partial_\ell(\alpha_j^{-1}\ \varphi(x')))\ dx_\ell \otimes dx_{k_1} \otimes\ldots\otimes dx_{k_q}$$
$$= \sum_{\ell;k_1\ldots k_q\leq n'}(\tilde{\partial}T_{i;k_1\ldots k_q}\ ,\ \varphi)dx_\ell \otimes dx_{k_1} \otimes \ldots \otimes dx_{k_q} = (\tilde{D}T_j\ ,\ \varphi)\ .$$

On peut compléter cette démonstration par un argument heuristique formel relatif au cas $q = 0$ et où chaque distribution T_i admet une densité $\varphi_i \in \mathcal{C}^1$, par rapport à la mesure $\alpha_i\ dx$. La relation $s_{ij}(T_i) = T_j$ est équivalente à

(3.22.1) $$\varphi_j(x') = \int \varphi_i(x'\ ,\ x'')\ \alpha_k(x'')\ dx''\ .$$

On en déduit, par dérivation par rapport à x_ℓ , si $\ell \leqslant n'$:

(3.22.2) $$\partial_\ell\ \varphi_j(x') = \int \partial_\ell\ \varphi_i(x'\ ,\ x'')\ \alpha_k(x'')\ dx''\ .$$

Donc

$$s_{ij}((\partial_k\ \varphi_j)\mu_i) = \begin{cases}(\partial_k\ \varphi_j)\mu_j & \text{si}\quad 1 \leqslant \ell \leqslant n' \\ 0 & \text{si}\quad n' < \ell \leqslant n\end{cases}$$

ce qui montre que la collection des $\tilde{D}T_i$ vérifie les relations de cohérence des protenseurs distributions une fois contravariants.

(3.23) <u>Définition de l'opérateur</u> $\check{\mathrm{div}}$: Lorsque i varie, on voit que les opérateurs $\check{\mathrm{div}}$ de $\mathcal{DL}_{q+1}(0_i)$ dans $\mathcal{DL}_q(0_i)$ sont cohérents et définissent une pro-application notée $\check{\mathrm{div}}$ de $\mathcal{DL}_{cyl}(0\ ,\ q + 1)$ dans $\mathcal{DL}_{cyl}(0\ ,\ q)$.

(3.24) <u>Conclusion</u> : <u>De ces définitions et de la formule d'intégration par parties</u> (3.19.4) <u>relative au couple</u> $(\tilde{D}\ ,\ -\ \check{\mathrm{div}})$ <u>en dimension finie, il résulte que le couple des pro-applications</u> $(\tilde{D}\ ,\ -\ \check{\mathrm{div}})$ <u>est en dualité</u>.

<u>Ceci entraîne que, pour tout</u> $p \geqslant 0$, <u>tout</u> $T \in \mathcal{DL}'_{cyl}(0)$ <u>et toute</u> φ <u>de</u> $\mathcal{DL}_{cyl}(0\ ,\ p)$, <u>on a</u>

(3.24.1) $$(\tilde{D}^p\ T\ ,\ \tilde{\varphi}) = (-\ 1)^p\ (T\ ,\ \check{\mathrm{div}}_p\ \varphi)\ .$$

(3.25) <u>Dérivation dans une direction d'hyperplan</u> : Soit $X = \underset{\sim}{R}_t \otimes \ell^2$. Si e_1

est le vecteur unitaire de $\underset{\sim}{R}$, le point générique de X s'écrit $y = (t , x)$ avec t réel et $x \in \ell^2$. On prend la bonne famille F_t décrite en (2.13.c) de l'exposé 2, et l'on note D_x l'opérateur de dérivation dans la direction d'hyperplan orthogonale à e_1 . On définit de même l'opérateur div^x dans l'espace des t-protenseurs distribution. Tous les raisonnements du §2 peuvent être repris en remplaçant les opérateurs (3.18.2) par les opérateurs

$$\text{(3.25.1)} \qquad \begin{array}{c} \mathcal{QL}'^{q}_{cyl}(0) \xrightarrow{D_x} \mathcal{QL}'^{q+1}_{cyl}(0) \\ \mathcal{QL}_{q.cyl}(0) \xleftarrow{-\check{\operatorname{div}}^x} \mathcal{QL}_{(q+1)cyl}(0) \end{array}$$

d'où de nouvelles formules d'intégration par parties.

