A. F. Monna

Créativité, causalité et créations en mathématiques

Séminaire de Philosophie et Mathématiques, 1994, fascicule 1
« Créativité et créations en mathématiques », , p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1994___1_A1_0>

Créativité, Causalité et Créations en Mathématiques[1]

A.F. Monna
De Bilt/Utrecht, Pays Bas
Kerkdwarslaan 15, NL 3731 EM, De Bilt

janvier 1994

1. Introduction

Je me propose de parler dans cette conférence sur le développement de la mathématique pendant les siècles. Comme introduction je commence avec quelques remarques sur la nature de la mathématique. Il s'agit alors de remarques de caractère philosophique plutôt que de la mathématique elle même. Je veux considérer les grandes lignes de l'évolution, en tâchant de donner une caractérization générales. Ma propre éducation mathématique aux années vingt et alors continuée me fournissent une position exellente pour réfléchir sur la transformation de "classique" vers "moderne". Les méthodes utilisées, parmi lesquelles la place de la créativité, sont importantes dans cette transformation.

Je commence par poser deux questions fondamentales sur la nature de la mathématique. Je pose ces questions puisque la nature de la mathématique et le rôle de la créativité sont en relation intime. Je peux les formuler au moyen d'une seule phrase et je me permet d'utiliser la langue Anglaise:

1. <u>What</u> is mathematics?
2. What <u>is</u> mathematics?

On voit que la différence est dans l'accent: sur "what" resp. sur le verbe. La première a rapport à la matière, le contenu de la mathématique: what is mathematics and what is it not? Dans la seconde il s'agit d'un problème d'existence, et pour pouvoir en donner un réponse on suppose qu'on possède déjà une réponse à la première. La question suivante s'y attache: la mathématique est-elle une Science strictement causale telle qu'il s'agit dans cette Science d'inventions et pas de créations? C'est le problème central dont il s'agit dans cette conférence.

Ces dernières décades on a étudié ces problèmes dans la littérature. J'en ai contribué en particulier quant à l'évolution, cependant sans avoir en certaine mesure une réponse satisfaisante (Monna, 1992). Mais je ne suis pas seul dans cette situation: MacLane se demandait "What is algebra?" (deux publications) sans savoir donner une réponse. Wilder (1981) écrivait dans son livre "Mathematics as a cultural system" qu'il n'y a pas de sens de chercher une définition de la mathématique. Dans ma conférence on ne trouve pas non plus une

---

[1]Cette publication contient le texte d'une conférence organisée par le Séminaire de Philosophie et Mathématique (Ecole Normale Supérieure, Paris) le 17 janvier 1994. Par cause d'une maladie sévère de la femme de l'auteur cette conférence fut annulée.

réponse, ni sur la question de l'essence, ni sur le problème de la nature de la créativité. On trouvera des remarques qui puissent être utiles pour des réflexions. Pour la littérature voir Monna (1992).

2. L'évolution de la mathématique en phases

Je considère l'évolution de la mathématique en très grandes lignes. Cela me conduira à des réflexions sur la créativité. Mes réflexions sont groupées autour de la question si la mathématique est une science qui se développe - jadis aussi bien qu'en future - selon une chaîne de phases croissantes de telle manière que chaque phase est liée avec les phases précédentes par des arguments de nécessité? Autrement dit: la mathématique peut-elle être représentée comme un grand système composé de causalités, une évolution causale, pour ainsi dire une voi continue? Bien évident on trouve dans les développements des idées qui trouvent leurs origines dans la causalité. Mais ce n'est pas le cas pour les grandes lignes générales. Il existent dans cette voie des discontinuités, c'est à dire des développements qu'on ne peut pas expliquer par des lois de causalité. Je donnerai quelques exemples où il n'y a pas une forme de nécessité dans les développements. Je veux regarder la mathématique dans son cours de développement comme une partition en phases où chaque phase est en certain mesure dominée par un mathématicien fameux. Bien évident on peut en ajouter d'autres noms, puisque souvent il s'agit d'une coopération. Je propose les cinq phases suivantes:

1. *Euclide* c.s. et la mathématique dans la période classique.
2. *Descartes* et la voie de l'algébrisation.
3. *Leibniz* et *Newton* et le début de l'introduction de variables et de fonctions, la voie vers l'analyse.
4. *Cantor* et l'introduction d'ensembles en mathématique.
5. *Hilbert* c.s. et l'axiomatique et la voie vers l'abstraction.

