SÉMINAIRE DE PHILOSOPHIE ET MATHÉMATIQUES

DIDIER NORDON

Mathématiques, forme littéraire

Séminaire de Philosophie et Mathématiques, 1996, fascicule 4
« Mathématique, forme littéraire », , p. 1-21
<http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1996___4_A1_0>

SM S PHILO-MATH
Didier Nordon
Université Bordeaux

Mathématiques, forme littéraire

1. Au-delà des mots

Ce que les mathématiciens contemporains appellent "nombre complexe", Descartes l'appelait "nombre imaginaire", et les mathématiciens du XVIè siècle, "nombre impossible". Ces termes successifs désignent-ils un objet fixe et immuable, que les hommes réussiraient à cerner de plus en plus près? Je ne crois pas: les termes "complexe", "imaginaire", "impossible", sont trop expressifs pour qu'on soit en droit de négliger leur sens. Ils modifient l'objet qu'ils désignent, exerçant ainsi une influence littéraire sur les mathématiques. Quant à nous figurer que nous possédons désormais le bon concept, désigné par un terme fixé à jamais, ce serait aussi absurde que de croire à la fin de l'histoire.

L'immatérialité des objets mathématiques les fait plus dépendre de la langue que les concepts des autres sciences. Les mathématiques ne sont pas tout entières tendues vers la réalité matérielle comme référent ultime: une démonstration est un discours; ce qui le rend convaincant, est qu'il soit conforme aux lois du discours (mathématique), non qu'il soit étayé par des expériences. Certes, les mathématiques sont susceptibles d'applications. Mais cela vient après. L'oeuvre du mathématicien "pur" est un discours. Si on avait montré que l'univers est euclidien, les géométries non euclidiennes auraient perdu plus d'intérêt aux yeux du physicien qu'à ceux du mathématicien. Même privés de référent dans la réalité, les mots des géométries non euclidiennes auraient gardé un sens pour le mathématicien, ce qui lui aurait permis de continuer à manier les objets qu'ils désignent. En cela, on peut dire que la langue est un référent pour le mathématicien. Certaines erreurs par artefact sont des erreurs de langue (voir annexe 1).

Un mot n'est jamais vierge. Même s'il désigne un objet nouveau et a été inventé pour lui, il ne sort jamais de rien, a toujours des connotations, des origines. On ne peut pas désigner sans, en même temps, qualifier. Les mots influent donc sur la représentation que nous avons des objets mathématiques qu'ils désignent. Mais ils font plus encore: ces objets étant pris dans la langue, les mots sont partie intégrante d'eux, ils influent sur leur propre nature. Un nombre complexe n'est pas un nombre impossible. Pas seulement à cause de son utilisation en physique, qui lui donne une réalité impensable au XVIè siècle, mais aussi à cause du sens des mots. Les expressions nombre impossible et nombre complexe ne désignent pas le même objet.

Rien de plus personnel que le rapport que chacun de nous entretient aux mots de la langue. Si bien que la nature des objets mathématiques dépend de la subjectivité de celui qui les manie. Je ne crois donc pas que les objets mathématiques aient une essence. S'ils en avaient une, elle ne serait pas la même pour moi, pour un Grec ancien, pour un physicien, pour un "nul en maths", pour un mathématicien de premier plan...

Frêles et forts comme les mots, les objets mathématiques ont le même genre d'existence que, disons, le personnage de Jean Valjean. Ce sont des mots, qui induisent des représentations, des affects, des questions, des exigences, etc. Jean Valjean est bien plus que l'ensemble des signes utilisés par Hugo pour le décrire; sa force ne vient pourtant pas de quelque fidélité à une réalité dont il serait issu. De même, les objets mathématiques sont plus que l'ensemble des signes utilisés par les mathématiciens. On ne peut pas les manipuler n'importe comment - ce qui ne signifie pas qu'ils soient astreints à exprimer objectivement quoi que ce soit de réel: Hugo non plus n'a pas créé Jean Valjean n'importe comment. Les personnages de roman ont leur autonomie, et imposent leur logique à l'auteur.

S'interroger sur la nature des objets mathématiques, se demander si le mathématicien crée ou découvre, c'est finalement se demander ce qu'il y a au-delà des mots; c'est se demander dans quelle mesure un auteur choisit ses mots, et dans quelle mesure ce sont eux qui lui imposent leur sens, leur réalité. Autant chercher l'origine du langage, ou son essence! Questions insolubles, ne serait-ce que parce que nos réponses sont elles-mêmes prises dans le langage.

A examiner ici les mathématiques comme une forme littéraire, je ne prétends pas épuiser leur sens. Il s'agit d'un point de vue, d'où certains aspects sont bien visibles, mais d'où certains autres restent cachés, comme les questions portant sur la vérité, ou sur la démonstration. D'autre part, certaines des remarques qui vont suivre, prises isolément, sont susceptibles de s'appliquer aussi aux sciences expérimentales. Je crois cependant que, prises dans leur ensemble, elles sont spécifiques des mathématiques.

Forme littéraire, donc. Une question naturelle est alors de se demander ce que signifie "écrire bien". Or cette question est liée à la nature des objets mathématiques. Une conception banale veut en effet qu'écrire bien, ce soit écrire exactement. Cela sous-entend la possibilité de réaliser une bonne adéquation entre, d'une part, les objets ou nos sensations et, d'autre part, les mots. Une telle conception est en général discutable, mais est carrément douteuse dans le cas des mathématiques. Chercher une adéquation entre le monde des objets mathématiques et celui des mots qui les désignent est vain: ils sont trop imbriqués les uns dans les autres pour que cela ait un sens. Il n'empêche que, non moins banalement, les mathématiques passent pour la discipline par excellence où on peut écrire exactement - "écrire bien". Bref, réfléchir à ce que signifie "écrire bien" va nous permettre de réfléchir à la nature des mathématiques.

