Séminaire de philosophie et mathématiques

Yannis Delmas-Rigoutsos

Logique quantique

Séminaire de Philosophie et Mathématiques, 1993, fascicule 5
« Logique quantique », , p. 1-23
<http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1993___5_A1_0>

Logique Quantique

YANNIS DELMAS-RIGOUTSOS

17 mai 1992

I. Prologue

Avant toute chose nous désirons remercier Messieurs P. Cartier et M. Loi pour la confiance que ceux-ci nous ont accordé en nous proposant d'exposer ce sujet lors du Séminaire *Philosophie & Mathématiques.* Notre gratitude ira d'une part à MM. R. Omnès et J. Sallantin pour les renseignements dont ils nous ont faits profiter (nous ne traiterons cependant pas de leurs domaines de prédilection), d'autre part à M. E. Brézin qui a été notre professeur de Mécanique Quantique il y a quelques années. Enfin notre reconnaissance va a notre ami E. Goetz qui a bien voulu relire ce texte et émettre de judicieux commentaires.

§ 1. Introduction

Le but de toute logique est de donner un cadre normatif qui permette de raisonner proprement. C'est-à-dire, dans un cadre de raisonnement donné, d'émettre des conclusions justes à partir d'hypothèses, ou prémisses, justes. La notion de juste, de vrai, de réel n'a pas, *a priori*, droit de cité dans ce discours. En fait la réalité est plus complexe que cette vision, somme toute, un peu simpliste : les diverses logiques veulent, comme toute discipline de saveur scientifique, donner un cadre pour penser leur objet, donner une intuition.

Les êtres humains ne "fonctionnent" pas naturellement avec la Logique Classique, ni pour leur intuition, ni même au niveau de leurs raisonnements naturels[1]. Ce serait une grave erreur de penser que l'Homme est aussi rigoureux et logique qu'on veut bien donner à le croire. Les mathématiciens les mieux entraînés eux-même présentent les "défauts" habituels de leurs congénères, surtout, bien sûr, en dehors du cadre épistémique. Nous utilisons naturellement une logique plus faible que la Logique Classique, qui selon les cas et les individus confondra, par exemple, l'implication et l'équivalence, ou emploiera ce que l'on pourrait appeler l'"implication intuitionniste" plutôt que l'implication de la Logique Classique. La Logique Classique n'est donc absolument pas naturelle vis-à-vis de discours donnés (celui de l'Homme, par exemple) mais vis-à-vis d'objets donnés (les mathématiques, par exemple). Ceci étant posé, on sait que **la Logique Classique est la Logique de la vérité mathématique** ; nous verrons que **la Logique Quantique est la logique de l'objectivité quantique.** C'est un peu pour cela que nous employons des majuscules pour ces mots : il s'agit d'une analogie avec la taxonomie biologique, à l'usage près du latin... La Logique Quantique répondra à la Mécanique Quantique comme la Logique Classique à la Mécanique Classique. De plus, comme nous le verrons, la Logique Quantique partage avec la Logique Classique un "air de famille" indéniable : les deux espèces *Logique Classique* et *Logique Quantique* appartiennent au même genre *Logique.*

1. C'est un résultat commun de la psychologie expérimentale.

Il est très important de comprendre que même si tout modèle physique dans le sens où nous l'entendons maintenant est mathématique et donc régi par la Logique Classique, cela n'implique absolument pas que la logique sous-jacente à la réalité en tant que vue au travers de ce modèle soit la Logique Classique. **Tout modèle d'une réalité impose une logique propre à son objet.**

Au cours de cette conférence, nous nous proposons d'introduire tout d'abord la Mécanique Quantique, d'en indiquer les quelques expériences-clefs et paradoxes chatouillants. Nous pourrons ensuite rappeler sommairement les idées centrales de la Logique Classique. Nous serons alors à même de saisir tout l'intérêt de la Logique Quantique particulièrement du point de vue de la métaphysique et de l'intuition de physique (méta-physique).

§ 2. Prolégomènes

La philosophie de la physique raisonne souvent en supposant vraie une théorie donnée et en extrait une métaphysique. C'est un peu ce que nous serons amenés à faire. Cependant, il est important de rester vigilant et de se rappeler quelques problèmes inhérents à ce genre de démarche.

La première difficulté sera de ne pas trop coller à une théorie et à son formalisme avec le risque de ne rien expliquer "vraiment". Ce problème est fondamental et justifie les tentatives pour donner une intuition relative au formalisme lui-même. Certains ont pu dire que « la Mécanique Quantique est admise comme formalisme mais refusée comme théorie ». Il faut savoir que c'est toujours le cas pour une théorie naissante : il faut l'élucider, la comprendre.

L'autre difficulté est de nature plus méthodologique. Considérons un certain discours. Un autre discours l'englobant immédiatement peut correspondre à une interprétation métaphysique radicalement différente. Ou même, il n'est pas rare de voir une même théorie donner lieu à de multiples interprétations. Aussi il est nécessaire de relativiser considérablement tout résultat ainsi obtenu. Nous essaierons donc, par honnêteté intellectuelle, de limiter nos conclusions métaphysiques à l'illustration ou à la critique d'idées anciennes.

Terminons ces prolégomènes sur un autre problème important. Certains ont pu dire que « physics is a set of theories ready for logical analysis » ([6][2], p. 16). Une plus grande circonspection serait nécessaire eu égard au fait que les physiciens ne mettent généralement pas dans la théorie tout ce qu'ils utilisent dans la pratique. Il n'est pas rare de voir à part une théorie physique formalisée de telle manière les physiciens utiliser des objets qui ne sont pas (encore) des objets mathématiques à proprement parler. Ce fut le cas, par exemple, des infiniment petits qui furent utilisé longtemps avant que soit trouvée une définition mathématique adéquate. En conclusion nous retiendrons qu'il est assez risqué de travailler sur la théorie elle-même et qu'il vaut mieux employer des notions les plus généralisables possible, et fondées, autant que faire se peut, sur une vision de la réalité décrite.

2. Les indications entre crochets droits renvoient à la bibliographie située à la fin du texte.

II. Thèse : la Mécanique Quantique

Dire en deux mots ce qu'est la mécanique quantique est un défi redoutable que nous ne relèverons pas ; nous nous contenterons de montrer quelques points essentiels à la compréhension des problèmes liés à cette théorie[3]. Par ailleurs, nous voulons repousser un certain nombre d'idées reçues sans fondement en essayant de donner au lecteur les bases nécessaires pour se forger ses propres opinions.

§ 1. Introduction générale

La Mécanique Quantique a commencé de se développer au tournant du siècle. Les dates essentielles en sont :

1900 Plank explique le rayonnement du corps noir par une quantification de l'énergie émise,

1905 Einstein explique l'effet photo-électrique en introduisant un quantum de lumière,

1913 Bohr propose un modèle de l'atome d'hydrogène expliquant son spectre,

1916 La théorie de l'atome de Bohr-Sommerfeld affine la précédente,

1923 Thèse de de Broglie : "tout est onde",

1925 La mécanique des matrices de Heisenberg et la mécanique ondulatoire de Schrödinger (reprenant des idées de de Broglie) proposent des théories générales,

1930 Von Neumann propose un formalisme unifié (Dirac l'étendra par la suite).

Les phénomènes principaux sur lesquelles l'essentiel des discussions peuvent se fonder sont l'expérience des fentes de Young et le paradoxe EPR. Ils stigmatisent les problème liés à la nature de la matière, à l'observation, au déterminisme et à la complétude physique.

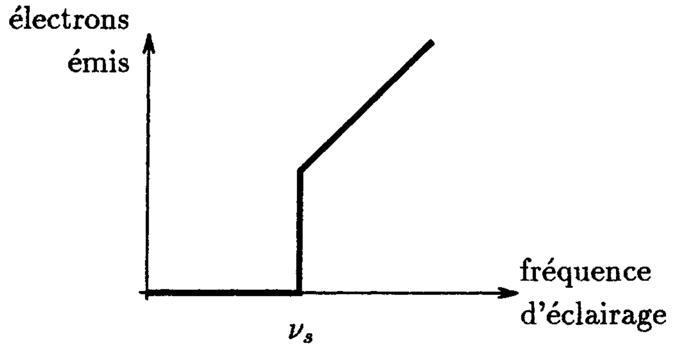
§ 2. La dualité onde/particule

L'histoire des sciences a souvent vu la nature de la lumière changer de statut. Elle aura été tour à tour décrite comme particule ou comme onde (entre autres). Le premier terme désigne une analogie avec des petits grains qui véhiculeraient le principe de lumière, le second avec des rides à la surface de l'eau ou les ondes acoustiques. En fait, on va le voir, la controverse s'étend au delà du problème de la nature de la lumière.

a. Tout est particule : l'effet photo-électrique

Newton, dans son livre *Opticks* (1704), se représente la lumière comme des corpuscules. Ceci correspond à une vision mécaniste plus générale qui vise à décrire la nature en ces termes. Elle adoptera plus tard le cadre des ondes électromagnétiques et perdra cet attribut. C'est Einstein, en 1905, qui réintroduira cette hypothèse pour expliquer l'effet photo-électrique.

L'effet photo-électrique apparaît quand on illumine une plaque de métal avec de la lumière (monochromatique) dont on fait varier la fréquence. On observe que, pour une fréquence ν plus élevée qu'un certain seuil ν_s, la plaque de métal émet des électrons.



3. Cependant on peut trouver en librairie plusieurs ouvrages de vulgarisation qui peuvent donner une idée assez correcte sur tel ou tel point. Ceci sera d'autant plus profitable que nous n'avons pas la place ici de nous étendre par trop sur ce sujet.

Il est important de noter que ceci est indépendant de la quantité totale d'énergie projetée.

