Séminaire de philosophie et mathématiques

Michel Serfati

Le secret et la règle

Séminaire de Philosophie et Mathématiques, 1992, fascicule 6
« Tartaglia versus Cardan », , p. 1-39
<http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1992___6_A1_0>

Le secret et la Règle .

Michel SERFATI .

Le présent article est consacré à cette question , cruciale pour l' histoire et l' épistémologie de l' algèbre : la naissance au XVI° siècle en Italie d'une méthode de résolution des équations du troisième degré (équations cubiques), méthode aujourd'hui encore en vigueur. Sur le fond d'une querelle célèbre entre Cardan et Tartaglia [1], cette affaire fort connue est cependant davantage qu'un morceau de bravoure dans l'histoire des Mathématiques. Elle réunit en effet ces quatre importants centres d'intérêt : les techniques naissantes de l'Algèbre devant un problème alors difficile, la première question véritablement ontologique en Mathématiques (des radicaux sur du négatif), un authentique problème de priorité scientifique (quel est le véritable auteur d'une découverte mathématique ? la réponse ici n'est pas allée de soi), cette question enfin à la fois éthique et juridique : que dire du statut d'un serment lorsque les conditions de son établissement ont radicalement changé ? . Secondairement on y découvrira aussi des questions de stratégie de publications scientifiques.

Les difficultés que rencontra alors l'Algèbre naissante, tant dans la complexité de la méthode de résolution que dans la présentation même des résultats étaient le fait de cet obstacle épistémologique incontournable qui gouverna malgré eux les protagonistes de la présente histoire : la méthode de résolution des équations cubiques ne se présenta en aucun cas comme une simple adaptation de celles des équations quadratiques. Pour le second degré en effet, en une théorie connue depuis les Grecs, tout revenait en dernière analyse à la partition d'un carré géométrique. Pour les équations cubiques au contraire, si la partition d'un cube géométrique allait se révéler effectivement nécessaire, elle n'aura été en aucun cas suffisante à la résolution, en même temps qu'elle se montrait beaucoup moins simple à réaliser. Jugée impossible à la fin du XV° siècle, la résolution des équations cubiques au milieu du XVI° siècle a donc historiquement représenté un enjeu scientifique majeur. A la complexité des méthodes s' est ajoutée encore celle, adventice, de l'exposé des résultats : il se trouve en effet que le résultat terminal (aujourd'hui appelé " formule de Cardan ") n'est pas un objet mathématique très simple

---

[1] Nous remercions ici le Professeur Arnaldo Masotti de Milan qui nous a aimablement communiqué des documents relatifs à l'oeuvre de Niccoló Tartaglia , en particulier les éditions *fac- simile* des *Quesiti* et des *Cartelli* .

à décrire, d'autant moins que les algébristes du temps ne disposaient d'aucune écriture symbolique, particulièrement pour les puissances et les radicaux.

Après bien des péripéties qui seront ici brièvement évoquées, une Règle générale de résolution des équations cubiques fut néanmoins mise à jour qui conjugua les travaux de Scipion del Ferro, Tartaglia, puis Cardan. La Régle cependant, une fois mise à l'épreuve des divers cas d'équations cubiques, présenta dans certains cas - dits irréductibles - la grave lacune suivante : alors même que l'équation proposée admettait une racine ostensible, la Règle appliquée à ce cas conduisait à une impossibilité radicale, savoir un nombre dont le carré serait négatif. Tartaglia et Cardan refusèrent alors d'aller plus loin dans ce sens, estimant chacun à sa façon le cas véritablement impossible. Il revint au seul Bombelli de remarquer que cette sorte d'impossibilité était cependant différente de celle - autrement bien connue - des équations communes (du second degré), cas où l'alternative est simple : une équation a ou n'a pas de racine. Dans le cas des équations cubiques admettant une racine apparente, l'impossibilité apparut en effet à Bombelli comme d'une autre espèce, due à la méthode et non à la nature des choses. Il lui parut alors légitime d'admettre pour un temps l'existence de nombres issus de radicaux sur du négatif et, suspendant la question ontologique, savoir celle de leur existence géométrique, de les manipuler avec les règles de l'algèbre vulgaire. Le temps évidemment de leur appliquer la Régle, de retrouver ainsi la racine en évidence, et de les oublier ensuite. Or cette suspension, même momentanée, des conditions ordinairement requises à l'époque pour l'existence des objets mathématiques n'allait évidemment pas de soi. Et par la création de ses expressions que Bombelli dit " sophistiques ", qui deviendront au siècle suivant les imaginaires, avant d'être nos nombres complexes, en une procédure si difficile à concevoir pour l'époque, s'inscrivit pourtant dans les faits la première des séparations en Mathématiques entre l'existant et le constructible.

La Règle posa aussi un autre problème, celui de son auteur véritable. Trois des protagonistes en effet : del Ferro, Tartaglia, Cardan pouvaient à juste titre en être considérés comme l' inventeur. Del Ferro d'abord est celui qui sembla bien l'avoir trouvée le premier, mais comme aucun document de lui ne nous est parvenu, on ne sait aucunement sous quelle forme il a pu la détenir : régle universelle géométriquement prouvée ou modalités empiriques élaborées sur un ensemble d'exemples? Del Ferro mourut avant qu' aucun des autres protagonistes de cette histoire ne le rencontrât. Tartaglia, de son côté, retrouva certes la Règle indépendemment de del Ferro mais ce fut par hasard et s'il l' énonça correctement, il ne parvint jamais à la démontrer dans quelque cas que ce soit, se contentant de multiplier les exemples numériques qui n'étaient que des vérifications sans portée générale. Faute de la pouvoir justifier, il dut même renoncer à une publication générale de la Règle sur les équations cubiques. Cardan, quant à lui, n' en avait d'abord rien trouvé ni rien pressenti : il eut même dans un premier temps beaucoup de mal à comprendre les indications que lui donna Tartaglia par le moyen d'un sonnet. C'est cependant lui qui dans l' *Ars Magna* , publia sous forme impeccable la Règle pour toutes les équations cubiques, avec pour chaque cas une preuve géométrique rigoureuse que personne avant lui n'avait établie, en sorte que même aujourd'hui il n' y rien à ajouter à l'*Ars Magna* sur ce point.

L' 'engagement pris par Cardan à l'égard de Tartaglia, relatif à la Règle, pose par ailleurs le problème de la validité d'un serment, une question à la fois juridique et morale. Désirant à tout prix obtenir de Tartaglia qu'il lui communique sa Règle pour les Cubiques, que lui-même était à ce moment hors d'état de concevoir, Cardan se lança en effet dans une suite de serments sur l'Evangile : si Tartaglia lui faisait connaître la Règle, Cardan lui promettait un secret absolu tant que Tartaglia ne l'aurait pas lui-même délié de sa promesse. Un engagement sans exception, ni réserve, ni autre clause de retrait et qui s'étendait explicitement au delà de la mort même de Cardan. Et Cardan en effet tint son engagement jusqu'au moment où il découvrit la Règle dans les notes posthumes de del Ferro, antérieures au travail de Tartaglia, lequel l'avait donc retrouvée seul indépendemment. L'engagement pris n'avait évidemment pas prévu cette éventualité. La position de Cardan revint dans les faits à considérer que dans tout contrat il était des clauses implicites de retrait fondées sur des circonstances imprévisibles lors de son établissement, qu'il était donc délié de sa promesse et il publia la Règle dans l'*Ars Magna* , tout en citant sous une forme déontologiquement impeccable del Ferro et Tartaglia comme les véritables auteurs. Tartaglia protesta violemment par écrit (ce furent les *Quesiti*) assurant qu'il ne s'était résolu à dévoiler la Règle que sur la foi du caractère absolu et proprement intangible de l'engagement de Cardan et qu' il avait donc été dupé relativement à un point essentiel pour lui dans ses découvertes et sa carrière mathématique.

De fait, et en dépit des mises au point historiques correctes de l'*Ars Magna* , la Règle de del Ferro-Tartaglia est dite aujourd'hui Règle de Cardan.

1°) La *Summa di Arithmetica* (1494) .

Par delà les procédés euclidiens de résolution géométrique de ce qu'on appelle aujourd'hui les équations du second degré, la science médiévale préalable des équations algébriques s'était grandement développée chez les Arabes , et les Européens du Sud (Italiens, Espagnols) furent les premiers à entrer en contact avec cette science arabe des équations. Luca Pacioli évoque " l'algèbre et l'amucabala "[2]. Cardan de son côté, fera référence à un certain Mahomet, fils de Moïse, qui pourrait être Al-Khwarismi, ou Mohamed Ben Musa [3]. Tartaglia donne en sous-titre au livre IX des *Quesiti* : Sur la science Arithmétique, Géométrique et la Pratique Spéculative de l'Algèbre et l'Almucabala, que l'on appelle vulgairement la Règle de la Chose ou l'Art Majeur [4].

S'ils reconnurent donc valeur et place à l'algèbre des Arabes, aucun des protagonistes néanmoins ne lui empruntera les principes fondamentaux de son écriture symbolique des équations qui en étaient pourtant l' essentielle spécificité. En préalable obligé à la présente histoire, à la fois européenne et pré-symbolique, nous placerons donc la *Summa di Arithmetica*. Ce premier ouvrage d'algèbre dans l'Histoire des livres imprimés paru à Venise en 1494, était l' oeuvre de Fra Luca di Borgo, dit Luca Pacioli. Epaisse encyclopédie et vaste compilation, elle ne comportait qu'assez peu de résultats nouveaux, mais tâchait surtout de faire le point sur la théorie des équations à la fin du XV° siècle. Celle-ci se résumant alors à peu près à ce qu'on appelle aujourd'hui les équations du premier et du second degré, nous en expliquerons la présentation faite par Luca Pacioli sur le cas des équations quadratiques.

Rappelons à nouveau qu' aucune écriture symbolique n'était en vigueur à cette époque, et en particulier aucune notation cartésienne pour les puissances qui mette en relation dans l'écriture l'inconnue et son carré [5]. Classiquement, Fra Luca distinguait donc de façon purement rhétorique le Nombre (les constantes), la Chose (l'inconnue), et le *Census* (le carré de celle-ci). Au delà étaient le *Cubus* (Cube de l'inconnue) et le *Censi Census* (puissance quatrième). Les coefficients étaient d'autre part nécessairement des nombres positifs, de même que les solutions [6]. Ces diverses contraintes conduisirent Luca Pacioli à distinguer dans l'étude des équations du second degré ces trois cas qui étaient pour l'époque autant de " Chapitres " différents :

---

2 " *Per l'operare de l'arte maggiore : ditta dal vulgo la regola de la cosa over Alghebra e amucabala servaremo noi in questo le qui da lato abreviature over carateri : si commo ancora neli altri nostri quatro volumi de simili discipline per noi compilati havenno usati* ... " L. Pacioli ,*Summa* ... part I , f.67 , dist .V ,tr 1 .

3 *Ars Magna* , début du chapitre I .

4 Tartaglia continue : " ... et très grand, à propos de l'invention du Chapitre de la Chose et du Cube égalés 1 au Nombre et d'autres (...) . Et finalement du Carré et du Cube égalés au Nombre ... " (p. 95) . Nous utiliserons l'édition *fac simile* des *Cartelli* publiée par les soins de A. Masotti (op. cité) .

5 Cf. notre étude sur l'écriture mathématique in *Naissance de l' écriture symbolique mathématique de Descartes à Leibniz* , in *Calculemos ... Homenaje al Profesor Miguel Sanchez- Mázas* . op. cit Aussi : M. Serfati *La question de la " chose"* op.cit.

6. " ... Luca di Borgo et les analystes de son temps ne connaissaient pas les racines négatives . "(Montucla ,*Histoire des Mathématiques* , op.cit , 589)

* *Census* égalé au Nombre et à la Chose ($x^2 = a + bx$)
* *Census* et Nombre égalés à la Chose ($x^2 + a = bx$)
* *Census* et Chose égalés au Nombre ($x^2 + bx = a$) .

Cette écriture purement rhétorique de l'algèbre ignorait de surcroît la désignation *littérale* des constantes et des données du calcul, une procédure qui, comme on sait, sera le fait de Viète à la fin de ce même XVI° siècle. En conséquence, et en une différence méthodologique considérable avec nos procédés actuels, ni chez Luca Pacioli ni chez Tartaglia, Cardan ou Bombelli il n' était de " formules " pour l'énoncé d'un problème ou pour sa résolution, où la solution aurait été explicitée en fonction des données. On trouvait par contre des régles opératoires prescrivant en termes rhétoriques la liste des instructions à effectuer pour la résolution, parfois sous des formes inattendues : une règle-comptine en mauvais vers latins dans la *Summa* pour le second degré [7], un sonnet en italien pour le troisième degré dans l'échange Tartaglia - Cardan (cf. *infra*). Des calculs effectifs étaient d'autre part explicités sur des exemples spécifiés avec des coefficients numériques donnés.

Les démonstrations dans la *Summa* étaient dans le droit-fil euclidien : géométriques ou " en lignes ". Toutes les preuves relatives à ce que nous appellons aujourd'hui les équations du second degré se fondaient d'une façon ou d'une autre, sur la partition d'un carré géométrique, conformément au schema :

---

[7]1. Si res et census numero coequantur , a rebus
Dimidio sumpto , censum producere debes ,
Addereque numero , cujus a radice totiens,
Tolle semis rerum , census latusque redibit .

2.Et si cum rebus drachmae quadrato pares sint ,
Adde , sicut primo , numerum producto quadrato
E rebus mediis , hujusque radice recepta,
Si rebus mediis addes census patefiet .

3. Et si cum numero radices census equabit ,
Drachma a quadrato deme reis medietatis,
Hujus quod superit radicem adde traheve,
A rebus mediis , sic census costa notescet .

Premier cas : Si l'on a $x^2 + mx = aa$, il faut prendre la moitié du coefficient m , du second terme ou des *choses* , en faire le quarré , et l'ajouter à l'absolu ou aa , ensuite , ayant tiré la racine de cette somme , en ôter la moitié du coefficient m ; le restant sera, la valeur cherchée . Deuxième cas : Si l'on a $x^2 = mx + aa$....(traduction de Montucla , op.cit , 589)

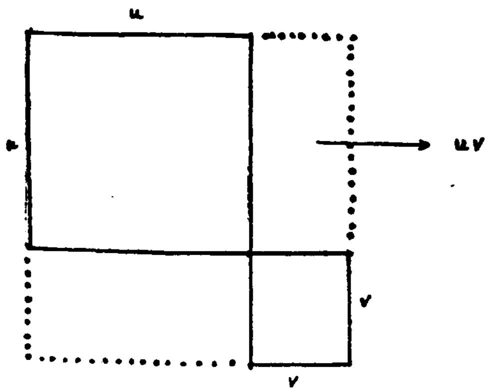

Figure 1 .

