Pierre Cartier

La musique des sphères de Kepler

Séminaire de Philosophie et Mathématiques, 1991, fascicule 2
« La musique des sphères de Kepler », , p. 1-23
<http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1991___2_A1_0>

"LA MUSIQUE DES SPHERES"
ou
"LA RECHERCHE DE L'HARMONIE CHEZ KEPLER"

par
Pierre Cartier
(Ecole Normale Supérieure, Paris)[1]

INTRODUCTION :

Les mathématiques sont souvent perçues comme la plus "pure" des sciences, et l'imagerie populaire représente le mathématicien comme un homme perdu dans ses rêves. Le grand mathematicien anglais G.H. Hardy, dans une autobiographie écrite en 1939 et intitulée "A mathematician's apology" a exprimé avec finesse et une certaine tristesse son idéal d'une mathématique "useless". Cette opinion n'était pas isolée à son époque ; les fondateurs du groupe BOURBAKI (Henri CARTAN, Claude CHEVALLEY, André WEIL et Jean DIEUDONNE), qui furent mes maîtres en mathématiques, défendirent avec force et conviction l'idée que les mathématiques ne doivent chercher leur justification qu'en elles-mêmes.

Ce serait un difficile problème que de se prononcer sur la nature des concepts mathématiques - pures idéalités ou objets réels. De manière superficielle, disons que les mathématiques, plus peut-être que toute autre science, procèdent d'un double mouvement et d'une double exigence :

- une attention portée au monde externe, un essai de distinguer les régularités sous le désordre apparent, une réponse aux problèmes pratiques qui se posent aux hommes et qui s'appellent depuis les temps les plus anciens : calendriers, horloges, navigation, comptabilité ...

- un effort de réflexion, d'approfondissement, une recherche des symétries profondes, des nécessités logiques, des lois de la pensée, en bref une tentative de deviner ce que Dieu - ou la Nature - a voulu comme organisation de la pensée et du monde.

---

[1] Conférence donnée le 3 décembre 1990 à la Maison Franco-Japonaise de Tokyo

Ainsi, selon les époques et parfois les modes, la science a navigué entre les exigences pragmatiques et les recherches conceptuelles.

Entre 1920 et 1970 environ, on a vécu en mathématiques une période de profond ressourcement, un effort pour mettre de l'ordre et faire la synthèse des acquis, en bref une période d'introspection. Le résultat fut en particulier cette codification encyclopédique que représente le Traité de Mathématiques de BOURBAKI. Mais depuis 15 à 20 ans, on a assisté à un grand tournant. Faut-il en chercher la raison dans le développement fabuleux des ordinateurs dans la même période ? Les ordinateurs ont démultiplié les possibilités d'application des méthodes mathématiques - à la technologie, à la finance, aux autres sciences - et en même temps ont modifié la pratique des mathématiques elles-mêmes. Ce que nous avons vécu récemment est un changement analogue au passage de la numération "romaine" à la numération "arabe". Dans un cas comme dans l'autre, le bouleversement est radical et définitif, et participe d'un vaste mouvement collectif qu'on ne saurait attribuer à un génie particulier -même si les génies tels que Alan TURING en Grande-Bretagne et von NEUMANN aux U.S.A. ont joué un rôle déterminant.

Ce changement se manifeste aussi par un désir des mathématiciens de sortir de leur tour d'ivoire. Fin 1987, les sociétés françaises de mathématiciens (chercheurs, enseignants, ingénieurs) ont joint leurs efforts et provoqué une vaste rencontre à l'Ecole Polytechnique intitulée "Mathématiques pour l'an 2000". L'intérêt soulevé dans la presse écrite et télévisée a suscité de nombreuses entreprises de vulgarisation. Il appartenait en particulier à la SEPT (société européenne de télévision "culturelle") de commanditer plusieurs films sur les mathématiques. J'ai eu la responsabilité scientifique d'une partie de cette commande ; avec la collaboration d'Edwige KERTES, qui a réalisé par ailleurs plusieurs films pour le Louvre, nous avons produit un téléfilm sur KEPLER et la Musique des Sphères. Il nous a paru qu'il y avait là une occasion unique de montrer la convergence de la science, de l'art et de la philosophie. Nous avons choisi de produire une œuvre d'art et non pas un exposé didactique ; les mathématiques y sont implicites. Ce que je souhaite ce soir, c'est vous communiquer quelques-unes de nos arrière-pensées, quelques-uns des thèmes que nous avons illustrés plutôt qu'expliqués.

KEPLER ET SES DEUX PREMIERES LOIS

Kepler, tout autant que ses contemporains, a vécu intensément en lui-même l'opposition entre pratique et spéculation. A son époque, les études supérieures se modèlent encore sur l'archétype fourni par le *trivium* (l'enseignement de base des *trois* voies) et le *quadrivium*, exposé des quatre sciences mathématiques :

ASTRONOMIE MUSIQUE ARITHMETIQUE GEOMETRIE.

Un mathématicien de l'époque, comme Leonardo da Vinci ou Galileo, est tout à la fois architecte, ingénieur militaire, fabriquant de mécanismes, géographe ... Un tableau célèbre de Dürer représente le géomètre entouré de ses instruments à dessiner et à mesurer, de globes terrestres et célestes. Kepler prend la succession de Tycho Brahe comme "astronome impérial" et son travail comprend la confection des calendriers - et des horoscopes (!) - la prédiction des éclipses. Mais nul plus que Kepler n'est sensible à l'harmonie des choses : il cherche dans la nature et dans ses lois une démonstration de la perfection divine et toute son œuvre vise à découvrir l'*harmonie* cachée sous les accidents.

