Luc Sinègre

Aspects géométriques dans l'œuvre algébrique de Hamilton

Séminaire de Philosophie et Mathématiques, 1995, fascicule 3
« Aspects géométriques dans l'œuvre algébrique de Hamilton », , p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1995___3_A1_0>

Aspects géométriques dans l'oeuvre algébrique de Hamilton

exposé du 30 Janvier 1995

Luc SINEGRE

1. Introduction

J'ai commencé, en 1990, une recherche sur Hamilton. Ce sont ses idées sur le temps qui m'avaient conduit à m'attacher plus particulièrement à ce mathématicien irlandais qui voulait faire de l'algèbre la Science du Temps Pur. Je pensais donc, alors, pouvoir répondre à la question suivante: comment peut-on expliquer le travail et la production algébriques de Hamilton par ses conceptions idéalistes sur le Temps?
Mais quand je me suis écarté des commentaires idéalistes donnés par Hamilton lui-même, et par les nombreux historiens des sciences qui l'on suivi, pour expliquer sa démarche algébrique, et quand j'ai commencé à analyser en détail ses écrits mathématiques, je me suis aperçu que son oeuvre scientifique avait une cohérence interne: les textes et la pratique algébriques renvoient à ses idées et à sa formation de géomètre (en liaison avec l'optique) et de mécanicien, alors que les partis pris sur le temps expliquent la présentation de ses idées mathématiques et la forme qu'il a choisie pour décrire le processus d'invention.
Après un résumé de la vie du mathématicien, j'ai choisi de rappeler pour cette conférence quels sont les principes philosophiques de Hamilton afin que chacun puisse saisir les termes du problème. Je présente ensuite la découverte des quaternions, c'est le moins que l'on puisse faire lorsque l'on parle de Hamilton. Il aurait été très difficile et très technique, en revanche, d'entrer dans les textes mathématiques qui m'ont amené au point de vue que je viens d'énoncer. J'ai donc essayé de rassembler en deux blocs les points qui font de Hamilton un mathématicien beaucoup moins moderne que celui que l'on présente d'ordinaire et les points qui, au contraire, témoignent de ses qualités propres d'algébriste: ceci constitue la deuxième partie de mon exposé.

2. Vie de Hamilton

William Rowan Hamilton naît de parents écossais à Dublin le 3 août 1805. Toute sa carrière se déroule, jusqu'à sa mort en 1865, dans la capitale irlandaise. Depuis l'âge de trois ans, son oncle, pédagogue très particulier, lui enseigne les langues anciennes ou modernes (l'Empire!). A treize ans, il en parle couramment treize. Ses études, très brillantes, se poursuivent ensuite au Trinity College de Dublin. A 16 ans, il découvre une erreur dans *La mécanique Céleste* de Laplace. Ce traité fait justement partie, avec *le calcul différentiel et intégral* de Lacroix, des premiers ouvrages traduits grâce à la clairvoyance de Peacock[1] et de Babbage dans les années 1810-20 et contribue au mouvement de "redécouverte" des mathématiques du continent. Ce mouvement ne s'arrête donc pas en Angleterre puisque, guidé par son professeur Charles Boyton, le jeune Hamilton va étudier, à partir de 1822, Garnier, Lagrange, Cousin, Monge, Francoeur et Laplace. En 1827 on lui confie la direction de l'Observatoire de Dunsink. Ce poste lui assurera la sécurité et une certaine disponibilité tout au long de sa vie, même si le mathématicien dédaigne un peu, après les premiers temps, les relevés astronomiques. Il enseignera également l'astronomie au *Trinity College* de Dublin, et présidera la *Royal Irish Academy* de 1837 à 1846. Il faut noter que Hamilton n'enseignera jamais les mathématiques au *Trinity College*.

[1] George Peacock (1791-1858).

Voici les dates principales de la vie de Hamilton :

1805 Naissance de William Rowan Hamilton

1824 *On Caustics*

1827 *Theory of system of Rays* (part.1)

1833 *Third supplement*
(réfraction dans les cristaux bi-axiaux)
1834 *On a general Method in Dynamics.*

1835 *Theory of Conjugate functions or algebraic couples with preliminary and Elementary Essay on Algebra as the Science of Pure Time.*

1843 Découverte des quaternions

1845-46 Application des quaternions à la Mécanique
Théorème de Cayley Hamilton en dimension trois.
Paramétrisation du groupe orthogonal.

1853 *Lectures on quaternions*

1865 Mort et édition posthume des *Elements*(1866).

3. Les premières découvertes

De 1824 à 1837 les premiers travaux de Hamilton sont consacrés à l'optique. Il prouve d'abord et généralise un théorème de Malus: les rayons de tout système homogène, issus d'un même point ou initialement normaux à une surface, reste normaux à une famille de surface après un nombre quelconque de réflexions et de réfractions. Il y introduit une fonction, appelée caractéristique, qui décrit complètement le système optique. Cette quantité V est stationnaire dans la propagation de la lumière. Il aboutit en 1834, par analogie entre l'optique et la mécanique, aux traités *On a general Method in Dynamics*: on peut réduire le problème de la mécanique à l'étude d'une fonction unique et au développement d'une relation unique. Sans pour autant entrer dans les détails, on peut dire qu'il s'agit de recherches physiques théoriques. Hamilton ne fait aucune expérience, il attend par exemple qu'un de ses amis, le professeur Lloyd, ait vérifié expérimentalement ses résultats théoriques sur la réfraction conique. Il s'ensuit un échange de lettres pour déterminer quel angle d'incidence prendre dans l'arragonite biaxial[2]. Il s'agit donc de se concentrer sur la structure mathématique de la théorie et d'imposer des conditions *a priori* (la nature de l'éther en optique, celle de la matière en mécanique). Comme l'a remarqué Amy Dahan[3], cette tradition (Cauchy, Powell, Kelland) s'oppose aux théories appelées dynamiques qui apparaissent dans les années 30, en particulier celles de Airy et de Mac Cullagh qui privilégient une analyse continue et macroscopique, et évitent les hypothèses mécaniques microscopiques.