Quant aux équations qui faisaient intervenir le *Cubus* ou le *Censi Census* (troisième et quatrième degré), elles étaient déclarées impossibles dans la *Summa*. Chacun de son côté, Tartaglia et Cardan souligneront largement le fait. Ce n'est pas que certaines équations numériques ne pussent être complètement résolues (entendez : en trouver une solution exacte et vraie, *i.e* positive), ni qu'on ne sache en résoudre certaines de façon approchée : c'est l'absence *de droit* d'une règle générale qui était ici postulée par Fra Luca. En fait il avait énoncé l'impossibilité de deux cas d'un type légèrement différent, mais équivalent : $x^4 + bx^2 = ax$ et $x^4 + ax = bx^2$ [8]. Le dogme d' une telle impossibilité pour les équations cubiques fonctionna chez Cardan et Tartaglia comme l'énoncé par un maître d'un interdit majeur, et donc l'éventualité de son contournement effectif comme un enjeu important. Tel était, au delà de considérations purement mathématiques, l'un des enjeux de la question de la Règle. Voici à titre d' exemple l'enthousiasme de Cardan au début de l' *Ars Magna*, dans le Chapitre *Cube et Chose égalés au Nombre* ($x^3 + ax = b$) : " Comme cet Art [sq. la résolution de ce cas] dépasse toute la subtilité humaine et la perspicacité du talent des mortels, que c'est un vrai don du ciel et une pierre de touche de la capacité des esprits des hommes, chacun qui s'y emploiera comprendra qu'il n' y a rien qu'il ne puisse comprendre [9] ".

---

8 *Summa de Arithmetica Geometria proporzioni et proportionalita . Distinctio Octava Tractatus sextus* , page 149 :

Censo de censo equale a numero
Censo de censo equale a cosa
Censo de censo equale a censo
Impossibile Censo de censo e censo equale a cosa
Impossibile Censo de censo e cosa equale a censo
Censo de censo e numero equale a censo
Censo de censo e censo equale a numero
Censo de censo equale a numero e censo

9 Dans la courte introduction historique qu'il propose à son *Arithmétique* (Ch. Plantin, Leyde . 1585) Stevin reprend presque mot pour mot le texte de Cardan , attribuant aux

La Querelle .

La présente histoire concerne quatre grandes villes de l' Italie du Nord : Bologne, Brescia, Venise et Milan et rassemble quatre protagonistes essentiels : Scipion del Ferro, Tartaglia, Cardan et Ferrari par ordre chronologique. En fin de texte, nous analyserons également brièvement l' *Algebra* de Rafael Bombelli ; quoique postérieure à l'objet du présent article, elle viendra néanmoins apporter une conclusion algébrique définitive au cas "irréductible" que les autres protagonistes n'avaient pu que laisser de côté ou feindre d'ignorer. On rencontrera aussi quelques personnages secondaires, dont Antonio Maria dei Fiori, élève et disciple de del Ferro et Annibale de la Nave, gendre et autre disciple de del Ferro. Zuanni da Coï également, curieux personnage du temps qui prenait plaisir à essayer de mettre en difficulté les mathématiciens en leur proposant des énigmes dont il n'avait pas la solution et dont il pensait qu'ils ne pouvaient absolument pas les résoudre [10] : ni Cardan ni Tartaglia ne l' apprécièrent grandement. Pour être complet, on citera Zuanni Antonio, un libraire qui servit à Cardan d'émissaire auprès de Tartaglia, ainsi que le Marquis Alfonso d'Avalos, gouverneur militaire de Milan, protecteur de Cardan dans les années 1540.

L'invention de la Règle : Scipion del Ferro .

Scipion del Ferro, né en 1465, fut professeur d'Arithmétique et de Géométrie à l'Université de Bologne de 1496 à 1526 et mena parallèlement une activité d'homme d'affaires et de commerce. Il était mort depuis six ans au commencement de la querelle qui nous occupe et aucune trace ne demeure aujourd'hui de ses écrits scientifiques. Les renseignements fragmentaires sur ses découvertes réelles proviennent des récits ultérieurs de certains des protagonistes, en particulier dei Fiori et della Nave. Del Ferro est cependant ici un personnage clé. Vers 1515 en effet, une vingtaine d'années après la publication de la *Summa* (del Ferro avait vingt neuf ans lors de sa parution) et dans le contexte du dogme qu'elle proclame de l'

---

seuls Arabes la résolution des équations du second degré : " Les inventeurs de ces règles de trois des quantités ont été Mahomet , fils de Mosre Arabien

a) 1 égalé à O

b) leurs dérivatifs

c) 2 égalé à 1 , O " *Arithmétique* livre II . *De l'opération*(p 268) .

En termes modernes , il s'agit respectivement des équations du type $ax = b$ (cas a) et $x^2 = ax + b$ (cas c).

[10] L' une d'entre elles fut néanmoins à la source de la découverte de la résolution par Ferrari des équations du quatrième degré . Cf. *infra* .

l'impossibilité d'une règle pour les équations cubiques, del Ferro parvint néanmoins à établir une règle pour deux types de cubiques incomplètes :

$$x^3 = px + q \quad \text{et} \quad x^3 + px = q$$

Ces règles ne furent jamais publiées, mais consignées dans des papiers personnels et un cahier, le *libretto* . Il paraît néanmoins clair que del Ferro en avait parlé de façon suffisamment large pour que l'existence de la règle ait été connue à Bologne autour de lui, et au moins par dei Fiori et della Nave. Faute de disposer aujourd'hui d'aucun document écrit, les interprétations sont évidemment hasardeuses. En s'appuyant néanmoins sur les développements subséquents, on peut être certain que dans les travaux de del Ferro, la règle était valide et efficace. On ne sait par contre s'il l'avait obtenue de façon fortuite, l'élaborant à partir d'un grand nombre d'exemples : si c'était le cas néanmoins et compte tenu de la difficulté de l'énoncé du résultat cela lui avait certainement demandé beaucoup d'ingéniosité. On ne sait pas non plus s' il en possédait une véritable démonstration géométrique : eu égard cette fois à la complexité de la preuve pour les géomètres du temps, cela aurait nécessité chez lui de grandes qualités mathématiques [11]. Aucune publication de ses notes ne parut cependant à Bologne au moment de sa mort en 1526 à l'âge de soixante et un ans, avant tout commencement de la présente histoire. Néanmoins, l'éventualité d'une résolution des Cubiques, si contraire au dogme affiché de la *Summa* s'était sans doute suffisamment propagée pour que des chercheurs comme Tartaglia se remettent alors à considérer comme possible l'existence d'une Règle : en déhors donc de toute publication de sa part, l'influence de del Ferro fut néanmoins décisive.

Tartaglia et Cardan .

Né à Brescia vers 1499-1500, Niccoló Tartaglia se définira toujours comme un " brescian". Personnage irascible et méfiant, craignant toujours d'être dépossédé, il était aussi capable d'étonnantes naïvetés. Dans son autobiographie du livre VI des *Quesiti* [12], il explique son origine très modeste : son père, modeste courrier postal, mourut quand il avait cinq ans. Sa vie fut marquée par la pauvreté et les difficultés financières. Lors de la mise à sac en 1512 de sa ville natale par les Français de Gaston de Foix, il reçut un coup d'épée au visage et à la mâchoire et ne survécut que grâce à l'amour de sa mère à laquelle il rendit hommage. La blessure causa le bégaiement auquel il dut son nom : le bêgue (*tartagliare* : bégayer) . Abaciste à Vérone, puis professeur de Mathématiques à Venise, il hésita

---

11 Cardan publiera sur le sujet son admiration pour del Ferro dès le chapitre 1 de l'*Ars Magna* (Witmer , 8) : " De nos jours , Scipion del Ferro de Bologne a résolu le cas du cube et de la chose égalés au nombre , une réalisation très élégante et admirable ."

12 *Quesito* VIII , 69-70.

toute sa vie entre deux villes : Venise et Brescia. Il quitta d'abord Brescia pour Vérone, probablement entre 1516 et 1518, où il fut employé comme " enseignant de l'abaque ". En 1534, il quitta Vérone à son tour pour Venise où furent désormais publiées presque toutes ses oeuvres et où il demeura désormais, à l'exception d' une courte période de dix-huit mois en 1548-1549, où il retourna à Brescia.

En dehors des deux textes ci-dessous concernés : *Quesiti* et *Cartelli*, il est connu en Mathématiques pour une traduction en italien des Eléments d'Euclide à partir d'une édition latine (*Euclide Megarense* , Venise 1543), qui fut historiquement la première en une langue commune, et aussi des oeuvres d'Archimède (en une publication partiellement posthume). Il est enfin l'auteur du *General Trattato* (Venise 1556- 1560) [13].

En 1535, Tartaglia se trouva provoqué en un duel scientifique par dei Fiori, disciple de feu del Ferro. La coutume de ces défis scientifiques était à l'époque depuis longtemps établie. En l'occurrence, dei Fiori tentait d'utiliser à son avantage ce qu'il avait compris de la règle sur les cubiques provenant de son défunt maître. Tartaglia et dei Fiori s'adressèrent donc mutuellement trente questions, l'enjeu étant de trente banquets offerts par le vaincu au vainqueur.

On ne dispose ici que de la version de Tartaglia, qui avait alors trente cinq ans : par un véritable tour de force dit-il, il parvint huit jours seulement avant le terme du défi, à trouver la règle pour les équations cubiques. D'abord pour le premier type ($x^3 + px = q$) qu'il résolut, dit - il, le 12 Février 1535. Dès le lendemain, il trouva le second cas ($x^3 = px + q$) et réduisit enfin le troisième au second. De fait, Tartaglia répondit à toutes les questions posées par dei Fiori, toutes construites cependant sur le même modèle (cube et chose égalés au nombre), alors que dei Fiori ne put résoudre toutes les siennes. Il semble bien que dei Fiori n' avait pas été en mesure d'adapter la règle de del Ferro à des situations différant du schema initial, fût-ce sur des points mineurs. Tartaglia, tout auréolé d'une gloire naissante, ne réclama pas son prix et travailla pendant un temps à essayer d'étendre les règles à d'autres cas. A notre sens, ses procédés demeurèrent cependant purement analogiques, à partir d'exemples.

---

13 Voici , en dehors des *Cartelli* , une recension des Oeuvres Mathématiques de Tartaglia :
Euclide Megarense (Venise .1543)
Opera Archimedis (Venise. 1543)
Quesiti e inventioni diverse . (Venise. 1546)
Travagliata Inventione , avec *Ragionamento e supplimento* . *General Trattato di numeri e misure* (Venise. 1556-1560)
Archimedis De insidentibus aquae (Venise .1565)
Iordani Opusculum de ponderositate (Venise .1565)

En 1537, deux ans après cette dispute scientifique, Tartaglia publia à compte d'auteur un important ouvrage de balistique et d'artillerie, la *Nova Scientia* partiellement reprise plus tard dans les *Quesiti.* Une partie de la critique a pu y voir, dès avant Descartes, un essai d' examiner " la chute des corps sans se soumettre à l'autorité d'Aristote ". Dans la *Nova Scientia* , Tartaglia traitait en grande partie de trajectoires des projectiles tels les boulets de canon, et particulièrement de la portée maximum du tir comme fonction de l'angle initial de visée : le premier, il établit qu'elle est obtenue à 45 °. Des siècles durant, la notoriété de Tartaglia en matière d'artillerie l'a bien davantage suivi que celle de mathématicien [14]. Il est par exemple cité chez Beeckmann (1633), Kircher (1680), et assez curieusement en littérature par Laurence Sterne [15].

Pratiquement du même âge que Tartaglia (il était né en 1501 à Pavie), Jérome Cardan, médecin, physicien, mathématicien, mais aussi astrologue et philosophe [16], était en 1535 un homme dont la réputation scientifique déjà bien établie dépassait très largement celle de Tartaglia. Sa personnalité, telle que lui-même se complait à la décrire dans le *Liber de Propria Vita* [17] était cependant bien ambiguë : pusillanime, traversé de craintes et de puérilités, de superstitions naïves, toujours prêt à cultiver magie, chimères et présages, c'était aussi un homme obstiné et aussi agréablement pourvu de cet humour qui aura tant fait défaut à Tartaglia. Il changeait aussi fort heureusement de style quand il écrivait des mathématiques, ce dont témoignent la rigueur et la précision scientifique du texte de l'*Ars Magna* .

L'entrevue de Milan .

En ces années 1538-1539, Cardan était à Milan, tout occupé à la rédaction d'un nouvel ouvrage d'Arithmétique et d'Algèbre [18] où il souscrivait naturellement à l'opinion de Fra Luca sur l'impossibilité de résoudre les équations du troisième degré. Par l'intermédiaire de Zuanni da

---

14 " C'est dans les Oeuvres de Tartaglia que l'on doit rechercher l'origine , sinon des théories de la Balistique Intérieure , du moins des opinions qui ont été professées en Europe pendant de nombreuses années ." (Carbonnier , P.E : *Essais sur l'Histoire de la Balistique* . Extrait du Mémorial sur l'Artillerie Française . Société d'Etudes Géographiques , maritimes et Coloniales. Paris 1928 , 29-30 .)

15 *Vie et Opinions de Tristram Shandy* . 1759 . Livre II, .

16 Il voulait par exemple savoir si " les effets produits par les médicaments sont en proportion arithmétique ou géométrique de la dose des remèdes ." (in *Opus novum* = Oeuvres ,IV, 487-488).

17 Traduit sous le titre : *Ma vie* . Texte présenté et traduit par Jean Dayré . Champion. Paris .1936 .

18 Il y paraîtra cette même année sous le titre : *Practica arithmetica et mensurandi singularis* . Milan . 1539

Coï cependant, il entendit parler pour la première fois de la rencontre Tartaglia - dei Fiori et de l'existence de la Règle.

