SÉMINAIRE DE PHILOSOPHIE ET MATHÉMATIQUES

HOURYA SINACEUR

Calcul, ordre, continuité

Séminaire de Philosophie et Mathématiques, 1991, fascicule 5
« Calcul, ordre, continuité », , p. 1-15
<http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1991___5_A1_0>

Hourya SINACEUR
Institut d'Histoire et Philosophie des Sciences et des Techniques
13, rue du Four 75006 Paris

CALCUL, ORDRE, CONTINUITÉ*

Nous devons une claire distinction des trois concepts qui forment le titre de cet exposé à une théorie mathématique relativement récente (1926), l'algèbre réelle d'Artin et Schreier. Par 'algèbre réelle' il faut entendre une théorie algébrique des nombres réels, c'est-à-dire une théorie *algébrique* de ce qui, des Grecs à Cantor et au-delà, nous sert à numériser le *continu* linéaire. Sans entrer ici dans les détails techniques[1] ni m'arrêter au rapport structurel entre algèbre réelle et analyse non standard d'Abraham Robinson[2], je voudrais faire quelques remarques réunissant les éléments essentiels de ce premier acte que l'algèbre réelle constitue pour de nombreux développements actuels impliquant un traitement algébrique du continu, aussi bien en algèbre qu'en géométrie algébrique et qu'en théorie des modèles. Je commencerai par rappeler comment l'algèbre réelle atteint la cible d'un objectif ancien mais tenu pour quasi irréalisable. Je préciserai ensuite au confluent de quelles lignes généalogiques immédiates elle a forgé son approche du continu. Je soulignerai enfin qu'elle apporte, en complément à la théorie de Steinitz, fondement algébrique de la théorie des équations, le fondement algébrique de la théorie des inégalités.

I. AXIOMATISATION ALGÉBRIQUE DES NOMBRES RÉELS

1. *Le pouvoir des méthodes abstraites*

L'algèbre réelle est un produit de la grande réforme conceptuelle des mathématiques «modernes» qui a priviligié, dans les années 1930, les deux points de vue distincts mais fortement corrélés de l'algèbre et de la topologie abstraites. Elle est l'œuvre, entre 1924 et 1927, d'un algébriste connu, Emil Artin, animateur fameux du séminaire mathématique de l'université de Hambourg et d'Otto Schreier[3], l'un des fondateurs de l'algèbre topologique et auteur du concept de 'groupe abstrait continu'. Tous deux étaient dans la mouvance de l'école de Hilbert, champion des

---

* Cette conférence reproduit, à quelques variantes près, l'intervention au Colloque de Cerisy-la Salle de Septembre 1990, publiée depuis dans les Actes du colloque : *Le labyrinthe du continu*, Springer-Verlag France, 1992.

[1] On trouvera une étude détaillée dans Sinaceur 1991, 2e partie en particulier.

[2] Cela a été fait dans Sinaceur 1989.

[3] Le lecteur francophone trouvera bientôt une traduction française de tous les mémoires d'Artin et d'Artin et Schreier relatifs à l'algèbre réelle dans Roy M.-F.-Sinaceur H.

méthodes abstraites et des théorèmes de finitude[4], qu'il considérait comme la plus grande «borne» des mathématiques modernes. L'algèbre réelle est une bon échantillon du pouvoir des méthodes abstraites : elle constitue une théorie algébrique du corps ordonné des nombres réels, ou, plus exactement, définit une structure algébrique générale, celle de corps réel clos, dont le corps des nombres réels est un modèle (réalisation *concrète* vérifiant les axiomes et théorèmes des corps réels clos). Illustrant l'idée, à l'époque dominante, que l'algèbre abstraite est «l'instrument» à la fois d'expression et de généralisation des notions mathématiques, Artin et Schreier réussissent à «caractériser» le corps des nombres réels comme corps réel clos.

Observons qu'il s'agit d'une «caractérisation» («*Kennzeichnung*») en un sens alors totalement nouveau bien qu'implicite dans le travail d'Artin et Schreier. Les nombres réels ne sont pas, en effet, déterminés à un isomorphisme près comme on l'entend précisément par le terme 'caractérisation'. Mais ils sont désignés comme élément d'une classe de corps, et cette classe est caractérisée par un ensemble d'énoncés vérifiés par chacun de ses éléments; comme on s'apercevra plus tard que ces énoncés sont formulables dans un langage logique du premier ordre, il s'agit d'une caractérisation à une équivalence élémentaire près. Ainsi le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels et celui, $\mathbb{R}_A$, des nombres réels algébriques, non isomorphes ainsi que l'a démontré Cantor en 1873, sont élémentairement équivalents. Il est remarquable que les mêmes énoncés élémentaires soient vérifiés dans un modèle dénombrable et dans un modèle «continu», la cardinalité étant pour ainsi dire neutralisée au premier ordre comme l'exprime d'une façon générale le théorème de Löwenheim-Skolem, alors peu connu des mathématiciens non logiciens. Bien entendu, au premier ordre, sont aussi neutralisées les propriétés qui ne peuvent s'exprimer qu'au second ordre, comme la continuité.

2. *Définition des corps réels clos*

Un corps réel clos est un corps commutatif K vérifiant (par exemple) les trois axiomes suivants :

1) l'élément -1 ne peut être écrit comme somme de carrés d'éléments de K,

2) tout élément positif de K a une racine carrée,

3) tout polynôme sur K, de degré impair, a au moins une racine dans K.