Auparavant, un point de vocabulaire. Il peut paraître paradoxal que je parle d'objet mathématique, alors que ma thèse est que, particulièrement en mathématiques, il n'y a pas de monde des objets séparé du monde des mots. Le paradoxe provient du fait, effectivement curieux, que le mot "objet" est assez fluctuant. Les termes "être mathématique", "concept", sont beaucoup plus fixes: ils évoquent l'idée d'essences éternelles, invariables. Ici, donc, l'expression "objet mathématique" désigne "ce qui est objet de l'attention des mathématiciens". Et on sait combien ce qui est objet d'attention varie selon le contexte historique ou social.

2. Ecrire bien

"Ecrire bien" est une expression dont le sens littéral est à l'opposé du sens que leur donnent la plupart des usages courants.

Sens littéral, d'abord. Ce que l'auteur exprime coïncide avec ce qu'il "veut dire", et ce qu'il veut dire coïncide avec "ce qu'il y a à dire". L'idée sous-jacente à "écrire bien" est statique, avec son corollaire: des règles stéréotypées pour y parvenir (l'interdit de la répétition en français, par exemple). Le "bien" existe, l'auteur y est parvenu.

Transparence, donc: il y a une réalité, et l'auteur l'a atteinte sans que son style s'interpose. Bien!

En fait, l'emploi habituel de l'expression "il écrit bien", appliquée à un écrivain, est à peu près contraire à ce sens littéral. On ne se soucie guère du respect par lui des règles formelles, ni de l'adéquation entre ce qu'il écrit et ce qu'il a voulu exprimer. On n'exige même pas nécessairement qu'il soit clair: des styles allusifs, ou poétiques, ou foisonnants, par exemple, peuvent être appréciés. L'expression "Il écrit bien" est employée dans un sens subjectif, quasiment synonyme de "J'ai plaisir à le lire". Il écrit bien? C'est un magicien, qui a l'art de faire dire aux mots autre chose que ce qu'ils disent d'habitude. Pas trop cependant, car il serait alors enfermé dans son monde. Les mots sont une réalité, qui donne du plaisir au lecteur lorsqu'elle est juste un peu décalée par rapport à la réalité qu'il percevait jusque-là. Elle la modifie donc. Déséquilibre.

Ecrire bien, *stricto sensu*, ce serait réussir à tout contrôler de ce qu'on écrit. Etre maître. Mais, dans l'usage habituel, "écrire bien" signifie: mettre en jeu une multiplicité de sens, ce qui permet à la subjectivité du lecteur de se faire une place. L'auteur écrit bien quand il ne contrôle pas tout: il n'écrit donc pas bien! Il est dépassé par ce qu'il écrit. Puissance de l'écrivain: il met en jeu plus que ce que ses écrits signifient au pied de la lettre. Limite de l'écrivain: il ne devine pas quelles harmoniques il induit chez le lecteur. Un texte bien écrit mène toujours ailleurs.

Ne mythifions pas ce talent, toutefois. "Ecrire bien" n'est pas une qualité majeure. Dire, par exemple, "Shakespeare écrit bien" sonnerait un peu ridicule. Il est trop puissant, il n'a que faire du bien écrire. Il crée des mondes, son registre est le beau, le terrible. Ecrire bien est plutôt dans le registre du joli, du plaisir - ce qui n'est déjà pas si mal!

Un écrivain, donc, écrit bien (dans l'emploi usuel de cette expression) lorsque sa langue s'interpose entre le monde et lui, qu'elle se fait perceptible, surprenante, sert sa personnalité. Eventuellement, il prend des libertés avec la langue, de façon à bien faire sentir sa présence à lui. Tout cela, au risque de la gratuité lorsqu'il écrit bien, mais n'a rien à dire. Jeu avec la langue pour le jeu avec la langue.

Bien que plus rarement qu'en littérature, le critère du "bien écrire" est aussi appliqué en sciences. De quelle manière? Ecartons un instant les mathématiques. En sciences, l'expression "écrire bien" est utilisée au sens littéral. Quoiqu'on sache que l'observation et l'observateur interagissent, l'idéal du style scientifique reste celui de clarté et de rigueur, garantes de non-ambiguïté, d'objectivité. On écrit comme si une séparation parfaite entre l'objet et celui qui le décrit était possible. La langue scientifique doit être un instrument invisible, qui sert à décrire le monde, voire le manier, sans laisser, elle, aucune trace dessus. Le critère du bien écrire scientifique coïncide avec son but: la transparence de la langue. La langue doit refléter la complexité du réel, mais ne surtout pas y ajouter sa propre complexité. Le monde matériel d'une part, le monde des mots d'autre part. Et, entre les deux, une adéquation qui permet d'écrire de façon univoque.

Tantôt subjective, donc, l'expression "écrire bien" s'applique à l'écrivain capable de manifester sa présence au sein de la langue et, par là, de plaire; les principaux ennemis sont la platitude et la monotonie. Tantôt objective, elle désigne l'aptitude du scientifique à s'effacer et à effacer la langue devant la description d'un phénomène naturel; les principaux ennemis sont la confusion et l'obscurité.