Quatre ans après la victoire de Tartaglia, Cardan entreprit alors des manoeuvres d'approche auprès de celui-ci et lui délègua à cet effet en ce début 1539 un libraire, Messer Zuanni Antonio da Bassano, avec diverses missions [19] et d'abord celle-ci : essayer de savoir ce que Tartaglia savait au juste ; à cet effet Cardan lui fit transmettre huit problèmes à résoudre dont la solution utilisait des équations cubiques. Il fit aussi demander à Tartaglia que celui-ci communiquât la Règle : Cardan la publierait dans son livre en indiquant que Tartaglia en était le véritable auteur. A défaut, Cardan se serait contenté de l'énoncé des questions posées par Tartaglia dans la dispute avec dei Fiori, accompagné des solutions de Tartaglia.

Tartaglia refusa en bloc, déclarant d'abord que s'il devait publier la règle, ce serait dans un ouvrage sous son propre nom; ensuite, que répondre aux huit questions de Cardan serait revenu à lui livrer la Règle (Cardan, dit-il, est quelqu'un d'ingénieux), qu'il en aurait été de même enfin s'il lui avait livré ses questions ou bien ses propres réponses aux questions de dei Fiori. Tout juste consentit-il à communiquer les questions de dei Fiori, mais sans les solutions qu'il avait lui-même apportées [20].

Devant ce refus, Cardan se mit en grande colère : il en appela d'abord à la solidarité des algébristes, puis dénonça l' orgueil démesuré de Tartaglia, qui, dit-il, se prend pour un homme au génie exceptionnel [21]. Enfin, il lui proposa vainement deux nouvelles questions à résoudre, accompagnées cette fois de leur solution, mais sous pli séparé, de façon à ce

---

19 Nous suivons ici la description des *Quesiti* de Tartaglia . Les relations Tartaglia-Cardan y sont évoquées de IX ,XXXI à IX ,XL , 113 - 126 . Cardan apparaît pour la première fois dans le *Quesito* IX ,XXXI ,113 . Ce *Quesito* en date du 2 Janvier 1539, est adressé à Tartaglia par Mr Zuanni Antonio , libraire , au nom de Mr Jérôme Cardan, médecin et lecteur public de Mathématiques à Milan. Mr Zuanni Antonio pose à Tartaglia huit questions (113 b), dont voici trois exemples (*proportion continue* signifiant ici progression géométrique) :
Exemple 1 : Diviser 10 en quatre parties en proportion continue dont la première soit 2
Exemple 2 : Diviser 10 en quatre parties en proportion continue dont la seconde soit 2
Exemple 7 : résoudre : $x^3 + 3x = 21$.

20 *Quesito* IX ,XXXI , 114 .

21 *Quesito* IX, XXXII , 115 , du 12 Février 1539 .
Cardan : " Mais cela me fait beaucoup de peine de penser que parmi les diverses difficultés de cette science , ceux qui s'y consacrent soient si discourtois et si présomptueux de leur propre parole que ce n'est pas sans raison que le vulgaire les appelle fous."
Plus loin : " Je voudrais vous écrire aimablement et chasser de vous l'orgueil de penser que vous êtes un si grand homme , je voudrais vous faire comprendre , par cet avertissement amical , selon vos propres termes que vous êtes plus près de la vallée que de la montagne ." Et plus loin encore :" Je vous le demande de grâce : avec qui croyez vous parler ? Avec vos élèves ou avec des hommes ?."

que Tartaglia ne pût croire cette fois, ni à l'ignorance de Cardan, ni à son désir de l'humilier [22]. Tartaglia refusa.

Aussi obstiné que Tartaglia s'était montré méfiant, Cardan se révèla aussi fort habile, considérant que là où ses solennelles invocations à la solidarité des algébristes n'avaient pu réussir, un appel plus direct aux intérêts matériels immédiats de Tartaglia en matière d' Artillerie réussirait peut-être mieux . Il expédia donc à Tartaglia une nouvelle lettre pour lui dire qu'il avait communiqué au Marquis d'Avalos, gouverneur de Milan et protecteur de ce même Cardan l'un des deux exemplaires de la *Nova Scientia* qu'il possèdait, en même temps que les divers instruments de balistique que Tartaglia lui avait envoyés, et qu'en conséquence de tout cela d'Avalos invitait Tartaglia à le rencontrer à Milan, dans la maison de Cardan. L' appât était cette fois plus sérieux et bien mieux adapté à la situation réelle de Tartaglia qui avait besoin de protection et à qui le soutien d'un militaire - d'Avalos possèdait vraiment beaucoup de canons - aurait été précieux. Tartaglia, à ce qu'il dit ultérieurement, perçut néanmoins un piége dans la démarche de Cardan, mais fit toutefois le voyage à Milan : ce fut la célèbre entrevue du 15 mars 1539 dans la maison de Cardan.

A l' arrivée de Tartaglia, d'Avalos n'était pas là, et il l'attendra trois longues journées [23], nécessairement occupées à des discussions avec Cardan auxquelles Ferrari assistera. Ce fut un prodigieux jeu de dupes ponctué d' inlassables supplications en provenance de Cardan pour que Tartaglia lui livrât sa règle, et qui s'achevèrent en un serment sur l'Evangile [24]. Cardan : " Je jure, sur les évangiles sacrés de Dieu et sur ma foi de vrai gentilhomme, non seulement de ne jamais publier votre invention si vous ne me le permettez pas. Mais encore, je promets et j'y engage ma foi dans le vrai Christ, de le transcrire de façon cryptée, de sorte qu'après ma mort, personne ne pourra le comprendre (...). "

Soumis à ces fortes pressions morales,Tartaglia, tout au moment de partir, et dans un moment de faiblesse qu'il dira toujours se reprocher, accepta de communiquer la règle à Cardan, sous la forme chiffrée d'une pièce de vers en italien de trois strophes de neuf vers, chacune correspondant à un des cas de cubique incomplète (sans terme *census* [25]), texte que Tartaglia lui-même rédigea et donna à Cardan. Voici une traduction

---

22 Question 1 : Divise moi 10 en quatre quantités en proportion continue , telle que la somme de leurs carrés fasse 60.
Question 2 : Deux personnes sont ensemble et possèdent un nombre inconnu de ducats . Ils gagnent le cube de la dixième partie de leur capital , et s'ils avaient gagné trois ducats de moins , ils auraient gagné le montant exact de leur capital . Combien de ducats avaient-ils ?

23 Il ne reviendra qu'après son départ , le " lundi de Pâques ."

24 *Quesito* ,IX , XXXIII , 120 .

25 Dans l'ordre : $x^3 + px = q$ .Puis $x^3 = px + q$ .Enfin $x^3 + q = px$.

de la première strophe, dont on notera qu'elle correspond à un cas (*Cube et Chose égalés au Nombre*) qui ne peut conduire à une impossibilité [26]:

" Quand le Cube et la Chose
Se trouvent égalés au Nombre
Trouve-moi deux nombres dont la différence lui soit égale.

Ensuite comme cela se fait d' habitude,
Que leur produit soit égal au cube du tiers (du coefficient) de la chose.

Et dans le résultat, il suffit en général
De bien retrancher les racines cubiques
Et tu auras ta valeur pour la chose [27] ."

Dans cette procédure, où le lecteur moderne pourra reconnaître la recherche de l'inconnue par le changement $x = u - v$ [28], il s'agit donc d'abord de trouver deux nombres par somme et produit. Ces nombres sont ensuite considérés comme des cubes : il convient enfin de prendre la racine cubique de chacun, puis la différence des résultats, qui fournit " la " solution de l'équation (Tartaglia en effet ne se souciait pas du nombre de racines). Comme on voit, la description de la procédure de résolution n' était donc guère simple en termes rhétoriques. En termes symboliques (*i. e* post-cartésiens), elle conduisit aux formules de Cardan (cf. *infra*) dont l'expression est également relativement complexe.

Multipliant alors les menaces pour le cas où Cardan viendrait à rompre sa promesse, Tartaglia s'en alla, en principe pour Vigevano retrouver le marquis. Il se ravisa aussitôt cependant, et repartit pour Venise sans avoir vu d'Avalos. Il n'eut pourtant pas plus tôt quitté la maison de Cardan que la crainte le prit d'en avoir trop dit et aussi de la possible trahison de l'autre. Suivit alors entre Milan et Venise un bien curieux échange de lettres, Tartaglia oscillant entre une extrême agressivité (en particulier dès qu'il apprenait que Cardan avait formé un quelconque projet de

---

26 *Quesito* IX , XXXIII , 120 . Du 25 mars 1539.

27 *Quando chel cubo con le cose appresso*
Se agguaglia à qualque numero discreto
Trovan dui altri differenti in esso.

Dapoi terrai questo per consueto
CHe'llor produtto sempre sta eguale
Al terzo cubo delle cose neto,

El residuo poi suo generale
Delli lor lati cubi ben sostratti .

28 Dans le second cas , il pose $x = u + v$.

publication [29]) et les excessives manifestations d' une débordante affection.

Cardan, de son côté, n'avait pas bien compris l'emploi de la pièce de vers, où - faute d'une écriture symbolique appropriée - il commença par confondre le tiers du cube et le cube du tiers [30]. Il envoya à ce sujet à Tartaglia un contre-exemple où, ainsi mal comprise, la Règle ne fonctionnait pas. Ceci prouve à quel point Cardan était à ce moment éloigné de la véritable substance des techniques de résolution des cubiques. Il finit néanmoins par se familiariser convenablement avec la règle, mais découvrit alors des exemples de cas où le discriminant est négatif (cf. *infra*), qu'il soumit ainsi à Tartaglia : " Mais quand le cube du tiers de la chose dépasse le carré de la moitié du nombre, alors on ne peut pas résoudre l'équation comme vous l'indiquez (...) tel est l'exemple de 1 cube égal à 9 choses plus 10 [31]) et j'aimerais être éclairé sur ce point". Il s'attira une réponse embarrassée de Tartaglia, qui n'ayant vu dans sa Règle qu'une recette, reçut l'objection comme une pure chicane, déclara à Cardan qu'il n'avait rien compris, et qu'il y avait "d'autres façons " de résoudre le problème. Ce sera, à ma connaissance, la seule occurence du cas irréductible [32] chez Tartaglia.

Pendant la période qui suivit, Tartaglia s'essaya de nouveau aux autres cas de cubiques incomplètes (la "Chose" alors manquant), sans toutefois tâcher d'éclaircir le cas irréductible précédent, ni surtout sans parvenir en aucune façon à en démontrer aucun des résultats. Au contraire dans des lettres privées, il va multiplier les exemples numériques spécifiés, vérifiant par substitution les résultats numériques presque à chaque fois comme s'il n'était pas absolument sûr de ses formules : ceci constitue en particulier le *Quesito* XLII (page 126 b) sous la forme d' un échange supposé avec son disciple et élève, l'anglais Richard Wentworth à qui il avait appris les Mathématiques à Venise [33].

---

29 La *Practica Arithmeticae Generalis* à laquelle travaillait Cardan parut cependant en Mai 1539 deux mois après l'entrevue , et ne contenait rien sur les cubiques qui puisse provenir de la Règle de Tartaglia à qui Cardan adressa aussitôt un exemplaire .

30 En écriture symbolique : $\frac{1}{3}p^3$ et $\left(\frac{p}{3}\right)^3$. *Quesito* IX ,XXXV , 121 b.
(p est le coefficient de la Chose) .

31 $x^3 = 9x + 10$ (cas où $\Delta = -27 + 25$) .*Quesito* IX , XXXVIII (Cardan) , 122b-123.

32 Le mot irréductible n'apparaît ni chez Tartaglia , ni chez Cardan , ni , à ma connaissance , chez Bombelli.

33 Ce *Quesito* contient de nombreux problèmes de cubiques avec *Census* ,
comme : $x^3 + 6x^2 = 100$ (il y a une erreur dans la solution : il y faut remplacer 17.000 par 1.700).
Aussi $x^3 + 9x^2 = 100$ (solution : $\sqrt{24} - 2$; Tartaglia vérifie aussitôt , page 127).
$x^3 + 3x^2 = 2$ (solution : $\sqrt{3} - 1$) .
$x^3 + 7x^2 = 50$ (solution : $\sqrt{11} - 1$) . D'un autre type :

Il faut surtout noter que durant toute cette période intermédiaire (1539-1542) Tartaglia, toujours prêt à soupçonner Cardan de le trahir, ne publia pourtant pas sa Règle, ni quoi que ce soit sur le sujet : à notre sens, il n'en avait pas trouvé de démonstration " euclidienne ". Certes il aurait bien pu publier une longue liste d'exemples résolus qui lui eût au moins apporté la reconnaissance de sa priorité en même temps que celle de la paternité de sa Règle, mais il ne pouvait toujours pas en rendre publique une démonstration géométrique. Or Tartaglia, fidèle aux conceptions des géomètres du temps, reconnaissait dans les démonstrations géométriques d' Euclide (dont il avait été le premier traducteur en langue commune) le fondement de toute preuve, qu'en l'occurence il était incapable d'apporter.

L'expédition à Bologne .

Un jeune homme vivant dans la maison de Cardan où son oncle l'avait placé depuis l'âge de quatorze ans [34], batailleur, violent, méprisant, sans scrupule, beau garçon, d'une profonde intelligence mathématique [35], tel était Ludovico Ferrari, qui avait dix-sept ans ans au moment de la rencontre de Milan de mars 1539 à laquelle il assista. Ses seules fidélités (et elles seront sans faille) seront pour Cardan, son maître[36], et sa propre soeur qui sera aussi sa maîtresse. Le disciple qui se déclarait lui-même la "créature " de Cardan était aussi un grand mathématicien : comme on verra ci-dessous, c'est à lui et lui seul que l'on doit la discussion, l'inventaire et la résolution presque achevée des équations du quatrième degré, un problème que personne avant lui n'avait examiné autrement que sur des cas particuliers.

En 1542, trois ans après la rencontre de Milan, alors que Ferrari vivait chez Cardan depuis six ans, fut organisée à Bologne une expédition chez feu del Ferro, à laquelle participèrent Cardan, Ferrari, et Annibale de la Nave, gendre et disciple de del Ferro, qui conduisit tout son monde. On peut penser que la visite avait été organisée à l 'initiative de Cardan, qui, lassé de ses démarches auprès de Tartaglia, voulait légitimement tâcher de remonter aux sources de la Règle. Et en effet les trois hommes remirent la main sur certaines des notes de del Ferro, aujourd'hui à nouveau perdues : elles contenaient la Règle sur les équations cubiques incomplètes. La Règle avait été trouvée avant Tartaglia et ne lui appartenait donc pas en propre. Cardan dès lors se considéra comme libéré de sa promesse.