[2] *cf* [Graves I p.624].
[3] *cf* [Dahan I p.393].

4. Les idées philosophiques de Hamilton

Les conceptions Kantiennes de Hamilton furent développées dans l'article *Theory of conjugate functions, or algebraic couples; with a preliminary and elementary essay on algebra as science of pure time* [Hamilton 1835a]. Ce texte, très connu, contient dans sa partie mathématique la première construction du corps des nombres complexes par les couples et celle du logarithme complexe. Hamilton y expose préalablement ses idées sur le temps. Il a écrit avoir trouvé ses conceptions sur le temps avant la lecture de Kant mais la lecture de "La Critique de la Raison Pure" l'a conforté et il reprend ensuite dans toutes ses préfaces le vocabulaire Kantien[4].

Les lettres qu'il envoie à son élève Lord Adare en 1835, contiennent un résumé pédagogique de ses idées [Hamilton 1835b]. Il commence par distinguer trois sciences distinctes, l'arithmétique, la science de la grandeur qu'il appelle métrologie et enfin l'algèbre qu'il définit comme la science de l'ordre: "En arithmétique le nombre à proprement parler est considéré comme une réponse à la question Combien (*How many*), constituant une science de la multitude, fondée sur les relations du plus et du moins, ou de la pluralité et de l'unité. Dans une science plus complexe, de la grandeur et de la mesure, que l'on peut aussi appeler métrologie (quoique souvent classée comme une partie supérieure de l'arithmétique), le nombre est la réponse à la question De quelle grandeur (*How much*) et les relations fondamentales sont celles du plus grand que ou du plus petit que, ou du tout et de la partie. Mais en algèbre je vous ai appris que le nombre répondait à la question A quelle place dans une succession, les relations fondamentales étant alors celles de l'avant et de l'après (ou négatif et positif); et la science elle-même est celle de l'ordre et de la progression, ou comme on pourrait le dire de manière plus résumée celle du TEMPS PUR". Comme la géométrie est, chez Kant, la science de l'espace pur, forme *a priori* de la sensibilité externe, l'algèbre sera "la science mathématique du temps séparée d'une part des notions dynamiques de cause et d'effet, et d'une autre part des traces et des mesures empiriques induites par des phénomènes particuliers", c'est-à-dire une forme pure de la sensibilité interne.

Il pose alors le problème fondamental:

- Comment nommer et interpréter chacune des idées de nombre, grandeur et succession.
- Comment construire et utiliser un langage de la quotité, de la quantité et de l'ordre.

Face à ce problème, Hamilton distingue trois écoles mathématiques algébriques: l'école pratique qui utilise l'algèbre comme un instrument, l'école philologique qui l'utilise comme une langue, l'école théorique comme une fin en soi.

Pour comprendre ce qu'il entend par la seconde école, il faut se reporter aux théories du mathématicien contemporain George Peacock. Ce dernier avait énoncé les lois de la *Permanence* qui apparaissent, en quelque sorte, comme une théorisation de la pratique qu'avait adoptée, auparavant, un grand nombre de mathématiciens: étendre formellement les lois applicables à des grandeurs définies vers des symboles indéfinis. Ainsi toute écriture symbolique doit pouvoir s'appliquer (avec des restrictions) aux grandeurs de l'arithmétique et réciproquement toute écriture arithmétique est une relation symbolique en puissance. "*Toute forme qui est algébriquement équivalente à une autre quand elle est exprimée en symboles généraux doit continuer à lui être équivalente, quel que soit ce que ces symboles représentent*"[5]. L'application la plus immédiate de ces idées est la présentation des nombres complexes: on énonce d'abord les lois algébriques générales sur les signes avant que l'interprétation géométrique ne leur donne un sens géométrique particulier.

Hamilton se range résolument dans la troisième[6] école. Il propose au théoricien de partir des intuitions (supposées le but de la recherche) pour se ramener aux symboles (nommer), puis de recomposer dans le chemin inverse une synthèse (interpréter les noms). Il prend donc le chemin inverse de celui qu'a, à son avis, emprunté Peacock en considérant les signes et la langue comme l'objet de la recherche. On peut ajouter qu'il reprend le même renversement induction/déduction pour présenter les théories optiques d'un de ses collègues irlandais, Mac Cullagh [1836]. Les théories

[4] C'est par l'intermédiaire de Coleridge que Hamilton rencontre la philosophie Kantienne.

[5] *cf* [Durand p.148].

[6] Le terme école demanderait à être précisé, dans l'école théorique de Hamilton il n'y a personne sauf lui et certains mathématiciens comme Newton qu'il s'approprie *a posteriori*. Les historiens ont pris l'habitude d'associer la seconde à l'école algébrique anglaise (après Novy) mais ce jugement est sujet à caution.

phénoménologiques de Mac Cullagh sont qualifiées par Hamilton "d'induction mathématique" en opposition avec les siennes qui, elles, sont déductives. Ceci nous donne un premier exemple d'une transposition des modes de pensée du mathématicien du terrain physique vers le terrain algébrique.
Mais pour comprendre pourquoi Hamilton a besoin de l'ordre et du temps pour exprimer son point de vue, nous devons expliciter deux concepts importants chez lui: celui de rapport et celui de relation.

la notion de rapport
Le principal concept mathématique, exposé dans l'*Essay*, qui anime ces réflexions est celui de rapport. En admettant que dans le *Temps* nous sommes en mesure de concevoir la coïncidence, et la relation d'antériorité entre les instants, notés par des majuscules, on pourra en posant une nouvelle relation d'équivalence (*analogy*[7]) entre ces couples d'instants créer les marches. La marche +2 est par exemple la relation qui unit les instants 5 à 7, mais aussi 9 et 11. Il faut comprendre l'analogie comme une comparaison entre les relations qui unissent des moments; elle permet de construire algébriquement un ensemble de nombres munis de signes. Mais pour obtenir les quotients de ces nombres, il faut encore poser une nouvelle relation sur les marches, celle du rapport (*ratio*). On obtient une succession d'ensembles de nombres, puis de polyplets illustrée par le schéma suivant, emprunté à Peter Ohrsrtröm [1985].