Mais les mathématiques sont un domaine où on doit écrire bien dans les deux acceptions, contradictoires, de l'expression! Les mathématiciens sont connus pour leur art de réutiliser des mots usuels en leur donnant un sens savant très abstrait. Chose étonnante, ce nouveau sens garde presque toujours "quelque chose" à voir avec le sens usuel, même si cela n'est perceptible qu'aux spécialistes. Pour nommer un nouvel objet, donc, le mathématicien joue avec le sens d'un mot usuel mais, en général, évite de trahir ce sens. Un tel jeu, parfois fort libre et personnel, peut même, éventuellement, aider à l'intuition. Autrement dit, la langue intervient de façon créatrice dans l'élaboration du nouvel objet. Bien entendu, une fois nommé, l'objet doit être manié avec toute la rigueur mathématique. Jamais le jeu sur le sens ne doit tenir lieu de démonstration. Bref, le mathématicien doit être capable de bien écrire autant par son goût et sa finesse dans le choix des mots, que par son aptitude à manier ces mots comme s'ils n'étaient que des désignations inertes d'objets. Ainsi, les mathématiques tiennent autant de la littérature que de la science...

Enfin, un détail me semble assez révélateur d'une certaine proximité entre la réflexion sur "écrire bien" et celle sur les mathématiques. Se demander ce que signifie "écrire bien" ne paraît légitime que de la part d'un auteur qui écrit bien. De même, pour fonder la logique mathématique, il faut déjà posséder les règles de la logique. Le risque couru par l'écrivain de prendre, plus ou moins inconsciemment, comme critères du bien écrire les qualités qu'il se prête, a son analogue dans le risque couru par le logicien de prendre pour universels des principes logiques inhérents à sa langue.

3. Mathématiques, forme littéraire

Le schéma habituel pour décrire l'évolution des sciences de la nature est la falsifiabilité, ou réfutabilité: une loi n'est pas vraie mais, tout au plus, admise provisoirement. Son statut ne se maintient que pour autant qu'on ne découvre pas de phénomène la contredisant. La loi survit sous cette menace permanente. S'il arrive que, effectivement, on découvre un phénomène qui la contredit, elle est alors considérée comme fausse, donc rejetée.

On peut discuter ce schéma, mais sa pertinence n'est sûrement pas nulle. En mathématiques, par contre, il est exceptionnel qu'un résultat soit réfuté. Bien sûr, il arrive que des erreurs soient décelées. En général, pourtant, ce n'est pas cela qui, le cas échéant, voue au rebut un théorème, mais le fait qu'il cesse d'intéresser - soit qu'on trouve un résultat plus fin, soit que les goûts changent. Les théorèmes sont moins souvent démentis, que délaissés suite à l'évolution des mathématiques. De même, les oeuvres littéraires ne risquent pas de devenir "fausses", mais de perdre leur attrait. La réfutabilité est un critère presque aussi peu pertinent en mathématiques qu'en littérature. Les mathématiques sont une forme littéraire, en ce sens qu'elles sont un ensemble d'écrits dans lesquels les questions de goût et de style jouent un rôle décisif.

Le théorème de Pythagore n'est ni plus ni moins vrai pour nous que pour les Grecs. Mais, inséré dans un édifice mathématique et une vision du monde qui ont beaucoup changé, il n'a plus le même sens (entre autres, il a perdu son aspect métaphysique). Si, à l'inverse du théorème de Pythagore, nous ignorons aujourd'hui les théorèmes de géométrie du triangle qui ont fait quelques riches heures du XIXè siècle, ce n'est pas qu'ils aient été réfutés. C'est qu'ils ont cessé de plaire. Peut-être reviendront-ils à la mode. De façon analogue, chaque époque réinterprète les oeuvres littéraires. Le personnage de Jean Valjean n'est plus celui qu'il était du temps de Victor Hugo; notre lecture n'en est pas celle du XIXè siècle. A supposer que le XXIè siècle oublie Victor Hugo, cela ne signifiera pas que Jean Valjean aura été réfuté, ou qu'il sera devenu faux!

Plus proche en cela de l'écrivain que du physicien, le mathématicien est plus soucieux de *son* monde, que *du* monde. Cela ne suffit pas à le couper du monde: bon gré mal gré, les mathématiques gardent trace des conditions dans lesquelles elles sont créées. Reste que la fidélité à la réalité matérielle n'est pas leur souci majeur. "Un mathématicien ne travaille que sur sa propre réalité mathématique" note Hardy (*Apologie d'un mathématicien*, XXIV): le nombre 317 est premier et ce fait-là est plus "réel" que la matière, car il ne dépend ni de nos sensations, ni de nos opinions, ni de la constitution de l'esprit humain. Alors que la structure intime de la matière est inaccessible. Pas plus les philosophes que les physiciens n'ont jamais donné de description satisfaisante de ce qu'est la "réalité physique".

Hardy me convainc moins lorsque, toujours dans son *Apologie* (VIII), il affirme que la littérature d'une époque est vouée à disparaître, mais pas les idées mathématiques. Au contraire, parce qu'elles créent des mondes susceptibles de garder de la valeur indépendamment de leur fidélité au réel, les oeuvres mathématiques et les oeuvres littéraires subissent le même genre de vieillissement. Ce qui les fait vieillir, c'est - outre la langue dans laquelle elles sont écrites - leur absence d'écho en nous si le monde qu'elles créent nous est devenu trop étranger. Par contre, ce qui fait vieillir l'oeuvre d'un physicien, c'est qu'elle apparaisse comme ne rendant pas compte du réel.

Mais, bien entendu, si la littérature et les mathématiques vieillissent de la même façon, alors elles sont également immortelles de la même façon! La littérature, dit-on, nous touche à travers les siècles et les continents parce qu'elle raconte toujours les mêmes histoires: seul le style change... Un chagrin d'amour n'est pas le même, raconté par un poète persan du XVIè siècle ou par un romancier français du XXè. Pourtant, c'est l'éternel chagrin. Les mathématiques, elles aussi, racontent toujours les mêmes histoires: formes, nombres, infinis... Mais, d'un siècle à l'autre, ces histoires diffèrent quant au style, donc quant au fond. Par exemple, sous l'influence de l'analyse non standard et de l'informatique, les mots "nombre" et "infini" semblent en train de changer de sens. Les mathématiques continuent donc de raconter des histoires de nombres, mais ces histoires n'ont plus la même signification. Elles ne réfèrent plus au même contexte, ne sollicitent pas le même imaginaire.