$x^3 + 4 = 5x^2 (\sqrt{8} + 2)$ et $x^3 + 6 = 7 x^2 (\sqrt{15} + 3)$

[34] Ferrari arriva le 30 Novembre 1536 dans la maison de Cardan un jour où comme le dit celui-ci , " une pie fit un tapage si fort et si extraordinairement prolongé dans la cour que je compris que je devais m'attendre à l'arrivée de quelqu'un " .

[35] Il gagna en 1540 un autre challenge mathématique public contre Zuanni da Coï .

[36] C'était dans la *Practica arithmeticae* de Cardan (1539) que Ferrari avait appris les Mathématiques .

***L'Ars Magna*.**

Délivré de son engagement, Cardan publia donc en 1545 à Nuremberg l'*Ars Magna , sive de Regulis algebraicis liber unus* [37], vraie encyclopédie du temps sur la théorie des équations et qui faisait suite à la parution un an plus tôt, toujours à Nuremberg, de l' *Arithmetica Integra* de Michael Stiefel [38]. Si l'on excepte Fra Luca, Cardan est donc l'un des tous premiers auteurs à être imprimés en Algèbre . [39]

L'*Ars Magna* est un ouvrage de mathématiques remarquablement structuré qui fournit d'abord un inventaire exhaustif des équations du second degré et des équations " associées" (*i.e* qui s'y ramènent par changement de variable simple, du type $x \rightarrow x^3$, par exemple)[40]. Il propose ensuite un inventaire entièrement neuf des équations cubiques (chapitres 11 à 23 [41]), le conduisant à treize cas distincts qui sont autant de "Chapitres". Inventaire lui-même suivi d'un ensemble de deux fois trois chapitres donnant les Règles pour les cubiques incomplètes (il y manque d'abord le *Census* , puis la chose), puis de sept chapitres sur les équations cubiques complètes, avec leurs quatre termes [42].

---

37 Il y en aura deux autres éditions : à Bâle en 1570 , du vivant de l'auteur , qui ne fait qu'ajouter des erreurs à la précédente . En 1663 ensuite , à Lyon , dans les Oeuvres Complètes en 10 volumes . Voici une recension des Oeuvres Mathématiques de Cardan :

Practica arithmetica et mensurandi singularis . Milan . 1539 .
Artis magnae , sive de regulis algebraicis liber unus . Nuremberg 1545).
De subtilitate liber XXI . Nuremberg 1550 .
Liber de Libris propriis . Leyde . 1557.
De rerum varietate libri XVII . Bâle 1557.
De subtilitate (. . .) cum additionibus. Addita insuper Apologia adversus caloumniatorem . Bâle . 1560 .
Opus novum de proportionibus numerorum ,motuum ,ponderum, sonorum, aliarumque rerum mensurandarum ...Item de aliza regula liber . Bâle .1570.
Opera Omnia . Lyon . 1663.

Le *Liber de ludeo aleae* publié dans les *Opera Omnia* . Il est traduit en anglais par Oystein Ore sous le titre *The Book on the games of chance* op. cit.

38 La renommée de Stiefel était déjà bien grande à l'époque , puisque le mettant explicitement à l'égal d'Euclide , Vitruve , Archimède ou Appollonius, les deux protagonistes des *Cartelli* conviendront qu'il est de de ceux dont les oeuvres pourront faire l'objet des questions qu'ils s'adressent .

39 Mise à part l' *Arithmetica Integra* , on citera aussi *The Whetstone of Witte* de Robert Recorde . Londres . 1557 .

40 Signalons ici la remarquable traduction en anglais de l'*Ars Magna* due à R. Witmer : *The Great Art , or the Rules of Algebra* , by Girolamo Cardano. (op. cit) . L'ouvrage contient un important appareil critique , particulièrement sur les diverses éditions , ainsi qu'une préface de Oystein Ore .

41 XI à XIII : sans *Census* . XIV à XVI : sans la Chose . XVII à XXIII : avec quatre termes .

42 Le seul cas absent est celui d'un polynôme à coefficients tous positifs égalé à zéro : $x^3 + px + q = 0$, c'est à dire précisément notre écriture actuelle du cas général .

Viennent ensuite des chapitres divers, traitant de règles particulières, dont le célèbre Chapitre XXXVII (*De Regula falsum ponendi* : où il est question de supposer des choses négatives), brièvement étudié plus loin.
La fin du volume, à partir du fort long chapitre XXIX (*De Regula qua pluribus positionibus invenimus ignotam quantitatem* [43]), est consacré, pour la première fois dans l'Histoire des Mathématiques, à une théorie générale des équations du quatrième degré incomplètes (manque le terme en x^3), dont Cardan attribue l'entière paternité à Ferrari, qui, dit-il, la lui a " donnée [44] ."

Dans les préalables " cubiques" du chapitre VI, Cardan avait démontré d'abord soigneusement et longuement la relation : $(u + v)^3 = u^3 + v^3 + 3 u^2 v + 3 u v^2$, de façon géométrique à partir de la partition d'un cube matériel que nous schématisons ici par une figure perspective plus moderne :

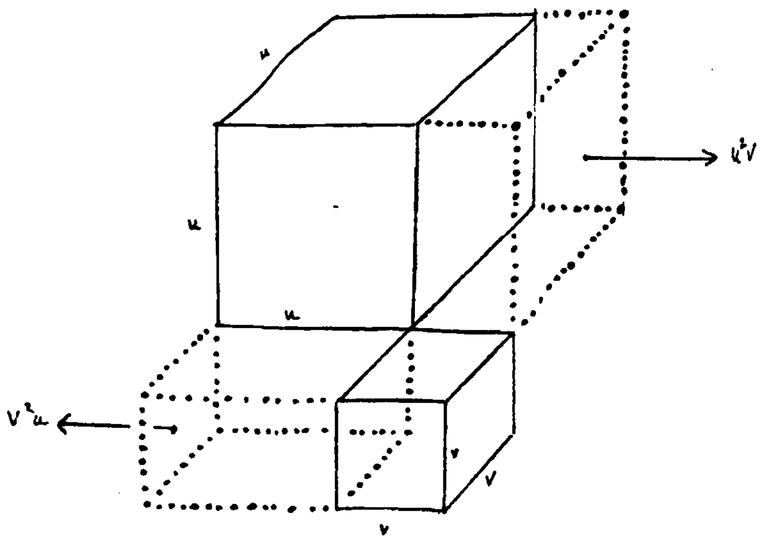

Figure 2 . Le " Cube de (u + v) " d'après Cardan.

Les deux derniers termes de la formule $3 u^2 v + 3 u v^2$ sont donc ici considérés comme un ensemble de six pièces rapportées , tels les *gnomons* de la tradition géométrique grecque. Rassemblant donc les deux morceaux en pointillé sur la figure , on voit aussi que chacune des sommes $u^2 v +$

[43] Règle par laquelle on trouve l'inconnue en plusieurs étapes .
[44] Chapitre XXXIX , Règle II , : " Il y a une autre règle , plus noble que la précédente . C'est celle de Ludovico Ferrari , qui me l'a donnée à ma demande . Par elle on peut obtenir toutes les solutions des équations entre le *census censi* , le carré , la chose et le nombre , ou bien le *census censi* , le cube , le carré , et le nombre et les ai mis en place ici ." (suivent 20 types d'équations du 4° degré) .

$u\ v^2$ peut être représentée par un solide (parallélépipède rectangle) dont un côté est égal au côté (u + v) du cube .

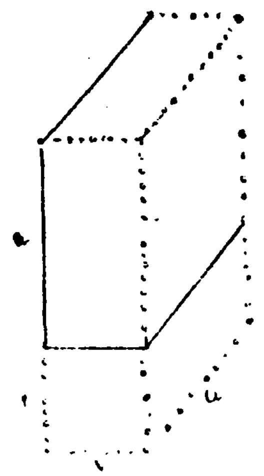

Figure 3 : $u^2\ v + u\ v^2 = u\ v\ (u + v)$.

Cette démonstration géométrique de la relation $u^2\ v + u\ v^2 = uv\ (u + v)$, autrement dit celle de la divisibilité de $u^2\ v + u\ v^2$ par(u + v) était tout à fait essentielle à la méthode . Dans le texte de Cardan cependant, aucune figure perspective n' était présente, ce qui ne facilitait pas les preuves. Les chapitres suivants de l'*Ars Magna* étaient consacrés aux équations cubiques. Rituellement chaque chapitre contenait ces trois points : un énoncé rhétorique de la règle de résolution adaptée au cas considéré, une démonstration " en lignes " de la même règle, suivie d' exemples numériques divers.

Le Chapitre XI inaugural sur les cubiques (cas $x^3 + px = q$), s'ouvre ainsi sur $x^3 + 6\ x = 20$, dont $x = 2$ est solution apparente. A partir de cet exemple dénué de problèmes et de tout cas irréductible [45], Cardan fait une démonstration géométrique. Nous en exposerons ici le principe en termes algébriques plus modernes, tels qu'on peut par exemple les trouver un siècle plus tard chez Hudde et Leibniz [46] :

Pour résoudre $x^3 + px = q$, posons $x = u - v$.

$(u - v)^3 = u^3 - 3u^2\ v + 3\ u\ v^2 - v^3$. Par sa preuve géométrique (cf . *supra*) , Cardan montre que $- 3u^2\ v + 3\ u\ v^2 = 3\ u\ v\ (v - u)$

---

45 Comme dans la pièce en vers de Tartaglia , Cardan a ici commencé par un cas sans problèmes .

46 dans le *De resolutionibus Aequationum Cubicarum Triradicalium ,de Radicibus realibus quae interventu imaginarium exprimuntur , deque sexta quadam operatione arithmetica* . Leibniz , in *Briefwechsel mit Mathematikern* . Gerhardt. Hildesheim. (1987) , 550 . Avec un sens développé de la vérité historique , Leibniz explique que la Règle est due à del Ferro , mais qu'elle a été rendue publique par Tartaglia et Cardan (page 551)

On a donc $u^3 - v^3 + 3uv(v - u) + p(u - v) = q$.

De plus, si x est connu, le changement proposé $x = u - v$ associe donc deux variables à une seule. Le géomètre dispose alors *a priori* d'une certaine marge de manoeuvre dont il peut tâcher d'user (la remarque méthodologique est faite par Leibniz lui -même [47]). Il *suffit* donc d'essayer si fonctionne le procédé suivant : que d'une part, $u^3 - v^3$ soit égalé à q, que d'autre part 3 u v soit *séparément* égalé à p, en sorte que l'on ait :

$u^3 - v^3 = q$ et aussi

$u^3 v^3 = \left(\frac{p}{3}\right)^3$ ou encore $u^3(-v^3) = -\left(\frac{p}{3}\right)^3$

u^3 et $(-v^3)$ sont donc, conformément aux canons déjà en vigueur à l'époque pour les équations du second degré, racines de l'équation :

$X^2 - qX - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$, dont le discriminant vaut $\Delta = q^2 + 4\left(\frac{p}{3}\right)^3 = 4\left[\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3\right]$

Donc $u^3 = \frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$

et $-v^3 = \frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$ soit : $v^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$

u^3 est le *binôme* et v^3 l'*apotome*. On en tire les racines cubiques u et v ; on reviendra ensuite à x par $x = u - v$. A l'intérieur donc de ces hypothèses du chapitre XI où il n'avait jamais été conduit au cas irréductible, Cardan érigea alors ainsi sa méthode en Règle :

" Elève au cube le tiers de la chose ; ajoute lui le carré de la moitié du nombre absolu et prend la racine carrée de l'ensemble. Reproduis ceci à deux exemplaires, ajoute la moitié du nombre que tu as précédemment élevé au carré. Tu auras un binôme et son apotome [48]. Alors, soustrayant la racine cubique de l'apotome de la racine cubique du binôme, tu auras la valeur de la chose ."

Cardan traita par ce procédé son exemple initial $x^3 + 6x = 20$ et retrouva $x = 2$. Dans le corps de ce même chapitre XI, vinrent ensuite divers exemples où la règle était désormais directement appliquée. Les treize chapitres suivants relatifs aux cubiques auront tous cette même structure, la moitié environ de leur contenu étant chaque fois consacrée à la démonstration géométrique [49]. Les démonstrations, quoique différentes

[47] idem, 557.

[48] Les deux termes étaient présents chez Euclide (*Eléments* ,Livre X) .

[49] Cardan se propose cependant de ramener le Chapitre XIII : Cube et Nombre égalés à la Chose , au Chapitre : Cube égalé à la Chose et au Nombre ($x^3 = px + q$)

sont chaque fois très voisines : en fait , il n' y a en substance que des adaptations légèrement différentes d'une même Règle , par exemple celle de Tartaglia pour le Cube et la Chose égalées au Nombre .Ce point est aujourd'hui évident dès lors qu'on accepte que les coefficients puissent être de signe quelconque .

Dans son bref rappel historique dans la partie de l'*Ars Magna* consacrée aux cubiques, Cardan avait préalablement rendu justice à Tartaglia en des termes irréprochables. Tartaglia est cité aux chapitres I , VI et XI . Voici en particulier les premières lignes du chapitre XI : " Il y a trente ans environ, Scipion del Ferro de Bologne découvrit cette règle et la donna à Antonio Maria dei Fiori, de Venise, dont la dispute avec Niccoló Tartaglia de Brescia donna l'occasion à Niccoló de la découvrir. Il (Tartaglia) me la donna en réponse à mes prières ; quoiqu'il ait gardé pour lui la démonstration. A l'aide de son assistance, j'ai cherché sa démonstration de diverses façons. Cela était difficile. Voici ma version."

Notons incidemment que si c'est Cardan qui a le premier fourni la Règle sous forme rhétorique, Descartes donnera (dans la *Géométrie*) la première écriture *symbolique* de ce qu'on appelle aujourd'hui la " règle de Cardan" , soit :

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left[\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3\right]}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left[\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3\right]}}$$

De ceci , valable pour le cas $x^3 + px = q$, il résulte immédiatement que sur les trois cas fondamentaux (en termes modernes) :

$$x^3 + p\,x = q \qquad x^3 = p\,x + q \qquad x^3 + q = p\,x$$

envisagés par les algébristes italiens (p et q positifs strictement) , le second et le troisième peuvent conduire au cas irréductible [50] .