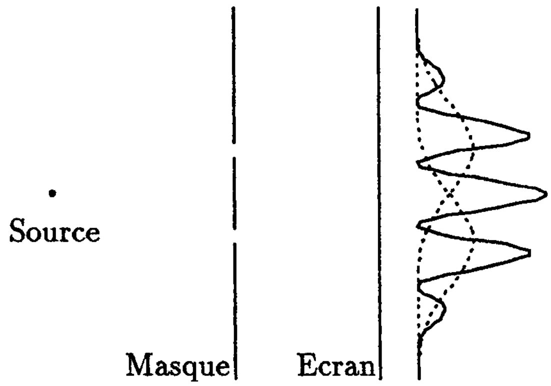
Pour expliquer ce fait Einstein propose que l'on considère que la lumière est composée de quanta[4] de lumière, que l'on appellera par la suite photons, chacun véhiculant une énergie $E = h.\nu$ si ν est la fréquence de la lumière utilisée. Ainsi, pour une lumière de fréquence trop faible, les photons n'ont pas assez d'énergie pour déloger des électrons.

Photon, avec ce nom était entérinée la nature (également) corpusculaire de la lumière qui rejoignait ainsi la grande famille des "objets concrets" que sont les particules traditionnellement considérées comme corpusculaires : l'électron, les noyaux atomiques, etc.

b. Tout est onde : les fentes de Young

Opposé à Newton, Huygens, dans son *Traité de la lumière* (1690), développe l'hypothèse que la lumière est, au contraire, une onde. Appuyée par l'expérience de Young, cette conception finit par être généralement admise avant 1905.

L'expérience des fentes réalisée par Thomas Young vers 1803 consiste à faire passer la lumière émise par une source lumineuse à travers deux fentes et à observer la lumière ainsi projetée sur un écran.



Si nous représentons en tireté les intensités lumineuses mesurées quand respectivement l'un ou l'autre des trous est fermé et en plein l'intensité mesurée quand les deux trous sont ouverts, nous observons un phénomène d'interférence. Ce comportement est généralement considéré comme typiquement ondulatoire.

Or un phénomène très étrange fut mis en lumière par Davisson et Germer (1927) : ils reproduisirent l'expérience de Young avec des électrons et obtinrent également des franges d'interférence. Ceci sonnait le glas d'une vision strictement corpusculaire des particules habituelles...

c. Dualité onde/particule

C'est à un Français, Louis de Broglie (prononcer "de Brœil"), que l'on doit d'avoir démontré dans sa thèse que l'on peut associer une onde à toute particule. Ainsi les électrons, les noyaux atomiques et même nous sommes associés chacun à une onde, ayant sa fréquence, sa longueur d'onde, sa propagation mais pas (forcément) de milieu. Ainsi tout objet matériel est aussi onde.

Inversement on peut voir en Mécanique Quantique qu'un grand nombre de phénomènes ne véhiculent certaines propriétés que de manière discontinue, par quanta. Ainsi, par exemple, de la même manière qu'à la lumière on peut associer des photons, on pourra associer des phonons à des ondes acoustiques se propageant dans certains cristaux.

En résumé, tout élément dans la nature semble vouloir se comporter, selon le cadre expérimental, comme corpuscule ou comme onde : on parle de **dualité onde/corpuscule**. Il s'agit de dualité dans un sens assez fort : on n'a pas ou l'un ou l'autre selon les cas, mais un mélange des deux dans tous les cas. Le fait est que la nature ondulatoire de l'électron existe tout le temps mais n'est visible que dans certaines conditions, de même pour la nature corpusculaire de la lumière.

4. On dit un *quantum*, des *quanta*. « *Quantum* » veut dire « une certaine quantité ».

d. Ontologies sous-jacentes

Ce que nous avons dit indique clairement qu'une ontologie classique (on entend par là mécaniste, ou newtonienne) ne suffit pas, non plus en fait que l'ontologie (dite) de Schrödinger, laquelle voit tout comme une onde et rend mal compte de certains phénomènes discontinus (ressentis comme corpusculaires).

Une ontologie proposée par Popper revient d'une certaine manière à rejeter la dualité onde/corpuscule. Pour lui les systèmes individuels sont des corpuscules et les ondes associées aux systèmes décrivent une propension du système à évoluer d'une manière ou d'une autre. Cette vision des choses, intéressante et originale, est en fait, nous le verrons plus loin au sujet du paradoxe EPR, rendue caduque par l'expérience d'Aspect.

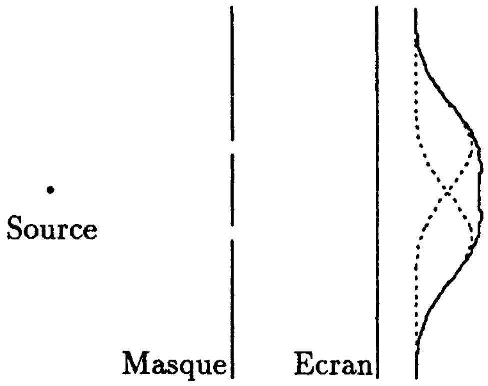
Une autre manière proposée d'interpréter la Mécanique Quantique est de considérer tout "objet" comme une onde qui porterait une particule, l'onde exprimant la probabilité de manifestation de la particule. Il s'agit de l'ontologie de Born.

Une dernière présentation souvent admise est de dire qu'ondes et particules sont deux aspects d'un même phénomène, un peu comme les visions de face et de profil d'une sculpture. C'est, si l'on peut dire, la vision de moindre risque. Dans sa version forte elle véhicule l'idée que dire plus est inexact.

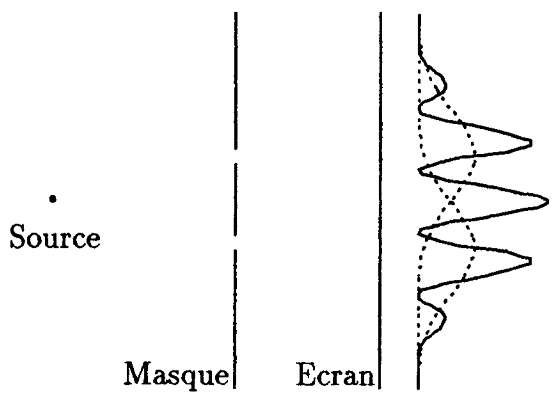
§ 3. Le problème de l'observateur

Nous allons discuter dans ce paragraphe une variation sur le thème des fentes de Young. Pour ce faire nous allons suivre l'exemple de Feynman dans son cours (le sujet est classique [4]).

Imaginons que nous fassions l'expérience des fentes de Young avec des balles de fusil, nous obtiendrions un comportement typiquement classique en observant la quantité d'impacts sur l'écran. Il n'y a pas d'interférence, les amplitudes correspondant à un trou ouvert (tireté) s'ajoutent pour former l'amplitude correspondant au deux trous ouverts (trait plein) :



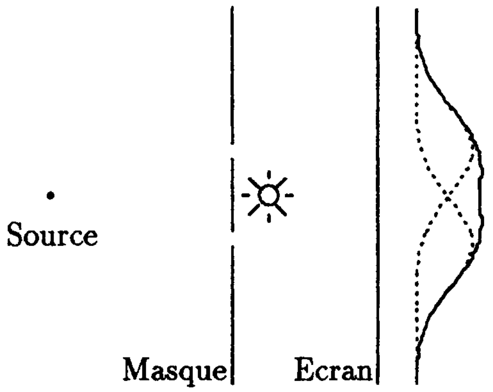
Imaginons maintenant que nous fassions cette expérience en mettant notre dispositif sur de l'eau que nous ferions onduler au niveau de la source nous obtiendrons un comportement typiquement ondulatoire si nous regardons l'amplitude[5] d'oscillation au niveau de l'écran. Des interférences apparaissent ici :



5. Techniquement il s'agit de l'intensité, qui est le carré de l'amplitude.

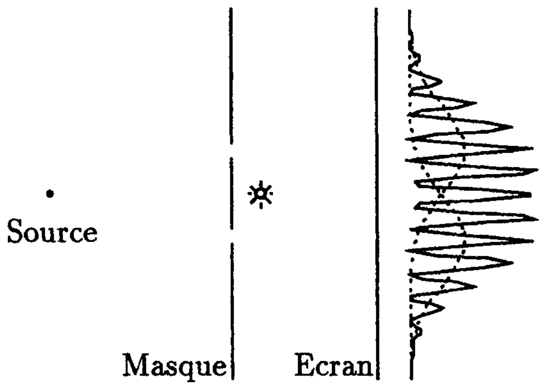
Faisons maintenant l'expérience avec des électrons. Si la vitesse des électrons est suffisamment faible, pour une certaine taille des trous, on obtiendra un résultat similaire à celui des ondes présenté plus haut. Bien entendu, comme on s'y attend, les électrons arrivent un par un au niveau de l'écran et on peut compter individuellement les impacts si le débit est suffisamment faible. Ceci est très étonnant *a priori*, car si l'on imagine que les électrons passent *soit* par le trou A, *soit* par le trou B, en ajoutant les probabilités, on devrait au contraire trouver le résultat classique où la courbe correspondant aux deux trous (en trait plein) est exactement la somme des courbes correspondant aux trous un à un masqués (en tireté). Autre fait étrange: en certaines zones de l'écran le nombre d'impacts est moindre quand les deux trous sont ouverts plutôt qu'un seul.

Pour essayer de décider si les électrons passent en A ou en B, on peut entreprendre d'éclairer nos électrons. On s'aperçoit effectivement alors qu'il n'y a une lumière que ou bien près de A, ou bien près de B et jamais simultanément (si les électrons arrivent suffisamment lentement). Le problème est qu'alors la courbe des impacts devient classique :



Bien entendu, si l'on éteint la lumière, la courbe initiale (avec interférence) est à nouveau observée.

Comme dans le cas de l'effet photoélectrique on s'attend à ce que diminuer la fréquence de l'éclairage diminue les perturbations imposées par celui-ci et restitue une figure d'impacts "ondulatoire" C'est effectivement ce qui se produit :



Le problème est que plus la longueur d'onde est grande moins "l'éclair" est bien localisé : avec une longueur d'onde de l'ordre du centimètre le point d'impact est localisé avec une précision de l'ordre du centimètre. A la limite on ne peut plus du tout dire par quel trou est passé l'électron. Globalement tout se comporte comme si plus notre connaissance est précise plus l'objet se comporte de manière corpusculaire c'est-à-dire plus les oscillations sont serrées les unes aux autres et finalement indistingables d'un continuum.