4. Calcul différentiel et dérivation au sens des prodistributions.

Toute fonction numérique g intégrable sur Ω définit une prodistribution $g=g\mu$ sur X ; donc $g\mu$ admet des dérivées de densité Dg , $D^2 g$, ... au sens de la théorie des prodistributions. Ceci a lieu même si g n'est pas dérivable au sens du calcul différentiel de Fréchet, de Gateaux ou de L. GROSS (*) . On définit d'abord un espace $B^k(\Omega)$ de (classes d'équivalence de) fonctions numériques sur Ω dont les restrictions à tout sous-espace X_i de dimension finie sont k fois dérivables en un certain sens. Cet espace contient l'espace, défini par L. GROSS, des fonctions k fois dérivables au sens de Fréchet sur Ω . Puis on montre dans la proposition (3.19.4) que, pour $g \in B^k(\Omega)$ et $0 \leqslant \ell \leqslant k$, la dérivée usuelle $D^\ell g$ de g coïncide avec la dérivée $D^\ell g$ au sens de la théorie des prodistributions. Nous avons donc obtenu un prolongement du calcul différentiel usuel. L'exposé est relatif au cas où $0 = X$; les hypothèses sont les mêmes qu'au paragraphe précédent.

(4.26) Notations et conventions.

(a) Si Y est un espace de Banach séparable complexe, on note $M^k(Y)$ (resp. $M^k_s(Y)$) l'espace de Banach des formes k-linéaires continues (resp. k-linéaires continues et symétriques) sur Y .

(b) Soit $k \geqslant 0$ et $X_i \in \pi_u(X)$. On note 0^k_i la surjection de $M^k_s(X^c)$ sur $\bigodot_\ell (X_i)^c$ définie par restriction à X_i des formes k-linéaires continues symétriques sur X^c .

(c) On introduit, comme dans la démonstration du lemme (1.3) de l'exposé 4 l'ensemble I' des i de I tels que $A_i^\perp \subset \Omega'$; et dans tout le §4, on remplace la bonne famille $\{A_i \ ; \ i \in I\}$ par la bonne famille $F_{u'} = \{A_i \ ; \ i \in I'\}$. Pour tout $i \in I'$, l'orthogonal Ω_i dans Ω du sous-espace $A_i^\perp$ de Ω' est l'adhérence de $X_i^\perp = A_i$ dans Ω . Les sous-espaces X_i et Ω_i de Ω sont supplémentaires topologiques. D'où une identification de Ω au produit $X_i \times \Omega_i$, f_i coïncidant avec

(*) GROSS (L.). - Potential theory on Hilbert space, J. funct, analysis, t. 1, 1967, p. 123-181.

la projection canonique de Ω sur X_i .

(d) Par hypothèse, on a $\mu = \mu_i \otimes u_i^!$, où $\mu_i^!$ est une promesure sur $X_i^\perp$. Si λ_i est l'injection de $X_i^\perp$ dans P_i , alors $P_i = \lambda_i(\mu_i^!)$ est une mesure de Radon sur la tribu borélienne faible de Ω_i . Identifiant, comme dans tout le §4, l'espace Ω au produit $X_i \times \Omega_i$, on a $P = \mu_i \otimes P_i^!$.

(4.27) Définition de $B^k(\Omega)$ pour tout entier $k > 0$: On note $B^0(\Omega , Y)$ l'espace des classes d'application Lusin-mesurables essentiellement bornées de Ω dans Y . On note $B^k(\Omega)$ l'espace des $B^0(\Omega , C)$ telles que, pour tout $\ell \in \{1 , \dots , k\}$, il existe g^ℓ dans $B^0(\Omega , M_s^\ell(X^c))$ ayant la propriété : Pour tout X_i , identifiant Ω à $X_i \times \Omega_i$, on a, pour presque tout ω_i dans Ω_i ,

(4.27.1) $$D^\ell g(. , \omega_i) = \sigma_i^\ell \circ (g^\ell(. , \omega_i))$$

au sens des distributions sur X_i .