Quant aux équations du quatrième degré qui occupent en gros le troisième quart de l'*Ars Magna* , nous en exposerons ici en termes modernes la méthode qu'en donne Ferrari sous la plume de Cardan [51]. L' idée initiale en est plus simple et plus naturelle que celle des équations du troisième degré. Si elle finit cependant par s'y ramener, puisque la phase terminale est celle de la résolution d'une équation du troisième degré, la *résolvante* de Ferrari, la procédure pour le quatrième degré, purement algébrique, ne nécessite plus désormais aucun retour sur une démonstration en lignes. La méthode de Ferrari se résume à constater que toute équation du

---

Pour le cas du Chapitre XIV ($x^3 = p\,x^2 + q$) , Cardan fournit à nouveau une règle détaillée , mais sans que le cas irréductible fasse ici à nouveau l'objet d'une réserve .

[50] L'analyse n'est pas faite dans ces termes par Cardan qui ne peut envisager de coefficients négatifs .

[51] Elle est très convenablement expliquée dans l'*Histoire des Mathématiques* de Montucla , op.cit. , 594 .

quatrième degré est en un certain sens une *égalité de carrés*, c'est à dire équivalente à une relation de la forme $A^2 = B^2$ ou encore $(A + B)(A - B) = 0$. Toutes les méthodes ultérieures - en particulier celle de Descartes - reviendront à celle-ci. Nous l' exposons ici sur le cas d'une équation incomplète. Soit donc à résoudre :

$$x^4 = ax^2 + bx + c = H(x) \qquad (1)$$

De chaque côté du signe d'égalité, on ajoute des termes adéquats de façon à obtenir l'égalité de deux carrés.

D'abord on a pour tout y $(x^2 + y)^2 = x^4 + y^2 + 2x^2 y$

Pour en faire un carré, il suffit donc d'ajouter $y^2 + 2x^2 y$ au premier terme. Ajoutant donc la même quantité à l'autre terme, il vient

$$H(x) + y^2 + 2x^2 y = a x^2 + bx + c + y^2 + 2x^2 y$$
$$= (a + 2y)\, x^2 + bx + (c + y^2)$$

Considéré comme un trinôme du second degré en x, ce terme sera à son tour un carré, noté $w^2(x)$, si et seulement si son discriminant est nul soit :

$$b^2 - 4(a + 2y)(c + y^2) = 0 \text{ ou encore}$$

$$8ay^3 + 4ay2 + 8cy + 4ac - b^2 = 0 \qquad (2)$$

y doit donc vérifier une équation du troisième degré. Celle-ci admet toujours une racine réelle en conclusion de la Règle de del Ferro-Tartaglia- Cardan, qui venait précisément d'être étudiée plus haut dans le texte. La Règle était à nouveau la clé de la solution : elle permettait de déterminer en fonction des données a, b, c une valeur de y_0 solution de (2) (en termes modernes, (2) est la résolvante de Ferrari de (1)).

y_0 étant ainsi choisi, on a $(x^2 + y_0)^2 = w^2(x)$, une relation qui permet dans tous les cas - en termes modernes - une factorisation sous forme du produit de deux polynômes du second degré qu'il ne reste plus qu'à résoudre : $(x^2 + y_0 - w(x))(x^2 + y_0 + w(x)) = 0$.

Et Cardan de revenir sur l'exemple : $60x = x^4 + 6x^2 + 36$, qu'il résout presque entièrement par ce moyen [52].

---

52 Cet exemple, dit Cardan, est en fait associé à un problème posé par Da Coï qui le croyait impossible et tâchait de troubler les mathématiciens par de telles sortes de questions : divise-moi 10 en 3 parties en proportion continue (*i.e* en progression géométrique), telles que le produit du premier par le second fasse 6. Cardan : " Je lui dis que c'était possible, même s'il ne connaissait pas la méthode (...). Ce fut découvert par Ferrari.

Voici selon R.Witmer (op.cit, 239 -241) une transcription en termes modernes de la démonstration de Cardan :

" Soit x le moyen terme. Le premier sera $6/x$ et le dernier : $(1/6)\,x^3$. Donc en multipliant par 6x, on aura : $60x = x^4 + 6x^2 + 36$. On ajoute $6x^2$: $60x + 6x^2 = x^4 + 12x^2 + 36$.

$x^4 + 12x^2 + 36$ a une racine carrée. Si l'autre terme en avait une, nous aurions la solution. Mais il n'en a pas.

Les *Quesiti* .

A la lecture de l'*Ars Magna* et de sa Règle imprimée, Tartaglia fut d'abord pris d'une si violente colère que, selon Pedro Nuñez [53], il en perdit presque la raison. Il prit ensuite la résolution de se venger en rendant publique l'histoire du secret trahi et des turpitudes de Jérôme Cardan, médecin milanais. Limitée à ce seul récit vengeur, une publication aurait cependant été un peu mince. Aussi décida-t-il d'en faire l' un des éléments d'un plus vaste ouvrage, les *Quesiti et Inventioni diverse* , publié dès l'année suivante (1546) à Venise. Curieusement pourvue d'une dédicace à Henri VIII, roi d'Angleterre , cette sorte d'Encyclopédie domestique en neuf livres est un bric à brac scientifique, qui a pour fonction essentielle de nous renseigner sur la vie et les connaissances de Niccoló Tartaglia en 1546: des résultats de balistique et de fortifications militaires empruntés à la *Nova Scientia* , constituent les livres I , II et III. La vie privée et l' autobiographie de Tartaglia constituent la fin du Livre VI. Les *Quesiti* ne sont pas un traité consacré aux mathématiques, mais plutôt au mélange des genres : autobiographies et vie " mondaine" et sociale du temps d'une part, exercices de mathématiques de l'autre. La partie strictement mathématique est un travail fragmentaire, sans construction ni logique d'exposé. Pas même n' y trouve-t-on un inventaire des questions en jeu. Seulement la recension d'une multitude d'exemples voisins. Les *Quesiti* sont aussi un ouvrage dépourvu de démonstrations au profit d'inlassables vérifications sur des exemples numériques. Le style mathématique enfin en est complètement rhétorique et naïf, parfois

---

$$(x^2+6+b)^2 = x^4 + 2x^2(6+b) + (6+b)^2$$
$$= x^4 + 12x^2 + 36 + [2bx^2 + b^2 + 12b]$$

Donc , on ajoute des deux côtés $2b\,x^2 + b2 + 12\,b$ .D'une côté on a donc $(x^2 + b + 6)^2$.

De l'autre :

$$6x^2 + 60x + [2bx^2 + b^2 + 12b] = x^2(2b+6) + 60x + b^2 + 12b$$

Ecrivant la nullité du discriminant de ce trinôme , Cardan obtient alors :

$$900 = (b^2 + 12b)(2b+6) = 2b^3 + 30b^2 + 72b$$

soit $b^3 + 15b^2 + 36\,b = 450$,une équation du troisième degré précédemment étudiée .

Il trouve : $b = \sqrt[3]{190+\sqrt{33{,}903}} + \sqrt[3]{190-\sqrt{33{,}903}} - 5$

Il reste alors à factoriser et à résoudre . Les résultats terminaux ne sont pas simples (l'énoncé du problème par contre l'était).

[53] Le fait est rapporté par Montucla ,*Histoire desMathématiques* , op.cit ,III , Livre III, 593 . Nuñez est l'auteur du *Libro de Algebra en Arithmetica y geometria* . Anvers . Arnoldo Birkman . 1567 .

inférieur sur le plan des signes à la *Summa* elle-même [54]. Le livre IX cependant avec ses quarante deux *Quesiti* contenait pour Tartaglia l'essentiel : à la fois sa propre version sur l'entrevue de Milan, et aussi nombre de problèmes associés aux équations cubiques. Texte majeur pour l'Histoire des Mathématiques, le livre IX est aussi le seul qui, à notre connaissance, n'a jamais été traduit .

Dans ce livre IX, écrit en forme d'autojustification sept ans après l'entrevue de Milan, il faut faire sa place à l'artifice dramatique et polémique chez Tartaglia, qui publia ses récits sous la forme de dialogues théâtraux où il se mit en scène et fit parler Cardan. Significativement, il s' y présenta toujours lui-même comme N (Niccoló), alors que Cardan était respectueusement désigné des initiales M.H (Messer Hyeronimus). L'ensemble contenait l'énoncé des questions posées en 1535 par dei Fiori, les trois strophes et la Règle, le serment de Cardan, divers problèmes du troisième degré, en particulier dans le dernier *Quesito* très mathématique qui a la forme d'une réponse supposée à Richard Wentworth en date du 15 Avril 1540 . A aucun moment, il n' y eut de démonstration d'une règle de résolution, pour quelque cas que ce soit, non plus que de proposition ni d' ébauche de démonstration [55].

Le texte déversait par contre des flots d' injures à l' encontre de Cardan, accusé de débilité et d'incompétence.Voici par exemple Tartaglia : " Je me ris à présent parce que vous avez mis deux mois avant de vous apercevoir de votre erreur commise dans l'extraction de la racine cubique, ce qui est pourtant un des premiers principes qu'on enseigne à un écolier (...) et qu'en tant de temps, vous n'ayiez pas été en mesure de trouver la médecine qui vous guérirait de votre erreur dejà citée (chose bien petite)...[56] "

Les *Cartelli* et le second défi .

Cette sorte de pamphlet était autant destinée à manifester publiquement la colère de Tartaglia qu'à tâcher de provoquer Cardan, l'atteindre, le faire répondre et parler. Dans la situation précaire de Tartaglia à ce moment là, parvenir à se poser en interlocuteur valable de Cardan aurait pu en effet être pour lui d'un certain bénéfice. Or c'est ici

---

[54] Il n'emploie aucune symbolique pour l'addition , la différence ou les radicaux mais en toutes lettres : *piu* , *meno* , *radice* , *plus* et *minus* .

[55] La seule évocation par Tartaglia de l'éventualité d'une telle démonstration est à la fin du *Quesito* IX , 38 , page 121 b : " et à un tel cube , ajoutant le triple de la dite quantité une telle somme sera précisément égale à 10 , comme je le propose , mais encore on démontre facilement géométriquement la validité et la raison d'une telle méthode et aussi , s'il s'agit de 1 cube + 1 chose = 11 " (suit un calcul) .

[56] *Quesito* IX , XXXVIII , 124.

l'élève, Ferrari, qui monta au créneau pour défendre son maître. Outré par les injures des *Quesiti* , se posant en écran entre les deux hommes, la " créature de Cardan "- comme lui-même se désignait - adressa presque aussitôt à Tartaglia (dès le 10 février 1547) une premiere épître en forme d' avis de défi mathématique, un *Cartello de Sfida Matematica* , avec la fonction de réparer l'honneur de son maître atteint par des invectives. On jugera de son style : " Il m'est venu entre les mains un de vos livres intitulé *Quesiti e Inventioni diverse* (...) vous mentionnez le Très Excellent Monsieur Jerôme Cardan(...) Vous osez sans la moindre vergogne affirmer qu'il est ignorant en mathématiques, qu'il a l'intelligence épaisse, qu'il mérite moins d'estime que Mr Zuanni da Coï et pour finir vous l'appelez pauvre d'esprit, homme à la parole creuse, cervelle-sèche et ajoutez autres semblables termes injurieux ... [57]" Ferrari proposait en même temps à Tartaglia une nouvelle dispute publique portant sur " l'arithmétique, la géométrie, l'astrologie, la musique, la cosmographie, la perspective et l'architecture." Sans même attendre la réponse de Tartaglia, il adressa une copie de son premier *Cartello* à une cinquantaine de personnalités, hommes de science et professeurs, mais aussi ducs et marquis. La première *Risposta* de Tartaglia fut presque immédiate (19 Février 1547) : dans son style maladroit , empêtré dans ses disgressions et ses longues redites , il finissait par accepter le défi [58].

L'ensemble des six *Cartelli* de Ferrari et des six *Risposte* de Tartaglia, ultérieurement publiées sous le titre de *Cartelli (di sfida Matematica*) constitue, entre autres choses, un précieux document sur la vie scientifique du temps. On y trouve aussi (second *Cartello* de Ferrari) une autre version que celle de Tartaglia sur l'entrevue de Milan de 1539. Secondairement, Ferrari éclairait aussi les conditions de la visite à Bologne et la mise au jour des papiers de del Ferro. De son côté Tartaglia ne manqua pas de céder de nouveau à la tentation de dialogues imaginaires où il fit les questions et les réponses. Il y déclara aussi, ce qui paraît invraisemblable, qu'il avait connu dès 1530 une règle pour certaines équations cubiques (cube et carré égalés au nombre).

Dans les invectives préliminaires rituelles du premier des *Cartelli* , Ferrari s'était montré particulièrement arrogant dans la défense de son maître, avec à l'occasion des arguments *ad hominem* . Dans le second *Cartello* écrit en latin afin de mieux disqualifier Tartaglia, qui le comprenait mais ne l'écrivait pas, Ferrari revint plutôt sur le fond de la

---

57 *Cartello* I , 5. Traduction de Lorenza André . Nous utiliserons l'édition *fac simile* des *Cartelli* publiée par A.Masotti (op.cit) à laquelle renverra désormais la pagination .

58 Tartaglia " bégaye également quand il écrit " (L. André) . Acceptant le défi , il ne cessera néanmoins de regretter de ne pas avoir affaire directement à Cardan :
" C'est à dire que pour l'heure , il ne me plait pas de vous répondre à vous , son obligé , car ce n'est pas avec vous que j'ai affaire , mais bien avec lui ." *Cartello* I , 18 . Traduction de Lorenza André .

question, savoir la Règle. Voici Ferrari : " C'était là [sq. à Milan] que Cardan a obtenu de vous ce petit morceau de découverte au sujet du cube et de la chose égalés au nombre, et cette petite plante languissante, il l'a rappelée à la vie, alors qu'elle était mourante, en la transplantant dans son livre, l'expliquant clairement et savamment, et aménageant pour elle le plus vaste, le plus fertile et le plus convenable des endroits où la faire croître. Et il vous en a proclamé l'inventeur, et il a rappelé que c'était vous qui la lui aviez donné à sa demande [59] ".