Ces noms sont liés à certaines phases dans l'évolution, mais l'introduction, toujours de manière croissante, ne repose pas sur des arguments et des conclusions de nécessité, des raisons causales. Les phases sont préparées par le passé, mais pas dans une forme de déterminisme. Un mathématicien, seul ou en coopération, a traversé une frontière pour introduire une toute nouvelle idée ou notation, ce qui signifiait l'introduction, le debut d'une nouvelle phase. Une question se pose alors, quelle est l'origine de telles idées chez les innovateurs? Ici la créativité occupe une place importante et tout special la créativité libre. C'est le comportement créatif de mathématiciens qui est la source du progrès et tout spécial la créativité libre pour aller une nouvelle voie.

Mais alors, qu'est-ce qu'on entend par créativité et des créations? C'est une question difficile et mes remarques ne sont que provisoires.

3. Créativité et méthodes

Je veux considérer des aspects de la créativité. La créativité a une place dans beaucoup de Sciences et aux Arts, mais il est difficile d'en donner une définition formelle. Même une caractérisation en analysant des divers aspects de la créativité est pénible. D'une façon très générale on peut dire qu'on juge souvent que dans la créativité il s'agit de l'introductions des Idées toute nouvelles qui furent introduites pour pouvoir construire une nouvelle théorie. Mais c'est une caractérization assez pauvre qui ne dit rien sur les origines de ces Idées. Une question se pose: quelles sont les méthodes utilisées pour effectuer la créativité?

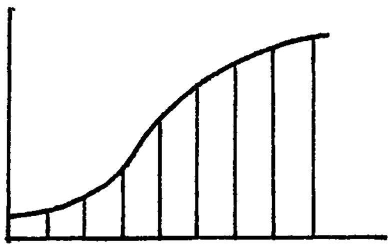
Or, il est remarquable d'observer que certains principes concernant la créativité qui sont a la base des méthodes dont on se sert en mathématique apparaîssent aussi en d'autres Sciences, et même dans le domaine des Beaux Arts. Du point de vue des méthodes créatives la distance entre les Sciences des Humanités et les Science Exactes (les Alpha et les Bèta) est ainsi moins grande qu'on pense souvent. C'est ici la place de mentionner un livre fort intéressant, récemment écrit par Dresden (1987), intitulé "Wat is creativiteit?" (Qu'est-ce que c'est la créativité?). L'auteur se posait pour but de caractériser les procédés de crétivité par une analyse de ces aspects en donnant plusieurs exemples. Ces exemples sont choisi principalement parmi les disciplines Alpha, cependant sans strictement exclure les Bèta. La lecture de ce livre par un mathématicien lui donne une expérience curieuse. Il a l'impression presque inévitable que beaucoup de réflexions de l'auteur possèdent de la valeur pour mieux comprendre les méthodes et idées en mathématique. C'est le pouvoir des méthodes générales créatives. Je veux traiter quelques exemples.

Un aspect de la mathématique est de pratiquer la mathématique: calculer, faire et effectuer, résoudre des problèmes. On y trouve des facets de créativité, mais la mathématique n'est pas caractérisée par dire que c'est une science technique. Il faut distenguer entre "technique" et "créativité", et à côté de ceci il faut mentionner l'influence de l'invention. En face des développements de nos années on peut plutôt parler de la mathématique comme d'une "science créative". Mais bien évident, cela ne suffit pas pour caractériser le but des mathématiciens dans leur travaux: il y a d'autres disciplines qui tout de même sont créatives.