Artin et Schreier montrent que le premier axiome équivaut à l'énoncé : " Il existe sur K une relation d'ordre total compatible avec sa structure algébrique ". Ce premier axiome exprime donc que K est non pas *ordonné* mais *ordonnable* et c'est ce qu'ils appellent un «corps réel»,

[4] Le plus fameux établit (1888) que tout système d'invariants a une base finie. L'existence de la base est démontrée de façon abstraite (non constructive), mais la démarche correspond d'une certaine façon à la stratégie hilbertienne de maîtriser l'infini sur le terrain même du fini. Dans le même esprit, Artin a démontré un certain nombre de propriétés pour les anneaux «artiniens», c'est-à-dire ceux où toute chaîne décroissante d'idéaux est finie.

induisant une remarquable mutation sémantique de l'adjectif 'réel' traditionnellement réservé aux racines des polynômes et qualifiant, par opposition aux «imaginaires», des «quantités» puis, beaucoup plus tard[5], des nombres. Un corps *réel* c'est donc un corps sur lequel, contrairement à ce dont nous avons l'habitude avec celui des nombres réels, la relation d'ordre total n'est pas déjà donnée — et nous verrons plus loin pourquoi Artin et Schreier évitent dans un premier temps de considérer des corps ordonnés. Mais ils établissent rapidement[6] qu'un corps réel clos est ordonnable d'une façon *unique* : ainsi il n'y a pas de différence mathématique essentielle entre 'ordonnable' et 'ordonné (effectivement)' lorsqu'on a affaire à des corps réels clos.

La conjonction des axiomes 2) et 3) équivaut à une propriété de maximalité. Par exemple, $\mathbb{R}$ est maximal dans l'ensemble des corps de nombres vérifiant l'axiome 1) ou corps de nombres réels —le sens de cet adjectif se réduisant ici à son sens usuel. En d'autres termes, il n'existe pas d'extension algébrique propre de $\mathbb{R}$ ordonnable d'une façon qui prolonge l'ordre naturel de $\mathbb{R}$. Mais $\mathbb{R}$ n'est pas seul à jouir de cette propriété de maximalité. Il en est de même pour le corps $\mathbb{R}_A$ des nombres réels algébriques[7], qui est strictement contenu dans $\mathbb{R}$. Loin de caractériser la propriété de continuité de , la maximalité eprmet au contraire de la passer sous silence. Qu'est-ce que cela signifie?

Observons les énoncés de ces trois axiomes. On y voit que l'enjeu est bien de fournir une expression *algébrique* de l'existence, ou, comme disent Artin et Schreier, de «la possibilité» de la relation d'ordre naturel de $\mathbb{R}$ dont on sait que c'est un ordre *continu*. Expression algébrique, puisque n'interviennent dans ces énoncés que les notions de carré, de somme de carrés, de polynôme et de racine, c'est-à-dire en fin de compte deux opérations : l'addition et la multiplication, et une seule relation : l'égalité. Nous avons donc une axiomatisation algébrique du continu géométrique linéaire. Pour s'aider d'un raccourci un peu brutal mais significatif, je dirai que cette situation offre, non pas une illustration exacte, mais une bonne approximation d'un type de pensée «finitiste» à la Hilbert[8]. Car l'axiomatique d'Artin et Schreier offre bien une description algébrique dénombrable, c'est-à-dire formulée en une suite dénombrable d'énoncés élémentaires constitués de symboles relevant exclusivement du

---

[5] L'usage courant de l'expression 'nombre réel' semble postérieur à la définition correcte de l'ensemble des nombres réels par Dedekind et Cantor à la fin du XIX[e] siècle. Par exemple, Dedekind 1872 parle encore de 'nombre irrationnel'.

[6] Artin-Schreier 1926, Satz 1.

[7] Au contraire, si nous partons du corps ordonné $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, on peut l'étendre algébriquement en conservant son ordre, par exemple en prenant l'extension algébrique simple $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Notons, en passant, qu'un corps réel clos est un corps réel n'ayant aucune extension propre algébrique et réelle, mais lui-même n'est pas forcément une extension algébrique de son corps premier : au contraire du corps $\mathbb{R}_A$ des nombres réels algébriques, $\mathbb{R}$ n'est pas algébrique sur le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels.

[8] On trouvera une étude détaillée du finitisme de Hilbert dans Sinaceur 1993.

langage de l'algèbre[9], d'un phénomène, le continu, dont l'essence est topologique et qui, du point de vue de la théorie cantorienne de la cardinalité, non seulement est infini mais encore non dénombrable. Bref, une axiomatique qui capture le continu linéaire par un ensemble dénombrable d'énoncés algébriques. On comprend qu'une telle éventualité ait été jugée impensable avant sa réalisation et paradoxale ou surprenante après. Les plus grands mathématiciens n'ont en pas jugé autrement. Trente ans après, André Weil insiste après coup sur le paradoxe qu'il y avait apparemment à considérer qu'une théorie impliquant les nombres réels fît partie de l'algèbre abstraite[10]. S'il était bien naturel en effet que celle-ci parvînt à maîtriser les phénomènes liés à la structure algébrique de $\mathbb{R}$ (théorie algébrique de la résolubilité des équations obtenue grâce aux travaux de Galois et de Steinitz), elle semblait devoir achopper aux propriétés topologiques de $\mathbb{R}$, réunies dans l'idée intuitive de «continuité».

3. *La continuité de $\mathbb{R}$: analyse, topologie, algèbre*

Celle-ci se trouvait exprimée par divers énoncés dont certains sont équivalents entre eux sans que les notions impliquées soient forcément homogènes sémantiquement. La «continuité» de $\mathbb{R}$ était, en effet, représentée par l'une des propriétés suivantes :

1. la propriété de la coupure de Dedekind (sur laquelle nous revenons plus bas),

2. la convergence des suites de Cauchy,

3 le théorème de Bolzano ou théorème *analytique* de la valeur intermédiaire qui établit que toute fonction continue sur un intervalle réel et qui prend, pour deux valeurs a et b de l'intervalle, des valeurs de signe opposé, s'annule forcément entre a et b,

4. le théorème de Cantor selon lequel il existe dans toute suite d'intervalles réels emboîtés un point commun à tous les intervalles,

5. la propriété de la borne supérieure (ou de la borne inférieure) selon laquelle tout ensemble non vide et majoré (resp. minoré) de nombres réels possède un plus petit majorant (resp. un plus grand minorant).