La seconde *Risposta* de Tartaglia (du 21 Avril 1547) contenait ses 31 problèmes adressés à son adversaire [60]. Symétriquement, le troisième *Cartello* de Ferrari (du 1° Juin 1547) proposait les 31 questions de Ferrari (pages 66-68). La troisième *Risposta* de Tartaglia (diverses dates) résolvait 25 des 31 questions de Ferrari. Celui-ci, dans son cinquième *Cartello* (Octobre 1547) , déclara que sur les réponses de Tartaglia, il y en avait au moins vingt de fausses. L'analyse du contenu des questions posées est éclairante à la fois sur les connaissances mathématiques véritables des deux protagonistes et aussi sur leurs stratégies [61]. Les trente et une questions de Tartaglia s'analysent comme suit :

- Dix sept questions de géométrie plane, essentiellement relatives à la géométrie du compas à ouverture fixe. Sur ce point, la réponse de Ferrari est immédiate : toute construction "euclidienne", c'est à dire à la règle et au compas est possible avec la règle et le compas à ouverture fixe.
- Trois questions de géographie mathématique.
- Une question de géométrie dans l'espace : calcul d'un volume.
- Dix questions d 'arithmétique et d'algèbre, dont des calculs de radicaux (N° 22-23). Aussi des simplifications d'expressions irrationnelles. Enfin une équation de degré neuf réductible au degré trois par changement de variables.

Les trente et une questions de Ferrari se répartissaient ainsi :

- Sept questions d'algèbre, dont trois sur des équations du troisième degré auxquelles Tartaglia répondit ; trois sur des équations du quatrième degré, pour lesquelles Tartaglia déclara réserver sa réponse. Enfin un problème de maximum, l'un des premiers dans l'histoire des mathématiques [62].

---

59 *Cartelli* ,II, 27 . Cf O.Ore ,op.cit , 94.

60 *Cartelli* , 58

61 Cf. sur ce point la Préface (p. XXI) de A. Masotti aux *Cartelli* .

62 Partager 8 en deux parties telles que le produit des deux par leur différence soit le plus grand possible . Tartaglia fournit la bonne solution (*Cartelli* , 91)

$$4+\sqrt{5\tfrac{1}{3}} \quad \text{et} \quad 4-\sqrt{5\tfrac{1}{3}}$$

mais comme d'ordinaire sans démonstration et Ferrari considère la réponse comme non satisfaisante . Tartaglia ne disposait d'aucune méthode générale .

- Treize questions de géométrie dont beaucoup conduisaient à des équations cubiques.

- Sept d'astronomie, trois d'architecture, une enfin de philosophie mathématique directement inspirée d'une réflexion sur la tradition grecque : " L'unité est-elle, ou non, un nombre ? " .

La mise en regard des types de question posées montre d'abord que Tartaglia, sans doute éclairé par le contenu de l'*Ars Magna* , évitait de poser des questions sur les équations du troisième degré, dont il était pourtant censé être le spécialiste. Que d'autre part il n'avait pu en fait arriver à résoudre les équations du quatrième degré posées par Ferrari, lequel de son côté n'avait pourtant pas hésité à les lui soumettre alors même que l'*Ars Magna* paru deux ans auparavant, en exposait dans le détail toutes les méthodes de résolution. Que Tartaglia enfin mettra près de huit mois à répondre au cinquième *Cartello* de Ferrari [63], au point qu'on avait pu croire qu'il avait abandonné la partie. Lorsqu'il répondit c'est cependant sans fournir la solution à six ou sept des demandes de Ferrari.

Les derniers *Cartelli* montrent le retour d' une extrême violence chez Ferrari, qui entendait apparemment pousser son avantage. Ferrari : " Mr Niccoló (...),vous voulez m'amener à un tel état de rage que je vous traite de sac à mensonges, en sorte que vous puissiez mettre de côté les lettres et m'attaquer personnellement avec des armes. Mais, sur ma foi, j'essaierai d'éviter cela, parce que j'ai entendu dire que vous êtes une telle brute d'homme qu'il vaudrait mieux que je ne vous combatte pas."

Dans les tous derniers *Cartelli* néanmoins, les deux adversaires se mirent d'accord pour faire arbitrer leur différend, en faisant examiner publiquement demandes et réponses : ce serait donc en Août 1548, deux mois après la dernière *Risposta* , un an et demi après le premier *Cartello* . Il était entendu que la rencontre aurait lieu à Milan - sur le territoire de Ferrari donc - dans l'église de Santa Maria del Giardino dei Minori Osservanti .

Nous savons peu de choses avec certitude sur le déroulement de cette confrontation. Certes, dans plusieurs de ses correspondances, Cardan écrit bien que c'est Ferrari qui a gagné. Mais la source principale est encore une fois Tartaglia, déjà naturellement peu fiable et qui dix ans après les faits, se met à en faire le récit dans le *General Trattato* [64], dans un passage manifestement destiné à conforter rétrospectivement sa propre image. Le

---

63 En date d'Octobre 1547, depuis Milan. Ce n'est que le 16 Juin 1548 , que Tartaglia répondit de Brescia (ses précédentes correspondances émanaient de Venise) .

64 Venise , 1556 . Dans le *General Trattato* , Tartaglia revient inlassablement sur les énoncés des problèmes contenus dans les *Cartelli* , les solutions de Ferrari et les siennes , et aussi les erreurs de Cardan et Ferrari dénoncées en note à longueur de page . Bien que de niveau élémentaire même pour l'époque , le *General Trattato* est un ouvrage néanmoins bien mieux composé sur le plan scientifique que les précédents .

General Trattato fait état d'un Tartaglia écoeuré par le fait que l'assemblée, toute composée d'amis de Ferrari (il n'aurait eu, lui, qu'un seul compagnon), l'ait empêché de parler, et qu'il se soit résolu à quitter Milan dès le lendemain sans poursuivre davantage la querelle.

Compte tenu de la composition de l'assemblée convoquée par Ferrari, tout cela paraît peu vraisemblable. Des éléments extérieurs à la rencontre viennent d'autre part conforter l' hypothèse d'une défaite sans appel de Tartaglia : dans les années qui suivirent immédiatement la dispute (1548-1549) , Tartaglia retourna en effet pour un temps dans sa ville natale de Brescia ; il fit état de nombreuses difficultés financières et d' une sorte de complot contre lui qui l'aurait obligé à retourner à Venise pour y travailler de nouveau comme professeur de mathématiques [65]. On peut penser que ces difficultés ont pu se trouver dues à la rumeur de son échec qui se serait répandue. Tartaglia mourut en 1557, à l'âge de 57 ans, dans une certaine pauvreté.

Ferrari au contraire se vit proposer divers emplois à la suite de cette affaire. Il accepta l'offre d'Ercole Gonzaga, cardinal de Mantoue, et à la demande de Ferrante, frère du Cardinal, s'occupa des affaires de la province. Puis après huit ans passés dans un tel poste, il changea brusquement de cap, se retira de la vie publique, acheta une maison pour y vivre avec sa soeur et mourut à Bologne, à l'âge de quarante trois ans, empoisonné, dit-on, par elle.

C'est Cardan qui survivra à tous, en dépit de ses malheurs. En 1570, il fut en effet jeté en prison pour hérésie par l'inquisition : il avait cru bon de publier un horoscope du Christ et il expliquait le détail de la Bible par les astres. En 1576, à l'âge de 75 ans, il se rendit néanmoins à Rome pour solliciter de la part de Pie V une pension (qu'il obtint). Dans la dernière année de sa vie, passée à Rome, il écrivit son autobiographie (*De propria vita*).

Le secret et la Règle

En guise de conclusion partielle, constatons d'abord cette sorte de génie particulier chez Cardan : il a pris les moyens de faire en sorte que le coeur de son Oeuvre Mathématique, ce qui tranchait définitivement d' avec la *Summa* du siècle précedent, savoir la résolution des équations du 3° et du 4° degré, se trouvât publié dans un livre sous son nom, alors même que ces deux règles n'étaient pas de lui et qu'aucun des deux authentiques inventeurs ne le fit jamais sous son propre nom. Constatons aussi qu' en se

65 Les démêlés de Tartaglia avec sa ville natale sont longuement exposés dans son *Terzio Ragionamento* de 1551 , à nouveau sous la forme d'un dialogue avec R. Wentworth .

refusant à publier sa Règle , Tartaglia qui craignait tant d'être dépossédé , a fait en sorte de l'être. Cela dit, l'*Ars Magna* est déontologiquement sans faute : les termes en lesquels Cardan reconnait leur priorité aux véritables inventeurs des Règles (del Ferro - Tartaglia pour le troisième degré ; Ferrari pour le quatrième) sont irréprochables même aux yeux des observateurs modernes, familiers des questions de priorité scientifique. L'usage et l'Histoire ont cependant fait que les formules du 3° degré soient aujourd'hui connues sous le nom de formules de Cardan (alors qu'on parle de la méthode de Ferrari pour le 4° degré). Le fait est sans doute dû à l'autorité de Descartes, qui dans le livre III de la Géométrie[66], évoque la " reigle de Cardan " , en même temps qu'il en donne la première des écritures modernes. La plupart des contemporains des protagonistes n'ont en fait relevé ni la querelle, ni la " trahison" de Cardan. Ce ne fut que plus tardivement, aux XVIII° et XIX° siècles que les historiens s'avisèrent de disputer à Cardan la paternité de " ses" formules .[67]

La question de l'engagement de Cardan envers Tartaglia pose d'autre part ce problème éthique bien clair : faut-il, au moment de son établissement, conférer à un serment la validité d' un contrat éternel, sans exception ni réserve autres que celles explicites dans ses termes, en refusant par avance de prendre en compte ce que le temps pourrait modifier de ses conditions d' origine? Ou bien considérer que tout engagement ne sera en fait valide que tant que les conditions de son établissement n'auront pas radicalement changé? Cardan a effectivement transgressé sur le plan formel une règle absolue, qui ne comportait aucun terme explicite de retrait possible. Ne peut-on cependant soutenir avec Morley que " Cardan a effectivement transgressé une promesse qu'il n'avait pas le droit de faire et que Tartaglia n'avait pas le droit de lui demander "? [68]. Ajoutons aussi qu'il peut paraître un peu suprenant qu 'on ne dispose plus aujourd'hui d' aucun document de del Ferro, qu'il soit imprimé ou manuscrit [69]. En particulier, aucune des notes de del Ferro n'a été conservée après l'expédition à Bologne : elles seules pourtant permettaient à Cardan de se dégager du serment qu'il avait fait dix ans auparavant. Et sur ce

---

66 *Oeuvres* de Descartes , Editions Adam- Tannery . VI , 473- 474 . Vrin . Paris .

67 Dans le *De vita propria liber* ultérieur , Cardan donna de l'histoire une version légèrement différente : " Plus tard , à ma suite de songes répétés , j'écrivis les livres *De subtilitate* que j'imprimai puis augmentai pour une deuxième édition et que je publiai enfin une troisième fois avec de nouveaux suppléments . Je passai ensuite à l'*Ars Magna* que je composai pendant que j'étais aux prises avec Giovanni Cola et Tartaglia qui m'avait fourni le premier chapitre et qui préféra m'avoir pour rival et supérieur à lui plutôt que pour ami lié par la reconnaissance , alors que la découverte appartenait à un autre ."(page 135 de la traduction de J.Dayré . *Ma vie*)

68 Morley , op.cit. , 270.

69 A. Masotti , in article *Scipione del Ferro* . Biographical Dictionary of Mathematics , II, 789.

point, où on doit en rester au récit de Ferrari, on aurait pu penser que Della Nave, gendre de del Ferro aurait pu avoir à coeur d'en publier des fragments qui auraient définitivement établi sa véritable priorité d'inventeur.

C'est cependant la position de Tartaglia qui apparaît comme la plus curieuse. Il a quitté Milan en 1535, furieux contre l ' habileté de Cardan et aussi contre sa propre faiblesse : il a divulgué sa Règle. Cependant, et alors que Cardan respecte sa promesse de secret, pourquoi n'a-t -il pas publié sous son nom un ouvrage ou au moins des fragments contenant ce qu'il avait initialement trouvé, savoir la Règle pour les équations cubiques du premier type : le cube et la chose égalés au nombre? Dans les dix ans (1535-1545) qui séparent la découverte du secret et de la règle et leur publication par Cardan dans l'*Ars Magna* , Tartaglia ne fit aucun effort de publication de ce que lui-même pourtant considérait comme essentiel. Ce que lui reprocha Ferrari avec vigueur dans le second *Cartello* [70]. L' argument en réponse dont Tartaglia fait état (il aurait été trop occupé par sa traduction d'Euclide) ne peut ici faire illusion : ce n'est qu'un prétexte.

En guise de réponse à ces questions, on doit d'abord répéter cet argument de fait plus haut exposé : il est bien probable que Tartaglia n'avait pas su constituer en démonstrations les recettes qu'il avait trouvées, c'est à dire opérer en géomètre du temps. Comment dans ces conditions publier des règles effectivement opératoires, mais qu'aucune preuve " en lignes " ne serait venue étayer? A l'appui de cette thèse, rappelons la complexité de la démonstration géométrique par Cardan de la relation donnant $(u+v)^3$.

Proposant un autre type d'analyse, la critique a voulu mettre en lumière un conflit d'ordre psychologique entre les deux hommes. Pour J. Dayré [71], Tartaglia serait un homme au tempérament " classique", à qui s'opposerait Cardan qui serait un " romantique". Dans ce même registre psychologique, O. Ore soutient que, en dépit des avantages d'une publication, le désir de Tartaglia de faire souffrir Cardan aurait pu être plus fort que son intérêt direct [72]. Et de fait, ce surprenant argument peut trouver à s'accorder avec la personnalité bien particulière de Tartaglia. Plus philosophiquement, on peut légitimement invoquer, en cette période historique charnière, un conflit entre les deux conceptions du monde que proposaient alors la Renaissance et le Moyen- Age. Tartaglia serait ainsi un représentant de l'ordre médiéval ancien et de ce qu'il recèlait de secrets, de recettes individuelles, de " coups" à réaliser et aussi de

---

[70] Ferrari : " Vous dites : je le publierai , mais ce sera dans mon propre livre . Et qui vous l'interdit ? Peut-être est-ce parce que vous ne l'avez pas entièrement résolue ?" *Cartelli* ,II, 27 .

[71] *Jérôme Cardan .Esquisse biographique* . Annales de l'Université de Grenoble 1927 (Nouvelle série) , 245-355 .

[72] O. Ore , op.cit . 83 -84 .

crispations sur des trouvailles qui se puissent monnayer. En face, Cardan, homme de la Renaissance, tourné vers l'avenir, serait le tenant d'un ordre humaniste et de la diffusion de la connaissance.

L' *Algebra* de Bombelli .