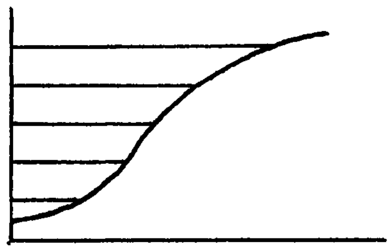
Ce qui frappe en mathématique moderne ce sont les idées qui tout special conduisent vers l'abstraction. Quant-à les méthodes il faut mentionner l'imitation, la similarité et l'analogie, la généralisation, pour arriver enfin à l'abstraction et axiomatisation. Je pense, par exemple, au passage de la géométrie à deux dimensions à celle de trois dimensions et enfin à la géométie analitique à n dimensions, mais aussi à la géométrie synthétique (Schoute n=4). Au premier cas la créativité est assez pauvre, mais au dernier cas l'attitude créative est plus forte, puisque pour cela on avait besoin de l'Idée de pouvoir quitter les dimensions finies et la Réalité Physique. L'Idée d'une infinité de dimensions était encore plus puissante. C'était l'entrée des espaces abstraits.

Qu'est-ce que on peut dire concernant les rapports entre "faire" de la mathématique et "créativité?

Au commencement j'introduisais une grande ligne générale dans le développement en phases fondamentales. Or, on peut indiquer aussi des lignes plus scondaires en relation avec la créativité. Les développements en géométrie en sont un exemple. L'evolution de la notion d'intégrale est aussi un exemple dans ce cadre. On peut voir le début de l'intégrale dans la géométrie (surface, volume). Riemann donnait une définition en considérent des partitions de l'axe des X. Lebesque, au contraire, considérait une partition de l'axe des Y, ce que lui conduirait aussi à limites de sommes. C'était, cependant, une déviation de la manière traditionelle de penser: l'axe des X ne possédait plus une position priviligiée.



Riemann



Lebesgue

Dans la phase de la mathématique de nos années on a développé la notion de l'intégrale d'un point de vue tout différent. On ne considère l'intégrale pas comme limite de sommes. Le point de départ est une propriété algébrique de la notion classique de l'intégrale. C'est l'introduction d'une notion d'intégrale comme une fonctionnelle linéaire dans un espace de fonctions. Le principe créatif de cette méthode est l'attitude de se débarasser du conformisme dans la façon de penser: une attitude non-conformistique comme entrée dans la mathématique de nos années. Au cas de l'intégrale c'était l'additivité qui fut la base de la théorie.

Il y a beaucoup d'exemples. Je pense à l'introduction des méthodes axiomatiques et, par exemple, la voie de l'analyse fonctionnelle. Mentionnons les méthodes vectorielles remplaçant les méthodes classiques de coordonnées. C'est la voie de les espaces vectoriels, les espaces normés, espaces sur un corps K en remplaçant le corps $\mathbb{R}$ par un corps K. Par exemple les espaces sur un corps p-adique. Tout ceci n'est pas basée sur la causalité, mais c'est un développement de la création libre. Cependant, on ne peut pas expliquer tous les développements par ces réflexions. Mentionnons par exemple les travaux de Stieltjes sur les fractions continues et les relations imprévues avec des domaines qui semblent bien loin, comme fonctions quasi-analitiques, et problèmes des moments. Et puis, la théorie axiomatique de la théorie du potentiel et les fonctions harmoniques, en origine une théorie venant de la physique. Ici, la causalité est bien loin; il n'y a pas de nécessité dans ces dévéloppements. Comment expliquer de tels résultats? Faut-il chercher les origines dans l'Invention?

Cela me conduit à la notion de "creatio ex nihilo". C'est une notion introduite depuis l'Antiquité. Il s'agit alors de résultats dont on ne peut pas trouver les origines dans les méthodes usuelles, des créations imprévues et spontanes, en tout cas des résultats dont on ne connait pas les origines et ainsi sont attribués au "Néant", le "Grand Vide". Mais le Néant lui-même est paradoxal. Si on admet que le Néant signifie quelque chose, quoi que ce soit, il y a une contradiction interne: le Néant ne serait pas "rien", donc une contradiction. Une telle façon de penser, est elle une véritable voie pour mieux comprendre les développements, ou s'agit il simplement de dire que nous ne savons pas les racines? En effet, toute Idée en mathématique a ses profondes racines dans une grande connaissance de la matière et cela diffère du Néant. Le Vide et le Néant sont des notions très discutables; nous en ferons quelques remarques dans ce qui suit.