Polyplets de Nombres

(the set of polyplets of steps)
addition et multiplication possibles

$\Uparrow$ *Relation of ratio*

Polyplets de Marches

(Steps: the set of transition of polyplets of moments)
addition possible

$\Uparrow$ *Relation of analogy*

Polyplets de Moments

(Moments)

On peut noter qu'après la mort de Hamilton, le mathématicien Clifford, dans ses notes de lectures sur les *Lectures on quaternions* [1877], garde le vocabulaire des marches, des opérateurs, mais replace naturellement dans l'espace les objets que Hamilton s'est efforcé de dégager. On peut alors se poser la question suivante: la volonté (et parfois la difficulté) de Hamilton à essayer de libérer l'algèbre, dans certains textes, de toute référence géométrique, ne correspond-elle pas, *a contrario*, à une vision primitive de l'algèbre? Clifford ne craint pas de faire appel à la géométrie pour expliquer ses idées parce que sans doute, à ce moment, l'algèbre a déjà pris une part largement autonome, et aussi parce que la géométrie n'est plus étroitement réduite à la description de l'espace euclidien. De ce

[7] En grec analogie signifie proportion.

point de vue, Hamilton n'est pas si éloigné de ce que pense Peacock qui place la géométrie loin derrière l'algèbre.
On obtient les complexes en posant sur les couples de marches les lois bien connues[8]:

$$(b_1,b_2)+(a_1,a_2)=(b_1+a_1,b_2+a_2)$$
$$(b_1,b_2)-(a_1,a_2)=(b_1-a_1,b_2-a_2)$$
$$(b_1,b_2)(a_1,a_2)=(b_1,b_2)\times(a_1,a_2)=(b_1a_1-b_2a_2,b_2a_1+b_1a_2)$$

la notion de relation

Ce texte de 1835 repose ainsi sur une succession d'ensembles construits grâce à des relations. Pour prendre le langage moderne, Hamilton a besoin pour construire ses ensembles de définir des classes d'équivalences, c'est-à-dire de regrouper en classes les éléments qui sont égaux du point de vue du critère recherché. Ceci est corroboré par un texte (non publié [1833a]) dans lequel il se propose d'étudier méthodiquement les propriétés générales des relations d'ordre et d'équivalence[9]. Il commence par définir l'égalité des symboles qui désignent les jours de la semaine (Jeudi, *Dies Jovis*, le symbole astronomique de Jupiter), puis les relations d'ordre sur les classes de ces symboles (sans oublier la compatibilité avec les opérations etc.). Ce texte est donc une réflexion théorique sur les méthodes et les outils algébriques utilisés dans l'*Essay*.
C'est la notion de relation (dans la perspective du schématisme Kantien), et en particulier la notion de rapport, qui explique sans doute pourquoi Hamilton a compris que ses idées mathématiques étaient si proches de celles de Kant sur le temps. Mais contrairement à ce qu'il apparaît de prime abord, cette attitude de Hamilton serait plus proche de ce qui est exposé dans la logique transcendantale que dans l'esthétique transcendantale[10]. Des historiens comme Winterbourne [1982] ont d'ailleurs écrit que Hamilton avait surestimé l'engagement constructif de Kant.
Mais sur ce sujet je pense que l'inspirateur commun des deux hommes est Newton. Bien sûr Hamilton a étudié l'inventeur de la gravitation universelle, mais mieux, à plusieurs moments il donne explicitement cette référence. Dans l'essai sur le temps pur de 1835, il renvoie à Newton pour avoir, grâce aux fluxions, fait intervenir en mathématiques la notion de temps. Mais plus important encore, Hamilton fait appel à à Newton pour expliquer la démarche du physicien. Il écrit dans son essai sur les chemins de Lumière [1833b]: "Nous devons rassembler et regrouper les apparences jusqu'à ce que l'imagination scientifique discerne leurs lois cachées, et l'unité surgit de la diversité; et ensuite à partir de l'unité nous pouvons à nouveau déduire la variété, et contraindre la loi découverte à dire ce que va révéler le futur"[11].
Ainsi il me paraît fondamental pour la suite de cet exposé de noter la transposition sur le terrain algébrique de la démarche d'un physicien qui a lu Newton. La recherche de la loi physique est alors remplacée par la recherche de la relation qui va construire les objets algébriques, par quotient. Le

---

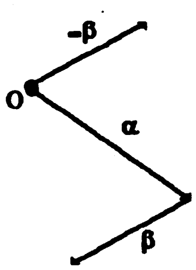
8 Celui qui s'interrogerait quant à la construction des réels peut se reporter au texte de Matthews [1978]: "Hamilton ne pouvait pas construire les réels à partir des rationnels en utilisant cette démarche, car il n'avait pas caractérisé l'ensemble des moments ou des marches suffisamment pour qu'on puisse affirmer que l'un ou l'autre est non dénombrable: ce qui revient à dire que supposer que M est dénombrable est consistant avec son essai, si l'on excepte peut-être sa discussion sur les irrationnels. Bien que dans ses commentaires sur les irrationnels Hamilton ait eu l'idée d'une approximation d'un irrationnel par des approximations rationnelles successives et par extension l'idée d'une coupure de rationnels, il n'a jamais inclus aucun axiome ayant au moins une force comparable à celle de la borne supérieure (il n'aurait probablement pu supposer à partir de la notion de temps un tel axiome) et n'a pas eu non plus l'idée d'utiliser la notion d'approximation dans une perspective de construction, ce qui aurait été plus près de ses idées sur les rationnels."