L'astronomie a été profondément renouvelée à la Renaissance. Copernic, dans son ouvrage posthume "De Revolutionibus" reprend l'idée, déjà connue des astronomes grecs, que le Soleil est au centre, immobile, et que la Terre, une planète comme les autres, tourne autour du Soleil. Ceci est contraire aux apparences immédiates, et à l'enseignement de la Philosophie et de la Théologie de son époque. Les raisons de Copernic sont essentiellement d'ordre logique et de simplicité ; en particulier, le système de Copernic fait disparaître la distinction entre les planètes inférieures (Mercure et Vénus), qui ne s'écartent jamais trop du Soleil, et les planètes supérieures qui peuvent se trouver à toute distance du Soleil. Mais Copernic n'abandonne pas le postulat fondamental de la physique d'Aristote selon lequel le mouvement parfait, celui donc des corps célestes, est le mouvement circulaire "uniforme" (parcouru à vitesse constante). Le système de Copernic n'est donc qu'un réarrangement de celui de Ptolémée et garde comme lui l'idée d'une superposition de mouvements circulaires. Dans un premier temps, on peut même dire que le système de Copernic ne fournira qu'une simplification assez superficielle de celui de Ptolémée : le système solaire est perçu comme une grande horloge, avec des engrenages emboîtés tournant les uns par rapport aux autres - un peu comme la toupie sur le plateau tournant d'un manège pour enfants. Cette fiction intellectuelle trouve d'ailleurs une réalisation matérielle dans la confection des horloges astronomiques de l'époque, que nous pouvons encore admirer à Strasbourg par exemple.

Tycho Brahe avait consacré sa vie, d'abord au Danemark, puis à Prague, à l'observation patiente du mouvement des planètes. Il léguera donc à Kepler une grande quantité de positions des planètes, avec une précision dans les mesures environ dix fois supérieure à celle de ses prédécesseurs. Le modèle de Ptolémée donnait des résultats très satisfaisants tant qu'on ne demandait pas une précision supérieure au degré d'arc pour les positions. Mais, après les observations de Tycho Brahe (né au moment où meurt Copernic, au milieu du XVIème siècle), Mars devenait une planète rebelle, qui ne se conformait plus à la théorie admise. Kepler consacrera près de quinze années à l'étude théorique du mouvement de Mars. Il lui fallut déployer une grande habileté, et beaucoup de tenacité pour découvrir la clé, mais il lui fallut surtout une énorme audace intellectuelle pour repousser le dogme du mouvement circulaire, et remplacer le cercle par l'ellipse.

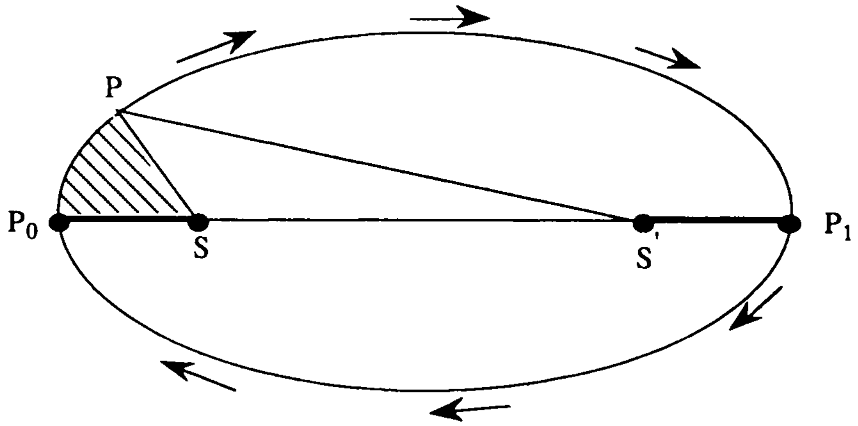
PREMIERE LOI DU MOUVEMENT : *Une planète se meut autour du Soleil en parcourant une ellipse dont le Soleil est un des foyers.*

Voici une explication. Avec la nouvelle astronomie, le Soleil est devenu le centre du monde, le grand luminaire, et lorsque Kepler le nomme Apollon, il y a plus qu'une métaphore classique, il y a la perception presque païenne du dieu solaire. En même temps, le Soleil devient un objet physique, réel, et non pas seulement une idéalité mathématique. Lorsque Galilée tourne sa lunette, en 1610, vers le ciel, il découvre les taches du Soleil, et donc son imperfection. Rappelons-nous la découverte de Philaminte :

"Et j'ai vu clairement des hommes dans la lune !".

Le Soleil et la Lune sont donc devenus des objets physiques matériels. Les planètes resteront longtemps encore de simples points dans le ciel, dont la structure n'apparaissait que de manière floue ; ce n'est que dans les trente dernières années, avec l'exploration spatiale que nous connaissons aujourd'hui, que les planètes obtiendront à leur tour ce statut de réalité. De même, ce n'est que depuis qu'on l'a photographiée du dehors que notre Terre est devenue une planète comme les autres - dans l'imaginaire collectif.

Le mouvement elliptique postule, comme artifice géométrique, l'existence d'un antiSoleil S' à côté du Soleil S, et une planète P se meut de sorte que la somme des distances de P à S, et de P à S', reste constante.