Or, s'il est convenu de reconnaître en l'idée de «continuité» un concept topologique, il n'est, en revanche, pas évident que l'expression de chacune des propriétés 1 à 5 appartienne au langage de la topologie. Par exemple, 1 et 5 mettent en jeu la structure de corps ordonné de $\mathbb{R}$ plutôt que sa structure de corps topologique au sens propre, c'est-à-dire corps dont l'addition, la multiplication et leurs inverses sont continues

---

[9] Ni le premier ni le troisième des axiomes ne peut s'écrire directement en un seul énoncé élémentaire. Mais " $\sum_1^n x_i^2 = 0 \Rightarrow x_i = 0$ pour tout i, $1 \leq i \leq n$ et pour tout n-uplet $(x_1, x_2, ..., x_n)$ d'éléments de K " équivaut à la suite : " $x_1^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$...".

[10] Weil 1967, p. 174.

(conservent les voisinages[11]). Justement, la situation était surdéterminée du fait que ℝ possède à la fois une structure de corps, une structure d'ordre, une topologie dérivée de la notion de distance, c'est-à-dire une métrique. Avec le recul, on peut remarquer aujourd'hui que la définition d'une distance ne fait intervenir que la structure algébrique et la relation d'ordre, c'est-à-dire qu'on peut mettre une métrique sur ℝ ou sur un corps ordonné sans avoir à prendre un point de vue proprement topologique. Mais, à l'époque, le statut algébrique ou non de l'ordre lui-même était.encore en question. Par ailleurs, le recours à l'algèbre pour débroussailler la situation avait alors de quoi étonner, à un moment de plein essor pour l'analyse réelle (travaux de Lebesgue, Borel, La Vallée Poussin, etc.) et de formation de la topologie générale. Celle-ci précisément apportait de quoi élaborer l'idée de continuité grâce à différents concepts : conservation des *voisinages* par les fonctions continues de ℝ dans ℝ, *connexité* exprimant le fait que ℝ est «d'un seul tenant», *compacité locale* pour dire que tout point de ℝ possède un voisinage compact (voisinage sur lequel tout filtre a un point d'adhérence ou tout ultrafiltre est convergent), *complétion* exprimée par la convergence des suites de Cauchy dans ℝ considéré comme espace métrique. Pourtant c'est l'axiomatique algébrique d'Artin et Schreier qui exhibe, selon André Weil, «les vrais fondements» de la théorie des réels et la remet «sur ses pieds».

4. *L'algèbre réelle*

Que veut dire au juste André Weil? Ceci : inverser la situation qui faisait reposer le plus élémentaire : l'étude (des solutions réelles) des polynômes à coefficients réels, sur le moins élémentaire : l'étude de la notion plus générale de fonction réelle continue de variables réelles. S'il est évident que la notion de fonction continue de ℝ dans ℝ couvre une catégorie plus large, plus variée et plus complexe d'êtres mathématiques que celle de polynôme à coefficients réels, alors on doit pouvoir traiter spécifiquement cette dernière en mettant en évidence l'ensemble des théorèmes valides sous les hypothèses plus restreintes qui lui sont associées. Bref, on doit pouvoir traiter de *l'algèbre* réelle sans avoir à connaître prélablement de *l'analyse* réelle. C'est exactement cela que réussit la théorie d'Artin et Schreier. L'axiomatique de corps réel clos permet en effet de formuler et de démontrer, en se restreignant au langage algébrique, des propositions que la formulation et la démonstration analytiques qu'on en donnait habituellement avait versées au compte de «l'analyse des équations», comme on disait au XIX^{e} siècle. Il en est ainsi des théorèmes de Bolzano, de Rolle, de Sturm, des accroissements finis, du théorème de majoration des racines d'un polynôme $x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ par la somme des valeurs absolues de ses coefficients ou de celui selon lequel toute fraction rationnelle de dénominateur non nul sur un intervalle atteint ses bornes sur cet

[11] Plus précisément : une application d'un espace topologique dans un autre est continue si et seulement si tout voisinage de l'image d'un point contient l'image d'un voisinage de ce point.

intervalle. Tous ces théorèmes sont vrais des polynômes et des fractions rationnelles sur $\mathbb{R}$ non pas (seulement) en tant que ceux-ci sont des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mais *d'abord* en tant que $\mathbb{R}$ vérifie les axiomes de la structure de corps réel clos. Artin et Schreier les appellent pour cette raison «théorèmes de l'algèbre réelle», créant ainsi une nouvelle discipline qui repère et distingue dans les propositions habituelles de l'analyse réelle celles qui peuvent être versées, ou reversées, au chapitre de l'algèbre. D'une façon générale, toute question impliquant $\mathbb{R}$ et soluble dans le cadre de l'axiomatique des corps réels clos est une question algébrique.