9 Il définit précisément la transitivité et la symétrie (et oublie la réflexivité).

10 Le shème transcendantal est le troisième terme qui est homogène d'un côté à la catégorie, de l'autre au phénomène et qui rend possible l'application de la première au second. Cette représentation doit être pure (sans aucun élément empirique) et pourtant il faut qu'elle soit d'un côté intellectuelle, de l'autre sensible. La construction de Kant se développe selon trois étapes, d'abord la diversité des intuitions pures, puis la synthèse opérée par notre imagination, puis la représentation par les concepts de cette unité.

11 "Dans sa leçon introductive de 1831, Hamilton se réfère à Newton comme ayant poursuivi le même dessein (fonder une science conforme à sa vision poétique de l'univers) en créant un univers d'énergies multiples mais unifiées, réduisant le monde physique infini à un monde intellectuel"; cité par Hankins [1980] p.105.

chemin choisi par Hamilton est par là très original. Un carnet de notes, à la date d'avril 1846 [Hamilton 1846], contient de nombreuses références à la *Statique* de Poinsot et donne un exemple intéressant de ce *processus* d'algébrisation. Hamilton y définit des *couples algébriques* de vecteurs qui correspondent aux *couples mécaniques* de Poinsot. Le couple algébrique de vecteurs (α,β) traduit la situation physique qu'illustre le schéma ci-contre:



Hamilton énonce que deux couples algébriques (α,β) et (α',β') produisent le même système de forces si et seulement si $\alpha'\beta'-\beta'\alpha' = \alpha\beta-\beta\alpha$. Pour démontrer le sens direct ou réciproque de cette proposition, il va plusieurs fois se transporter du terrain algébrique représenté par les vecteurs, leurs rapports opératoires, et la relation algébrique d'équivalence qu'il vient d'écrire, au terrain mécanique dont la base est l'équivalence physique des systèmes de forces.

Hamilton pense que la connaissance empirique se perd dans l'infinité des choses particulières et qu'il faut chercher la connaissance du Tout par unification. On peut donc tracer un parallèle entre la connaissance qui, pour Kant, crée la liaison entre l'éparpillement du divers, et la pratique de Hamilton, en algèbre, qui recherche les relations (par exemple les isomorphismes) qui unifieront également la diversité des formes.
Celui qui regarderait les choses d'assez loin pourrait croire que cette présentation des concepts (et par suite de l'activité mathématique) dans le *Temps* donne des résultats. Quand en 1835, dans le même *Essay*, Hamilton introduit, par exemple, le logarithme complexe, à la suite de son ami John Graves dont l'article avait d'abord été refusé par Peacock qui ne le comprenait pas, il pose, une fois encore, la relation fonctionnelle de l'exponentielle[12] $\begin{cases}\phi(x)\phi(\xi)=\phi(x+\xi)\\ \phi(1)=a\end{cases}$ au coeur de son propos. Mais même cette remarque ne nous permet pas de savoir s'il s'agit d'une exposition personnelle et métaphysique d'idées mathématiques certes très brillantes, ou si la métaphysique est nécessaire à la production mathématique. En effet Hamilton, dès 1835, s'était proposé, à partir des idées développées dans l'*Essay*, d'appliquer rapidement ces idées à d'autres domaines des mathématiques[13]. Mais rien n'arriva avant la découverte des quaternions qui couronnait les recherches menées depuis le début des années trente pour trouver une multiplication dans l'espace. Le problème du temps qu'avait posé Hamilton très tôt rencontre donc à son avis sa principale découverte algébrique: les quaternions. Il faut donc étudier le rôle qu'a joué éventuellement le temps pour cette découverte, puis pour sa présentation.

5. La recherche d'une multiplication dans l'espace.
Le problème qui est posé à tous les mathématiciens qui recherchent une généralisation des nombres complexes est de construire un système engendré par trois unités (contenant 1 et i) et supportant les lois de l'algèbre ordinaire. Ils recherchent donc une extension commutative de R de degré 3 contenant C. De plus, les nombres recherchés (souvent appelés triplets) doivent traduire naturellement la géométrie euclidienne, donc doivent supporter la loi des modules:

Module du produit = Produit des modules.

Dans la préface des *Lectures*, Hamilton qui n'avait rien publié des recherches effectuées entre 1830 et 1843, a rappelé un certain nombre de ses tentatives. Elles sont d'ordre trigonométrique (grâce à la trigonométrie sphérique en particulier), géométrique (on cherche à munir la sphère d'une structure de groupe) ou algébrique (en définissant des triplets de moments). Les essais qu'il rapporte sont beaucoup plus que des tentatives avortées. Hamilon nous explique comment, méthodiquement, il a fermé tous les chemins d'accès au problème (en ne se limitant pas bien sûr à des constructions

12 C'est aussi ce qu'avait fait Graves un peu auparavant sur son conseil.
13 "L'auteur espère publier plus tard plusieurs autres applications de cette conception; en particulier aux Equations et aux Intégrales, et à la Théorie des Triplets et ensembles de Moments, Marches, et Nombres, qui comprend cette Théorie des Couples" [Hamilton 1835b p.96].

d'ensembles dans l'algèbre du temps pur). Ces tentatives anticipent d'une certaine manière le théorème de Frobenius qui énonce l'impossibilité d'une telle multiplication.
C'est en 1843 que Hamilton a réussi à surmonter ces difficultés en ouvrant le problème à un espace de dimension quatre. Il aurait ainsi gravé, dans l'euphorie de la découverte, la table de définition des quaternions sur un petit pont de Dublin, le *Broome Bridge*. Il a, ensuite, précisément raconté le chemin qui l'a conduit aux quaternions [1843a] [1843b] et d'ailleurs ces commentaires ont été abondamment repris. La loi des modules appliquée à l'identité

$$(x+iy+jz)(x+iy+jz)=(x^2-y^2-z^2)+2ixy+2jxz+2ijyz$$

indiquait la présence d'un terme superfétatoire. L'idée de prendre $ij=0$ ne résolut rien. On doit d'ailleurs rappeler que Hamilton souhaitait obtenir une algèbre à division.
La bonne idée était d'écrire:

$$(x+iy+jz)(x+iy+jz)=(x^2-y^2-z^2)+2ixy+2jxz+(ij+ji)yz$$

en ajoutant $ij+ji=0$.
La création des quaternions repose donc sur 3 points:

- loi des modules
- l'abandon de la commutativité
- l'extension à une dimension supérieure en posant $ij=k$

En appliquant la loi des modules sur les quaternions $w+xi+yj+zk$, Hamilton va alors redécouvrir l'identité d'Euler sur les quatre carrés. En effet, il ignore cette identité et il décrit comment, fébrilement, il assiste à la simplification des équations. Si l'on peut penser qu'une vision singulière des opérateurs l'a aidé à se séparer de la commutativité (cette séparation est naturelle car, pour lui, dans un produit les deux facteurs n'ont pas toujours le même sens, l'un opère, c'est le *multiplicator*, tandis que l'autre, le *multiplicande* subit l'opération), les conceptions sur le temps ne sont pas évidemment nécessaires à ce processus.
A partir de la découverte, les premiers textes produits par Hamilton sont des preuves de la nécessité du système. Ces preuves *a posteriori* s'adressent à ses amis et aux mathématiciens qui n'ont pas renoncé à découvrir la multiplication, et reposent sur des axiomes physiques (l'espace est symétrique et isotrope) et sur des contraintes algébriques (la multiplication doit être distributive et inversible, elle doit supporter la loi des modules). Pour Hamilton, l'algèbre n'est pas un système arbitraire de signes mais, au contraire, la science qui doit permettre de traduire et de penser les lois universelles de la nature. Il s'ensuit une hiérarchie, selon laquelle il n'est pas équivalent d'abandonner la commutativité ou l'isotropie de l'espace. La perte de la commutativité ne correspond donc pas au choix d'un système aux axiomes arbitraires, elle a été une condition nécessaire à la construction d'un système algébrico-géométrique dans R^3. Hamilton se montre d'ailleurs assez peu passionné par les recherches des mathématiciens anglais pour découvrir d'autres systèmes d'imaginaires.
Le système des quaternions devait, il faut le dire, sembler très exotique à un grand nombre de savants de l'époque. D'ailleurs les tous premiers textes que rédige Hamilton sont, eux, entièrement géométriques. Il y explique comment, grâce à la géométrie sphérique, et ceci <u>en dimension trois</u>, on peut donner une construction géométrique du produit. Ces textes sont au commencement de ce que j'ai appelé la voie 1, la justification, la présentation et, en termes modernes, la construction de l'algèbre des quaternions elle-même. La présentation "formelle" des quaternions par $i^2=j^2=k^2=ijk=-1$, est loin d'être la seule, bien au contraire, Hamilton a produit de nombreuses présentations entre 1843 et1853. Ces présentations peuvent avoir un contenu géométrique [1847], symbolico-géométrique [1843], ou purement algébrique (quadruplets de moments [1848]). J'ai montré dans ma thèse comment ces différents textes, qui adoptent des points de vue en apparence contradictoires, entrent dans la méthode de construction par analyse/synthèse que j'ai évoquée précédemment.
Mais quand on multiplie deux quaternions purs, on trouve un quaternion dont la composante scalaire est l'opposé du produit scalaire et la composante vectorielle est ce que l'on appelle en termes modernes le produit vectoriel. Les quaternions sont donc, parallèlement, dès 1844 appliqués (ce qui était leur destin) à la géométrie. C'est ce que j'ai appelé la voie 2. Le but est de diffuser en Angleterre les nombreuses applications géométriques que son calcul a déjà fournies. Le champ d'application du

calcul des quaternions va parallèlement s'étendre à la Mécanique. En effet, pendant son voyage à Cambridge de 1845, Hamilton, dans les "*Newton's Rooms*", emploie pour la première fois, sur une idée de Herschel, les quaternions pour traduire un problème physique (l'attraction newtonienne [14]). La synthèse de toutes les constructions sera effectuée dans le premier livre que Hamilton écrit sur les quaternions en 1853, les *Lectures*. Une fois de plus Hamilton distingue l'analyse du concept. En effet l'analyse du Bipoint B-A correspond à la relation l'équivalence des bipoints puisque l'analyse est une méthode centripète qui ramène l'extérieur inconnu vers le centre connu. Le point B (*analyzand*) doit donc être ramené vers A l'*analyser*. La synthèse, qui est la démarche inverse correspond à la translation dont il note a le symbole. Elle peut ainsi s'écrire B=a + A et Hamilton note cette relation:

Vectum= Vector + Vehend.

La même démarche est suivie pour le produit. C'est la relation fondamentale $(b:a)\times a = b$ qui définit le quotient $b:a$. L'analyse du quotient induit la recherche d'une relation fondamentale d'équivalence sur les couples. La synthèse revient à rechercher la transformation géométrique correspondante. Dans le cas de deux vecteurs orthogonaux, il s'agit de la rotation d'un quart de tour qui envoie le premier sur le second. Cette démarche constructive (qui n'est que partiellement cohérente) rend la lecture de l'ouvrage très difficile et peut-être inhabituelle aux mathématiciens de l'époque. Herschel, un ami de Hamilton, avoua, malgré deux tentatives n'avoir jamais pu dépasser la troisième leçon. Pourtant Hamilton est très rigoureux et n'identifie les objets algébriques qu'après avoir soigneusement vérifié leur compatibilité par rapport à la structure.

Cet échec de la première voie l'amena sans doute à privilégier l'autre chemin qui s'était ouvert après la découverte, celui des applications à la géométrie et, à partir de 1846, à la mécanique. Hamilton était convaincu que ses conceptions métaphysiques avaient été le moteur de sa découverte. Il pouvait, à la rigueur, accepter d'abandonner leur exposition: quiconque utilisait les quaternions, ou reconnaissait leur intérêt mathématique, lui rendait indirectement raison. Ainsi les dix dernières années de sa carrière furent-elles consacrées à la traduction algébrique de toute la géométrie ou la mécanique dont le jeune homme s'était nourri.