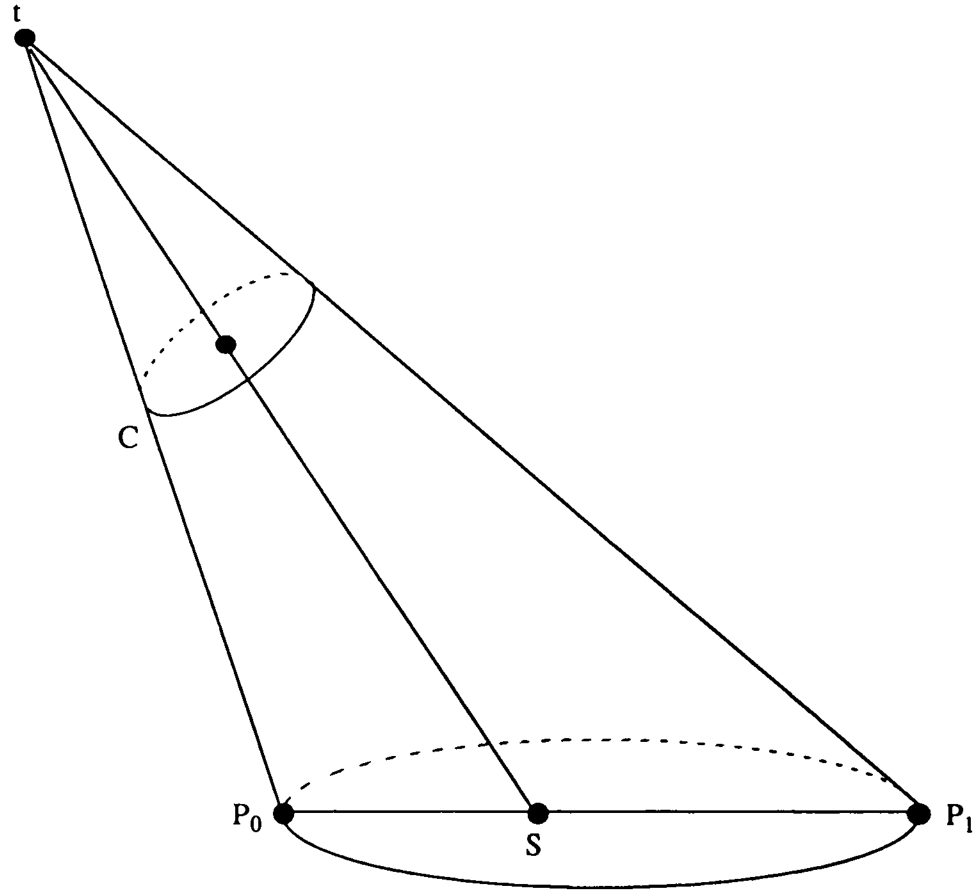


Si l'antiSoleil fictif S' (est-il si fictif ?) vient à se confondre avec le Soleil S, on retrouvera bien sûr le mouvement circulaire. L'idée d'un mouvement décentré était familière aux astronomes de l'époque sous le nom d'*équant*, et c'était aussi un artifice mécanique employé couramment dans les mécanismes d'horlogerie. Mais l'emploi que fait Kepler du mouvement décentré est très original.

DEUXIEME LOI DU MOUVEMENT : *Lors du mouvement d'une planète P, l'aire parcourue est proportionnelle au temps.*

De manière plus précise, sur l'ellipse planétaire, il y a deux positions intéressantes, le *périhélie* P_0 qui est le point le plus rapproché du Soleil et l'*aphélie* P_1 qui en est le plus éloigné. L'aire dont il s'agit est la portion hachurée limitée par deux segments de droite SP_0 et SP et le segment d'ellipse P_0P. La planète peut servir d'horloge, ou de calendrier. Si l'on veut savoir quel est le temps écoulé depuis le dernier passage au périhélie, mesuré en fraction d'année (s'il s'agit de la Terre, ou d'année vénusienne égale à 223 jours si la planète est Vénus ...), il suffit de calculer le rapport entre l'aire hachurée P_0SP et l'aire totale de l'ellipse. Ce que dit aussi cette deuxième loi - des aires - est que les diverses horloges que sont ainsi les planètes sont concordantes et marchent à la même allure : il y a un temps astronomique de caractère universel, indépendant de notre histoire terrestre, et qu'on nomme le *temps des éphémérides* . Il faudra attendre le milieu du XX$^{\text{ème}}$ siècle pour voir ce temps astronomique supplanté par une référence à un temps *atomique*.

Les deux premières lois ne sont qu'une abdication apparente du mouvement circulaire uniforme. Les mathématiciens grecs d'Alexandrie (II$^{\text{ème}}$ siècle de l'ère chrétienne) ont étudié en grand détail les "sections coniques", ou sections par un plan d'un cône à base circulaire. Les trois types de "coniques", comme on dit en abrégé, sont les courbes appelées *ellipses, hyperboles* et *paraboles*, avec les cercles considérés comme des ellipses particulières. En particulier, on peut obtenir une ellipse comme projection d'un cercle, de manière que le centre du cercle se projette sur un des foyers de l'ellipse.



Il s'ensuit qu'on peut imaginer qu'un mobile auxiliaire décrive un mouvement circulaire uniforme (sur le cercle C figuré ci-dessus) et que le mouvement observé soit l'ombre portée, sur le plan de l'écliptique où se meut la planète, du mouvement circulaire uniforme éclairé par un luminaire situé en L. Ce mouvement qui n'est que l'ombre d'un mouvement nous renvoie à l'allégorie bien connue de Platon sur la Caverne des Idées. Les lois de la perspective, la représentation des ombres fascinent également les peintres et les géomètres de cette époque : bel exemple de recoupement des préoccupations d'une même période historique.