Cette condition signifie que la restriction de g à tout sous-espace de dimension finie de X a des dérivées mesurables bornées, les dérivées d'ordre ℓ relatives à tous les sous-espaces provenant d'une même fonction g^ℓ . La condition est satisfaite si g est k fois X-différentiable au sens de GROSS, les dérivées étant supposées mesurables bornées.

Plus généralement, soit p entier positif. On note $M_s^\ell(X , Y)$ l'espace de Banach des applications ℓ-linéaires symétriques continues de X dans un $Y = \hat{\odot}_P(X^c)$. Soit θ_i^ℓ l'opérateur de $M_s^\ell(X , Y)$ dans $M_s^\ell(X_i , \odot_p X_i^c)$ obtenu en composant σ_i^ℓ avec la surjection canonique de Y sur $\odot_p X_i^c$. On définit $B^k(\Omega, p)$ comme l'espace des g de $B^0(\Omega , Y)$ tels qu'il existe pour $\ell = 1 , \dots , k$, une fonction $g^\ell \in B^0(\Omega , M_s^\ell(X , Y))$ vérifiant presque sûrement

(4.27.2) $$\forall\ i , \quad D^\ell g(. , \omega_i) = \theta_i^\ell(g^\ell(. , \omega_i)) .$$

La proposition suivante montre que les fonctions g^ℓ sont les dérivées au sens des prodistributions de la fonction g .

(4.28) PROPOSITION. - Soient g dans $B^k(\Omega)$, et les fonctions $g^1 \dots g^k$ définies dans (3.20.1). Alors $D^\ell g = g^\ell$ au sens des prodistributions, pour $\ell = 1 , 2 \dots k$.

Démonstration : La promesure $g\mu$ est représentée par la collection des mesures $\varphi_i\, \mu_i$ sur les X_i , où $\varphi_i = \mathcal{M}(g|f_i)$. Comme f_i est la première projection canonique de $\Omega = X_i \times \Omega_i$ sur X_i , et comme P est une mesure produit d'après (4.26), $\varphi_i(x)$ se déduit de $g(x)$ "par intégration sur la fibre verticale $f_i^{-1}(x)$ ", c'est-à-dire que, pour presque tout x de X_i , on a

(4.28.1) $$\varphi_i(x) = \int_{\Omega_i} g(x , \omega_i)\, dP_i(\omega_i) .$$

Il s'agit de montrer que $D^\ell g$ est égal au protenseur distribution associé à g^ℓ par le procédé décrit en (1.10) de l'exposé 4. Vu la définition (3.18.2) de Dg , il s'agit de montrer que, pour tout i et pour presque tout x de X_i,

$$(4.28.2) \qquad (\tilde{D}^{\ell}(\varphi_i\, \mu_i))(x) = \int_{\Omega_i} \sigma_i^{\ell} \circ g^{\ell}(x\,,\, \omega_i)\; dP_i(\omega_i)\;.$$

Or (3.22.1) entraîne que, pour tout ψ de $\mathcal{D}_{\ell}(X_i)$,

$$\begin{aligned}(\tilde{D}^{\ell}(\varphi_i\, \mu_i)\,,\, \psi) &= (-1)^{\ell}\, (\varphi_i\, \mu_i\,,\, \check{\operatorname{div}}_{\ell}\, \psi) \\ &= (-1)^{\ell} \iint g(x\,,\, \omega_i)(\check{\operatorname{div}}_{\ell}\, \psi)(x)\; d\mu_i(x)\; dP_i(\omega_i) \\ &= (-1)^{\ell} \int dP_i(\omega_i) \int g(x\,,\, \omega)(\check{\operatorname{div}}_{\ell}\, \psi)(x)\; d\mu_i(x)\;.\end{aligned}$$

Comme $g \in B^k(\Omega)$, on a, en tenant compte de (3.20.2),

$$\begin{aligned}&= \int dP_i(\omega_i) \int \sigma_i^{\ell} \circ (g^{\ell}(x\,,\, \omega))\; \psi(x)\; d\mu_i(x) \\ &= (\int \sigma_i^{\ell} \circ g^{\ell}(x\,,\, \omega)\; dP_i(\omega_i)\,,\, \psi)\;.\end{aligned}$$

Comme ces relations sont vraies pour tout ψ, on a montré (4.28.2).