Né en 1526 à Bologne, de vingt cinq ans plus jeune que Tartaglia et Cardan, étranger à leur querelle, Raphael Bombelli se révèla comme un grand algébriste. Il avait lu et apprécié Cardan, regrettant néanmoins que l'*Ars Magna* ne soit pas un ouvrage suffisamment clair ni suffisamment indépendant de références extérieures pour qu'un lecteur ordinaire en puisse seul en maîtriser le sujet. Et c'est primitivement pour faire oeuvre de pédagogue que Bombelli entreprit la rédaction de son *Algebra* . D'abord fidèle aux procédés de Cardan, il donna la règle pratique de résolution pour chaque type d'équation, énoncée en toutes lettres et la fit suivre d'une démonstration en lignes [73]. Il se posa ensuite en algébriste pur, se détournant des exemples quotidiens et pratiques, comme les répartitions de sommes d'argent - ils abondaient chez Cardan - pour ne proposer que des exemples algébriques abstraits, détachés de tout contexte familier. L'*Algebra* , primitivement prévue en trois livres - qui seuls nous intéressent ici [74] - a été imprimée en 1570 et 1572, mais le manuscrit, établi entre 1557 et 1560 a beaucoup circulé. En matière d'équations, le projet de Bombelli était à nouveau encyclopédique et faisait naturellement suite à la *Summa* et à l'*Ars Magna*. : il fallait alors à Bombelli valider, puis dépasser Cardan. Ce qu'il fera sur ces deux points de fond : la question du cas irréductible pour les équations cubiques et l'inventaire exhaustif des équations du quatrième degré [75]. Le travail de Ferrari sur ces équations sera en effet parachevé par Bombelli qui se comporta ici pour les équations du quatrième degré comme Cardan pour celles du troisième : il en fit l'inventaire et donna un ensemble complet de règles de résolution [76].

---

[73] Bortollotti , op.cit. , 34.

[74] Les livres IV et V sont consacrés à la Géométrie .

[75] Dans le livre I , Bombelli utilisa des développements en fraction continue pour obtenir des approximations de $\sqrt{2}$ et $\sqrt{13}$:

$$\sqrt{2} \sim \frac{7}{5} \quad \text{et} \quad 3\frac{3}{5} \leq \sqrt{13} \leq 3\frac{2}{3}$$

[76] Bombelli : " Mais Louis Ferrari , notre compatriote chemina aussi dans cette voie et trouva la pratique des résolutions de ces chapitres , ce qui fait une très belle invention, cependant je m'efforcerai de l'éclairer au mieux qu'il se peut dans l' intérêt du lecteur." (*Algebra* , Livre I, 353, traduction de J. Cassinet ,IV , 13, op. cit .)
Suivent quarante deux cas d'équation du quatrième degré, groupés par sous ensembles de cas .

Le cas irréductible (l'impossibilité radicale) .

Cardan s'était d'abord restreint aux équations cubiques incomplètes (*census* manquant) . De plus, comme pour lui les coefficients devaient être tous positifs, il avait été conduit à distinguer trois cas distincts, les " Chapitres" , chacun doté d'une démonstration et d'une règle spécifique. La méthode de del Ferro - Cardan appliquée au Chapitre : $x^3 + px = q$ (1) (coefficients positifs) fournissait toujours le résultat, c'est à dire en termes modernes l'unique racine réelle de l'équation.

Par contre, les Chapitres (2) et (3) :

$$x^3 = px + q \ (2) \quad \text{et} \quad x^3 + q = px \ (3)$$

pouvaient dans certains cas conduire à cette impossibilité : un radical sur du négatif , c'est à dire *stricto sensu* une impossibilité radicale [77]. L'éventualité n'avait pas été initialement envisagée par Tartaglia ; lorsque Cardan lui en fit part, il se refusa à la prendre en compte et considéra qu'il s'agissait d'une chicane. De son côté Cardan, dans l'*Ars Magna* commença par exposer longuement le cas (1) sans problème et renvoya l'étude complète du cas (2) à une étude ultérieure, le *De Regula Aliza* . Il expliqua néanmoins clairement que ce chapitre peut conduire à une impossibilité. Le *De Regula Aliza* [78] cependant, est un traité de date incertaine (on sait seulement qu'il a été imprimé avec l'édition de 1570) , remarquablement obscur, et qui ne traite pas davantage du cas impossible.

Dans un des chapitres terminaux (XXXVII) de l'*Ars Magna* (*De regula falsum ponendi*) , Cardan cependant traita de ce qui se produit lorsqu'on en vient " à supposer du négatif." Il commença par une introduction aux *racines* négatives des équations. Un premier exemple très simple était consacré à la dot de la femme de Francis et au bien propre dudit Francis, qu'il supposait être négatif : une dette, c'est moins une chose (une inconnue) : *ponemus Franciscum habere rem unam m* .

Le second exemple est plus intéressant pour notre propos : il s'agit en effet de *radicaux* sur du négatif. Cardan proposait de partager 10 en deux parties telles que leur produit vaille 40. Il commençait par déclarer alors le problème impossible. Cependant, presque aussitôt il ajoutait : " Mais $5 + \sqrt{-15}$ et $5 - \sqrt{-15}$ conviennent puisque (suit un calcul) en effectuant le produit on trouve $25 - (-15) = 40$ " [79].

---

77 Chuquet avait le premier rencontré la question : dans un manuscrit du *Triparty en la Science des Nombres* (1484) , il la déclara immédiatement impossible .(Cajori , *History of Mathematical notations* , II ,126, op.cit) .

78 On ignore la signification du mot *Aliza* .

79 25 m : m : 15 facit 40 .

Un bref calcul marginal dans un cartouche reproduisait et aérait la démonstration rhétorique :

5 p. R m :15
5 m. R m : 15

---

25 m : m: 15 *quid est* 40

La justification par le calcul lui paraissant néanmoins insuffisante, il se lança aussitôt dans une hasardeuse démonstration géométrique du résultat . Et , " faisant abstraction des tortures mentales " (*dismissis incrutiationibus* [80]) il le démontra, ou crut le démontrer.

Cet exemple, pourtant célèbre, ne doit pas faire illusion : la réticence de Cardan à l'égard des radicaux sur des nombres négatifs a été très forte. On n'en trouve aucun autre exemple dans l'*Ars Magna* et moins encore évidemment de thématisation, même pour les équations du second degré. Lui qui avait pourtant si spontanément soulevé la question du cas irréductible auprès de Tartaglia, se refusa à envisager durablement des radicaux sur du négatif. Après la lecture de Bombelli cependant, Cardan se ravisa sans doute un peu. Dans l'édition posthume de ses Oeuvres en 1663, le *De Regula Aliza* a été en effet suivi par un bref texte que Cardan avait écrit à une date incertaine, le *Sermo de Plus et Minus* , où, avec force réticences, il reprenait maladroitement les méthodes et la terminologie spécifique - le *piu di meno* en particulier - de Rafael Bombelli, explicitement cité. Cardan regrettait comme lui le côté sophistique de la chose. Aucun exemple nouveau et spécifique de ce cas ne vint cependant appuyer cet emprunt à Bombelli [81].

Bombelli en effet, très tôt dans le Livre I de l'*Algebra* , s'était résolu à une sorte d'axiomatisation de la gestion des radicaux carrés sur du négatif. Décidé à éclaircir tous les cas d'équations cubiques laissées en suspens par Cardan, il s'intéressa à l'exemple : $x^3 = 15x + 4$ où 4 est évidemment racine apparente, mais où le discriminant est négatif :
$\Delta = -121$.

---

80 C'est aussi un jeu de mots . La même expression peut en effet signifier : *en éliminant les croix* (il s'agit alors des croix comme symboles de multiplication , c'est à dire donc : en effectuant le produit).

81 Le *Sermo de Plus et Minus* fait suite dans les Oeuvres , tome IV , à l' *Ars Magna Arithmeticae*. . Il est répertorié comme le chapitre 2 de l' Aliza , comme suite à la comptine sur *piu di meno* et *meno di meno* intégralement empruntée à Bombelli . Cardan donne cependant l 'exemple suivant : *si fuerit cubus aequalis* 15 *rebus plus* 4 ($x^3 = 15x + 4$) .

La formule de Cardan-del Ferro conduit ici à $\sqrt[3]{2-\sqrt{-11}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{-11}}$

Bombelli avait d'abord simplement écrit le radical carré sous la forme R (O .m .11) [82] tout comme Cardan qui s'en était tenu là. Poussé cependant par le fait qu'il connaîssait une racine apparente de l'équation, Bombelli continua. Appliquant alors à ces radicaux impossibles les règles de l'Algèbre vulgaire dont il fit l'hypothèse qu'elles demeuraient valides, il constata que $(2+\sqrt{-1})^3 = 2 + 11\sqrt{-1}$ et de même que $(2-\sqrt{-1})^3 = 2 - 11\sqrt{-1}$, en sorte que la formule de Cardan plus haut citée conduisait effectivement à $x = 4$ [83].

En dépit donc de ses réticences obligées, mais poussé par la réalité essentielle de la solution du problème considéré ($x = 4$) [84], Bombelli en vint donc d'abord à proposer sur ces radicaux impossibles une sorte de calcul mécanique. En un temps second, il se décida à axiomatiser en quelque sorte la question, c'est à dire, finalement, à assumer ce qui ne pouvait lui apparaître que comme une contradiction. Ecoutons Bombelli lui-même, tâchant de dépasser la " sophistique " : " Je viens de trouver une autre sorte de radical cubique d'une expression [*R.c.legate* [85]] très différente de l'autre, et qui prend sa source dans le chapitre du cube égal à la chose et au nombre [86], quand le cube du tiers de la chose excède le carré de la moitié du nombre (...) dans ce cas, la différence ne peut s'appeler ni plus, ni moins, mais je la nommerai " *piu di meno* " quand il faudra l'ajouter, et quand il faudra la retrancher, je l'appellerai " *meno di meno* " (...) Cette opération est très nécessaire dans le cas du carré et du cube (ou de la chose ou des deux ensemble). Cette sorte de radical paraîtra à beaucoup plus sophistique que réel ; et j'ai moi-même soutenu semblable opinion tant que je n'en ai pas trouvé la démonstration en lignes (...) [87]. "

Suivait un ensemble de huit règles-comptines :

piu di meno via piu di meno fa meno
meno via piu di meno fa meno di meno
piu via meno di meno fa meno di meno
meno via meno di meno fa piu di meno

---

82 Racine de moins onze .

83 Albert Girard utilisa le premier (1629) le symbole $\sqrt{-1}$. C'est ensuite Euler qui introduisit la lettre i dans un mémoire de 1777 à l' Académie des Sciences de Saint-Petersbourg (" *De formulis differentiabus , etc...*" (in *Institutiones calculi integralis* , Vol IV , Saint-Petresbourg ,1794 , 184) . Il ne réapparut qu'en 1801 sous la plume de Gauss qui en fit un usage systématique dans les *Recherches Arithmétiques* (Cajori ,F , History of Mathematical Notations, Tome II ,128 , op.cit)

84 Ce point est souligné par Lagrange .

85 Des Radicaux cubiques " liés " .

86 Seul cas en effet où peut apparaître une impossibilté .

87 Cf. Bortollotti , op.cit. 30-31 . Bombelli évoque une démonstration géométrique (en lignes) sans la fournir cependant .

piu di meno via piu di meno fa meno
piu di meno via meno di meno fa piu
meno di meno via piu di meno fa piu
meno di meno via meno di meno fa meno [88]

On regarde aujourd'hui ces règles comme la table du produit sur le groupe multiplicatif des racines quatrièmes de l'unité, avec nos nombres complexes i et - i en place des *piu di meno* et *meno di meno* . Elles étaient pour Bombelli le résultat d' une démarche d' axiomatisation en quelque sorte aveugle des règles opératoires qu'il avait trouvées pour ses opérateurs sophistiques [89] (*i.e* non réels : jamais le mot imaginaire n'apparaît ici).

Le procédé permit d'abord à Bombelli d' affirmer la validité universelle de la formule de del Ferro-Tartaglia (*dimostrare valida in ogni case la formula di Scipione del Ferro* [90]). De faire d'autre part retour sur l'équation du second degré dans le cas impossible [91] (cela peut nous sembler naturel, mais nous n'avions rien observé de semblable chez Cardan). Il faut aussi noter le caractère syncatégorématique pour Bombelli de cette sorte de Radical incarné dans le terme *legate* . Chaque expression *R . c. legate* en effet ne se concevait pas seule, mais toujours accompagnée de ce qu'on appelle aujourd'hui le complexe conjugué : " On doit avertir qu'une telle racine cubique d'une expression ne se peut rencontrer qu'accompagnée de son binôme.[92]"

Le saut épistémologique véritable a donc été ici le fait du seul Bombelli. Stevin [93], Leibniz, Lagrange lui rendirent cette justice. C'est en lisant Bombelli que Leibniz s'était initié à la théorie des équations comme il l'expliqua à Huygens dans une lettre contenant aussi un exemplaire de l'

---

[88] *Algebra* , p.169 ; cf. Bortollotti.op.cit. , 31 .

[89] Que les symboles "*piu* , *meno* , *piu di meno* , *meno di meno* " soient pour Bombelli des opérateurs extérieurs portant sur des nombres et non des nombres eux-mêmes (autrement dit , *piu di meno* n'est pas le nombre i , mais un opérateur portant sur un entier positif) me paraît clair et attesté dans un autre registre , par la conception scripturale de Bombelli des nombres négatifs qui n'existent pas en tant que tels mais s'écrivent , par exemple : (O. ñ .121) (Traduction de Cajori , II , 127, op.cit) .

[90] Cajori , II ,127-128 .

[91] Par exemple : 1 ^{2} p 20 à 8 ^{1} (pour $x^2 + 20 = 8x$). Il commence par la dire impossible (16 - 20 = - 4) , puis déclare qu' une racine est p.d.m 2 , à quoi il faut ajouter la moitié de la chose soit 4 . Au total : 4 p.di.m. 2 ou bien 4 m.di.m. 2 . En termes modernes 4 + 2 i et 4 - 2 i . (Bortollotti , 35).

[92] idem , 31.

[93] " Mais l'invention de Louys de Ferrare est n'a guères été divulguée en langue italienne que par Raphael Bombelle grand arithméticien de notre temps " (Stevin . *Préface à l'Arithmétique* .op.cit.)