LE CHANT DES PLANETES

Selon la loi des aires, la vitesse d'une planète ne peut rester constante au cours de sa révolution. *En fait, plus la planète est éloignée du Soleil, plus sa vitesse est faible.* Ce fait semble avoir beaucoup surpris - et même dérouté - Kepler et ses contemporains. Kepler a ouvert la voie à Newton, qui énoncera les lois de la Gravitation Universelle un siècle plus tard. Nous vivons trois siècles après Newton, et l'idée de gravitation est devenue une banalité. Nous savons que l'attraction entre deux corps diminue lorsqu'ils s'éloignent. Une planète est d'autant moins dépendante du Soleil qu'elle en est plus éloignée, et il semble naturel que la vitesse diminue lorsque l'on s'éloigne du Soleil[1].

Kepler va essayer d'expliquer cette variation de vitesse d'une planète par une métaphore musicale. Il admet qu'un mouvement rapide est associé à une note aiguë, et un mouvement lent à une note grave. Est-il naturel de considérer que le mouvement grave est lent, et le mouvement aigu est rapide ? Cela correspond en tout cas à une certaine esthétique musicale très courante. Comme Kepler est un "géomètre" (c'est ainsi qu'on qualifiera tous les mathématiciens jusqu'au début de notre siècle, et l'Académie des Sciences, en vieille dame digne, doit encore user du titre d'*illustre géomètre*), il énoncera une loi précise : *la hauteur du son est proportionnelle à la vitesse* . Avec ce principe, il ne lui est pas difficile de transcrire la loi des aires sur une portée musicale : chaque planète correspond ainsi à un motif musical bien reconnaissable, et Kepler transcrit ces motifs. Ainsi la Terre, qui se meut presque circulairement, correspondra presque à une tenue, alors que Mars la vagabonde a un motif bien ample. J'ai qualifié plus haut cette représentation de "métaphore musicale". Pour Kepler, il s'agit de bien plus : chaque planète, chaque astre a une âme (*animus*) qui lui communique le mouvement. Faut-il identifier cette âme à un ange de la théologie chrétienne (sous sa version catholique romaine) ou à un Dieu païen : il y a place pour l'ambiguïté. Mais le chant est réel, c'est un hymne à la gloire du Dieu créateur.

L'assimilation d'une hauteur musicale à une vitesse est très remarquable. Depuis que l'on fabrique des instruments de musique, même primitifs, on a remarqué un lien entre le son musical et les longueurs : qu'il s'agisse de longueur d'une corde de luth, de violon, de guitare, ou de la longueur du tuyau de la flûte (ou de l'orgue), les sons graves correspondent aux grandes longueurs et les sons aigus aux petites longueurs. Un tambour grave est de grande taille ! On connaît aussi les lois de l'harmonie, qui lient l'intervalle musical entre deux sons au rapport des longueurs des cordes correspondantes. Mais ce n'est qu'au XVIIIème siècle qu'on liera de manière définitive la hauteur du son musical à une *fréquence*, c'est-à-dire à la vitesse d'un mouvement vibratoire. Ce sera surtout l'œuvre du mathématicien et philosophe d'ALEMBERT (Théorie des cordes vibrantes), du musicien Jean-Philippe RAMEAU (l'inventeur de la gamme bien tempérée, tant développée par Jean-Sébastien BACH) et du mathématicien et physicien Leonhard

---

[1] La théorie mathématique précise est moins sommaire que cette "explication".

EULER. Ce dernier publiera un traité de musique mathématique - où il prend d'ailleurs le contre-pied des idées esthétiques de Rameau et de Bach.

La *loi fondamentale des harmoniques* est connue depuis fort longtemps : si l'on met en branle une corde d'une certaine longueur, elle émet un certain son dit *fondamental,* mais aussi des harmoniques supérieurs, qui ne sont autres que les sons fondamentaux associés à des cordes deux fois, trois fois, ... plus courtes que la corde initiale. D'Alembert découvre qu'à tension donnée, la longueur d'une corde est inversement proportionnelle à la fréquence du son qu'elle est capable d'émettre. Selon une représentation géométrique fort utilisée en électrotechnique, par exemple, un son pur est associé à un mouvement circulaire uniforme. La fréquence f se mesure en hertz (abrégé Hz), c'est-à-dire en nombre de tours par seconde ; les harmoniques correspondent alors aux fréquences de la suite

f	le fondamental	1er harmonique
$2f$	à l'octave du fondamental	2ème harmonique
$3f$	à la quinte du 2ème harmonique	3ème harmonique
$4f$		4ème harmonique
$5f$	etc ...	5ème harmonique

Cette interprétation est conforme à celle de Kepler : une planète qui tourne deux fois plus vite que la première émet le deuxième harmonique de celle-ci ...

En fait, la découverte de d'Alembert, confirmée par les travaux de Joseph FOURIER (scientifique et homme politique sous la Révolution, l'Empire et la Restauration), va beaucoup plus loin. Un son naturel n'est pas pur, mais complexe ; il peut cependant s'obtenir par superposition des divers harmoniques d'une série comme la précédente. L'importance relative des divers harmoniques est inégale, et elle se mesure par un nouveau cœfficient qu'on nomme l'*amplitude* d'un harmonique, et qui est d'autant plus grand que l'harmonique correspondant joue un rôle dominant dans la synthèse sonore.