Ainsi est posé le problème de l'observateur en mécanique quantique, qui est très important et a donné lieu à d'innombrables discussions. Le point important est qu'**une observation est une interaction et en tant que telle ne peut avoir un effet indéfiniment réductible**. Certains auteurs formulent cette règle et d'autres similaires en faisant intervenir la conscience qu'a l'observateur du phénomène, ou, dans les cas les plus sereins l'information de l'observateur. C'est ce qui se passe si l'on formule la conclusion de l'expérience ci-dessus comme nous l'avons fait. Ceci est possible *heuristiquement* dans une assez large mesure, mais pas de manière absolue ; néanmoins ceci n'est pas nécessaire *pratiquement* puisque nous verrons qu'un certain nombre de conclusions peuvent être obtenues par un amendement de notre logique ; enfin ceci n'est pas souhaitable *méthodologiquement* puisque la physique a pour but une description objective de la nature, laquelle exclut ce genre de recours. Nous verrons au fur et à mesure de l'exposé qu'en fait ceci n'est pas non plus dans l'esprit de la théorie (si tant est qu'une telle chose existe).

Si l'on peut dire, **la réalité est indépendante de l'observateur mais pas de l'observation** : l'observateur n'est pas une notion physique pertinente dans le sens où l'on suppose toujours qu'existe une réalité indépendante ; d'autre part, ce qu'étudient les physiciens est le phénomène de la réalité, la réalité en tant qu'elle est observée.

§ 4. Le déterminisme

Il n'est pas rare de vouloir faire triompher une vision du monde en arguant d'une théorie scientifique. Parmi les concepts les plus flous de la philosophie des sciences se trouve justement l'opposition déterministe/aléatoire. Dans ce cadre, la Mécanique Quantique est souvent vue comme la justification la plus manifeste d'un aléatoire inhérent à notre monde et opposée à tout déterminisme. Voyons précisément ce qu'il faut en penser.

Tout d'abord, la Mécanique Quantique apparaît comme foncièrement statistique puisque nous ne pouvons que prédire la probabilité pour un événement d'advenir (ou sa propension, comme dirait Popper) ; ceci la justifie comme indéterminée pour certains. Pour d'autres c'est l'impossibilité de prédiction elle-même qui dicte le non-déterminisme. Pourtant si l'on s'en tient à l'état de l'Univers, on obtient en théorie une détermination unique de l'évolution. Pour un troisième groupe de personnes ceci fera la Mécanique Quantique déterministe. Nous allons donner plus d'information dans les paragraphes suivants pour permettre au lecteur de se faire une idée par lui-même.

a. Le déterminisme selon Laplace

Laplace établi au début de son *Essai Philosophique sur les probabilités* [2], l'énoncé le plus classique de la doctrine déterministe :

« Les événements actuels ont avec les précédents, une liaison fondée sur le principe évident, qu'une chose ne peut pas commencer d'être sans une cause qui la produise. [...]

» Nous devons donc envisager l'état présent de l'univers, comme l'effet de son état antérieur, et comme la cause de celui qui va suivre. Une intelligence qui pour un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée, et la situation respective des êtres qui la composent, si par ailleurs[6] elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrasserait dans la même formule, le mouvement des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome : rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir comme le passé, serait présent à ses yeux. L'esprit humain offre dans la perfection qu'il a su donner à l'Astronomie, une faible esquisse de cette intelligence. Ses découvertes en Mécanique et en Géométrie, jointes à celle de la pesanteur universelle, l'ont mis à portée de comprendre dans une même expression analytique, les états passés et futurs du système du monde. »

Rappelons qu'en Mécanique Classique on décrit une particule par sa position ($\vec{x} = (x, y, z)$) et sa quantité de mouvement ou impulsion (produit de la masse par la vitesse : $\vec{p} = m.\vec{v} = (p_x, p_y, p_z)$). La trajectoire est alors parfaitement déterminée (mathématiquement) par les équations du mouvement. Cependant, pour bon nombre d'équations, le système sera "chaotique" et il sera impossible humainement de prévoir son évolution future.

En conséquence, même si la notion d'évolution du système semble assez claire, il n'est pas évident de savoir ce que doit évoquer l'image de cette intelligence surhumaine. En termes plus précis nous préférerons dire qu'**il y a déterminisme au sens mathématique mais indéterminisme au sens strict pour la Mécanique Classique.**

Le problème est que tout est ici décrit à l'aide de deux objets, la position et la quantité de mouvement, qui sont, en droit, accessibles avec une précision arbitraire. Ceci n'est plus valable en Mécanique Quantique où plusieurs phénomènes nouveaux interviennent qui obscurcissent le problème.

6. Laplace dit « d'ailleurs », nous nous permettons de traduire en Français moderne.

b. La relation d'incertitude de Heisenberg

En Mécanique Quantique la position et la quantité de mouvement n'ont aucune existence "réelle" : ce sont les résultats de mesures. On peut cependant vouloir continuer sur la lancée de la mécanique classique et définir l'état comme la conjonction d'une position et d'une impulsion. Il faut cependant savoir que toute telle tentative sera limitée par la relation de Heisenberg :

$$\Delta X.\Delta P \geqslant \frac{1}{2}.\hbar.$$

Cette relation affirme que l'incertitude sur la position multipliée par l'incertitude sur l'implusion vaut toujours au moins une certaine valeur fondamentale (la constante de Planck sur 2π). Ainsi plus on peut mesurer précisément la position, plus la valeur de l'implusion nous échappe et inversement.

En conséquence de quoi, **si l'on entend par déterministe « avoir une position et une impulsion bien déterminées à tout instant », au sens strict comme au sens mathématique la Mécanique Quantique sera très fortement non-déterministe.**

c. L'équation de Schrödinger

Cependant cette démarche ne saurait nous satisfaire si nous nous intéressons à l'essence des choses : l'éventuelle valeur de la position ou de l'impulsion ne saurait définir l'évolution du système, il nous faut employer une notion d'état qui soit intrinsèque. Ce que la Mécanique Quantique appelle état du système est, selon les formalismes, sa fonction d'onde ou son vecteur d'état. Son évolution est déterminée par l'équation de Schrödinger :

$$\hbar.\frac{\partial}{\partial it}.|\psi(t)\rangle = \mathbf{H}.|\psi(t)\rangle$$

ou, sous la forme de Heisenberg :

$$|\psi(t)\rangle = e^{\frac{\mathbf{H}}{\hbar}.it}.|\psi(0)\rangle$$

où $|\psi(t)\rangle$ représente l'état du système au temps t, $|\psi(0)\rangle$ son état initial et $\mathbf{H}$ son opérateur d'énergie.

Donc, **si l'on entend par état du système son vecteur d'état postulé par le formalisme**, on retrouve le cas de la Mécanique Classique : **il y a déterminisme au sens mathématique mais, *a priori*, indéterminisme au sens strict.**

d. La réduction du paquet d'onde

Comme on l'a vu l'observation est un phénomène généralement invasif, aussi en Physique apparaît une scission entre la Mécanique Quantique comme moyen d'accéder à l'objectivité et la Mécanique Quantique comme moyen de décrire la réalité. Dans la première vision se pose le problème de savoir ce que représente une mesure, l'appareillage étant considéré comme extérieur ; tandis que motivé par la deuxième vision on décrira l'appareillage de mesure comme une sous-unité du système, le problème étant de décrire l'interaction de cette sous-unité et du reste. La première stratégie a été particulièrement développée par l'interprétation de Copenhage, mise en œuvre par Bohr et ses disciples. Cette conception, moins ontologique et plus expérimentaliste, fondée sur une vision classique du monde macroscopique, tend à disparaître peu à peu devant l'avancée des systèmes macroscopiques au comportement très quantique. Les recherches essayent maintenant de développer notre compréhension de l'émergeance d'une physique classique à partir d'une description quantique en fonction de la quantité d'interaction des constituants du système. Dans cette optique notre $|\psi\rangle$ de plus haut représente tout l'univers et il est régi en permanence par l'équation de Schrödinger.

Nous ne détaillerons donc pas la première stratégie, nous noterons cependant qu'elle fait apparaître le phénomène dit de *réduction du paquet d'onde*[7]. Il s'agit du passage brutal d'un état quantique mystérieux à un état classique au moment de la confrontation avec l'instrument de mesure (par exemple). Avant l'interaction, et après celle-ci, le système peut être vu comme une onde dont l'évolution est décrite par le formalisme quantique ; mais au moment de celle-ci le système

7. En anglais *collapse of the wave packet*.

doit se conformer à un état permis par l'observable mesurée par l'appareillage. Cette base de raisonnement impose une indétermination très forte ne serait-ce qu'à cause du fait que la théorie ne se donne pas les moyens formels de comprendre un tel passage. Nous noterons quand même que seule cette méthode, plus abordable, permet pour l'instant de réaliser des prédictions et donc se justifie pleinement comme moyen pratique ; cependant, d'un point de vue philosophique, sans même empoigner le rasoir d'Ockham, elle apparaît comme inélégante et biaisée.

En résumé nous noterons que **selon toutes les interprétations, une Mécanique Quantique avec réduction du paquet d'onde est absolument non-déterministe**, comme doit l'être un formalisme qui néglige une donnée majeure du problème (nous avons bien vu que l'observation n'est en rien négligeable).

§ 5. Réalisme et variables cachées

Mais, malgré tout ce que vous avons pu voir, la Mécanique Quantique recèle encore de problèmes métaphysiques. Le plus crucial peut-être concerne la réalité des objets mathématiques qui interviennent dans la théorie. Ces objets, sommairement, peuvent avoir deux défauts de réalité : *primo*, ils peuvent n'être que des épiphénomènes d'une meilleure description du monde physique et ainsi ne pas le décrire de manière complète (à un certain niveau de représentation) ; *secundo*, ils peuvent contenir des éléments n'ayant pas de correspondant dans le monde physique et dus uniquement au formalisme mathématique employé. Le second point est subtil et fait l'objet encore actuellement de débats profonds. Aharonov notamment développe beaucoup d'efforts afin de démontrer la réalité de certains objets formels. Nous ne nous intéresserons ici qu'au premier point.