Ce résultat tranche une vieille question. Car c'est depuis ses origines que la recherche des racines réelles des équations algébriques pose aux mathématiciens le problème de son autonomie par rapport aux concepts et aux méthodes de l'analyse ou, comme on disait aux XVII^{e} et XVIII^{e} siècles, de la géométrie. C'est depuis l'origine de la théorie des équations qu'une algèbre réelle tente de se dégager de la géométrie réelle. L'autonomie de l'une par rapport à l'autre est conjecturée déjà par Michel Rolle ou l'abbé De Gua par exemple, mais elle ne sera jamais vraiment assurée. Louis Joseph de Lagrange croit pouvoir y réussir en 1798. Il pose explicitement au début de son *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés* [12] que le premier principe de la résolution numérique des équations algébriques est un énoncé que nous appelons théorème de la valeur intermédiaire (V.I.) ou théorème du changement de signe : il s'agit d'une version algébrique, où n'interviennent pas les notions de fonction et de variation continues mais seulement celles de polynôme et de changement de signe, du théorème analytique démontré ultérieurement (en 1817) par Bolzano. La théorie d'Artin et Schreier a confirmé l'hypothèse de Lagrange en la reformulant dans le cadre général de l'axiomatique des corps réels clos : V.I. équivaut à la conjonction des axiomes 2) et 3) énoncés plus haut; V.I. est donc bien la pierre angulaire de la théorie algébrique de $\mathbb{R}$ et des corps réels clos[13]. Toutefois, on est loin d'être autorisé à réduire la théorie d'Artin et Schreier à celle de Lagrange. Car si ce dernier a posé la bonne question, il n'a pu y répondre. Bien au contraire, Lagrange est parfaitement conscient d'avoir manqué son but : démontrer de façon purement algébrique, indépendamment de «la théorie des lignes courbes», le premier principe de la théorie des équations. Sa première démonstration[14], «directe» et purement algébrique, contient, en effet, une pétition de principe. Le voilà donc qui se résigne, dans une deuxième démonstration qu'il rajoute sans effacer la première[15], à un raisonnement sur les «variations par degrés insensibles» des «lignes courbes», c'est-à-dire à une justification géométrique, qu'il illustre d'ailleurs par un modèle cinématique. Artin et

[12] Lagrange 1798, théorème I.

[13] En revanche, le théorème de Bolzano caractérise $\mathbb{R}$ à l'exclusion de tout autre corps réel ou même réel clos comme l'a démontré Laugwitz 1973.

[14] Lagrange 1798, *Œuvres*, VIII, p. 19-20.

[15] Ibid., Note I.

Schreier montrent que cette deuxième démonstration de Lagrange est inutile! Car sa première démonstration est, en fait, correcte dès que l'on dispose de la théorie des corps algébriquement clos de Steinitz et de l'équivalence qu'ils établissent dans leur propre mémoire : 'K réel clos $\Leftrightarrow$ $K(i)$ algébriquement clos'[16].

II. REPÈRES HISTORIQUES

Ce n'est pas le lieu de refaire toute l'histoire qui a abouti à la construction d'Artin et Schreier. Bien des résultats se sont croisés, dont la théorie algébrique des corps de Steinitz et le dix-septième problème de Hilbert ne sont pas les moindres. Je ne veux considérer naturellement ici que ceux qui entretiennent un rapport direct avec le problème de l'expression de la «continuité» de $\mathbb{R}$. La construction de *l'ensemble* $\mathbb{R}$ par Dedekind et par Cantor, l'axiomatisation de $\mathbb{R}$ en tant que corps commutatif ordonné archimédien maximal par Hilbert sont trop connus pour qu'il faille en rappeler le détail. Etant donné l'esprit de ferveur où l'on tenait, au début du siècle, l'œuvre de Dedekind et celle de Hilbert, on ne sera pas étonné de constater que l'axiomatisation des réels par Artin et Schreier fait une sorte de synthèse entre la construction de Dedekind et la caractérisation de Hilbert. Expliquons-nous.

1. *Réduction de la continuité à l'ordre*

C'est incontestablement Dedekind qui, en voulant donner «un fondement purement arithmétique et parfaitement rigoureux des principes de l'analyse infinitésimale», a mis en valeur la structure d'ensemble ordonné de $\mathbb{R}$. Pour lui, cela revient à trouver «une définition véritable de la nature de la continuité»[17]. Il s'agit bien d'une entreprise de réduction de la «continuité» à l'ordre de $\mathbb{R}$. Y réussir c'est atteindre un double but. D'abord, exprimer en termes empruntés à un domaine réputé précis, l'arithmétique, une notion «représentée» dans un domaine tenu pour être conceptuellement plus flou ou moins bien fondé : la géométrie ou l'analyse dont la rigueur est ainsi, selon Dedekind, non pas intrinsèque mais seulement «d'emprunt». Ensuite et du même coup, prouver l'autonomie de l'arithmétique : ne doit susbister pas même l'apparence d'un besoin de représentations («*Vorstellungen*») étrangères à elle, images ou figures géométriques en particulier. Cette autonomie inclut la capacité à exprimer par ses propres moyens sinon tous, du moins la plupart des faits mathématiquement significatifs. Au premier rang de ceux-ci la «continuité» de $\mathbb{R}$, base de si nombreux raisonnements. En fait, comme on sait, Dedekind part de l'ensemble ordonné des nombres rationnels, montre qu'il est «lacunaire» au sens où il existe des sous-ensembles non vides de nombres rationnels minorés et sans borne inférieure ou majorés et sans borne supérieure, comble ces lacunes en considérant l'ensemble ordonné de toutes les coupures de $\mathbb{Q}$ qui vérifie,

---

[16] Artin-Schreier 1926, Satz 4.

[17] Dedekind 1972, *Gesam. math. Werke*, III, p. 316.

lui, les propriétés de la borne supérieure et de la borne inférieure, et définit l'ensemble des réels par l'ensemble de ces coupures de $\mathbb{Q}$. En réduisant ainsi l'idée de continuité à celle d'ordre, Dedekind a amorcé la distinction entre structure ordonnée et topologie proprement dite et montré que la structure topologique de $\mathbb{R}$ n'est pas prépondérante à tous égards. Mais tout cela reste assez abstrait du fait que Dedekind n'a pas fait le lien entre le calcul et la relation d'ordre, entre la structure de corps de $\mathbb{R}$ et sa structure d'ordre. Plus précisément, les lois de compatibilité de l'une avec l'autre ne sont pas énoncées puisqu'on n'a pas explicitement étendu à l'ensemble des coupures de $\mathbb{Q}$ l'addition et la multiplication rationnelles. $\mathbb{R}$ est *d'une part* un corps, *de l'autre* un ensemble ordonné; on ne peut parler de «corps ordonné». Dedekind a d'ailleurs lui-même senti ce défaut : il ne publie qu'en 1872 une découverte datant de 1858, de son propre aveu «si peu féconde»! — Et, de fait, la plupart des auteurs qui exposent la construction des réels par la méthode des coupures la rendent opérationnelle en s'aidant d'emprunts plus ou moins clairement avoués à la construction cantorienne par les suites de Cauchy qu'on sait additionner et multiplier.