En mathématiques, comme en littérature, le goût oscille selon l'époque entre réalisme et refus du réalisme. Bourbaki, par exemple, s'intéressait plus aux structures abstraites qu'à la recherche d'une adéquation au réel. Et sans doute n'aurait-il pas pu imprimer aux mathématiques une tendance aussi épurée qu'il a fait, s'il n'avait possédé l'art de désigner les notions les plus abstraites au moyen des mots les plus concrets. Mots empruntés au langage courant, solides, familiers, somme toute rassurants, et néanmoins adaptés à la situation mathématique ultra-abstraite considérée, donnant parfois même l'impression d'entretenir avec elle un rapport essentiel, intime. Tel était le prodige! La langue de Bourbaki n'était certes pas inerte, pas transparente. Ses ouvrages réussissaient ainsi à en dire à la fois plus et moins. Talent littéraire indiscutable, qui a fait de lui un créateur d'univers.

Contrepartie de ce talent, Bourbaki semble s'être parfois laissé prendre à ses propres mots, tenant pour réel ce qui, finalement, n'était que bien écrit. Au point que certains chercheurs dans les années 1960 - plus bourbakistes que Bourbaki! - partaient d'un système d'axiomes arbitraires, et en développaient les conséquences de façon purement formelle, abstraite, interminable. Sans motivation, non seulement tirée du monde physique, certes!, mais pas même tirée des problèmes internes aux mathématiques. Préciosité. Les théorèmes produits par ces écoles n'ont pas été réfutés. Simplement, on ne s'y intéresse plus. Ils paraissent désormais "vides" et, en cela, mal écrits: ils n'ont plus aucune résonance avec le plaisir du lecteur. (N'oublions pas qu'un mathématicien a plaisir à lire des mathématiques, et attache beaucoup d'importance à l'esthétique!)

Aujourd'hui, les mathématiques "appliquées" semblent s'être renforcées contre les "pures". L'attention portée aux problèmes issus de la physique a augmenté. Mais rien n'exclut, bien sûr, que les mathématiques traversent à l'avenir une nouvelle période de splendide isolement. Et ce rapport variable avec le réalisme - tantôt recherché, tantôt fui - les différencie des sciences de la nature, pour lesquelles être réalistes est nécessaire. (Cela ne signifie pas que leur conception du réalisme reste invariable au cours du temps, car la notion de réalisme est complexe.)

Le plaisir du texte compte moins en sciences de la nature qu'en mathématiques, l'adéquation au réel compte plus. Si tel théorème ne me plaît pas, je puis en général m'arranger à n'avoir jamais affaire à lui - sauf si j'ai la malchance d'être écolier, et qu'il soit au programme! Mais si une loi de physique ne me plaît pas, ce n'est pas cela qui l'empêchera, le cas échéant, de s'appliquer à moi!

Non que les sciences de la nature soient étrangères à tout plaisir littéraire. Une phrase comme "Rien ne se perd, rien ne se crée, tout se transforme" les aurait peut-être moins marquées si elle n'avait été aussi belle. Je crois cependant les questions sur la langue plus décisives en mathématiques qu'en sciences de la nature. Ces dernières doivent réfléchir aux mots qu'elles emploient, mais la structure de la langue ne semble pas un problème fondamental; elle ne leur tend guère de pièges. Alors que les mathématiques ne doivent pas réfléchir seulement aux mots, mais aussi à la langue, parce que la langue induit une logique implicite qui peut causer des difficultés, voire des erreurs. Nombre de paradoxes logiques sont des paradoxes dus à la langue.

L'effort d'écriture est intrinsèque aux mathématiques. Même dans les polémiques, cet effort garde une valeur. Dans toute polémique, chacun essaie de mettre la rhétorique de son côté, quitte, parfois, à faire passer au second plan la recherche de la vérité et la tentative de comprendre le point de vue adverse. Dans le cas des mathématiques, la plupart des polémiques portent sur des questions de logique. La langue se trouve alors à la fois au coeur des procédés rhétoriques, et au coeur du débat. Ainsi, lorsque Poincaré se moque de Burali-Forti (voir annexe 2), les difficultés de langue et de logique sont si imbriquées, que les effets rhétoriques de Poincaré semblent en eux-mêmes des arguments de fond.

Deux remarques enfin, à propos de mathématiques et littérature.

Un rapprochement entre deux manifestes. "[Le langage] nous apparaît en même temps comme un moyen et comme une fin: étant le signe par excellence (la représentation de tous les signes), il ne saurait (...) avoir de signification entièrement en dehors de soi. Rien, en somme, ne peut lui être extérieur." (Alain Robbe-Grillet, *Pour un nouveau roman*, 1963, p. 92). "Peu importe (...), s'il s'agit d'écrire ou de lire un texte formalisé, qu'on attache aux mots ou signes de ce texte telle ou telle signification, ou même qu'on ne leur en attache aucune; seule importe l'observation correcte des règles de la syntaxe." (Bourbaki, *Théorie des ensembles*, Introduction; première édition, 1954; rééditions 1960, 1970). Le point de vue selon lequel tout est langage, et celui selon lequel le langage est un tout en soi, ont ceci de commun, qu'ils évacuent le problème des rapports entre langage et réalité, cette tension entre langage et réalité qui fait que chacun modifie l'autre. Pareil rapprochement est-il accidentel, ou bien est-il l'indice d'une parenté entre l'idée que les mathématiciens se font des mathématiques et celle que les écrivains se font de la littérature, ces idées évoluant en parallèle? Répondre à cette question exigerait un travail d'histoire hors de propos ici. Mais j'ai peine à imaginer un physicien soutenant une position analogue à celles de Bourbaki ou de Robbe-Grillet.