Opposé à Bohr qui défendait la **complétude** de la Mécanique Quantique, Einstein pensait qu'elle était incomplète, que son aspect statistique n'était du qu'à une description partielle de la réalité. Des **variables cachées** de comportement classique étaient supposées sous-tendre le formalisme quantique.

a. Le paradoxe d'Einstein-Podolsky-Rosen (EPR)

Einstein, Podolsky et Rosen, dans un fameux article [3], démontrent en se fondant sur une expérience de pensée que la Mécanique Quantique est ou bien incomplète ou bien non-locale (permet des corrélations instantanées à distance). Très attachés à une vision réaliste et locales, ils concluent que des variables cachées existent, sous-jacentes à la Mécanique Quantique. C'est cette non-localité que l'on nomme en général le « paradoxe EPR ».

Plus tard, dans les années 60, J. S. Bell reprend l'idée d'EPR et sur la base de calculs assez simples de probabilités quantiques montre que la Mécanique Quantique est *toujours* non-locale, qu'elle soit ou non complète. De plus sa présentation permet de passer à l'expérience, ce que fera A. Aspect. Ainsi, cet effet sera enfin démontré par l'expérience.

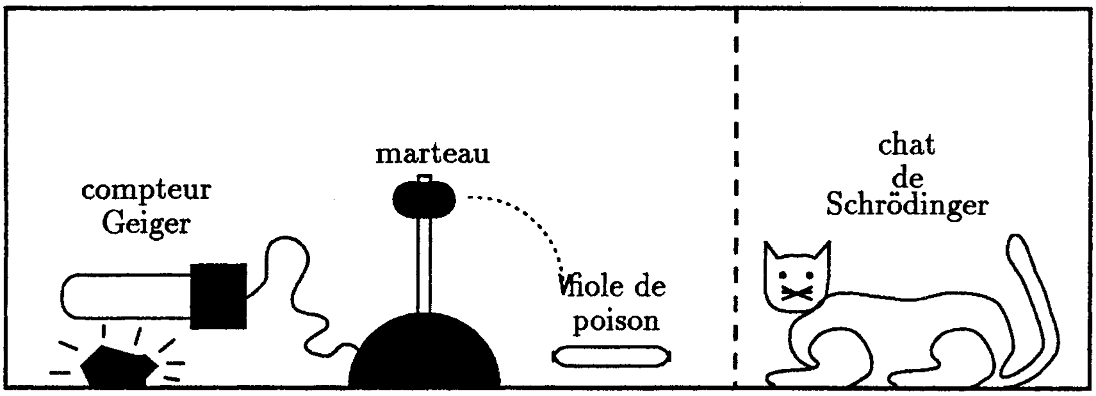
b. Le chat de Schödinger

Schrödinger décrit ainsi une expérience de pensée[8] :

« A cat is penned up in a steel chamber, along with the following diabolical device (which must be secured against direct interference by the cat): in a Geiger counter there is a tiny bit of radioactive substance, *so* small, that *perhaps* in the course of one hour one of the atoms decay, but also, with equal probability, perhaps none: if it happens, the counter tube discharges and through a relay releases a hammer which shatters a small flask of hydrocyanic acid. If one has left this entire system to itself for an hour, one would say that the cat still lives *if* meanwhile no atom has decayed. The first atomic decay would have poisoned it. The ψ-function of the entire system would express this by having in it the living and the dead cat (pardon the expression) mixed or smeared out in equal parts. »

8. Version anglaise, traduite de [15] dans [17].

Soit, schématiquement :



C'est cette expérience qui a le plus motivé de la part des observateurs des recours à la notion de conscience, notamment de conscience de l'observateur. Nous avons déjà évoqué ce point, nous nous contenterons de remarquer que, située à une échelle macroscopique, cette expérience nous fait considérablement ressentir le besoin d'un comportement classique.

§ 6. *Desiderata* logiques

Nous en arrivons maintenant à la logique de la Mécanique Quantique : que doit-elle être ? Et surtout que peut-elle être ? La logique qui correspond à une physique est, par une définition assez générale, celle qui prend pour énoncés les faits physiques expérimentables et les relie par une structure logique.

Les faits de base qu'elle doit prendre en compte seront du type « telle particule est dans tel volume d'espace à tel instant » ou encore « le système a tel spin vertical à tel instant »... Par contre la notion de fait physique en général mériterait d'être précisée plus en détail ; raisonnablement, nous nous contenterons de prendre comme faits physiques les constructions logiques de faits de bases.

Le problème essentiel devient alors de cerner précisément ce que l'on entend par construction logique. On imagine bien que l'on aimerait pouvoir disposer d'un « non », qui indiquerait que telle observable n'est pas dans tel domaine. On a également besoin d'un « et » pour indiquer des intersections de domaines ou des expériences simultanées.

On aimerait bien également, pourquoi pas, dire que dans l'expérience des deux fentes, l'électron (ou le photon) passe par le trou A « ou » le trou B même si on ne peut déterminer lequel. On aimerait bien aussi pouvoir dire qu'un particule a une impulsion « et » une position définie même si les deux ne sont pas simultanément mesurables.

III. Antithèse : la Logique Classique

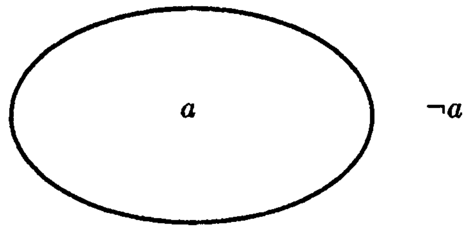
De manière à bien comprendre ce qui change en passant de la Logique Classique à la Logique Quantique, nous allons présenter la première sous une forme "utilisable". Nous essaierons, de plus, de donner une idée du lien qui peut exister entre logique et probabilités.

§ 1. Présentation de la Logique Classique

Pour parler le plus simplement possible, la Logique Classique est la logique des ensembles. Rendons cela plus précis...

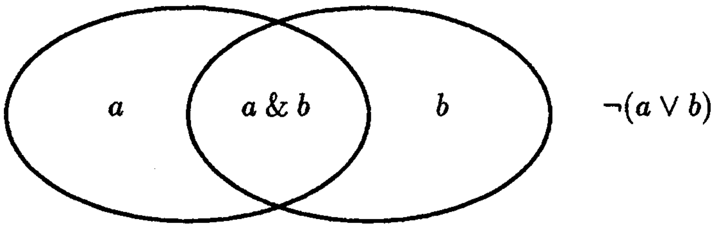
L'outil utilisé habituellement pour représenter des formules de la Logique Classique est le diagramme de Venn. Dans cette méthode, on représente les formules par des dessins d'ensembles. Des régions d'une feuille de papier font en général très bien l'affaire.

Ainsi, si l'on veut représenter la relation qui lie une formule a la plus générale avec sa négation (que nous noterons ici $\neg a$), on pourra tracer par exemple :

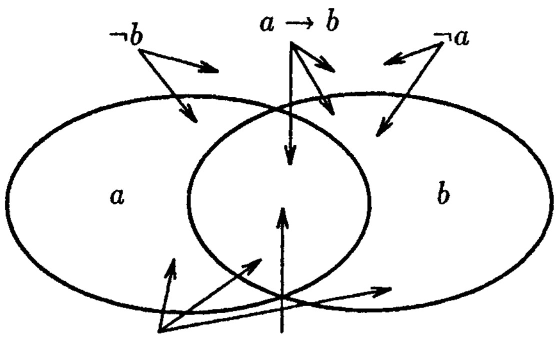


Dans ce diagramme a est représenté par l'intérieur de l'ellipse $\neg a$ par son extérieur.

On peut également représenter des formules complexes en fonction de constituants plus simples par cette méthode. Dans la figure suivante, par exemple,

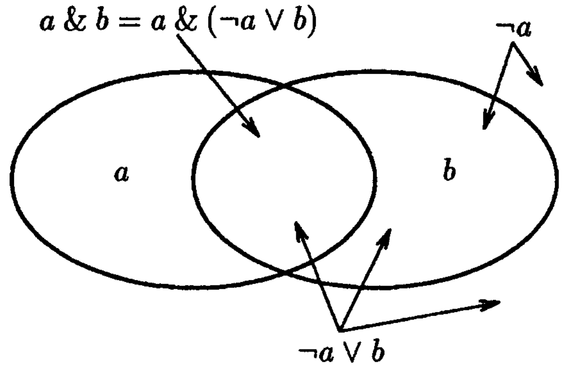


si la formule a est représentée par l'intérieur de l'ellipse de gauche et la formule b par l'intérieur de celle de droite, la conjonction « a et b », que nous noterons $a \,\&\, b$, sera représentée par l'intérieur de la lentille, intersection des deux zones précédentes. De même leur disjonction « a ou b », que nous noterons $a \vee b$[9], le sera par l'union des deux zones elliptiques. Toutes les régions délimitées par les deux ellipses représentent une formule et inversement toute formule construite à partir de a et b comme propositions élémentaires trouve sa représentation dans une zone de ce schéma. On a représenté dans la figure ci-dessous les formules constructibles les plus simples (sauf « vrai » qui correspond à tout le plan et « faux » qui correspond à l'ensemble vide), soit les négations $\neg a$ et $\neg b$ de a et b, leur conjonction $a \,\&\, b$, leur disjonction $a \vee b$, et l'implication $a \rightarrow b$.



9. On emploie souvent en logique un $\vee$ pour représenter le « ou », ceci nous vient du latin *vel*.

La figure suivante montre un exemple de calcul d'une représentation de formule.



La formule $a\&(\neg a \vee b)$ (lire « a et « b ou non a » ») est ainsi décomposée : On indique d'abord les zones correspondant à a et b (ici les deux ellipses). De la représentation de a on déduit la représentation de $\neg a$. De celle de $\neg a$ et b on déduit celle de $\neg a \vee b$. De cette dernière et de celle de a on a enfin la représentation de $a \,\&\, (\neg a \vee b)$. On voit d'ailleurs qu'il s'agit de la même représentation que $a \,\&\, b$; ceci est normal.