Algebra [94] . Leibniz , qui considérait Bombelli comme un " maître de l'art analytique" apprécia particulièrement ses recherches sur le cas irréductible [95] . En retour, Huygens écrivait à Leibniz, en signe d'admiration : " Vous avez plus fait que Bombelli. [96] "' Lagrange aussi estimait fort Bombelli : " L'algèbre de Bombelli ne contient pas seulement la découverte de Ferarri, mais encore quelques remarques importantes sur les équations du 2° et du 3° degré et surtout le calcul des radicaux, au moyen desquels l'auteur parvient dans quelques cas à tirer les racines cubiques imaginaires de deux binômes de la formule du 3° degré dans le cas irréductible, ce qui donne un résultat tout réel et fournit la preuve directe de la réalité de ces sortes d'équations. (...) C'est de cette manière que Bombelli s'est convaincu de la réalité de l'expression imaginaire du cas irréductible. [97] "

Les cubiques après Bombelli et le mémoire de Lagrange .

Commencée en Europe avec del Ferro vers 1500, ce moment de la théorie des équations prit fin avec le mémoire de Lagrange de 1770 sur la résolution des équations algébriques [98]. Lagrange commençait par un rappel historique, regrettant que l'on ne connût rien sur l'origine de l'idée de del Ferro puis constatait que là où étaient parvenus les algébristes italiens du XVI° siècle, on n'était pas allé plus loin en 1770, sinon sur des points annexes. [99]

Les successeurs immédiats de Bombelli furent essentiellement Viète, Harriott, Girard, Descartes, Leibniz et Tschirnaus, dont nous évoquerons brièvement les travaux.

Viète tout d'abord proposa pour les équations du troisième degré une méthode apparemment tout à fait différente de celle de Cardan, savoir un changement de variable du type $x = u - \frac{k}{u}$, de sorte que à ce que dit Montucla , même si Cardan n'avait pas écrit l'*Ars Magna* , nous tiendrions de Viète la résolution des équations du 3° degré [100]. Le commentaire est un peu court : on doit se demander d'où l'idée aurait pu venir à Viète d'un

[94] Lettre I de Leibniz à Huygens.*Briefwechsel* ... , 547 , op. cit.

[95] idem, 565 .

[96] idem , 559.

[97] Troisième leçon donnée à l'Ecole Normale.

[98] Tome III des *Oeuvres* de Lagrange , op.cit .

[99] " A l 'égard de la résolution des équations littérales , on n'est guère plus avancé qu'on ne l'était du temps de Cardan , qui le premier a publié celles des équations du troisième et du quatrième degré . Les premiers succès des Analystes italiens dans cette matière paraissent avoir été le terme des découvertes qu'on pouvait y faire ; du moins est-il certain que toutes les tentatives qu'on a faite jusqu'à présent pour reculer les limites de cette partie de l'Algèbre n'ont servi qu'à trouver de nouvelles méthodes pour les équations du troisième et du quatrième degré , dont aucune ne paraît applicable , en général , aux équations d'un degré plus élevé . "(page 205)

[100] Montucla , *Histoire des Mathématiques* ,Tome I ,Part III ,Livre III , 601-602 ,op.cit .

semblable changement de variable, directement inspiré de $x = u - v$, avec $u.v = p/3$.[101]

Albert Girard montra ensuite (1629)[102] que, de façon quelque peu paradoxale, les équations cubiques qui conduisent au cas irréductible sont exactement celles qui admettent trois racines réelles, soit le maximum possible, c'est à dire aussi celles qui se " résolvent " complètement en trois facteurs du premier degré. Cette remarque de Girard fut à la source d'une réflexion prolongée de Leibniz à Paris, suivie d' un échange des correspondance avec Huygens après son retour à Hanovre (1679) [103]. Harriott (1631), montra le premier que si a est racine de P , alors P (x) est divisible par (x-a) [104]. Il s'intéressa également aux racines rationnelles des équations [105] . Créateur (dans les *Regulae*) de la notation moderne pour les puissances, Descartes fut aussi le premier à écrire de façon symbolique les formules de Cardan (en 1637), et de proposer une résolvante pour la résolution des équations du quatrième degré différente de celle de Ferrari [106].

Tschirnaus et le jeune Leibniz s'étaient rencontrés à Paris précisément autour d' une recherche en commun sur les équations cubiques. Dans les *Acta Eruditorum* de 1683 , Tschirnaus en reprit seul l'étude en développant une remarquable méthode d'élimination analysée par Lagrange . Différente des procédés jusque là utilisés au cas par cas pour chaque degré , la méthode de Tschirnaus se voulait générale : reprenant l'ancienne idée provenant des équations du second degré , Tschirnaus montra que toute équation algébrique quelconque $P(x) = 0$ de degré n peut être considérée comme la transformée d'une équation

---

101 Viète a cependant constitué un important travail à partir de l'oeuvre de Bombelli , à laquelle sa notation homogène a de surcroit apporté une grande clarification . En suivant Montucla , nous l' exposons ici brièvement en notations modernes . Il s'agit de changements de variables adaptés à chaque situation :
Pour le cas : $a^3 + 3\,bb\,a = 2\,ccc$ (où a est l'inconnue) : " Qu'on fasse , dit Viète $a = \frac{ee - bb}{e}$ (e est une autre inconnue) ,et après les réductions ordinaires $e^6 - 2\,c\,e^3 = b^6$, et ayant trouvé e . celle de a . On a donc $X^2 - 2\,c^3\,X - b^6 = 0$, donc deux racines de signe contraire :
Si l'une est e_1^3 , l'autre est $\frac{-b^6}{e_1^3} = \left[\frac{-b^2}{e_1}\right]^3$. "
Pour le cas $a^3 - 3\,bb\,a = 2\,ccc$, Viète pose $a = e + (b^2/e)$, etc...

102 *Invention nouvelle en Algèbre* . Amsterdam . 1629 .

103 *Briefwechsel* ... , op. cit , 547-564.

104 Le résultat sera également repris dans la *Géométrie* de Descartes (Livre III).

105 Montucla , Livre II , Part IV , 108 , op.cit.

106 *Oeuvres* de Descartes . Edition Adam-Tannery , VI , 459 . Nous avons longuement analysé cette question in *Mnémosyne* (6) ,1993 . Irem de l' Université Paris VII.

" binôme "($y^n = C$) par un certain changement de variable algébrique à coefficients indéterminés : $y = a_0 + a_1 x + ... + a_{n-1} x^{n-1}$.

De façon équivalente en termes modernes, c' était donc regarder l'équation donnée comme le résultant de l'élimination de y entre les deux autres.[107] C'était bien la reprise remarquable de l'idée ancienne, jusque là infructueuse : toute équation algébrique de degré n n'est autre qu'une certaine équation binôme $y^n = C$ La méthode fonctionne effectivement pour les équations de degré trois ou quatre . [108] Tschirnaus aurait bien voulu pouvoir l'étendre à des équations de degré quelconque. Malheureusement, comme le note Lagrange, elle conduit dès lors à des résolvantes de degré plus élevé, de sorte que c'est en vain que Tschirnaus tenta de l'étendre au delà du degré quatre.

Le mémoire de Lagrange fit date : il résumait en effet la situation en 1770, à un autre moment crucial pour la théorie des équations : celui où la possibilité de résoudre les équations de degré supérieur ou égal à cinq se posait à son tour comme une énigme nouvelle, irritante et apparemment insoluble, tout comme deux siècles plus tôt l'avait été celle des équations cubiques elles-mêmes. [109] Comme on sait, la réponse aux questions de Lagrange viendra ici un peu plus tard, de Galois et Abel.

Conclusions .

Trois des plus grands chefs d'oeuvre de la Science durant la Renaissance furent imprimés presque en même temps : Le *De Revolutionibus Orbium Coelestium* , de Copernic (1545), le *De Fabrica Humani Corporis* , de Vesale (1543), enfin l'*Ars Magna* de Cardan (1545). Cependant, alors que les deux premiers sont aujourd'hui disponibles en de belles éditions et des traductions élaborées, il n'en est toujours pas de même pour l'*Ars Magna* [110] : ainsi en est-il des chefs d'oeuvres de l'Histoire des Mathématiques.

Epistémologiquement parlant, les mathématiciens de la Renaissance se sont trouvés en face d'une question essentiellement neuve : résoudre des équations contenant des Cubes, situation à laquelle toutes les techniques

---

107 L'idée initiale de Tschirnaus était légèrement différente : il montrait que par le changement de variable algébrique proposé $y = a_0 + a_1 x + ... + a_{n-1} x^{n-1}$, on pouvait annuler dans l'équation en y transformée , autant de termes intérmédiaires qu'on voulait (tous , sauf le terme constant et le terme dominant) .

108 Lagrange étudie en détail les deux cas pour le degré trois(p. 222) et quatre (p. 278). Par exemple pour le degré trois ,il part de l'équation complète $x^3 + mx^2 + nx + p = 0$ et montre qu'on peut déterminer a et b tels qu'en posant $x^2 = b x + a + y$, alors l'équation transformée soit de la forme $y^3 + C = 0$. (p 224-225).

109 Cf la Section Troisième du Mémoire(p 305) : De la Résolution des Equations du Cinquième Degré et des Degrés Ultérieurs .

110 Le livre cité de R. Witmer vient enfin réparer cette lacune en langue anglaise.

précédentes depuis les Grecs n'avaient trouvé aucune adaptation adéquate. Et par une démarche à la fois archaïque et étonnemment moderne, les autorités mathématiques du temps affirmèrent en un premier temps que pour les cubiques, il ne pouvait y avoir de règles générales.

Dans ces conditions donc, la résolution des équations cubiques a été un fait mathématique majeur .Comme l'écrit Libri [111]. " Ce fut, nous le répétons, une découverte importante : alors pour la première fois, les modernes l'emportèrent en Mathématiques sur les Grecs et les Orientaux " La relative technicité de la preuve (partition d'un cube géométrique) avait certes été un premier obstacle. L'autre difficulté était grande également : pouvoir communiquer le résultat final (aujourd'hui les " formules de Cardan") en un temps où toute écriture symbolique des puissances et des radicaux était absente. Elle conduisit en un premier temps aux règles comptines de Tartaglia et Cardan. Les progrès furent cependant rapides et constants à partir des années 1520 : dans les soixante dix ans qui séparent le *libretto* de del Ferro de l'*Algebra* de Bombelli, on a en effet trouvé, pour reprendre les termes de Lagrange, tout ce qui pouvait l' être en matière d'équations du troisième et du quatrième degré.

Rappelons aussi que c'est sous la pression d'un problème réel, savoir retrouver par les formules de Cardan certaines solutions réelles et apparentes d'équations cubiques que Bombelli en est peu à peu venu à mettre au jour, de façon d'abord plus " sophistique " que réelle, cet assemblage nouveau de signes , apparemment contradictoire : des radicaux sur du négatif.

Bibliographie .

BORTOLLOTTI , E *L'Algebra , Opera di Rafael Bombelli di Bologna* . (Livres IV et V) N. Zanichelli . Bologne 1929 .
L'ouvrage est précédé d'une " Analisi dell' *Algebra* " .

CAJORI , F *A History of Mathematical Notations* (2 vol .)
The Open Court . La Salle.Illinois .(Rééditions : Vol I : 1974. Vol II : 1952) .

CARDAN , J *Ars Magna ,sive de regulis algebraicis liber unus*
= Oeuvres , IV, Lyon . 1663.

CARDAN , J *Ma vie* (traduction française du *De Liber de Propria Vita*) . Traduit par Jean Dayré . Champion . Paris . 1936 .

---

111 G.Libri, *Histoire des Sciences Mathématiques* ... op. cit , 157.

CASSINET , J et *aliens.* (I I) *Equations du Second degré* . (1979)
(I I I) *Equations du Troisième degré* (1980)
(I V)*Equations du Quatrième degré* . (1982)
Publications de l ' Institut de Recherche Sur l'Enseignement des Mathématiques de Toulouse (Université Paul Sabatier).

ECKMAN , J *Jerôme Cardan.*
in Supplements to the Bulletin of the History of Medicine ,7 , 1946.
The John Hopkins Press . Baltimore .

LAGRANGE , J.L *Reflexions sur la résolution algébrique des équations.*
Nouveaux mémoires de l' Académie Royale des Sciences et Belles-lettres de Berlin .
= Oeuvres ,III, 205 -215 .

LEIBNIZ , G ,W *Briefwechsel mit Mathematikern* . Gerhardt . Hildesheim . Ed.1987

LIBRI , G *Histoire des Sciences Mathématiques en Italie depuis la Renaissance des lettres jusqu' 'à la fin du XVII° siècle* .
Renouard .Paris .1840 .

MONTUCLA , J.F *Histoire des Mathématiques*.
Henri Agasse . Paris . 1799 .

MORLEY , H *Jerôme Cardan. The life of Girolamo Cardano ,Physician* . Chapman and Hall. Londres .1854 .

ORE, O *Cardano ,The gambling scholar* .
Princeton University Press. Princeton .1953 .
Le livre contient une traduction anglaise du *Liber de ludeo aleae* sous le titre *The Book on the games of chance* .

RITTER , F *François Viète ,inventeur de l'Algèbre moderne (1540-1603). Essai sur sa vie et son oeuvre* .
in Revue occidentale , philosophique , sociale et politique (2nde série) ,**10**, (1895), 234-274 et 354 - 415.

SERFATI , M *Naissance de l'écriture symbolique mathématique ,de Descartes à Leibniz* , in *Calculemos . . . Homenaje al Profesor Miguel Sanchez- Mázas* . Trotta . Madrid. 1994.

SERFATI , M *La question de la " chose"* in Actes du Colloque Inter IREM d'Histoire et d' Epistémologie des Mathématiques . Strasbourg . 1987. Publication de l'Université Louis Pasteur .

SERFATI , M *Descartes et les équations du quatrième degré* , in *Mnemosyne* , **6** , 1993 . IREM. Université Paris VII.

TARTAGLIA , N *Quesiti et inventioni diverse* .
Reproduction en *fac-simile* de l'édition de 1554 .
Editée avec une partie introductive par A. Masotti . Ateneo di Brescia .1959.

TARTAGLIA , N et FERRARI , L *Cartelli di Sfida Matematica.* .
Reproduction en *fac-simile* de l'édition originale de 1547-1548 .
Editée avec une partie introductive par A. Masotti . Ateneo di Brescia .1974.

WITMER , T.R *The Great Art ,or the Rules of Algebra* ,by Girolamo Cardano.
(traduction anglaise de l'*Ars Magna*) The M.I.T Press . Cambridge . Massachussets. 1968 .