4. Créations

Ce qui précède me conduit à quelques remarques plus fondamentales sur le type des créations et l'existence. Des problèmes de caractère philosophique s'y attachent. D'abord des remarques sur l'abstraction. Je préfère, cependant, ici la notion "fictive". En effet, pour le mathématicien le mot "abstrait" possède une signification spéciale comme dans les notions "groupe abstrait", "espace abstrait" etc. Pour les non-mathématiciens, au contraire, la mathématique dans sa totalité est une science abstraite. Les mots fictif et fictions, cependant, possèdent une signification générale: il s'agit d'objets sans identité spécifique et c'est un aspect spécial pour la mathématique. Je veux l'illustrer.

Dans une phase très élémentaire, le début de l'algèbre, on écrit déjà des relations comme $a+b=c$, et plus tard on trouve "soit a un ....", et "soit f une fonction telle que ....", cela sans aucune spécification stricte de a,b,c,f. Il y s'agit des hypothèses fictives. Ni a,b,c, ni f possèdent une identité spécifique. Ce sont des situations toutes normales en mathématique. C'est la voie de la mathématique. Partout on trouve des relations avec des symboles comme

$$\Delta f=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \quad f'(x)=\lim\Delta f, \quad f'(x)=\frac{df}{dx}, \quad I=\int f(x)\,dx \quad etc.$$

Il faut ici bien distinguer entre les grandeurs et les représentations elles-mêmes, et les symboles qui servent pour les représenter. De telles symboles ne possèdent aucune identité spécifique. f, par exemple, peut être considéré comme un opérateur. Il s'agit d'un procédé de généralisation dont le résultat est une situation qui a une semblance avec une metalangue. Plus fort, pour pouvoir développer des théories générales - qu'il faut bien distinguer d'exemples ou d'applications - on ne veut même pas connaître des identités. C'est un facet essentiel en mathématique. Des problèmes philosophiques s'y attachent: c'est le problème de l'identité des objets en mathématique. Comment peut-on calculer avec des symboles inconnus? Je me réfère ici aux travaux du mathématicien-philosophe hollandais Mannoury.

Nous possédons une grande liberté à introduire de tels "objets fictifs inconnus". Mais dans quel système, ensemble, peut-être un espace fictif à côté d'une Réalité Physique, existent-ils? Comment est-il possible que quelque "chose" existe sans connaître son identité? Qu'est-ce qu'on peut dire concernant des relations entre les procédés de créativité et l'existence sans aucune identité spécifique? Cela demande une étude des procédés de créativité en connexion avec des symboles fictifs. Il s'agit des problèmes de "Exister" et "Existence". On peut se figurer qu'il s'agit ici d'une difficulté mathématique pour les jeunes.

5. Existence, le Vide et le Néant

Je veux ajouter quelques réflexions sur les rapports entre la notion d'existence et le Vide resp. le Néant. Pour commencer je reviens à mes remarques précédentes sur le développement de la notion d'intégrale où j'ai mentionné la définition d'une notion d'intégrale comme fonctionnelle linéaire. C'était une conséquence du théorème de Hahn-Banach en analyse fonctionnelle (Banach, 1932). On peut attribuer à cette intégrale le nom "intégrale universelle", ou, si l'on veut, "intégrale générale" (Monna, 1983). Ceci puisque toute fonction réelle bornée sur [0,1] est intégrable. On serait incliné de dire qu'il s'agit ici d'un resultat très beau; Dresden (1987) dirait peut-être que c'est un résultat parfait. Tout problème d'intégrabilité est résolu. Mais c'était justement là où on peut formuler des objections. La théorie semble finie. Il n'existe pas de singularités, il n'y a pas unicité et cette intégrale est non-constructive. Je ne connais aucune application. Ce sont justement les exeptions et les singularités qui sont les sujets de recherche et qui rendent une théorie intéressante. Une théorie d'intégration ainsi établie est pour ainsi dire morte. C'est une situation embarassante: un beau résultat mais en même temps sans utilité. Faut-il en tirer la conclusion que la créativité a des limites, donc n'est pas entièrement libre? Je crois plutôt que c'est surtout l'élément de surprise qui nous frappe dans une telle situation, n'en déplaise la non-constructivité et l'absence d'applications. C'est la possibilité de l'introduction qui a notre intérêt. C'est la même chose avec des théories où figurent des objets sans identité. Ceci grâce à des méthodes puissantes comme il y en a les méthodes ensemblistes, l'algèbrisation, les méthodes vectorielles.