6. Les points d'archaïsme

Hamilton utilise des sources anciennes, parcellaires, souvent non réactualisées (Poinsot, Monge). Il ne connaît souvent d'un auteur donné qu'un seul ouvrage. Il possède par exemple le mémoire sur les surfaces de Gauss mais il ignore ses traités arithmétiques. Il semble coupé des jeunes mathématiciens anglais qui vont produire à partir de 1845, et en particulier de Cayley. Ses rapports avec Cayley, qui s'est sans doute intéressé un bref moment[15] aux quaternions avant de leur être hostile, mériteraient d'ailleurs une étude plus poussée. On retrouve à ce propos l'opposition analytique/synthétique, puisque Cayley comparait [1895] le calcul des quaternions à une carte, utile mais à condition d'être dépliée! Hamilton lit les mathématiciens étrangers quand ceux-ci font des références élogieuses à ses propres travaux ou *a contrario* pour vérifier l'état d'avancement de leurs recherches par rapport aux siennes. Il cherche si Grassmann (et même Gauss) n'a pas anticipé la découverte des quaternions. Les accusations (injustes) de plagiat lancées par Mac Cullagh ont nourri sa relation maladive aux autres mathématiciens, et aussi sa crainte de ne pas être suffisamment reconnu ou celle d'être copié. Il demandera ainsi à son seul élève, Tait[16], de ne rien publier sur les quaternions avant la sortie des *Elements*.

D'autre part, Hamilton, contrairement à ce qu'une analyse trop rapide laisserait supposer, reste très attaché à la notion d'espace euclidien de dimension trois. Nous avons remarqué qu'avant la découverte, il avait refusé volontairement de chercher ou de développer plus avant tous les systèmes

---

[14] [Graves II, p.495].

[15] Par exemple dans [Cayley 1848].

[16] Tait a donc attendu la mort de Hamilton pour faire paraître son propre traité sur les quaternions [Tait 1867]. Le célèbre ouvrage de physique qu'il rédige avec Thomson [Thomson 1867], le futur Lord Kelvin, ne contient, lui, pas de référence aux quaternions à cause de l'hostilité de ce dernier, comme le rappelle Crowe [1967 p.117-123]. De toute façon il est très postérieur à la période 1843-1853, pendant laquelle les quaternions n'ont que très peu d'influence sur les mathématiques anglaises.

qui ne répondaient pas exactement aux contraintes qu'il avait posées. Cette attitude provient du souci de l'utilisation physique et mécanique qu'il espérait en faire. Mais, surtout, Hamilton pense en dimension trois. Dès les quaternions crées, il abandonne la présentation qui symétrisait les quatre dimensions, pour construire un système non plus isomorphe à R^4 mais à $R \times R^3$. Le théorème de Cayley-Hamilton (qui donne l'existence d'un polynôme de degré trois qui annule l'endomorphisme correspondant) n'est démontré d'abord dans les *Lectures* qu'en dimension trois. Hamilton l'énonce et le démontre en dimension quatre dans les *Elements* en se ramenant à la dimension inférieure par des astuces de calculs. Il fait cette construction "à la main" car il ne dispose pas de l'isomorphisme fondamental entre l'espace et son dual, et a refusé de s'intéresser aux déterminants et aux expressions analytiques. Il omet d'ailleurs d'utiliser la conjugaison; la forme qu'il applique sur deux quaternions q et q', $S.qq'$, n'est pas définie positive [Hamilton 1865/1969 I, p.555]. Il n'avait pas compris parfaitement les règles algébriques énoncées précédemment sur la transposition, ou tout du moins leurs généralisations géométriques aux espaces de dimension n. L'exemple de la forme quadratique $S.qq'$, induite par le produit scalaire nous montre qu'il n'est pas vraiment détaché de l'espace physique. Ailleurs, en interprétant l'équation de la sphère unité, il replie, astucieusement, cette surface[17] de R^6 en deux surfaces ordinaires.
Le corps des complexes n'est pas entièrement maîtrisé. Hamilton construit des polyplets d'instants ou de moments, mais il est curieux de remarquer qu'il n'a jamais essayé de placer des complexes dans ses produits cartésiens. Peirce a remarqué [1870] que cette restriction avait obscurci son travail et l'avait empêché d'accéder aux généralisations possibles. Ce fait montre que le corps des complexes ne jouait pas pour lui un rôle identique à R. Ce serait une erreur que de comprendre le texte de 1835, celui de la construction des complexes par les couples, comme un texte qui ferme totalement les problèmes qu'avaient posés les complexes. Une même erreur serait commise par quiconque prendrait, rétrospectivement, ses constructions algébriques comme plus modernes qu'elles ne le sont réellement. Hamilton, malgré son style parfois très moderne, est donc encore très proche des mathématiciens de la première moitié du siècle.
Forcé d'accepter les racines complexes des équations du second degré, Hamilton rencontre, en outre, des difficultés avec les biquaternions[18]. Les problèmes sont d'abord d'ordre algébrique, à cause de la perte de la structure de corps, de la présence de vecteurs isotropes, etc. Mais le récit d'une conversation entre Hamilton et Salmon[19] nous montre les raisons profondes de cette extension: la nécessité de s'adapter aux développements nouveaux de la géométrie. On observe un mouvement semblable autour de la géométrie projective. Les sections 3 et 4 des *Elements* (t.I p.23) développent des articles sur ce que Hamilton appelle les coordonnées anharmoniques et les *geometrical nets*, correspondant à une présentation vectorielle des coordonnées projectives du plan. Ces articles (grâce à l'aide de Möbius qui est cité) constituent donc une présentation personnelle de la géométrie projective qui tente d'éviter le passage en analytique, tout comme les biquaternions essaient de répondre à la nécessité de travailler dans le complexifié. Le système quaternionien est ainsi traversé par diverses séquelles d'autres courants mathématiques que l'auteur se doit de rajouter à son ensemble. Mais pas plus dans les *Lectures* que dans les *Elements*, Hamilton n'est en mesure de construire cette extension aux quaternions imaginaires. Il utilise donc pour les introduire symboliquement les mots de l'école philologique, sans pour autant s'y convertir. La méthode constructive, féconde quand elle était appliquée aux concepts que le mathématicien maîtrisait bien, ne peut plus fonctionner ici.