2. *L'ordre assimilé au calcul*

A la différence de la construction de Dedekind, l'axiomatisation Hilbertienne[18] définit bien $\mathbb{R}$ comme corps ordonné, et les «règles ordinaires du calcul», comme il est dit dans la fameuse conférence de 1900[19], comprennent visiblement à la fois les lois des opérations d'addition et de multiplication *et* celles qui fixent la compatibilité de la relation d'ordre avec ces opérations. Autrement dit, *manipuler la relation d'ordre fait partie du calcul.* En revanche Hilbert ne s'en tient pas là et ajoute deux axiomes «de continuité» (dont l'axiome d'Archimède), qui permettent de caractériser $\mathbb{R}$, à isomorphisme près, comme corps commutatif, totalement ordonné, archimédien maximal. Le souci de Hilbert n'est pas de résorber la «continuité» de $\mathbb{R}$ dans sa structure de corps ordonné, mais de savoir dans quel cas un axiome de continuité, par exemple l'axiome d'Archimède (sur lequel M. Pasch avait explicitement attiré l'attention), est indispensable à la démonstration d'un théorème et dans quel cas il est superflu, bref d'établir ce qui logiquement dépend de la continuité et ce qui n'en dépend pas. Comme il montre dans les *Grundlagen* que certains problèmes géométriques se résolvent indépendamment de l'usage de l'axiome d'Archimède (par exemple, le théorème de Pappus), la question analogue n'est pas loin qui consiste à se demander, *d'un point de vue arithmétique et non plus géométrique*, quels problèmes posés en termes de nombres réels peuvent être résolus indépendamment d'un axiome de continuité. Hilbert, à vrai dire, ne pose pas explicitement cette question. Avec leur algèbre réelle Artin et Schreier y répondent 1) en faisant pour $\mathbb{R}$ en tant que corps ce que Dedekind avait fait pour $\mathbb{R}$ en tant qu'ensemble, c'est-à-dire en

---

[18] Hilbert 1899, 1900a.

[19] Hilbert 1900b, *Gesam. Abh.*, III, p. 300.

substituant, pour toute une catégorie de problèmes, la considération de l'ordre à celle de la continuité; 2) en montrant, comme le laissait entendre Hilbert, qu'il y a moins de différence entre ordre et calcul qu'entre les deux réunis d'un côté et la topologie de l'autre. Comme en témoigne hermut Hasse sur le vif, la théorie d'Arin et Shreier a réussi, à la surprise générale, à *réduire* l'ordre au calcul[20]. Disons maintenant en quoi précisément consiste cette réduction.

III. LA THÉORIE ALGÉBRIQUE DES INÉGALITÉS POLYNOMIALES

1. *L'ordre réduit au calcul*

Aujourd'hui on travaille généralement avec des corps ordonnés et réels clos, «ordonnés maximaux» comme dit Bourbaki, parce qu'on a alors une théorie élémentaire ayant quelques «bonnes» propriétés logiques qui simplifient la solution de nombreux problèmes : élimination des quantificateurs, complétude logique, modèle-complétude (c'est-à-dire le fait que toute inclusion de modèles de la théorie est une inclusion élémentaire), etc. Par exemple, la théorie de $\mathbb{R}$ dans le langage $\mathcal{L} = \{ +, \cdot, =, > \}$ a les trois propriétés sus-mentionnées. Or, nous avons remarqué qu'en vertu des axiomes par lesquels il est défini, un corps réel clos est seulement ordonnable et non pas muni *a priori* d'un ordre. On peut d'autant plus s'interroger sur les raisons du choix d'Artin et Schreier que, s'il ne correspond pas à notre pratique actuelle, il ne s'inscrivait pas non plus dans le sillage d'une tradition. Pour Hilbert comme pour Dedekind la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ est donnée, primitive. «Il serait naturel, conviennent Artin et Schreier au début de leur premier mémoire, de partir du concept de corps ordonné...». Ils lui préfèrent cependant « une définition qui n'utilise que les opérations d'addition et de multiplication et a pour conséquence la possibilité d'ordonner le corps»[21]. Les choses sont parfaitement claires : pour faire une théorie *algébrique* de $\mathbb{R}$ il faut pouvoir logiquement déduire de la structure de corps la relation d'ordre naturelle sur $\mathbb{R}$, et donc lui donner, dans l'axiomatique, un statut dérivé. De fait, dans l'axiomatique des corps réels clos la relation d'ordre est définissable, et, comme cette axiomatique est faite dans un langage algébrique, la relation d'ordre de $\mathbb{R}$ ou d'un corps réel clos est algébriquement définissable. Si on prend $\mathcal{L} = \{0, 1, +, \cdot, =\}$, on pourra y écrire en effet '$x>z$' sachant que, par définition, cet énoncé équivaut à '$x-z>0$' et que ce dernier énoncé équivaut, en vertu de l'axiome 2), à '$\exists y\ (x-z=y.y=y^2)$'.

Ce qui est remarquable, c'est qu'on retrouve ainsi pour $\mathbb{R}$ une situation identique à celle de l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs. En effet, selon un théorème de Lagrange (1770) qui remonte à Fermat, tout entier positif peut s'écrire comme la somme de quatre carrés d'entiers relatifs.

[20] Hasse 1930, p. 27.
[21] Artin-Schreier 1926, dans Artin 1965, p. 258.

La signification logique de ce théorème est que la relation d'ordre sur $\mathbb{Z}$ est définissable à partir de l'addition et de la multiplication[22].