L'importance de la découverte de d'Alembert et Fourier ne saurait être surestimée. En effet, elle s'applique non seulement à l'analyse des sons (naturels ou musicaux) mais à toutes sortes de mouvements vibratoires. Cette *analyse harmonique* a trouvé application dans les domaines scientifiques et technologiques les plus divers. Il s'agit aussi bien des oscillations électriques, que des ondes lumineuses, des vacillations d'une flamme, de l'évolution du climat, et des phénomènes géophysiques comme l'amplitude des marées ou les ondes sismiques. On applique même l'analyse harmonique aux fluctuations des valeurs de la Bourse. On a aujourd'hui construit des ordinateurs spécialisés, qui au moyen d'une méthode mathématique connue sous le nom de "transformation de Fourier rapide" (ou algorithme de COOLEY-TUCKER) effectuent automatiquement cette analyse : ils peuvent représenter le mouvement des marées en un point donné au moyen de plus de cent coefficients !

Il y a une leçon historique et philosophique à tirer de cet épisode. Des esprits entichés d'un rationalisme trop simpliste ont fait des gorges chaudes du système de Ptolémée avec ses cycles et épicycles, sa superposition d'un nombre important de mouvements circulaires (jusqu'à dix-neuf). A juste titre, on a vanté par comparaison la simplicité du système des ellipses de Kepler. Mais ce système a évolué, il est devenu la Gravitation Universelle de Newton. Le point fondamental en est que le mouvement de la Terre, par exemple, n'est pas gouverné par la seule influence du Soleil, il dépend de *toutes* les autres planètes. Dans une égalité complète, les planètes s'influencent mutuellement : chacune est soumise à une force correspondant à chacune des autres planètes (et au Soleil évidemment) ; la Lune aussi est une planète[1]. La difficulté vient de ce que les distances mutuelles des planètes se modifient sans arrêt. Aussi bien, aucune des planètes ne reste sur une ellipse déterminée. Laplace a mis au point la *théorie des perturbations* : on peut encore dire que la Terre se déplace sur une ellipse, à condition d'admettre un léger balancement de cette ellipse autour d'une position moyenne, et ceci sous l'influence combinée de Vénus, de Mars et de Jupiter. Ces modifications périodiques du mouvement à la Kepler peuvent se traîter par l'Analyse Harmonique ; c'est ainsi qu'il faut environ 500 harmoniques pour décrire avec précision le mouvement de la Lune. Nous voici bien loin des dix-neuf épicycles de Ptolémée, mais il n'y a pas de différence mathématique fondamentale entre les épicycles de Ptolémée et les variations séculaires de Laplace. La fécondité de la théorie de Laplace a été confirmée quand Leverrier (et Adams) a pu découvrir Neptune en se servant de caractéristiques inexpliquées du mouvement de la planète Uranus.

Ne forçons pas le trait : il y a une différence fondamentale entre la théorie des épicycles de Ptolémée, qui cherche à ajuster *empiriquement* des harmoniques à la représentation des observations, et la théorie de Laplace qui *déduit* ces harmoniques

---

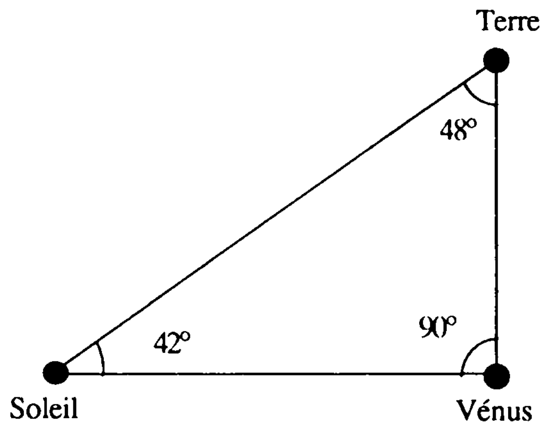
[1] De nos jours, on regarde plutôt le système Terre-Lune comme une planète double, et il y a de fort belles photographies prises d'une sonde spatiale, et montrant la navigation de conserve de la Terre et de la Lune, en deux croissants semblables.

d'une théorie générale simple. Pourtant, dans beaucoup de sciences contemporaines, l'analyse harmonique empirique est notre seule ressource. Bannir les épicycles et les déclarer surannés serait donc absurde, et comme aime à le répéter le commandant Cousteau : "La marine à voile a encore de beaux jours devant elle".

LA SYMPHONIE DU (NOUVEAU) MONDE

L'œuvre de Kepler n'était pas achevée avec l'énoncé des deux premières lois. Il avait déchiffré la partition de chacune des planètes, mais les planètes ne jouent pas chacune pour soi. Il s'agit d'un orchestre symphonique, rassemblé pour célébrer la gloire du Dieu créateur, et il faut comprendre la structure de cette symphonie. Maintenant que nous savons, grâce à la loi des aires, relier les vitesses aux distances, il faut comprendre l'*architecture* du système solaire, c'est-à-dire comprendre pourquoi les distances (moyennes) des diverses planètes au Soleil sont dans l'ordonnance que nous observons. Il faudra quinze ans à Kepler pour dégager la troisième loi et ce n'est que dans son dernier ouvrage "Harmonices Mundi" qu'il parviendra à son but.

La première difficulté était d'évaluer les distances des planètes au Soleil. C'est là que le système héliocentrique de Copernic montre toute sa force. Vues de la Terre, les planètes ne sont que des points ; tout ce que l'observation fournit ce sont des angles, mesurés depuis la Terre, entre deux directions célestes : aucune indication directe de distance. Pour les planètes inférieures, un raisonnement géométrique simple montre qu'au moment de l'élongation maxima de la planète par rapport au Soleil, on a un angle droit (voir la figure pour Vénus) et un calcul facile donne sin 48° (voisin de 7/10) pour le rapport entre les distances de Vénus et de la Terre au Soleil.