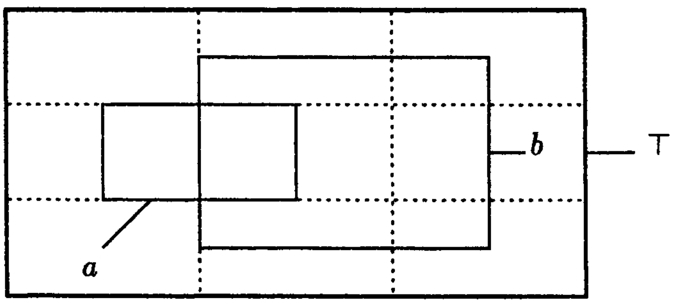
En effet, on peut démontrer que si un schéma donne pour deux formules la même représentation, alors ces formules sont équivalentes, et réciproquement. Il est donc justifié de dire que **la Logique Classique est la logique décrite par les ensembles.**

Si l'on veut dire les choses mathématiquement, un modèle de la Logique Classique est une algèbre de Boole et le résultat évoqué plus haut est l'énonciation intuitive du fait que toute algèbre de Boole peut être vue comme une collection de sous-ensembles d'un ensemble donné (théorème de Stone).

§ 2. Les probabilités classiques

Les probabilités en Logique Classique se définissent tout naturellement sur la base de ce qu'on appelle une théorie de la mesure. Pour traiter un exemple, on commencer par tracer l'ensemble qui va contenir le dessin de toutes les zones correspondant à des propositions : le dessin du « vrai ». Par définition cette zone a pour probabilité 1 : sa surface sera considérée comme l'unité d'aire. On dessine alors dans celle-ci une zone Z_i pour chaque proposition P_i. La probabilité de la proposition P_i peut alors être définie comme l'aire de la zone Z_i.

Dans l'exemple suivant la proposition a a pour probabilité $\frac{1}{9}$, b $\frac{1}{3}$ et $a \,\&\, b$ $\frac{1}{18}$:



IV. Synthèse : La Logique Quantique

§ 1. Définition : la logique de la Mécanique Quantique

Cette logique a été introduite comme telle par von Neumann et Birkhoff [16]. C'est au départ la logique de la Mécanique Quantique, c'est à dire la logique sous-tendant les faits expérimentaux de la Mécanique Quantique.

Dans la formalisation de la Mécanique Quantique donnée par von Neumann l'état physique du système étudié (pour nous de l'Univers) est représenté par un **vecteur** dans un **espace de Hilbert** lequel représente tous les possibles. Les quantités mesurables sont appelée **observables** et le fait de pratiquer une mesure d'une observable O revient à projeter le vecteur sur un sous-espace de notre espace de Hilbert, lequel sous-espace détermine une valeur mesurée o pour O (ou, en général, une gamme G de valeurs).

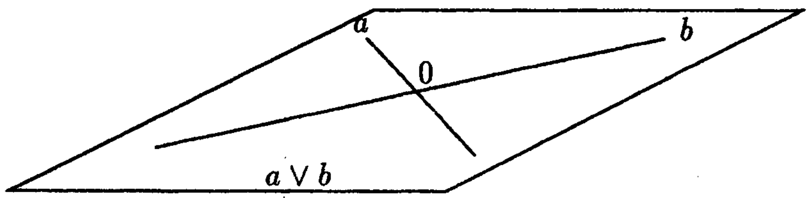
Par des méthodes que nous ne détaillerons pas on peut voir que l'assertion « telle mesure de O donnerait une valeur dans une certaine gamme G » pour une système préparé d'une certaine façon correspond à un sous-espace de l'espace de Hilbert choisi pour modéliser les possibles. De plus, modulo des postulats adéquats, tout tel sous-espace correspond à une mesure (ou combinaison de mesures) réalisable en théorie.

Plus généralement, la Logique Quantique (abstraite) est la logique dont les propositions sont les sous-espaces d'un espace de Hilbert donné. La conjonction (le « et ») est l'intersection de deux sous-espaces, leur disjonction (« ou ») est la somme fermée de deux sous-espaces, et la négation d'un sous-espace est son orthogonal. Il nous faut maintenant détailler tout ceci pour qui ne serait pas familier de ces notions.

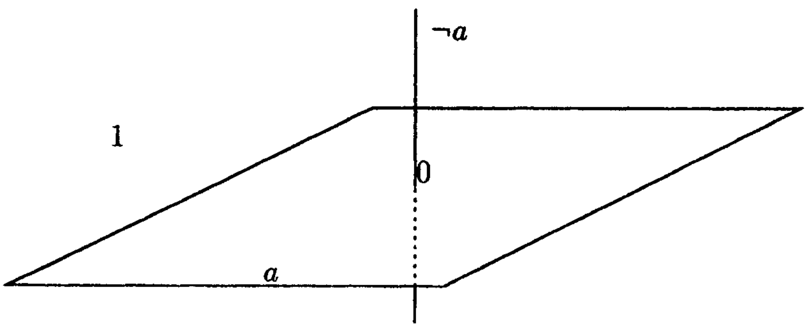
§ 2. De nouveaux diagrammes de Venn

Tout comme la Logique Classique était la logique des ensembles, la Logique Quantique est la logique des espaces de Hilbert. Un espace de Hilbert de dimension finie peut être vu comme l'espace euclidien habituel de même dimension (à la différence qu'en général les coordonnées sont des nombres complexes). Ses sous-espaces sont les espaces de Hilbert plus petits que (inclus dans) lui. Notons que comme nous parlons d'espaces vectoriels tous ces espaces contiennent 0, qui représente le « faux ».

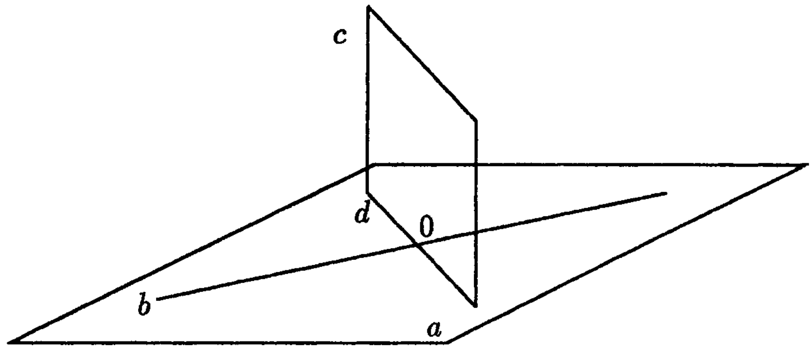
Ainsi, si a et b sont deux droites, leur disjonction, $a \vee b$ sera un plan :



Si notre espace de Hilbert de référence (représentant le « vrai », que nous notons 1) est "notre" espace à 3 dimensions, et si a est un plan, $\neg a$ (« non a ») sera la droite orthogonale à a (passant par 0) :



Dans la figure suivante nous avons $b \leqslant a$ et $d = a \,\&\, c$, par exemple. $b \leqslant a$, signifie en termes d'espaces que b est inclus dans a, et en termes logiques que b implique a. De même, $d = a \& c$, signifie en termes d'espaces que d est l'intersection de a et c et en termes logiques que d est équivalent à « a et c ».



En fait la notion complète est un peu plus complexe que cela du fait que certaines figures doivent être réalisées en dimension 4, 5, ou même, quand il s'agit de la Mécanique Quantique, en dimension infinie. Cependant, avec un peu d'imagination, on peut se rendre compte que ces schémas (en dimension quelconque) vont jouer le même rôle que les diagrammes de Venn en Logique Classique. Avant de voir cela, il faut donner une définition axiomatique de la Logique Quantique en définissant les connecteurs par des règles, comme on peut le faire pour la Logique Classique. Ceci est plus opératoire, même si moins intuitif *a priori*.

Notons, pour terminer, que ces diagrammes peuvent et doivent servir d'intuition pour la Logique Quantique. En effet, il est tentant, quand on dispose d'un formalisme, d'essayer de saisir le « sens » des connecteurs ; malheureusement, comme on s'en doute, l'expérience montre que tout est possible en matière de sémantique. Dans le cas de la Logique Quantique on trouve ceux qui affirment que le sens des connecteurs est le même qu'en Logique Classique et que seules changent des choses plus complexes comme la distributivité. Mais il y a aussi ceux qui disent que & et $\vee$ changent mais pas $\neg$, ceux qui pensent que c'est $\neg$ mais pas & et $\vee$ et ceux qui pensent que c'est $\vee$ mais pas & et $\neg$,... Nous ne nous lancerons pas dans une polémique si intéressante. Nous nous contenterons de dire qu'une possibilité est de visualiser le & comme en Logique Classique, le $\vee$ comme englobant une idée de positions logiques intermédiaires, enfin le $\neg$ comme UNE négation, en retenant cependant que celle-ci n'est pas unique. Ce n'est cependant pas le seul moyen : on peut, par exemple, centrer son interprétation sur la relation de compatibilité.

§ 3. La notion de compatibilité

Pour obtenir une logique utilisable de manière courante il n'est pas possible de se ramener systématiquement à la Mécanique Quantique ou aux espaces de Hilbert : il lui faut une description et un fondement autonome. Il sera toujours possible, ensuite de recourir à une interprétation fournie par la Mécanique Quantique.

Avant toute chose il faut définir ce qu'est une formule de la Logique Quantique. Ce point est facile : les formules de la Logique Quantique sont les mêmes que celles de la Logique Classique, seul leur "sens" diffère. Si les lettres a, b,... représentent des formules de la Logique Quantique, on veut donner un sens à $a \leqslant b$, 0, 1, $\neg a$, $a \vee b$, $a \,\&\, b$ et $a \rightarrow b$. Pour cela on ajoute la relation $a \supset b$ et on pose les axiomes suivants[10] :

1. $\leqslant$ est une relation d'ordre, c'est à dire que $a \leqslant b \leqslant c$ implique $a \leqslant c$, et $a \leqslant b \leqslant a$ équivaut à $a = b$ ($a \leqslant b$ correspond à la relation « a implique b » et $a = b$ à « a équivaut à b »),
2. 0 et 1 sont respectivement le plus petit et le plus grand élément (« faux » implique tout et « vrai » est impliqué par tout),
3. $a \vee b$ est le plus petit élément supérieur à a et b,
4. $a \,\&\, b$ est le grand élément inférieur à a et b,
5. $\neg a \vee a = 1$ (tiers exclu) et $a \,\&\, \neg a = 0$ (non-contradiction),

10. On peut aussi présenter ces axiomes sous forme de règles de déduction, comme on le fait pour un certain nombre de logiques. On peut voir en appendice la présentation de P. Gibbins [5].