---

17 Il s'agit de compléxifier l'équation de la sphère unité $\rho^2 = -1$ pour un biquaternion $\sigma + \tau\sqrt{-1}$. On obtient les deux équations $\sigma^2 - \tau^2 + 1 = 0$ et $S.\sigma\tau = 0$; *Lectures Art 675 p.673.*

18 Dans ce cas la forme induite par S n'étant pas définie, l'algèbre dégénère en une algèbre de matrices.

19 [Graves III p.606].

7. Conclusion

On a souvent comparé Hamilton et Peacock. Ainsi Helena Pycior [1981] a pu considérer, à tort il me semble, que le point de vue de Peacock anticipait le principe de liberté du mathématicien. Lorsque Peacock essaie d'interpréter, c'est-à-dire de justifier des utilisations particulières des symboles dont il a donné les lois universelles, Hamilton, lui, cherche à les construire. Même une fois écartée la question de l'invention (Hamilton en physique ou en algèbre est un chercheur fécond, alors que Peacock ne trouve rien), les attitudes des deux mathématiciens divergent fortement. Toutefois il faut souligner qu'à partir des années 1850 et de la montée d'une nouvelle génération de mathématiciens (en particulier Cayley), toutes ses oppositions théoriques ou métaphysiques seront dépassées et ne se poseront même plus.

Une des difficultés ou l'une des caractéristiques de la manière de Hamilton est d'essayer d'embrasser toutes les facettes d'un même problème en même temps, et ensuite de tenter de présenter des formes multiples ou des interprétations d'un tout qu'il croyait vraiment un. Ceci est vrai autant pour les différentes preuves *a priori* ou *a posteriori* de la nécessité du système, que pour les différentes constructions. Mais cette attitude joue un rôle inversé, et très singulier, lorsque le mathématicien réinvestit dans la théorie des découvertes importantes. Ainsi dès 1844-45 il trouve une application fondamentale des quaternions, la paramétrisation du groupe des rotations [1847]. Mais plutôt que d'en rechercher toutes les applications, il réinvestit une partie des mêmes idées dans les *Lectures*, dans la construction même du système quaternionien.

Hamilton a essayé de penser son rapport à l'invention. Souvent les mathématiciens, pour parler de leurs découvertes, reviennent à Platon. Dans son cas on pourrait dire, pour simplifier, qu'il exprime de l'algèbre par la métaphysique, mais que c'est par la mécanique qu'il produit de l'algèbre. Je crois avoir montré dans ma thèse grâce à plusieurs exemples détaillés que, certes l'idée de relation l'aide pour produire ou définir de l'algèbre par un mouvement de construction synthétique, mais que ce processus n'est fécond qu'après un très long travail d'analyse. D'une certaine manière, Hamilton n'arrive à construire synthétiquement que ce qu'il connaît déjà très bien. Dans le texte sur "l'Algèbre comme la Science de l'Ordre" [1833], il est très prêt de définir des relations d'ordre partiel. La discussion menée, pour trouver, à partir du polynôme caractéristique le système d'imaginaires correspondant en dimension deux, peut inclure (sans qu'il s'en soit aperçu) la définition des nombres doubles et duaux [1848]. Les généralisations gratuites s'avèrent inopérantes.

En revanche, la pratique et l'invention du mathématicien peuvent très bien déroger localement aux principes énoncés par le métaphysicien. Hamilton est capable dans ses notes d'introduire des modules qui ne sont plus des produits scalaires euclidiens, pour les écarter ensuite.

Les auteurs qui ont sans doute surestimé la modernité de la découverte de 1843 lui font en général le grief d'avoir, après 1850, "tourné en rond" compilant dans le langage des quaternions toutes les mathématiques de ce temps. Il a ainsi reformulé des textes de Poinsot, Gauss, Moebius, puis Salmon dans le langage des quaternions. Certes une grande partie des objets mathématiques majeurs ont été trouvés avant 1850, mais même dans la dernière partie de sa vie, Hamilton continue d'introduire des objets algébriques abstraits qui vont remplacer les calculs. Il simplifie les équations de la surface d'onde et de la surface réciproque quelques années avant de mourir[20].

Le refus de recourir aux déterminants le coupe de la production mathématique des années 1850 (Sylvester, Cayley). Mais ce refus le force parallèlement à approfondir sa réflexion sur la dualité (offerte par la forme $S.qq'$). J'ai montré que cette notion jouait d'ailleurs chez lui un rôle central, soit dans les constructions (quand il s'agit d'identifier le couple de vecteurs orthogonaux avec le normal direct), soit dans sa pratique (pour le théorème de Cayley-Hamilton), soit enfin pour algébriser la géométrie (dualité sur les courbes et les surfaces), mais que cette dualité prenait, au moins pour la géométrie, sa source dans les travaux d'optique des années 1830.

Hamilton présente donc le curieux mélange d'un style algébrique très particulier, souvent inventif (unité-structure), et de conceptions générales tournées vers le passé (énoncés géométriques-auteurs cités-cloisonnement). Il est probable que l'intérêt suscité par les textes de Hamilton sur le temps -tout comme sa réelle supériorité inventive sur les mathématiciens de sa génération (Peacock en

[20] Voir par exemple mon article sur les quaternions et le mouvement du solide autour d'un point fixe [Sinègre].

particulier) a amené trop de chercheurs à surévaluer, rétrospectivement, ses conceptions globales sur l'algèbre et sa compréhension de l'espace à n dimensions. Au contraire, si l'on met en avant l'évolution de ses pratiques, on remarque, à côté d'un style algébrique qui est toujours très brillant et une volonté de construire très moderne, que ses préoccupations et sa manière sont celles d'un mathématicien de la première moitié du dix-neuvième siècle.