L'idée d'une théorie morte me conduit encore à quelques autres notions discutables qui s'y attachent. J'ai introduisé l'idée d'une théorie morte comme une théorie qui ne permet aucune extension significative. Toute extension conduit au Vide.

C'est pourquoi je veux formuler quelques questions sur le Vide et le Néant (voir Monna (1992) pour creatio ex nihilo). Ces remarques méritent des réflexions. Mais puisque récemment un livre fut publié sous le titre "Signifying Nothing" (Rotman, 1987) où l'on trouve de telles réflexions, je ne veux que formuler quelques problèmes sans beaucoup de commentaires.

Qu'est-ce que c'est le Vide, ou vide tout simple? Et aussi: qu'est-ce que c'est "rien"? Comment existe-il? Par exemple la place des phrases:

- Je suis un rien dans la mathématique.
- En mathématique nous sommes rien.

Il semble donc que "rien" existe comme une proposition. Le 'Rien' existe-il dans nos Pensées Humaines?

> Pour illustrer les difficultés qu'on rencontre dans une discussion sur la notion de "rien", le nihilo, je pense à un discours entre deux mathématiciens, A et B:
>
> A: Qu'est-ce que tu as acheté dans cette boutique?
>
> B: Je voulais acheter rien, mais cela ne se trouvait pas dans la boutique.
>
> A: Comment? Je ne connais le Rien. Qu'est-ce que c'est?
>
> B: J'ai lu dans un livre un passage sur rien et je voulais l'acheter. Je ne sais pas, cependant, ce qu'on entend par rien. Ça semble exister, mais où?
>
> A: Alors, j'ai une idée. Selon l'opinion des très grands mathématiciens, nous, tous les deux, nous sommes "rien", ou, si l'on veut, "des riens". Pour les bourgeois, cependant, nous sommes des savants qui possèdent une existence, contraire à l'opinion des coryphées. Ainsi, existe-il une notion de "non-existence" à côté de "l'existence"?
>
> B: C'est une situation embarassente.

Alors, ce n'est qu'un étape pour arriver au Vide Absolu, le Néant. On a les mêmes questions. Existe le "Néant" et quel est le sens de cette notion; pensons au "horror vacuo". Peut-on se figurer le Néant? On pourrait dire que le Néant existe dans les Pensées Humaines et c'est pour ça que nous en pouvons parler. Peut-on se figurer le Néant (et ainsi le Vide) comme un produit de procédés créatifs? Mais on rencontre des difficultés. On pourrait penser que pour arriver au Néant (le Vide Absolu) il suffit de éliminer toute matière de notre espace, ceci inclus les éléments Humain. Mais alors, on a ainsi coupé toute Pensée et il ne reste rien pour vérifier s'il reste "quelque chose" après cette élimination. Ainsi le problème reste: que signifie le Néant? Suppose que le Néant (le nihilo) "existe" en certaine mesure. Comment est-il possible d'expliquer que des Idées toute nouvelles, vraiment originelles trouvent leur origine dans le Néant si le Néant signifie le Vide Absolu? Comment peut-on expliquer que des théories sont developpés de ce point de vue vraiment spéculatif? Peut on expliquer l'Existence des objets mathématiques? Les Grandes Idées, existent-ils dans un espace fictif, une réalité fictive, en quelque sorte un réservoir tel que le travail des mathématiciens consiste en formuler des découvertes. Alors toute définition de la mathématique apparaît comme une activité qu'on peut appeler a posteriori.