2. *Ordre et métrique, ou comment intervient la définissabilité*

On voit le pas accompli depuis Dedekind : celui-ci avait réduit la continuité à l'ordre, Artin et Schreier réduisent l'ordre au calcul. En d'autres termes, ils font la théorie algébrique des inégalités et donnent, en même temps, le premier exemple de l'étude d'une structure algébrique ordonnée[23]. Ce résultat a d'abord frappé les esprits par sa portée épistémologique, comme nous l'avons vu à travers les réactions de Helmut Hasse et d'André Weil. Plus tard, la théorie logique de la définissabilité[24] en a permis une expression formelle et une intelligence plus précise. Plus tard encore, fin des années 1960, certains travaux, avertis des résultats de la théorie des modèles, ont éclairci le rapport entre ordre et métrique, entre les propriétés 'réel clos' d'un côté et 'complet' au sens métrique de l'autre. Kurt Hauschild a montré en 1967, par exemple, que la Cauchy-complétion d'un corps K est réelle close si et seulement si elle vérifie un énoncé assez semblable à V.I. Dana Scott [1969] a montré, de son côté, que la Dedekind-complétion d'un corps K est réelle close si et seulement si K est dense dans sa *clôture réelle*, qui est la plus petite extension algébrique réelle close de K. Mais la complétion seule, au sens de Cauchy ou au sens de Dedekind, n'implique pas que K soit réel clos et l'inverse n'est pas vrai non plus. Il y a évidemment des corps réels clos, $\mathbb{R}_{\mathbf{A}}$ par exemple, qui ne sont ni Cauchy-complets ni Dedekind-complets. Inversement il y a des corps complets qui ne sont pas réels clos; l'exemple classique est fourni par le complété du corps $\mathbb{Q}(t)$ des fonctions rationnelles ordonné par un ordre non-archimédien en posant $t > q$ pour tout $q \in \mathbb{Q}$ (la démonstration consiste à montrer, en appliquant le résultat de Dana Scott sus-mentionné, que $\mathbb{Q}(t)$ n'est pas dense dans sa clôture réelle). La propriété de maximalité au sens algébrique (corps réel clos) ne coïncide donc pas du tout avec la propriété de maximalité au sens métrique (corps complet). Mais

1°) on peut se suffire de la première, y compris dans des questions impliquant une métrique, si l'on se restreint à des objets élémentairement définissables, par exemple des sous-ensembles donnés par un système de conditions de signe sur un nombre fini de polynômes (ensembles dits semi-algébriques). De façon générale, dans un corps ordonné maximal on peut poser et résoudre la question de savoir quelles constructions géométriques sont réalisables par des constructions algébriques finies.

2°) de l'une des deux propriétés on peut passer à l'autre sous certaines conditions, qu'il est d'ailleurs possible de *varier*. Par exemple,

---

[22] On ne peut se restreindre à la seule addition car on peut fabriquer une structure $(\mathbb{Z}_1, +, \cdot)$ telle que le groupe additif de $\mathbb{Z}_1$ soit isomorphe au groupe additif de $\mathbb{Z}$ sans que $\mathbb{Z}_1$ soit isomorphe à $\mathbb{Z}$.

[23] Aujourd'hui, l'étude des structures algébriques (corps mais aussi anneaux, groupes, etc.) ordonnées constitue une spécialité mathématique en plein développement. Voir, par exemple, Priess-Crampe 1983.

[24] Tarski 1931, 1935 et Beth 1953

McKenna [1975] a montré en s'appuyant sur le travail de Dana Scott le résultat suivant : K, ordonné et complet au sens métrique, est réel clos si et seulement s'il admet une solution affirmative au dix-septième problème de Hilbert. Plusieurs propriétés peuvent ainsi servir à faire le joint entre la métrique et l'algèbre ou l'arithmétique : celle de la valeur intermédiaire (V.I.) dont l'importance fut reconnue dès le début de la théorie des équations, la densité d'un corps dans une de ses extensions à laquelle nous sommes attentifs depuis Dedekind, ou la décomposition d'un élément positif ou nul en somme de carrés dont la mise en lumière récente remonte au dix-septième problème de Hilbert, résolu précisément par Artin grâce à la construction de la théorie des corps réels clos.

3. *L'analogie entre corps ordonnables et corps de nombres*

Plus la (ou les) relation(s) d'ordre conquéraient ainsi leur autonomie par rapport à la métrique et plus leur destin se liait à celui de l'arithmétique. A vrai dire, cette liaison est déjà présente dans l'axiome 1) qui définit la «réalité» d'un corps, c'est-à-dire la possibilité de l'ordonner, par une condition sur les sommes de carrés d'éléments de K, équivalente à celle-ci :

$\sum_{1}^{n} x_i^2 = 0 \Leftrightarrow x_i = 0$ pour tout i, $1 \leq i \leq n$, et pour tout n-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ d'éléments de K.

Or, une autre façon de formuler cette deuxième condition est de dire : aucune forme quadratique du type $\langle 1, \ldots, 1 \rangle$ sur K n'a de solution non triviale dans K. Mais le potentiel opératoire de cette liaison entre l'existence d'un ordre sur K et la propriété, dite d'anisotropie, de certaines formes quadratiques sur K est resté quelque peu en friche jusque vers la fin des années 1960. C'est alors que les développements parallèles de la théorie algébrique des formes quadratiques et de l'algèbre réelle ont mis au jour des connexions étroites entre ordre et calcul, ou, pour le dire autrement, entre corps *ordonnables* et corps *de nombres*. La notion de signature, d'abord définie par Sylvester pour une forme quadratique à coefficients dans le corps des nombres réels[25] fut généralisée à des corps de coefficients quelconques pourvu qu'il soient réels ou réels clos[26]. Pfister peut ainsi formuler pour un corps réel K un principe local/global analogue à celui de Minkowski-Hasse[27] pour les corps de nombres

---

[25] Sylvester 1853, article *Inertia*, dans *The collec. math. papers*, I, p. 583. La signture d'une forme quadratique q sur $\mathbb{R}$ est définie par la différence entre le nombre de carrés positifs et le nombre de carrés précédés du signe - dans l'expression de q comme somme de carrés de formes linéaires.