Pour les planètes supérieures (plus éloignées du Soleil que la Terre), un argument analogue, mais plus subtil, permet encore d'évaluer le rapport cherché. Mais tous ces calculs n'auraient pas de sens si l'on ne faisait pas l'hypothèse copernicienne que le Soleil est au centre du Monde. Par ce genre de méthode, Kepler arrive à des estimations des distances, qui contredisent tout ce qu'on a supposé avant lui.

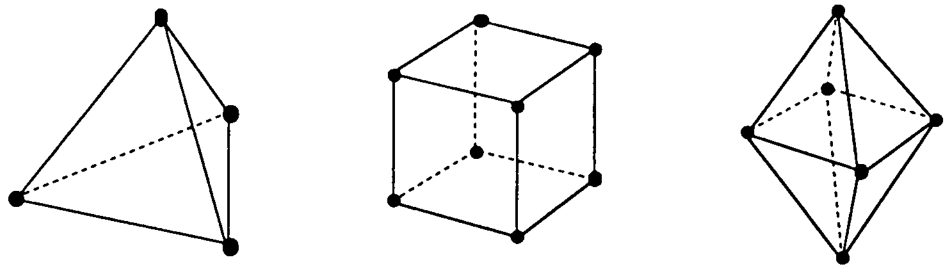
La deuxième difficulté est liée à l'existence d'un seul Monde (ou plutôt "système solaire"). Selon l'adage de Bacon : "il n'y a de science que du général". Cela implique que pour donner une théorie scientifique d'un phénomène, celui-ci doit être *reproductible.* Pour le mouvement de Mars, par exemple, les observations de Tycho Brahe léguées à Kepler étaient nombreuses et bien établies ; si le rôle d'une théorie scientifique est de "sauver" les apparences, on avait ample occasion de confronter *la* théorie de Mars (*toute* théorie proposée) avec les observations. Mais à l'époque de Kepler, on ne connaît que *six* planètes : Mercure, Vénus, Terre, Mars, Jupiter, Saturne. Il y a là les cinq astres vagabonds que l'observation la plus ancienne a détectés dans le ciel, et la Terre vient de rejoindre - avec regret - la liste des corps célestes ; la Lune importe peu ici, car à l'échelle du système solaire, elle reste attachée à la Terre comme l'enfant à sa mère. On ne commencera à comprendre la hiérarchie du système solaire qu'en 1610 quand Galilée découvre les quatre satellites principaux de Jupiter, qu'il nomme "planètes médicéennes" en l'honneur de son "sponsor" le duc de Médicis. Les autres planètes - et leurs cortèges de satellites - ne seront découvertes que progressivement grâce au télescope, et la quête se poursuit aujourd'hui.

Nous connaissons des milliers d'objets naturels dans le système solaire - planètes, satellites, astéroïdes, comètes - et il faut y adjoindre les astriculets que nous avons expédiés dans le ciel. Mais pour Kepler, il n'y a que six planètes, dont chacune a son ellipse, qui possède un *grand axe a* qui en mesure la taille, *une excentricité e* destinée à évaluer l'allongement (ou l'aplatissement), et une *période de révolution T*. Or Kepler connaît fort bien un autre cas d'une famille complète assez hétérogène. Il s'agit des *cinq* polyèdres réguliers, attribués à Platon, et dont la classification couronne les Eléments d'Euclide. On les appelle souvent *solides platoniciens* , et la liste en est donnée ci-dessous, en fonction du nombre de leurs faces planes[1]

4 tétraèdre
6 hexaèdre (ou cube)
8 octaèdre
12 dodécaèdre
20 icosaèdre.

[1] Le nom grec ne fait qu'indiquer ce nombre de faces !

Les trois premiers sont faciles à représenter, mais je m'abstiens pour les deux derniers.



Tétraède Cube Octoèdre

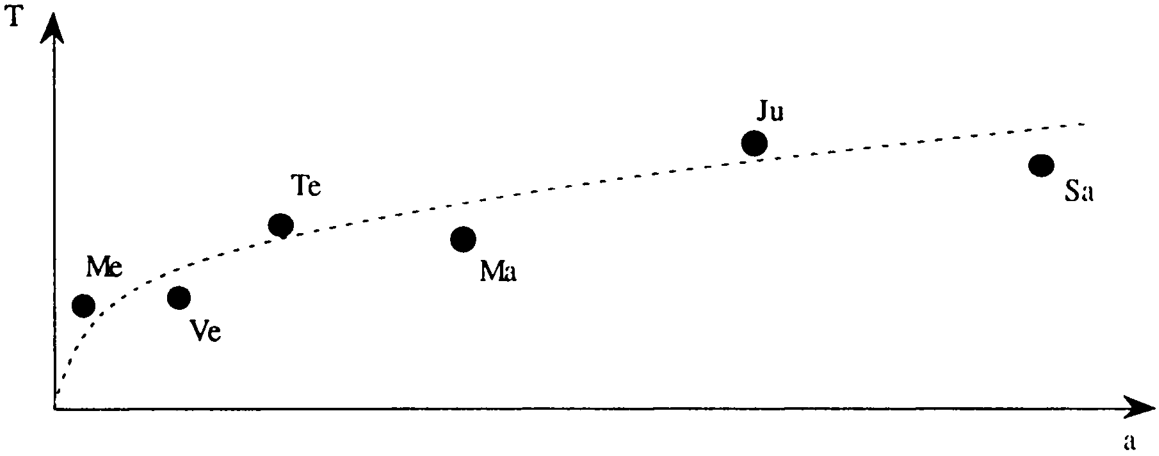
Kepler ajoutera à cette liste deux polyèdres étoilés réguliers (la "stella octangula" en particulier).