BIBLIOGRAPHIE

CAYLEY (Arthur).

[*CMP*] *The collected mathematical papers,* 14 vol., Cambridge, 1889-1898; rééd New York: Johnson Reprint, 1963.

[1848] On the application of quaternions to the theory of rotation. *The London Edinburgh and Dublin mathematical magazine,* t. XXXIII (1848), p.196-200; *CMP* 1, p.405-410.

[1895] Coordinates versus quaternions. *Proceedings of the.Royal Society of Edimburgh* t.XX (1895) p.196-200; *CMP* 13, p.541-544.

CLIFFORD (William Kingdon).

[*MP*] *Mathematical Papers* (1882); rééd Chelsea publishing company New York (1968).

[1877] *Notes of Lectures on quaternions. MP* p.478-515.

CROWE (Michael).

[1968] *A History of Vector Analysis; the evolution of the idea of a vectorial system.* London, University of Notre Dame Press (1968).

DAHAN DALMEDICO (Amy).

[1993] *Mathématisations. Augustin-Louis Cauchy et l'Ecole Française.*Blanchard (1993).

DURAND (Marie José).

[1990] Genèse de l'Algèbre symbolique en Angleterre: une influence possible de John Locke. *Revue d'histoire des sciences,* t 43 (1990) p.130-180.

GRAVES (Robert Perceval).

[1882-1889] *Life of Sir R.W.Hamilton,* 3 vol., Dublin, 1882-1889; rééd. NewYork: Arno Press, 1975. [On notera simplement Graves I, II, III pour désigner ces volumes.]

HAMILTON (Sir William Rowan).

[*MP*] *Mathematical Papers,* 3 vol., Cambridge: The University Press, 1931-1967.

[*MS*] MS 1492, manuscrits des "notebooks" de S.W.R. Hamilton, Trinity College Library Dublin.

[1833a] Algebra as Science of Order (1833), *MS* 27.

[1833b] On a general method of expressing the paths of light, and of the planets, by the coefficients of a characteristic function. *Dublin University Review.* (1833) p.795-826.

[1835a] *Lettres à Lord Adare.* Hermathena (1879) p.469-89.

[1835b] Theory of conjugate functions, or algebraic couples; with a preliminary and Elementary Essay on Algebra as Science of Pure Time. *Transactions of the Royal Irish Academy Proceedings,* t.17 (1837) p.293-422; *MP*3, p.3-96.

[1837] Address by the president, *Royal Irish Academy Proceedings,* t.1 (1836-1839) p.215.

[1846] *Statics. MS* 70.

[1843a] *Quaternions*. *MP3*, p.103-105.
[1843b] Letter to Graves on quaternions; or on a new system of imaginaries in algebra. *MP3*, p.106-110.
[1844] On a new species of imaginary quantities connected with the theory of quaternions. *Proceedings of the Royal Irish Academy*. t.II (1844) p.424-34. *MP3*, p.111-116.
[1846] On symbolical Geometry. *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*. I (1846) p.45-57, 137-154, 256-263.
[1847] On Quaternions or a new system of imaginaries in Algebra, with some geometrical illustrations. *Proceedings of the Royal Irish Academy* t.III (1847), p.1-16; *MP3*, p.355-362.
[1848] Researches respecting quaternions first series. *Transactions of the Royal Irish Academy* t.XXI (1848) p199-296 *MP3*, p.159-226.
[1853] *Lectures on quaternions*, Dublin, 1853.
[1866] *Elements of quaternions*, London, 1866; 3e éd., 2 vol., New York: Chelsea, 1969.

HANKINS (Thomas).
[1980] *Sir William Rowan Hamilton*. The Johns Hopkins University Press, 1980.

MAC CULLAGH (James).
[1836] On the laws of the double refraction of quartz *Collected Works*. éd. J.H.Jellet & S.Haughton. Dublin.63-74.

MATTHEWS (Jerold).
[1978] W.R.Hamilton's paper of 1837 on the Arithmetisation of Analysis. *Archive of history of exact sciences*. vol 19.1 (1978) p.178-200.

OHRSTROM (Peter).
[1985] W.R.Hamilton's view of Algebra as the Science of Pure Time and his revision to this view. *Historia Mathematica* vol 12 (1985) p.45-55.

PEACOCK (George)
[1833] *Report to the recent progress and present state of certain Branches of Analysis*. Report of the third meeting of the British Association for the Advancement of Science (1833) p.185-352.

PEIRCE (Benjamin)
[1870] Linear associative algebra. *American Journal of Mathematics* t.4 (1881), p.105.

PYCIOR (Helena)
[1981] George Peacock and the British origins of symbolical algebra. *Historia Mathematica* vol 8 (1981) p.23-45.

SINEGRE (Luc)
[1994] *Au delà du temps pur: aspects géométriques, constructions et pratiques dans l'oeuvre algébrique de Sir Rowan Hamilton*. (C.Houzel dir.), Université Paris VII, 1994.
[1995] Les quaternions et le mouvement du solide autour d'un point fixe chez Hamilton. *Revue d'histoire des mathématiques*. I (1995), p.83-109.

TAIT (Peter Guthrie)
[1867] Elementary treatise on quaternions, 1re éd. Oxford, 1867; trad. française après la 2e éd. anglaise de 1873 par Gustave Plarr, Paris: Gauthiers-Villars, 1882

THOMSON (William)-TAIT (Peter .Guthrie)
[1867] *Treatise on Natural Philosophy*.

WINTERBOURNE (Anthony)
[1982] Algebra and Pure Time: Hamilton's Affinity with Kant. *Historia Mathematica* vol 9 (1982) p.195-200.