D'autre part, les mathématiques semblent plus difficiles à vulgariser que les sciences de la nature. Pour ces dernières, on peut expliquer un résultat sans donner les détails complexes de la procédure expérimentale. Mais les mathématiques sont prises dans la langue: modifier la langue modifie ce qu'elles expriment. Si donc, à des fins de vulgarisation, je simplifie la langue, j'impose par là-même une transformation à l'objet mathématique désigné. Bref, je ne fais pas que simplifier: je trahis le sens. La vulgarisation échoue alors, elle qui a droit à l'approximation, mais pas à la déformation. De même, aucun résumé ne peut permettre à un lecteur de "se faire son idée" sur Jean Valjean. Le seul moyen de rencontrer le Jean Valjean "authentique" est de lire *Les Misérables* en entier.

4. L'essentiel

L'écriture mathématique va "droit à l'essentiel". Pas de détails: ils cacheraient le fil de la démonstration. Les digressions sont exclues. Pas question de décrire les fausses pistes qu'on a essayées, ni pourquoi on y a cru. L'indispensable, et rien de plus. Cette convention de style est adoptée de façon si générale, qu'elle s'est transformée en nécessité, se justifiant elle-même: les indications superflues déroutent d'autant plus le lecteur, qu'il s'attend moins à ce viol de la convention; son esprit est préparé à ce que tout ce qu'il lit soit décisif pour la démonstration en cours. L'auteur doit saisir la chose même, s'effacer derrière, et l'exprimer exactement. L'idéal de la rédaction mathématique, c'est le squelette! Et (si j'ose filer pareille métaphore) les os du squelette sont ces signes cabalistiques (formules, équations, symboles) qui effraient les esprits profanes et dont la fonction est de dire l'essentiel sans fioriture. Une bonne notation, en mathématiques, est celle qui réussit à agripper l'essentiel. Mis à part les cas de bluff (qui existent, naturellement), ce que le texte omet de dire se réduit exactement à ce que le lecteur (mathématicien, comme l'auteur) n'aura "aucune peine" à compléter - calculs de routine, méthodes bien connues, etc.

Certes, toutes les sciences rédigent sans fioriture. Cependant, si concise la rédaction d'une expérience soit-elle, l'essentiel n'est pas là: il est sur le terrain, c'est-à-dire dans la matérialité de l'expérience elle-même. Alors qu'en mathématiques le terrain et la rédaction sont confondus. La rédaction est l'essentiel, et on y atteint.

N'ironisons pas sur ces centaines de milliers d'articles au fond des bibliothèques, dont chacun va droit à l'essentiel - un essentiel qui n'intéresse personne, sinon quelques spécialistes de par le monde, et encore: juste le temps que cet article soit dépassé, ou oublié. Le point, ici, est que ce modèle idéal de la rédaction mathématique - aller droit à l'essentiel - n'est, je crois, pas satisfaisant.

L'essentiel, en fait, est toujours ailleurs, insaisissable. Il n'y a guère qu'une chose essentielle qu'on puisse dire. Elle est terrible, mais vraiment essentielle, c'est-à-dire banale: nous allons tous mourir et cela nous fait peur. Sinon, l'essentiel - l'énigme du monde, le drame de l'homme... - on ne peut que tourner autour, le faire sentir, l'évoquer, le conjurer car il est souvent triste... La grandeur de la littérature est de chercher désespérément, puissamment, non pas à dire, justement, mais à *exprimer* cet essentiel impossible à dire. L'auteur qui prétend le *dire* se condamne soit à la banalité soit à la préciosité.

Préciosité: il n'est pas usuel d'appliquer ce mot aux mathématiciens. On dit plutôt élitisme. Mais élitisme et préciosité sont des attitudes proches, qui découlent toutes deux de la prétention à dire l'essentiel. Poètes raffinés, philosophes hermétiques, psychanalystes jargonnants, etc. se rejoignent lorsqu'ils croient saisir l'essentiel, mais tombent dans la préciosité des petits cercles d'initiés avec leurs *asinus asinum fricat*.

Sans doute n'est-il pas dans la "nature éternelle" des mathématiques d'aller droit à l'essentiel. C'est une époque qu'elles traversent, qui semble née des efforts de rigueur déployés depuis le XIXè siècle. En tant qu'exigence littéraire, le style "droit à l'essentiel" est probablement voué à se démoder un jour. Le style qui lui succédera apportera, à son tour, une modification à la nature des mathématiques.

Pour beaucoup de mathématiciens, rédiger est une corvée. C'est qu'aimer écrire ne signifie pas qu'on aime écrire tout: certains écrivains détestent répondre au courrier! Les mathématiciens aiment écrire - mais pour chercher. Qu'ils n'aiment pas rédiger signifie que le travail de rédaction, à la différence du cas des écrivains, n'est pas pour eux le moment où l'écriture est créative. La pente naturelle de la créativité est, en général, le foisonnement. Une rédaction où on s'impose d'aller droit à l'essentiel brime cette tendance.

Du coup, les écrits des mathématiciens sont très homogènes. Reconnaître un style individuel est rarement possible. Mais cela ne signifie pas que, concernant les mathématiques, toute considération littéraire soit forcément déplacée. Si l'avenir agit avec notre siècle comme nous avec les précédents, les différences individuelles entre les écrivains du XXè siècle paraîtront moins radicales qu'elles ne paraissent à nous, contemporains. Un style XXè siècle se dégagera, auquel nos descendants seront probablement plus sensibles que nous; ils percevront des ressemblances cachées à nos yeux. La littérature n'est pas le lieu où la singularité individuelle s'exprime aussi souverainement que le voudraient les écrivains.