Kepler est fasciné par cette classification. Il y a de quoi, et les mathématiciens en font encore leur sujet de prédilection. Depuis 1970, le mathématicien russe Arnold a découvert de nombreux exemples d'un principe de classification, dit ADE. Dans chacun de ces exemples, on a deux séries régulières et illimitées, et trois cas exceptionnels dénotés traditionnellement E_6, E_7, E_8 (les mathématiciens emploient souvent des nomenclatures analogues à celles des chimistes). Ces trois cas exceptionnels sont liés de manière très explicites aux cinq polyèdres réguliers, et les deux séries régulières peuvent aussi s'associer aux cylindres dont la base est un polygone régulier. A vrai dire, il y là plus un miracle à répétition qu'une vraie explication scientifique. On spécule même actuellement sur la possibilité d'appliquer ces idées mathématiques d'Arnold à la classification des particules élémentaires de la physique : les quarks et les leptons découverts dans les débris des collisions atomiques.

Ne nous esclaffons donc pas trop vite en voyant Kepler essayer d'ajuster les planètes aux polyèdres réguliers. Il imagine des emboîtements de polyèdres, dont il donne de fort belles représentations dans son ouvrage "Harmonices Mundi", de manière à laisser aux planètes juste la place de se mouvoir entre deux de ces polyèdres. Il finira par constater son échec et après des efforts intellectuels gigantesques, il trouve la clé fournie par la TROISIEME LOI DE KEPLER : *Les cubes des grands axes des planètes sont proportionnels aux carrés des périodes.*

Autrement dit, on détermine pour chaque planète le grand axe a de l'ellipse et la période T, puis l'on forme le rapport a^3/T^2. On constate que les six nombres obtenus pour les six planètes sont essentiellement égaux (à quelques centièmes près). Quand on aura suffisamment observé le système formé de Jupiter et de ses quatre satellites médicéens, on pourra confirmer l'intuition de Galilée selon laquelle on a un modèle en miniature du Système solaire (ce qui donnait un très grand poids à l'hypothèse copernicienne) : *les trois lois de Kepler s'appliquent à ce système.*

Ce qu'a fait Kepler a été souvent répété en sciences : on dispose ici de six observations, qu'on peut représenter par six points sur un graphique et il s'agit d'ajuster une courbe théorique à ces points expérimentaux.



Planck ne procédera pas autrement, en 1900, pour découvrir sa fameuse loi du rayonnement du corps noir.

Il y a de la divination à établir une loi sur si peu d'exemples. Je donnerai plus loin d'autres exemples, et j'essaierai de montrer en quoi l'approche de Kepler est plus rationnelle que divinatoire. Les experts en numérologie ne sont pas toujours si heureux (voir les divagations sur la Grande Pyramide de Guizeh). Dans notre sujet aussi, il y a une numérologie à moitié avortée, je veux dire la loi de Titus-Bode. La question que ne résout pas la troisième loi de Kepler est d'expliquer pourquoi les distances des planètes au Soleil sont ce qu'elles sont ; bien sûr, il y a l'explication par les polyèdres réguliers, mais il sera difficile de s'y référer lorsqu'il y aura 9 planètes et non plus 6.

L'idée de Titus et de Bode est que, en faisant exception de Mercure, les distances entre deux planètes successives vont en doublant. En se rapportant au rapport 7/10 donné plus haut du grand axe de Vénus à celui de la Terre, on aboutit au tableau suivant de distances

0,4	0,7	1,0	1,6	2,8	5,2	10,0
Mercure	Vénus	Terre	Mars	?	Jupiter	Saturne

On a mesuré les distances au moyen de l'unité dite astronomique, ce qui fait que la distance de la Terre au Soleil vaut exactement 1 par convention. Ces nombres conviennent assez bien, à l'exception du trou entre Mars et Jupiter. Quand on découvrira après 1800 les quelques milliers de petites ou très petites planètes, elles formeront "la ceinture" qui vient assez bien combler le vide entre Mars et Jupiter à la distance prévue par la loi de Titus-Bode.

Les choses se gâteront avec la découverte des planètes transsaturniennes. Uranus est à une distance qui cadre assez bien avec le 19,6 prévu par la loi de Titus-Bode, mais cela marche beaucoup moins bien pour Neptune (distance 34 au lieu de 39) et pas du tout pour Pluton, mais ce dernier est un objet aberrant. On a essayé d'appliquer la loi de Titus-Bode aux satellites (nombreux) des grosses planètes : Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune, aux anneaux bien connus de Saturne et à ceux nouvellement découverts autour de ses trois compagnes. Le succès de ces représentations est assez modeste. Mais le point faible est que la loi de Titus-Bode reste une loi empirique assez grossièrement approchée, alors que la troisième loi de Kepler s'insère harmonieusement dans l'édifice théorique échafaudé par Newton.