[26] Pfister 1966, Leicht-Lorenz 1970, Becker-Spitzlay 1975.

[27] On appelle principe de Minkowski-Hasse l'ensemble des deux énoncés suivants :

1. deux formes quadratiques sont équivalentes sur un corps K de nombres algébriques de degré fini si et seulement si elles sont équivalentes sur toutes les extensions $\mathfrak{p}$-adiques $K_{\mathfrak{p}}$ (où $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de l'anneau intègre dont K est le corps des fractions);

2. une forme représente zéro sur K si et seulement si elle représente zéro sur $K_{\mathfrak{p}}$ pour tout $\mathfrak{p}$.

Rappelons que le corps $\mathbb{Q}_p$ des nombres p-adiques est défini par algébriques de degré fini sur $\mathbb{Q}$. Ce principe[28] donne une caractérisation algébrique des formes de signature nulle pour tout ordre P compatible avec la structure algébrique de K : les clôtures réelles de K, relative chacune à un ordre P, jouent le rôle tenu par les «corps locaux» de la théorie des nombres, les $\mathbb{Q}_p$ ou les K_p. Puis, la notion de signature fut appliquée non plus seulement aux formes quatratiques mais aux corps eux-mêmes[29] : une signature d'un corps K est définie comme un épimorphisme sur l'anneau $\mathbb{Z}$ de l'anneau obtenu en quotientant l'ensemble des formes quadratiques sur K par une relation de *similitude* [30](anneau dit 'anneau de Witt' défini en 1937 et noté $W(K)$). L'existence d'une bijection évidente entre l'ensemble des relations d'ordre compatibles avec l'addition et la multiplication d'un corps K et l'ensemble des signatures de K (ou ensemble des épimorphismes : $W(K) \to \mathbb{Z}$) autorise, dans le cas des corps réels non nécessairement réels clos, une interprétation algébrique abstraite de la notion d'ordre. Plus précisément, on démontre[31] l'existence d'une bijection entre l'ensemble des ordres de K et l'ensemble, appelé «spectre», des idéaux premiers minimaux de l'anneau $W(K)$. Cela permet de transformer toute considération sur les ordres de K en considération sur l'anneau de Witt de K et de traiter des corps réels dans le langage de la théorie algébrique des formes quadratiques. Par exemple, si K est un corps ordonné par un ordre P et $L = K(\sqrt{a})$ pour a appartenant au cône positif P, alors on peut voir que P se prolonge en un ordre P' de L en considérant l'homomorphisme canonique $\phi : W(K) \to W(L)$.

Concluons par quelques remarques sur la notion d'ordre. Comme d'autres notions fondamentales, celle-ci est, en fait, située en amont de la grande bifurcation qui articule le travail mathématique en géométrie et algèbre, ou topologie et arithmétique, axées l'une sur le continu, l'autre sur le discret. Les uns voient, en effet, dans l'étude de l'ordre une étude proprement géométrique. Ainsi, renouant avec la tradition leibnizienne de l'*Analysis situs*, Camille Jordan décrivait, à la fin du siècle dernier, ses recherches en «géométrie pure» comme un approfondissement de la théorie de l'ordre. Celui-ci paraît, dans cette perspective, indissolublement lié au continu géométrique compris comme espace connexe et compact (au moins localement). Pou d'autres, la notion

---

$\mathbb{Q}_p = \{x \mid x = \sum_r^{\infty} a_n p^n \mid a_r \neq 0, r \in \mathbb{Z}, a_n \in \mathbb{Z}, 0 \leq a_n < p, p \text{ nombre premier}\}$.

K_p = completé de K (pour une certaine valuation), où K est une extension algébrique finiment engendré sur $\mathbb{Q}$. K_p est un «corps local», K «un corps global».

[28] Pfister 1966, Satz 22.

[29] Knebusch 1972.

[30] Deux formes q et q' sont semblables ssi leurs noyaux anisotropes q_0 et q_0 sont isométriques.

[31] Lorenz 1970, p. 57-61.

d'ordre est propre à l'esprit analytique. Jean Dieudonné, par exemple, définit explicitement dans son *Cours* de 1968 le calcul infinitésimal comme «un apprentissage du maniement des inégalités», lequel apprentissage se résume en trois mots : «minorer, majorer, approcher». Activité qui suppose un espace métrique doué de la propriété de Dedekind ou de celle de Cauchy et un réseau de nombres, les rationnels, dense dans cet espace. D'autres encore rapportent la manipulation des inégalités à l'algèbre. Claude Chevalley, à propos de la définition Weierstrassienne de la notion de limite, écrivait : «le gros avantage de la nouvelle notion de limite... a été de substituer à l'ancien passage à la limite... un procédé algébrique fondé sur des transformations d'inégalités»[32]. C'était en 1935, après que la théorie d'Artin et Schreier, bien connue de Chevalley qui avait séjourné à Hambourg dans les années 1930, eut fondé en toute rigueur sur une base purement algébrique le maniement des inégalités.

A priori ou *par nature*, la notion d'ordre en mathématiques n'est intrinsèquement ni géométrique bien qu'elle se représente aisément par la relation 'être situé entre...', ni algébrique bien qu'elle se traduise par la relation d'inégalité, ni analytique bien qu'elle soit impliquée dans les notions de limite et de convergence. Elle se prête à divers habillages, diverses expressions et, dans les cas heureux, on parvient à établir des correspondances, voire des équivalences, d'une expression à l'autre. Aussi apparaît-elle dans la mathématique contemporaine comme une notion *transversale*, présente sur bien des chemins qui joignent une discipline à l'autre.

Références bibliographiques

ARTIN E.