(4.29) <u>Exemples de fonctions de la classe</u> $B^k(\Omega)$:

(a) Soit $\tilde{\varphi} = \varphi \circ s_i$ dans $\mathcal{B}^k_{cyl}(X)$. Alors la classe $\varphi \circ f_i$ appartient à $B^k(\Omega)$, et ne dépend pas de la base choisie X_i pour la fonction cylindrique $\tilde{\varphi}$. On a ainsi construit une injection de $\mathcal{B}^k_{cyl}(X)$ dans $B^k(\Omega)$.

(b) Toute fonction g sur Ω qui est k fois dérivable au sens de Fréchet, et dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre k sont bornées et Lusin-mesurables, appartient à $B^k(\Omega)$.

(4.30) <u>Remarque</u>.

(a) Dans le cas (4.29.b), supposons que ℓ se factorise par un opérateur de Hilbert-Schmidt. Soit $1 \leqslant j \leqslant k$. Alors $D^j\, g$ est Lusin-mesurable et bornée à valeurs dans $F = \bigodot_j X^c$. En effet, à tout $m \in M^j(\Omega)$ associons la forme multilinéaire m' ainsi définie.

$$X \times \dots \times X \xrightarrow{m'} \underset{\sim}{C}$$

$$x_1 \dots x_j \longmapsto m(\ell x_1\,,\, \dots\,,\, \ell x_j)$$

Si $e_1\,,\, e_2\,,\, \dots$ est une base orthonormée de X, on a

$$C = \sum \|\ell(e_k)\|^2 < \infty\;.$$

Posons $\ell(k) = \ell(e_k)$. Alors

$$\sum_{i_1 \dots i_j} \|m'(e_{i_1}\,,\, \dots\,,\, e_{i_j})\|^2 \leqslant \|m\|^2 \sum_{i_1, \dots, i_j} \ell(i_1)^2 \dots \ell(i_j)^2 = C^{2j} \|m\|^2\;.$$

Donc l'application $\alpha : m \longrightarrow m'$ est linéaire continue de $M^j(\Omega)$ dans F. Donc, en composant avec α l'application Lusin-mesurable bornée

$$D^j\, g : \Omega \longrightarrow M^j(\Omega)\,,$$

on obtient que $\tilde{D}^j\, g$ est Lusin-mesurable bornée de Ω à valeurs dans F.

(b) On a ainsi une définition générale de la dérivée de densité dans le cas hilbertien. Cette théorie peut-être utilisée pour définir la dérivée dans le cas non hilbertien. Plus précisément, soit X un e. l. c. s. réel quasicomplet, et soit H un sous-espace hilbertien séparable dense de X, l'injection j de H dans X étant continue. Soit ρ l'isomorphisme de Riess de H sur H'. Alors l'opérateur symétrique positif $C = j\rho^{-1} j'$ de X' vers X définit la forme quadratique $(C\xi , \xi)$ sur X'. Supposons que la promesure P sur X de transformée de Fourier $\exp(- \frac{1}{2} (C\xi , \xi))$ soit une mesure sur la tribu borélienne faible de X.

D'après le théorème de Minlos, il en est par exemple ainsi quand il existe sur X' une topologie d'espace nucléaire, compatible avec la dualité avec X. Alors toute g intégrable sur X est caractérisée par la promesure g^P sur H. Par conséquent, on peut dériver g au sens des prodistributions sur H.

BIBLIOGRAPHIE

[1] KRÉE (Paul). - Extension du calcul différentiel en dimension infinie, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 280, 1975, Série A, p. 7-9.

Paul KRÉE
Tour Mexico, B. P. 1325
65 rue du Javelot
75645 PARIS CEDEX 13