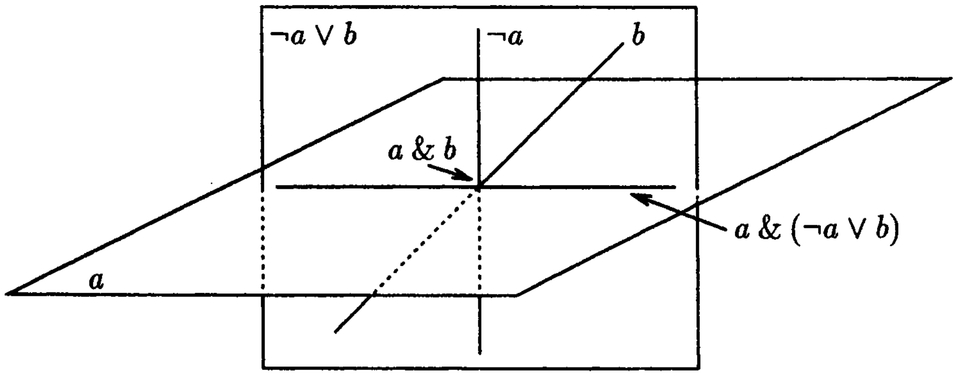
6. par définition $a \to b$ vaut $\neg a \vee (a \,\&\, b)$ ($a \to b$ est une formule qu'il faut bien distinguer de la relation $a \leqslant b$),

7. on dit que a et b sont **compatibles**, et on note $a \circ b$, si $a \,\&\, b = a \,\&\, (\neg a \vee b)$, et on impose que si $a \leqslant b$, alors $a \circ b$.

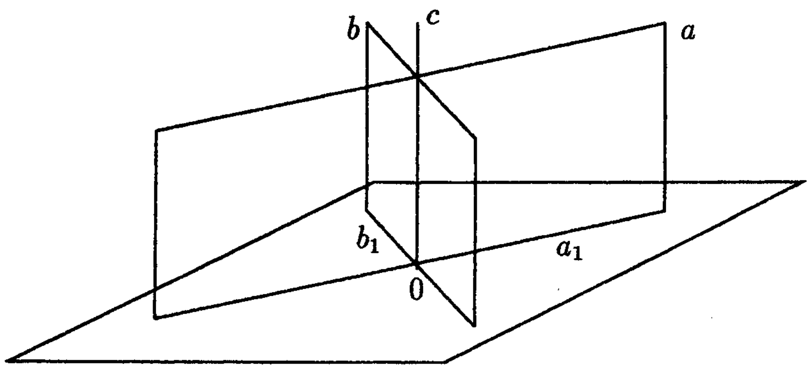
En fait tous les axiomes sauf le dernier correspondent à ce que l'on pourrait poser en Logique Classique, à part peut-être l'implication qui se définit plus simplement par $\neg a \vee b$ (mais cette expression est équivalente à l'autre en Logique Classique). La différence vient de ce qu'en Logique Classique deux éléments quelconques satisfont toujours cette relation un peu étrange :

$$a \,\&\, b \quad = \quad a \,\&\, (\neg a \vee b).$$

Ce n'est pas le cas en Logique Quantique. Comme on le voit sur la figure ci-dessous, deux propositions quelconques ne sont pas nécessairement compatibles (cette figure est une figure en 4 dimensions dont l'une a été "écrasée") :



En fait, avec nos pseudo-diagrammes de Venn, $a \,\&\, (\neg a \vee b)$ est la projection de b sur a ; ainsi a et b sont compatibles si la projection de l'un sur l'autre est l'intersection des deux. Cette relation est symétrique mais pas transitive. On peut également démontrer en Logique Quantique que la compatibilité équivaut à se décomposer en espaces orthogonaux : $a \circ b$ si et seulement si $a = a_1 \vee c$, $b = b_1 \vee c$ où a_1, b_1 et c sont deux-à-deux orthogonaux :



Une autre manière équivalente de voir ceci est de dire que a et b satisfont une relation de distributivité, par exemple

$$a \,\&\, (b \vee \neg b) \quad = \quad (a \,\&\, b) \vee (a \,\&\, \neg b).$$

On peut même démontrer que si parmi a, $\neg a$, b, $\neg b$, une relation de distributivité non-évidente (ne découlant pas des premiers axiomes) est vraie alors a et b sont compatibles.

Physiquement deux propositions seront compatibles si les mesures correspondantes peuvent être réalisées simultanément. De manière générale sont compatibles deux éléments d'une vision cohérente de la réalité.

§ 4. La notion de négation

Un autre moyen de voir la différence qui peut exister entre Logique Classique et Logique Quantique est de considérer cette dernière comme construite sur la première à la différence près de l'existence de plusieurs négations.

Cette manière de voir assez riche peut se conforter à notre intuition. En effet, on peut classiquement supposer que « non-X » est la propriété de tout ce qui n'est pas X ; dans la pratique se pose alors le problème, dans certains cas, de délimiter « X » précisément, tout ce qui ne rentre pas dans ce cadre étant étiqueté non-X. Or, si l'on se rappelle le cas des paradoxes dits *sorites* (de σωρός, « tas »), on voit que ceci n'est pas clair du tout. Ainsi, si l'on s'intéresse au passage de l'état de têtard à celui de crapaud (paradoxe de Cargile), et que l'on pose X=« être un crapaud », il n'est pas clair que le non-X le plus intéressant soit défini par « ne pas être un crapaud » mais bien plutôt par « être un têtard ». Même si pour l'essentiel ces deux définitions sont équivalentes, elles expriment dans le détail des points de vue très différents.

Ceci est un défaut de la négation classique, et on aimerait bien, de fait, une négation plus proche de ce qu'on pourrait appeler la négation linguistique des substantifs. Ne connaissant que le domaine indo-européen nous nous restreindrons à celui-ci bien que le pendant soit très certainement vrai pour d'autres familles linguistiques. En Indo-Européen, donc, nous avons un préfixe privatif dont l'idée va plus loin qu'une simple négation classique. Cette négation du nom apparaît de manière fortement non-classique en Grec (préfixe αν-) et en Sanskrit (préfixe *an*-). On pensera au mot *anarchie* qui nous vient du Grec ou a l'idée de *non-violence* qui a eu un certain bonheur en Inde. Ainsi l'« an-arch-ie » n'est pas simplement le fait qu'il n'y ait pas de gouvernement mais va plus loin, se réfère à une certaine *négation* de la notion d'état (négation justement, mais dans le sens habituel, pas logique). De même, être « non-violent », n'est pas le simple fait de ne pas être « violent », mais adhérer à une théorie qui rejette la « violence », "sous toutes ses formes". Ainsi la négation du substantif, au moins dans ces langues, et au moins pour un certain nombre de cas, ne doit pas être visualisée par la négation au sens classique, mais par la *negatio* latine[11], voire même souvent par une **opposition**.

Si nous prenons l'exemple des couleurs, que nous admettrons disposées selon le "cercle chromatique" (une sphère serait plus exacte), on peut considérer que « rouge » correspond à telle plage de fréquences (à la nuance près du problème de frontière que nous avons soulevé). Mais que va-t-on poser comme « non-rouge »? On peut prendre, conformément à la Logique Classique, « tout ce qui n'est pas rouge », mais cela nous amènera certainement à prendre comme « non-rouge » des choses imperceptiblement différentes du « rouge ». Dans l'optique de la Logique Quantique, il peut être intéressant de prendre pour « non-rouge » la signification « vert » (Fig. 1, ci-contre). L'important est de noter que, dans cette optique, plusieurs possibilité s'offrent à nous : nous avons choisi « vert » qui correspond à la décomposition physiologique (rouge/vert, jaune/bleu) ou à la décomposition classique rouge/jaune/bleu, mais nous aurions pu choisir « cyan » qui correspond à la décomposition télévisuelle rouge/vert/bleu (Fig. 2), ou encore « bleu » qui correspond à une décomposition chaud/froid... Une infinité de possibilités se présentent qui peuvent être plus ou moins adaptées à tel ou tel problème.

Bien entendu, dans cette optique quantique, le $\vee$ ne correspond plus à l'intuition classique : il s'agit maintenant plutôt d'interpréter $a \vee b$ comme « a, b, **ou tout ce qu'on peut avoir comme propriétés intermédiaires** ».

11. On peut voir replacée dans un cadre plus général l'opposition qui existe en latin entre *aio* et *nego*: cf. Benveniste, [1], livre 3, chapitre 6, *Le vocabulaire latin des signes et présages*.

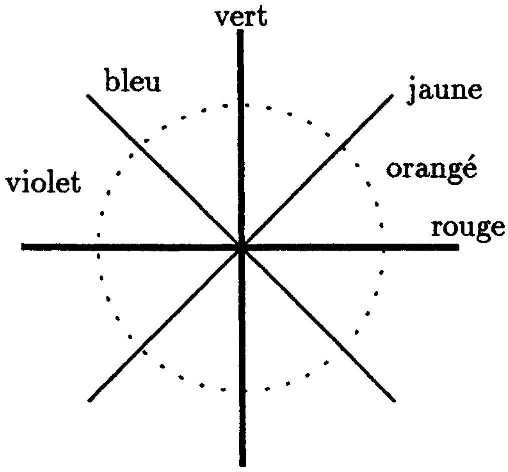


FIG. 1

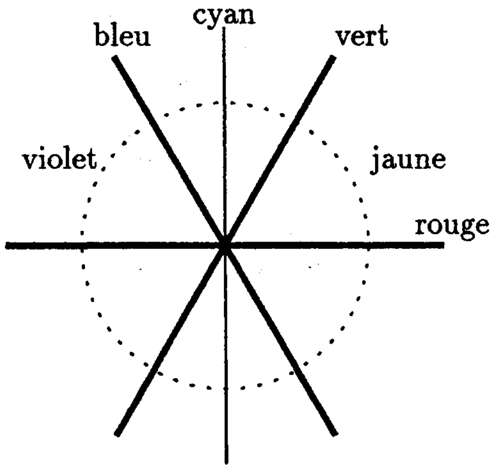


FIG. 2

§ 5. Les probabilités quantiques

Nous avons vu qu'un système de propositions qui satisfait les axiomes ci-dessus peut se représenter comme une collection de sous-espaces d'un espace de Hilbert, soit un équivalent des diagrammes de Venn. Or ceux-ci permettent de saisir l'intuition d'une probabilité classique. Nous en voudrions un équivalent quantique.