1924 Kennzeichnung des Körpers der reellen algebraischen Zahlen, *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität* **3**, 319-323. Dans Artin 1965, 253-257.

1965 *The Collected Papers* (S. Lang and J. Tate eds.), Addison, Wesley Pub. C°. 2th ed., 1982, Springer-Verlag.

ARTIN E. et SCHREIER O.

1926 Algebraische Konstruktion reeller Körper, *Abh. math. Sem. Hamb.* **5**, 85-99. Dans Artin 1965, 258-272.

1927 Eine Kennzeichnung der reell abgeschlossenen Körper, *Abh. math. Sem. Hamb.* **5**, 225-231. Dans Artin 1965, 289-195.

BECKER E. et SPITZLAY K. J.

1975 Zum Satz von Artin-Schreier über die Eindeutigkeit des reellen Abschlusses eines angeordneten Körpers, *Commentarii mathematici helvetici* **50**, 81-87.

BETH E. W.

1953 On Padoa's method in the theory of definition, *Indagationes Mathematicae* **15**, 330-339.

[32] Chevalley 1935, p. 378.

CHEVALLEY Cl.
1935 Variations du style mathématique, *Revue de Métaphysique et de Morale* **42**, 375-384.

DEDEKIND R.
1872 Stetigkeit und irrationale Zahlen, *Gesammelte mathematische Werke,* III (R. Fricke - O. Ore - E. Noether eds.), Vieweg, Braunschweig (1930-32), 315-334. Trad. frç. Milner J et Sinaceur H., La bibliothèque d'Ornicar?, 31 rue de Navarin, Paris, 1978.

HASSE H.
1930 Die moderne algebraische Methode, *Jahresber. D. M. V.* **39**, 22-34.

HAUSCHILD K.
1967 Cauchyfolgen höheren Typus in angeordneten Körpern, *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik* **13**, 55-66.

HILBERT D.
1899 *Grundlagen der Geometrie,* Teubner; 2[e] éd., 1903; 7[e] éd., 1930; 10[e] éd. mit Supplementen von P. Bernays, 1968. Edition frç. Rossier P., Paris, Dunod, 1971.
1900a Über den Zahlbegriff, *Jahresber. D. M. V.* **8**, 180-184.
1900b Mathematische Probleme, dans *Gesammelte Abhandlungen,* III, Berlin, 1935. Reprint, Chelsea, New York (1965), 290-329.

KNEBUSCH M.
1972 On the uniqueness of real closures and the existence of real places, *Commentarii mathematici helvetici* **47**, 260-269.

LAGRANGE J. L.
1798 *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés.* Paris, Duprat, an VI, 2[e] éd., 1808. Réimpression dans *Œuvres*, VIII (Serret J. A. et Darboux G. eds), Gauthier-Villars, Paris, 1867-1892.

LAUGWITZ K.
1973 Bemerkungen über Stetigkeit und angeordnete Körper, *Demonstratio mathematica* **VI**, Part 1, 191-209.

LEICHT J. et LORENZ F.
1970 Die primideale des Wittschen Ringes, *Inventiones mathematicae* **10**, 82-88.

LORENZ F.
1970 *Quadratische Formen über Körpern*, L.N.M.130,Springer-Verlag.

McKENNA K.
1975 New facts about Hilbert's seventeenth problem, dans Dold A. et Eckmann B. (eds), *Model theory and algebra. A memorial tribute to Abraham Robinson*, L. N. M. 498, Springer-Verlag, 220-231.

PFISTER A.
1966 Quadratische Formen in beliebigen Körpern, *Inventiones mathematicae* **1**, 116-132.

PRIESS-CRAMPE S.
1983 *Angeordnete Strukturen: Gruppen, Körper, projektive Ebenen.* Ergebnisse der Math. u. ihrer Grenzgebiete 98, Springer-Verlag.

ROY M.-F. et SINACEUR H.
? *Aux sources de la géométrie algébrique réelle,* Springer-Verlag France (à paraître).

SCOTT D.
1969 On completing ordered fields, dans Luxemburg W. A. J. (éd.), *Applications of model theory to algebra, analysis and probability* (Proc. intern. sympos. of the Institute of Technology, California), Holt-Rinehart and Winston, New York, 274-278.

SINACEUR H.
1989 Une origine du concept d'analyse non standard, dans *La mathématique non standard, Histoire-Philosophie-Dossier scientifique,* Paris, Editions du CNRS, 143-156.
1991 *Corps et modèles, Essai sur l'histoire de l'algèbre réelle,* Librairie philosophique J. Vrin, Paris.
1993 Du formalisme à la constructivité: le finitisme,*Revue internationale de philosophie,* n° spécial pour le cinquantenaire de la mort de Hilbert, volume 47, n° 186, **4/1993**, 251-283.

SYLVESTER J. J.
1853 On a theory of the syzygetic relations of two rational integral functions, comprising an application to the theory of Sturm's functions, and that of the greatest algebraical common measure', *Phil. trans. roy. soc. London* 143, 407-548. Réimpression dans *The collected mathematical papers,* I, Cambridge University Press (1904), 429-586.

TARSKI A.
1931 Sur les ensembles définissables de nombres réels I, *Fundamenta mathematicae* 17, 210-239. Réimpression dans*Collected Papers,* I (S. R. Givant and R. N. McKenzie éds), Birkhäuser (1986), 517-548.
1935 Einige methodologische Untersuchungen über die Definierbarkeit der Begriffe, *Erkenntnis* **5**, 80-100. *Collec. Papers,* II, 637-659.

WEIL A.
1967 Review of the *Collected papers* of Emil Artin, *Scripta mathematica* 28, 237-238. Réimpression dans *Œuvres scientifiques,* III, 2th ed., Springer-Verlag (1980), 173-174.

WITT E.
1937 Theorie der quadratischen Formen in beliebigen Körpern, *J. r. angew. Math.* **176**, 31-44.

****