Même dans la rédaction des énoncés de problèmes scolaires, il ne faut pas violer les règles littéraires des mathématiques. Tant l'idéal "droit au but" est inhérent à la façon actuelle de les comprendre. Donner des indications qui ne déroutent pas se révèle en effet délicat. La précision apportée pour se faire mieux comprendre, ou la question préliminaire introduite pour rendre plus facile la question principale, ont une fâcheuse tendance à se retourner en difficulté supplémentaire. Au lieu d'aider, voilà que, de façon imprévue, elles parasitent, gênent. Encore heureux si les candidats, ensuite, n'accusent pas l'auteur du problème de leur avoir volontairement tendu des pièges! En mathématiques, comme partout, il y a toujours du sous-entendu. Certaines choses vont sans dire, et vont moins bien en les disant. Inversement, une copie dans laquelle il y a trop d'explications et de détours donne souvent l'impression que le candidat n'a pas vraiment compris de quoi il s'agissait.

5. Mais elles s'appliquent!

La physique moderne ne se conçoit pas sans les mathématiques. Là est sans doute le principal argument qu'on opposera: les mathématiques seraient une forme littéraire - autant dire une fantaisie! - et elles serviraient à la physique, science tellement soucieuse de fidélité au réel?

Pareille objection incite à répondre selon le célèbre principe du chaudron. D'abord, les mathématiques ne s'appliquent pas. Ensuite, que signifie "s'appliquer"? Et puis, de toutes façons, le fait qu'elles s'appliquent ne contredit pas ma thèse.

Elles ne s'appliquent pas. Combien, parmi les innombrables articles de "mathématiques pures", sortiront un jour du monde des mathématiciens? Très peu. On voit certes des physiciens dans les bibliothèques de mathématiques. Rarement! Et pas pour se tenir au courant de l'ensemble des parutions - chose impossible - mais pour consulter *un* article dont ils ont la référence. L'immense majorité des articles n'ont d'usage qu'interne aux mathématiques. Il faut n'avoir jamais mis les pieds dans une bibliothèque de mathématiques pour croire que l'essence de celles-ci réside dans le fait qu'elles s'appliquent. Même, je soupçonne une partie des "mathématiques appliquées" de ne jamais sortir non plus des bibliothèques mathématiques...

"100% des gagnants ont tenté leur chance" proclamait une publicité pour le loto. Ne faisons pas l'erreur des naïfs qui ont cru entendre: "100% des participants ont gagné"! La proportion d'articles de mathématiques qui trouvent une application ne doit pas être beaucoup plus grande, ni plus significative, que la proportion de gagnants parmi les participants au loto. La "déraisonnable effectivité" des mathématiques est toute relative.

Elle n'est cependant pas nulle: l'abstraction mathématique rend compte de certains aspects de la réalité. Sur ce point très débattu, voici quelques brèves remarques. Peut-être la réalité n'est-elle pas mathématique, mais a-t-elle été mathématisée. Les hommes y trouvent les mathématiques qu'ils y ont mises, et qu'ils s'attendent à y trouver. "On ne voit que ce qu'on cherche" (R.W. Hamming). La circulation ne se fait d'ailleurs pas en sens unique: les mathématiques s'appliquent à la physique, et la physique s'applique aux mathématiques, leur posant des problèmes, leur suggérant des solutions, modifiant leurs conceptions. Quant au fait qu'il soit possible de mathématiser la nature, peut-être faut-il y voir un cas particulier d'un phénomène général, banal - ce qui ne signifie absolument pas qu'il ne soit pas très intrigant: aucun discours humain ne peut se couper totalement de la réalité. Les singes dactylographes ne taperont jamais *Hamlet*. Alors que les hommes, quand ils parlent assez longtemps, disent nécessairement des choses qui "rencontrent" la réalité. Même les mathématiciens!

Considérer les mathématiques comme une forme littéraire nous éloigne de la tradition galiléenne. Cette dernière voit, dans les mathématiques, un langage: la nature est un livre écrit en langage mathématique. Langage de la nature, éternel, elles apparaissent comme un formalisme que les hommes doivent découvrir. Une forme littéraire, au contraire, est une expression, culturelle, des hommes et de leur créativité, avec ce que cela a d'éphémère. (De façon analogue, le fait que la littérature soit inconcevable sans le langage ne signifie évidemment pas qu'elle "soit" un langage.)

Seconde étape du principe du chaudron: que signifie "s'appliquer"? Dans deux cas, les mathématiciens emploient le mot "application". Dans l'un, ils le définissent; dans l'autre, pas. Le premier cas est l'emploi du mot dans son sens mathématique, voisin de celui de "fonction". Le second est quand ils parlent des "applications" des mathématiques. Seulement, à ne pas définir cette dernière expression, ils la rendent fallacieuse, car elle sous-entend une conception qui, au minimum, mériterait d'être explicitée et discutée: la conception d'une réalité séparée. Il y aurait d'une part un monde matériel, d'autre part un monde des mots, et il y aurait des applications (terme plus ou moins pris ici dans son sens mathématique) du second monde vers le premier. Mais je ne crois pas à une séparation radicale entre monde des objets et monde des mots; du moins, s'il y en a une, elle nous est inconnaissable. Les mots et les choses interagissent sans cesse: les mots modifient les choses, les choses modifient les mots. Ainsi, quand la physique recourt à des concepts mathématiques, elle transforme et les mots et le réel. Exemple: le concept de dérivée change de sens par rapport au concept abstrait des mathématiciens quand les physiciens l'utilisent pour définir la vitesse instantanée (la chose modifie le mot); et, avant de pouvoir définir une vitesse comme une dérivée, il faut élaguer dans le réel (le mot modifie la chose).