Ceci est possible dans une certaine mesure. Voyons-le en dimension finie. Dans un diagramme de Venn, l'aire d'une zone est intuitivement le nombre de points ou de surfaces élémentaires qu'elle contient (si la surface du dessin est quadrillée par exemple). Dans les espaces de Hilbert, les plus petits sous-espaces non-nuls qui puissent intervenir sont les droites (les points de la géométrie projective correspondante). On ne peut, bien sûr, pas prendre comme mesure le nombre de droites puisque, ne serait-ce que dans un plan ce nombre est infini. Par contre, on peut prendre le nombre de droites compatibles contenues dans cet espace. Ce nombre est exactement la dimension de celui-ci puisque deux droites compatibles sont orthogonales[12].

Dans un espace de Hilbert de dimension finie la probabilité d'une proposition peut donc être définie comme le rapport de la dimension du sous-espace associé par celle de l'espace total. Pour ceux qui connaissent, on peut dire également que si π est le projecteur associé ou sous-espace, cette dimension est $\mathrm{Tr}(\pi)$ et donc, si ρ_0 est l'opérateur de densité associé au système, la probabilité désirée est $\mathrm{Tr}(\rho_0\pi)$, formule connue.

Dans un espace de Hilbert de dimension infinie tout n'est pas perdu, car nous avons la notion d'observable et, une observable étant donnée, on peut lui associer une intégrale correspondant à une probabilité sur l'espace des mesures possibles de cette observable. On peut également prendre dans la même optique l'opérateur de densité. Ceci définit une probabilité conforme à l'intuition que nous avons donnée sur les sous-espaces compatibles avec cette observable (et qui correspondent donc aux gammes de valeurs mesurables de cette observable) ; par contre, pour les autres sous-espaces, l'interprétation (et même la définition) se fait moins naturellement.

§ 6. Application à la Mécanique Quantique

a. Introduction : une justification du formalisme

La première application que l'on aurait souhaité pour la Logique Quantique à la Mécanique Quantique est une résolution simple et satisfaisante des "paradoxes" qu'elle entraîne. Nous verrons ce point plus loin : il n'est pas évident. Par contre, un usage immédiat peut être fait qui est celui de la justification du formalisme. Quand on observe le formalisme de la Mécanique Quantique, il y a matière à s'interroger : pourquoi des espaces de Hilbert ? pourquoi les probabilités quantiques ? en somme, pourquoi un outil aussi malcommode à comprendre ? La Logique Quantique peut apporter une réponse partielle à ces questions.

12. Techniquement, pour assurer que ceci soit possible il faut rajouter quelques suppositions physiquement justifiables. Voir Piron [13] : démonstration et détails.

Le fait physique irréductible à toute explication est l'existence de ce qu'on appelle le **quantum d'action** qui fait que quand deux sous-systèmes de l'Univers (par exemple l'expérimentateur et le système étudié) interagissent, il existe une quantité minimale d'interaction. La conséquence immédiate de ceci est qu'il arrive une limite au-delà de laquelle les interactions ne peuvent plus être négligées. En particulier les mesures perturberont toujours les systèmes étudiés et ceci d'autant plus qu'elles seront plus précises. La conséquence en est, incidemment, que la position au cours du temps, par exemple, ne peut décrire complètement un système puisqu'elle correspond à une chose mesurable plus qu'à une réalité intrinsèque. Ici intervient la notion d'observables incompatibles : **un système complet d'observables comporte nécessairement des observables incompatibles.**

Une logique de la réalité prenant en compte ces faits jouira donc des caractéristiques suivantes :

- on *veut avoir* une conjonction, une disjonction, et une négation qui se comportent vis-à-vis de la relation d'implication comme dans le cas classique,
- on *doit avoir* une notion de compatibilité telle que si des propositions sont deux-à-deux compatibles, elles se comportent comme dans le cas classique,
- *il existe* des propositions incompatibles.

Ceci étant posé, la Logique Quantique est le modèle logique le plus simple qui remplisse ces conditions. Nous avons vu qu'alors un modèle naturel est la collection des sous-espaces d'un espace de Hilbert muni, comme observables des opérateurs (hilbertiens) sur cet espace et comme négation de l'orthogonalité. Nous avons vu que ce que l'on appelle en général les probabilités quantiques peuvent être supposées également à la suite.

Pour ce qui est enfin du rapport expérimental, des mesures d'observables, on peut encore arriver à le justifier mais la démarche est plus indirecte. En effet une observable, même si on suppose qu'elle correspond à une propriété de l'Univers reste rapportée à un instrument de mesure. A l'aide d'hypothèse raisonnables sur ce rapport on peut retrouver l'essentiel de la formulation traditionnelle de la Mécanique Quantique.

Pour avoir en fait TOUTE la formulation traditionnelle il resterait le problème du temps, que nous avons éludé. Ceci est certainement particulièrement épineux et il n'est pas clair du tout que les formulations actuelles soient même très satisfaisantes sur ce point...

b. Les variables cachées

Un autre point lié au formalisme se discute aussi particulièrement bien à la lumière de la Logique Quantique : celui des variables cachées. A ce sujet une confusion est très généralement entretenue : il ne s'agit pas de savoir s'il existe des variables cachées sous-tendant la Mécanique Quantique ou si celle-ci décrit vraiment la réalité physique ; ce savoir nous est inaccessible. Il s'agit de savoir s'il existe des variables cachées CLASSIQUES et si la Mécanique Quantique est complète DANS LE SENS QUE NOUS AVONS INDIQUÉ PLUS HAUT et à nos limites expérimentales près.

Ceci étant posé, on se convainc assez facilement que si un système admet une description classique, par exemple au moyen de variables cachées, alors ceci revient à considérer que les propositions quantiques qui nous intéressent sont des propositions particulières d'un système classique. En termes mathématiques cela revient à plonger notre système quantique de propositions dans une algèbre de Boole en respectant la négation et l'implication. Or on peut démontrer assez facilement que si le système de propositions engendré par deux propositions quantiques a et b se plonge (de cette manière) dans une algèbre de Boole, alors a et b sont compatibles et c'est une algèbre de Boole.

Ainsi on peut démontrer que **si les principes logiques énoncés plus haut sont satisfaits, alors il ne peut y avoir de variables cachées classiques sous-tendant le système physique.** Et ceci se démontre par un simple examen logique : il n'est pas nécessaire de rentrer dans les complications du formalisme.

c. Les fentes de Young

Sans entrer dans les détails nous mentionnerons parmi les emplois de la Logique Quantique à des fins de meilleure intuition de la Mécanique Quantique le réalisme logique de Putnam. On pourra se reporter à [14] pour plus de précisions. L'idée générale est d'affaiblir des propositions réalistes en d'autres classiquement équivalentes mais quantiquement vraies. Ainsi, par exemple, « S a simultanément une position et une impulsion définie » est classiquement équivalent à « S a une position et une impulsion définies », mais ces deux assertions se formalisent respectivement en des formules ayant les aspects suivants :

$$(X_1 \,\&\, P_1) \vee \cdots \vee (X_i \,\&\, P_j) \vee \cdots \vee (X_n \,\&\, P_m)$$

pour la première, qui est fausse en Logique Quantique et

$$(X_1 \vee \cdots \vee X_n) \,\&\, (P_1 \vee \cdots \vee P_m)$$

pour la seconde, qui est vraie en Logique Quantique.

L'analyse de la situation des fentes de Young peut se faire dans le même esprit : si l'on "parle en Logique Quantique" on peut dire que « la particule passe en A ou en B ». De plus ce « ou » est exclusif : c'est « ou bien A, ou bien B, mais pas les deux ». Cette phrase, par contre, est fausse avec un "vocabulaire" de sens classique. Dans ce cas on doit se démener plus ou moins bien en disant que la particule passe par les deux trous. Cette explication n'est certainement pas admirable. On obtient un mélange douteux de corpusculaire et d'ondulatoire : le "truc" est qualifié de particule, mais il a quand même le droit à l'ubiquité,... comme toutes les ondes.

d. Le chat de Schrödinger

Toujours dans la même optique, on peut dire que « le chat de Schrödinger est vivant ou mort », le « ou » étant quantique autant qu'exclusif : on ne peut être « vivant et mort à la fois ». Un certain nombre de personnes trouvent très incommodant que, au lieu de corriger des "paradoxes", la Logique Quantique se contente, en fait, de les éluder : d'une certaine manière on ne fait que transférer dans le langage courant des éléments du formalisme, ici le « ou ». L'objection est recevable, certes, mais pouvons-nous faire autrement ? A chaque fois que la Science progresse et qu'elle doit fournir des réponses qui ne sont pas des réponses de bon-sens il est nécessaire d'augmenter le langage par un transfert de concepts techniques ou semi-techniques.

Est-ce à dire qu'il n'est pas moyen d'échapper au strict formalisme dans la langue commune ? Non pas, et fort heureusement : il faut, quand cette première étape est réalisée, fournir une vision intuitive qui accompagne les concepts introduits de sorte que ces concepts soit tangibles à l'esprit qui les reçoit. Avec ce que nous avons dit plus haut, on se rend donc compte, dans le cas de notre félin, que l'on peut conserver l'image classique d'un chat tout à fait normal ayant une chance sur deux d'être vivant ou mort. Ainsi, dans le cas exposé par Schrödinger, mais également dans tous les cas où l'on n'a pas à considérer une proposition incompatible avec l'état du chat (au sens développé plus haut) il est inutile de supposer « the living and the dead cat [...] mixed or smeared out in equal parts » : un chat classique suffit.