Pour une discussion de la signification de la notion "d'espace" je réfère à Falk (1990). L'auteur commence par des réflexions sur Réalité en Mathématique et Physik. Je cite un passage (page 3): *"Die Rede vom Weltbild der Physik erzeugt vertraute Assoziationen. Das Universum wird als leerer Raum begriffen, der in der Zeit vor sich hin existiert und als Bühne all dessen dient, was wir Materie und Strahlung nennen (und was wir der Kürze halber im folgenden einfach Materie nennen wollen)"*. Peut-on s'imaginer, ou même définir un "espace vide" sans intermédiaire des Pensées Humaines?

Mais il y a plus de difficultés dans ce domaine. Considérons par exemple la notion d'existence en mathématique. La notion d'"exister" possède une signification positive: on dit que "quelque chose" existe. Mais quelle est la signification de la négation: "quelque chose n'existe pas"? Comment peut-on formuler une proposition sur "quelque chose" lorsque cette chose n'existe pas? Ainsi "non-existence" est une proposition difficile. Dans quel système "existe" une telle notion? On connaît en mathématique les notions "existence forte" et "existence faible" (par rapport à l'espace dual). Faut-il placer "non-existence" à côté de ces deux? Comment existe "quelque chose" sans identité, ou même n'existe pas? Ainsi Griss a même développé une mathématique sans négation (voir le résumé par Van Dalen (1978)). Cette forme de mathématique fut développée comme conséquence de la critique sur la négation dans la logique.

Pour terminer je pose quelque questions fondamentales. Est-il possible de donner une définition formelle de la notion de créativité? Une définition adéquate doit satisfaire à la condition d'ètre valable pour le passé ainsi bien que pour la future. Or, ça semble difficile pour une science qui se trouve permanent dans un état de mouvement. Créativité est en relation avec "existence". Or, "existence" est tout de même une notion difficile. Peut on dire que les activités de créativité consistent en des opératios mentales dans nos Pensées? C'est une caractérization pauvre.

Je veux considérer une autre voie. Ci dessus j'introduisais l'Idée de considérer les grandeurs de la mathématique comme des symboles. Bien que là aussi il y a des difficultés - est-ce que ce sont des symboles liés à une Réalité Physique? - je veux suggérer la voie suivante.

Peut on considérer la mathématique comme un jeu avec des symboles, muni de règles, de méthodes et d'opérations formulé à l'avance? D'une part c'est une définition flexible qui peut rendre compte de la dynamique de la mathématique. D'autre part une telle définition est assez pauvre puisqu'elle ne peut pas rendre compte de façon concrète de tout ce qui se passe en mathématique. Mentionnons par exemple aux résultats dans lesquels l'infini a une place fondamentale. Pensons à l'axiome du choix, le lemme de Zorn. Cependant, une telle définition serait peut être aussi valable pour des activités dans les Humanités: la Peinture, la Poésie, la Musique et encore d'autres. Ce serait une liaison entre les Sciences Exactes et les Humanités.

6. Bibliographie

Actes du Colloque sur les Mathématiques et la Réalité, Séminaire de Mathématique de Luxembourg 1974, Centre Universitaire de Luxembourg, Luxembourg.

Dresden, S., 1987: Wat is creativiteit. Meulenhoff, Amsterdam.

Falk, G., 1990: Physik, Zahl und Realität. Birkhäuser Verlag, Basel.

Monna, A.F., 1983: Evolution des problèmes d'existence en Analyse. Collection Philosophie Mathématiques, Université Paris-Nord, IREM, Paris.

Monna, A.F., 1992: The way of mathematics and mathematiciens; From reality towards fiction. CWI Tract. 87, Centre for Mathematics and Computer Science, Amsterdam.

Rotman, B., 1987: Signifying Nothing; The semiotics of Zeno. Stanford University Press, Stanford.

Van Dalen, D., 1978: Filosofische grondslagen van de wiskunde. Van Gorcum, Amsterdam.

Wilder, R.L., 1981: Mathematics as a cultural system. Pergamon Press, Oxford.