Les mathématiques s'appliquent, donc, non pas au sens où elles seraient l'outil approprié à l'exacte compréhension de la réalité matérielle ultime et intangible, mais dans la mesure où elles modifient notre image du monde. Le verbe a la magie d'opérer sur le monde, et les mathématiques sont un verbe. Les sciences humaines ont tort de recourir à une mathématisation dont elles espèrent retirer des apparences de sérieux. Non parce que cela les rend ennuyeuses (tant pis pour elles!), mais parce que cela contribue à réifier l'homme. Modéliser les comportements psychologiques ou sociaux, c'est prétendre que les comportements sont effectivement modélisables. Et ce n'est pas seulement avoir là une vue pauvre de l'homme: c'est appauvrir l'homme, car tout observateur participe à la construction de son objet.

Dernier morceau du chaudron: le fait que les mathématiques s'appliquent ne contredit pas ma thèse. Si s'appliquer consiste à interagir avec le réel, la littérature s'applique. Elle aussi modifie le sens des mots. Celui qui a appris les fables de La Fontaine ne peut plus regarder un renard sans lui trouver l'air rusé! La littérature - pas forcément "mauvaise" - a contribué à trop de propagandes, au cours de ce siècle, pour que la possibilité de l'"appliquer avec efficacité" fasse le moindre doute. Si on préfère des exemples moins terribles: les grands types littéraires sont les reflets de caractères humains, mais agissent sur eux en retour. Certains comportements amoureux ont été modifiés par le mythe de Don Juan - ce qui modifie la nature même de l'amour. Et nous ne rêvons sûrement plus de la même façon qu'avant Freud...

On ne devrait pas parler des applications des mathématiques, mais de leurs interactions: considérer que deux objets sont en interaction est plus juste que de considérer que l'un agit sur l'autre. Physique et mathématiques sont en interaction, disais-je. De même, mathématiques et informatique: si les mathématiques s'appliquent à l'informatique, l'inverse aussi est vrai. L'informatique transforme les méthodes des mathématiques, et va même jusqu'à changer le statut de leurs objets. Accepter des démonstrations accessibles aux seules machines (comme pour le théorème des quatre couleurs), alors qu'on n'acceptait avant que celles susceptibles de convaincre un mathématicien (ce qui, d'ailleurs, n'était pas forcément plus "concrètement faisable" - ni fait) - cela change la nature des objets ainsi manipulés.

L'inquiétude que cette évolution a suscitée chez des mathématiciens rappelle l'inquiétude de certains écrivains à voir l'informatique intervenir sur la littérature: utiliser un traitement de texte mène ailleurs qu'écrire au stylo ou taper à la machine à écrire; l'informatique s'insinue donc dans la littérature. Là encore, l'interaction ne se fait pas à sens unique. Par exemple, un des rêves de l'informatique, peut-être vain mais qui n'en est pas moins un moteur, est de réussir de bonnes traductions littéraires.

Revenons au rapport entre mathématiques et informatique. L'informatique modifie la notion de "nombre". Les ordinateurs ayant rendu plus souvent possibles qu'autrefois les résultats effectifs, les mathématiciens se sont mis à apprécier ces derniers. Voici dix ou vingt ans, ils préféraient les théorèmes abstraits d'existence. Du coup, les nombres intéressants sont devenus les décimaux. Si vraiment les mathématiciens, de plus en plus équipés en ordinateurs, se mettent à ne plus manipuler que les décimaux, la notion abstraite de nombre réel, héritée du formalisme rigoureux du XIXè siècle, risque de devenir désuète. Ce ne sera pas un mince événement! Même les simples calculettes, par leur formidable expansion, contribuent à modifier notre rapport usuel aux nombres et, finalement, la conception théorique que s'en font les mathématiciens. Conception savante et conception populaire interagissent.

Il est vrai que les ordinateurs servent aussi à calculer toujours plus de décimales de π. Or, si un tel processus est sans fin - donc source de problèmes intéressants pour l'informatique - c'est précisément parce que π n'est pas un décimal. Une ambigüité comme celle-là laisse penser que jamais la notion de nombre ne sera "simple", ni "naturelle".

Au fur et à mesure que les conceptions changeront, les goûts ont donc toutes chances de continuer à varier au fil du temps, en mathématiques comme en littérature, et comme partout.

Annexe 1

En mathématiques, un risque d'erreur par artefact gît dans la langue. (L'erreur par artefact consiste à découvrir au bout d'une procédure ce qu'on y avait mis initialement sans s'en rendre compte.) Le mathématicien Arnaud Denjoy (1884-1974) raconte ainsi que, devant la démonstration qu'un amateur pensait avoir faite du postulat d'Euclide, il fit comme si le mot "droite" désignait non pas la droite habituelle des souvenirs scolaires, mais la droite au sens de Poincaré, c'est-à-dire le demi-cercle. De la sorte, il vit très vite à quel endroit l'amateur, emporté par les mots, avait fait une déduction non autorisée par les axiomes de base. Certes, il s'agissait de géométrie élémentaire, mais même dans les situations plus techniques, des risques d'erreur gisent dans les mots, car ces derniers sont au coeur du problème. "La mathématique est l'art de donner le même nom à des choses différentes" (Poincaré, *Science et méthode*).

"Un médecin, fort distingué et dont les travaux ont fait progresser d'un grand pas nos connaissances des maladies épidémiques, ayant gardé de sa jeunesse un certain goût des réflexions mathématiques, m'envoya récemment une démonstration du postulat d'Euclide. Il admettait la quasi-certitude d'avoir commis une faute de raisonnement. Mais ni lui ni ses amis consultés ne découvraient celle-ci.