V. Conclusion : la caverne quantique

La logique du formalisme physique est, nous l'avons dit, **la Logique Classique**, en tant que logique des Mathématiques, ou si l'on veut **en tant que logique de la vérité absolue**. Par contre, **d'après la Mécanique Quantique, la logique des descriptions du monde est la Logique Quantique, en tant que logique de la Mécanique Quantique.**

Cette logique, comme tout outil conceptuel relativement naturel, trouve facilement un large champ d'application, y compris en dehors de la Mécanique Quantique. Nous avons évoqué le domaine de la correspondance linguistique qui est un débouché essentiel de la Logique dès ses origines, on pourrait également citer des application à la psychologie au sens large : qu'il s'agisse de la modélisation de la conceptualisation, ou de l'intégration "cohérente" par un même individu de discours incompatibles. Un autre débouché naturel est la compréhension de la représentation des connaissances au sein d'éléments de réseaux de neurones formels. Ou encore, dans un domaine qui a donné des applications pratiques, la modélisation d'états de connaissance d'où des emplois en informatique (application à la compression d'images, par exemple). Mais par dessus tout, et en connexion quand même avec la Physique, la Logique Quantique nous permet d'appréhender des subtilités de raisonnement applicable au monde qui nous entoure : son emploi peut être métaphysique.

Ainsi, par exemple, dans la lignée problématique de l'identité théorique de l'être en soi et de la connaissance en théorie accessible qui le concerne, nous pouvons rejeter le « to be is to be perceived » de Berkeley. Ceci lui permettait, pour assurer une réalité fondée sur une objectivité, de "démontrer" l'existence de Dieu. Pour lui, est ce qui est perçu par Dieu. Aujourd'hui la Mécanique Quantique ne nous permet plus de laisser une place si importante aux phénomènes puisqu'à aucun instant la connaissance phénoménale ne peut être complète : le Dieu de Berkeley, comme tous les êtres omniscients au sens fort, ne peut exister. De même Kant nécessiterait une différence moins radicale entre l'essence de l'être en-soi, le concevable (nouménal) et l'expérimentable (phénoménal). On désirerait, comme lui, n'envisager la connaissance exacte, DANS NOTRE LANGAGE, qu'en la fondant sur la possibilité d'une véri-fication. On voudrait voir l'en-soi au travers d'une Logique Classique, comme les phénomènes. C'est là que le bât blesse. La physique quantique nous montre que **l'en-soi ne peut être régi par une logique classique car il véhicule à tout instant toutes les potentialités futures, lesquelles comportent des éléments incompatibles. Le phénomène par contre**, du moins si l'on suit le sens commun, **est fondé sur l'expérience, donc comporte des éléments indécis à certains moments et est fondé sur la Logique Classique**. La marche en avant de la Science comme de la Philosophie est le raffinement des concepts, c'est ici la notion de description du réel qui doit être affinée. Nous ne pouvons plus fonder notre description du réel sur une suite de valeurs de vérité affectée à une suite de propositions données : la Mécanique Quantique nous fonde à reconnaître que **le vrai n'est que la sanction de la réalité.**

Pour conclure nous reformulerons le mythe platonicien de la caverne à la lumière de la physique quantique : celle-ci s'oppose sur quelques points à la version classique. Autant la morale de ce mythe, concernant les hommes, est éternelle, autant sa conception de la vision du réel comme projection d'un monde accessible doit être maintenant prise dans un sens plus métaphorique. Tout d'abord les prisonniers ne peuvent plus accéder au dehors et voir directement le monde : la réalité est foncièrement irréductible à ce qui fonde leur expérience. Mais cette critique n'est pas nouvelle, sans faire appel à la Mécanique Quantique on peut faire remarquer que des hommes qui seraient contraints à un univers visuel restreint à deux dimensions (la projection sur le mur de la caverne) dès leur jeune age ne pourraient plus interpréter correctement une vision "normale", extérieure à la caverne. Mais non seulement cette réalité n'est plus en elle-même accessible, mais encore ne peut-elle plus être vue comme une projection : ce genre de transformation conserve en effet l'aspect de la logique. Il faudra imaginer que nos personnages sont situés entre le projeté et la projection : ils font des ombres. Ils cachent toujours une partie de l'image et plus ils se rapprochent de celle-ci pour en voir les détails, plus leur ombre sera grande et gênante. Ainsi modifié le mythe de la caverne peut fournir une intuition correcte de la vision quantique du réel : **Les idées forces de la Mécanique Quantique, loin d'êtres étranges, peuvent reposer sur une analyse de sens commun.**

Appendice. La Logique Quantique "user friendly" de Gibbins

Nous donnons ci-dessous des règles vérifiées par la Logique Quantique. On peut non seulement démontrer que toutes ces règles sont bien valides mais également voir que toute démonstration à partir d'elle revient à utiliser la structure de Logique Quantique que nous avons présenté plus haut.

Ces règles sont telles qu'énoncées dans [5]. Les Γ représentent des ensembles de propositions utilisées comme contextes (ou parties de contexte), les minuscules grecques représentent des propositions et intuitivement

$$\alpha_1, \cdots, \alpha_n \vdash \beta$$

indique que la conjonction des $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ implique β.

Règle d'affirmation *(A)*
Inférer $\alpha \vdash \alpha$.

Modus Ponens *(MP)*
De $\Gamma \vdash \alpha$ et $\Gamma' \vdash \alpha \to \beta$
inférer $\Gamma, \Gamma' \vdash \beta$.

Modus Tollens *(MT)*
De $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$ et $\Gamma' \vdash -\beta$
inférer $\Gamma, \Gamma' \vdash -\alpha$.

Double Négation *(DN)*
De $\Gamma \vdash \alpha$
inférer $\Gamma \vdash --\alpha$.

ou
De $\Gamma \vdash --\alpha$
inférer $\Gamma \vdash \alpha$.

Preuve Conditionnelle *(CP)*
De $\alpha \vdash \beta$
inférer $\vdash \alpha \to \beta$.

Définition de $\to$ *(Déf.*$\to$*)*
Par définition $\alpha \to \beta = -\alpha \vee (\alpha \,\&\, \beta)$.

&-introduction *(&I)*
De $\Gamma \vdash \alpha$ et $\Gamma' \vdash \beta$
inférer $\Gamma, \Gamma' \vdash \alpha \,\&\, \beta$.

&-élimination *(&E)*
De $\Gamma \vdash \alpha \,\&\, \beta$
inférer $\Gamma \vdash \alpha$ ou $\Gamma \vdash \beta$

$\vee$*-introduction* *(*$\vee$*I)*
De $\Gamma \vdash \alpha$ ou $\Gamma \vdash \beta$
inférer $\Gamma \vdash \alpha \vee \beta$.

$\vee$*-élimination* *(*$\vee$*E)*
De $\Gamma \vdash \alpha \vee \beta$, $\alpha \vdash \gamma$ et $\beta \vdash \gamma$
inférer $\Gamma \vdash \gamma$.

Reductio ad Absurdum *(RAA)*
De $\alpha \vdash \beta \,\&\, -\beta$
inférer $\vdash -\alpha$.

Malheureusement ce système est peu satisfaisant pour une raison qui n'est pas forcément bien visible pour l'œil peu averti : il s'agit du traitement de $\to$ dont on veut qu'il ait le sens d'« implication ». Le problème vient de la concomitance d'une définition et d'une règle de raisonnement conditionnel où l'on n'autorise aucun contexte. Ceci empêche de se faire une idée opératoire de l'implication. Autrement dit le sens de $\alpha \to \beta$ ne dépend pas simplement du sens de α et de celui de β mais en plus du contexte dans lequel ces éléments se trouvent. Ceci correspond bien à l'intuition quantique mais fait perdre (presque) tout intérêt pour ce système. Aucun système déductif satisfaisant n'existe à notre connaissance pour la Logique Quantique.

Références

[1] E. BENVENISTE, *Vocabulaire des institutions indo-européennes. II: pouvoir, droit, religion.*, collection *Le sens commun*, Editions de Minuit, 1969.

[2] P. S. DE LAPLACE, *Essai Philosophique sur les probabilités*, 1819. Quatrième édition (la première date de 1814).

[3] A. EINSTEIN, B. PODOLSKY ET N. ROSEN, Can quantum-mechanical description of reality be considered complete?, *Physical Review, Ser. 2* **47** (1935), pages 777–780.

[4] R. FEYNMAN, R. LEIGHTON ET M. SANDS, *Les cours de physique de Feynman. Tome 3: Mecanique Quantique*, Interéditions, 1979. Traduction française de *The Feynman lectures on physics.*

[5] P. GIBBINS, A user-friendly quantum logic, *Logique et Analyse* **112** (1985), pages 353–362.

[6] ——, *Particles and Paradoxes*, Cambridge University Press, 1987.

[7] J. M. JAUCH, *Foundation of Quantum Mechanics*, Addison-Wesley Publishing Company, 1968.

[8] P. JORDAN, Zur quanten-logic, *Archiv der Mathematik* **2** (1950), pages 166–171.

[9] SIR I. NEWTON, *Opticks*, 1704.

[10] R. OMNÈS, From hilbert space to common sense: a synthesis of recent progress in the interpretation of quantum mechanics, *Annals of Physics* **201** (1990), pages 354–447.

[11] ——, Consistent interpretations of quantum mechanics, *Reviews of Modern Physics* **64** (1992), pages 339–382.

[12] ——, About the notion of truth in quantum mechanics, *Journal of Statistical Physics*, à paraître.

[13] C. PIRON, Axiomatique quantique, *Helvetica Physica Acta* **37** (1964), pages 439–468.

[14] H. PUTNAM, The logic of quantum mechanics, in *Mathematics, Matter and Method: Philosophical Papers Vol. I*, pages 174–197, Cambridge University Press, 1979.

[15] E. SCHRÖDINGER, Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik, *Naturwissenschaften* **23** (1935), pages 807–812, 823–828, 844–849. Cité en anglais dans [17], pages 152–167.

[16] J. VON NEUMANN ET G. BIRKHOFF, The logic of quantum mechanics, *Annals of Mathematics* **37** (1936), pages 823–843.

[17] J. A. WHEELER ET W. H. ZUREK, *Quantum Theory and Measurement*, Princeton University Press, 1983.

Table des matières