"Pour la trouver sans peine, j'usai de l'artifice de Poincaré. On donne aux mots désignant les objets étudiés un sens différent de celui qui leur est normalement attribué. Ces mots dès lors définissent d'autres objets. On examine si les propriétés caractéristiques des premiers peuvent se transporter aux seconds, en les entendant elles aussi dans un nouveau sens. Une fois ces conditions réalisées, tout ce que le raisonnement logique démontrera pour les premiers objets, sera vrai pour les seconds et la réciproque jouera. Si donc la seconde catégorie ne jouit pas d'une certaine propriété, il est inutile d'espérer pouvoir jamais démontrer que la propriété correspondante appartient à la première catégorie.

"Et si un raisonnement est appliqué à celle-ci en vue d'établir cette propriété, la chaîne de propositions constituant ce raisonnement nécessairement faux trébuchera tout au moins et sans nul doute au moment où s'introduira dans la chaîne correspondante une proposition erronée pour la seconde catégorie d'objets."

En l'occurrence, Denjoy remplaça les droites familières au médecin par des "droites de Poincaré": la pétition de principe commise par le médecin devint alors évidente. (A. Denjoy, "Le mécanisme des opérations mentales chez les mathématiciens", Conférence faite le 25 novembre 1947, reproduite dans *Astérisque*, n°28-29, Société Mathématique de France, 1975).

Annexe 2

La polémique suivante est extraite d'une série d'articles publiés par Henri Poincaré dans la *Revue de métaphysique et de morale* en 1905-6, repris par lui dans *Science et méthode*, livre II, chap. III, et réédités par Gerhard Heinzmann, *Poincaré, Russell, Zermelo et Peano*, éd. Blanchard, 1986, (p. 22).

Nous voyons d'abord M. Burali-Forti définir le nombre 1 de la manière suivante :

$$1 = \iota\, \mathrm{T}' \{ \mathrm{Ko} \frown (u, h) \ni (u \,\varepsilon\, \mathrm{Un}) \}$$

définition éminemment propre à donner une idée du nombre 1 aux personnes qui n'en auraient jamais entendu parler.

J'entends trop mal le Péanien pour oser risquer une critique, mais je crains bien que cette définition ne contienne une pétition de principe, attendu que j'aperçois 1 en chiffre dans le premier membre et Un en toutes lettres dans le second.

Quoi qu'il en soit, M. Burali-Forti part de cette définition et, après un court calcul, il arrive à l'équation :

$$1 \,\varepsilon\, \mathrm{No}$$

qui nous apprend que Un est un nombre.

Et puisque nous en sommes à ces définitions des premiers nombres, rappelons que M. Couturat a défini également 0 et 1.

Qu'est-ce que zéro? c'est le nombre des éléments de la classe nulle; et qu'est-ce que la classe nulle? c'est celle qui ne contient aucun élément.

Définir zéro par nul, et nul par aucun, c'est vraiment abuser de la richesse de la langue française; aussi M. Couturat a-t-il introduit un perfectionnement dans sa définition, en écrivant :

$$0 = \iota\, \Lambda : \varphi x = \Lambda . \supset . \Lambda = (x \,\varepsilon\, \varphi x)$$

ce qui veut dire en français : zéro est le nombre des objets qui satisfont à une condition qui n'est jamais remplie.

Mais comme jamais signifie *en aucun cas* je ne vois pas que le progrès soit considérable.

Je me hâte d'ajouter que la définition que M. Couturat donne du nombre 1 est plus satisfaisante.

Un, dit-il en substance, est le nombre des éléments d'une classe dont deux éléments quelconques sont identiques.

Elle est plus satisfaisante, ai-je dit, en ce sens que pour définir 1, il ne se sert pas du mot un; en revanche, il se sert du mot deux. Mais j'ai peur que si on demandait à M. Couturat ce que c'est que deux, il ne soit obligé de se servir du mot un.

Références

Sur les mots des mathématiques, voir:

S. Baruk, *Echec et maths*, Seuil, 1973, rééd. 1977

S. Baruk, "Article mots", *L'écrit du temps*, 2, Langues familières, langues étrangères, Ed. de Minuit

R. Etiemble, *Le jargon des sciences*, Hermann, 1966

D. Nordon, *Les mathématiques pures n'existent pas!*, Actes Sud, 1981, rééd. 1993; chapitre "Donner un sens plus pur aux mots de la tribu?"

R. Queneau, *Bâtons, chiffres et lettres*, Gallimard, 1965.

Dans *Vivre et philosopher* (P.U.F., 1992), Marcel Conche remarque que, à la différence des allemands, les philosophes français, plutôt que de créer des mots nouveaux, préfèrent "enrichir les mots du langage commun de significations nouvelles".

Sur le rapprochement entre science et littérature, voir par exemple:

H. Field, *Realism, Mathematics and Modality*, Basil Blackwell, Oxford, U.K., 1989

D. Locke, *Science as Writing*, Yale University Press, U.S.A., 1992

L'idée que, comme la littérature, les mathématiques racontent des histoires se trouve dans H. Field. Et également dans

Y. I. Manin, "Mathematics as Metaphor", *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Kyoto, Japan, 1990, p. 1665-1671

La conception des mathématiques comme métaphore est seulement esquissée par le bref article de Manin, qui n'examine pas de quoi les mathématiques seraient métaphore.

Donner un critère de démarcation entre le discours mathématique et celui de la fiction littéraire n'est pas si facile qu'on pourrait croire; voir à ce sujet:

J. et M. Dubucs, "La couleur des preuves", à paraître.

Des vues très libres et souvent stimulantes sur les mathématiques sont exprimées par

R. W. Hamming, "The Unreasonable Effectiveness of Mathematics", *Amer. Math. Monthly*, Vol. 87, 1, 1980.