LE SENS DE LA TROISIEME LOI

Pour pleinement saisir le sens de la quantité a^3/T^2 introduite par la troisième loi de Kepler, il faut se livrer à quelques considérations d'*Analyse Dimensionnelle* , une technique bien connue des physiciens. Pour faire une mesure, il faut un étalon : mesurer une longueur par exemple revient à déterminer combien de fois elle contient la règle étalon, et "3 mètres" signifie une longueur égale à trois fois celle de l'étalon connu sous le nom de "mètre". En Astronomie, on utilise plusieurs étalons de longueur ; celui qui est adapté au système solaire est l'*unité astronomique* (abrégée U.A.) déjà mentionnée : distance moyenne de la Terre au Soleil. Il est courant que deux domaines différents de la physique, avec leurs ordres de grandeur typiques, utilisent des étalons différents, et il n'est pas toujours facile de comparer ces étalons. Par exemple, le rapport exact entre l'unité astronomique et l'étalon terrestre représenté par le mètre n'est connu qu'au millionième près. Il en est de même pour le rapport entre le kilogramme (étalon terrestre) et l'unité atomique (masse du noyau de l'atome d'hydrogène). L'analyse dimensionnelle a pour but d'établir des relations indépendantes des divers étalons, ou plus prosaïquement de fournir les règles de transformation à utiliser lors du passage d'un étalon à un autre.

On enseigne d'habitude qu'il ne faut pas ajouter entre elles des grandeurs différentes ; on ne peut ajouter 3 lapins et 5 pommes, à moins de ranger pommes et lapins dans la catégorie des comestibles et ajouter 3 comestibles (lapins) à 5 comestibles (pommes). Par contre, on a codifié les règles qui permettent de multiplier - et diviser - des grandeurs différentes entre elles ; une vitesse s'obtient en divisant une longueur (la distance parcourue) par un temps (celui du voyage) et se mesure donc en mètres/seconde (ou kilomètres/heure, etc...). L'analyse dimensionnelle apprend à reconnaître que deux combinaisons *a priori* étrangères - et dont chacune ressemble superficiellement à "hauteur du mât divisée par l'âge du capitaine" - sont du même type. Cette méthode n'a pas une valeur absolue et dépend en partie de conventions liées à l'énoncé des lois fondamentales de la Physique. Par exemple, lorsque Maxwell, vers 1860, recherche la formulation mathématique des lois de l'électromagnétisme découvertes par Faraday, il remarque que le rapport entre les deux unités différentes utilisées pour la charge électrique - l'une liée aux phénomènes électrostatiques et l'autre aux courants électriques et au magnétisme - est de la nature d'une vitesse, et que cette vitesse est d'une grandeur voisine de celle de la lumière. Il franchit le pas de l'assimilation de ces deux vitesses, et après une petite correction aux lois de Faraday, il écrit le système d'équations célèbre qui porte son nom. Voici la voie ouverte à la synthèse de l'optique, de l'électricité et du magnétisme, d'où sortira la découverte des ondes électromagnétiques par Hertz et conduisant au prodigieux bouleversement technologique que nous connaissons. Cependant, il ne faut pas se méprendre : il ne s'agit pas de numérologie et à l'époque de Maxwell le rapport des unités électriques est connu à dix-pour-cent près.

Revenons à la troisième loi de Kepler. *Ce rapport a^3/T^2 commun à toutes les planètes est une caractéristique du Soleil, centre du système* . La théorie de Newton donne aussi une propriété importante : imaginons le Soleil brisé en deux morceaux, formant une étoile double - l'observation astronomique donne de nombreux exemples de tels doublets - dont les deux composants tournent l'un autour de l'autre à distance rapprochée. Alors le rapport a^3/T^2 serait la somme de deux termes analogues, chacun d'eux gouvernant le mouvement des planètes autour d'un seul des composants. Cela justifie l'assimilation du rapport a^3/T^2 à la *masse* du Soleil puisque la masse totale doit bien être la somme de celle des morceaux. L'observation des quatre planètes médicéennes conduit ainsi à une détermination de la masse de Jupiter, et celle du mouvement de la Lune à une détermination de la masse de la Terre.

Mais l'étalon de masse ainsi fourni est à l'échelle astronomique : la masse de la Terre est environ

5.000.000.000.000.000.000.000.000 kilogrammes !

Le rapport exact entre l'étalon astronomique de masse et l'étalon terrestre est connu au millième près, ce qui est très grossier pour les standards actuels de mesure. La fameuse expérience de la "pomme de Newton" revient à assimiler le mouvement de la pomme qui tombe à celui de la Lune, et à constater qu'avec une interprétation convenable, ils confirment la troisième loi de Kepler. C'est là le pas essentiel pour la découverte de la Gravitation Universelle. De manière plus prosaïque, la troisième loi de Kepler est le seul moyen connu d'évaluer les masses des objets du système solaire, pourvu que l'on dispose de satellites. Cela explique l'importance attachée par les astronomes aux deux minuscules chiens de garde de Mars et aux systèmes de satellites des grosses planètes : Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune. Ce n'est que très récemment qu'on a découvert le satellite Charon de la dernière planète Pluton ; du coup, toutes les évaluations de la masse de Pluton se sont effondrées, et il a fallu se faire à l'idée qu'elle n'est guère plus grosse que la Lune. On sait que Mercure et Vénus n'ont pas de satellite connu ; le programme d'exploration spatiale y a suppléé par l'envoi de satellites artificiels qui ont permis d'améliorer notablement nos mesures de la masse de ces planètes. Mais, grâce à l'observation continue des multiples objets en orbite au voisinage de la Terre depuis l'envol du Spoutnik en 1958, on a pu énormément affiner notre connaissance de la masse de notre planète, et en déceler les inhomogénéités, ainsi d'ailleurs que celles de la Lune. La géodésie a ainsi connu un renouveau spectaculaire.

Comme je l'ai déjà répété, la combinaison a^3/T^2 apparaît *a priori* comme très improbable. Cependant, si l'on a affaire à un mouvement circulaire uniforme, la vitesse est égale à

$$v = 2\pi a / T$$

où $\pi = 3,1415\ldots$ est le nombre bien connu en géométrie. Du coup, le rapport a^3/T^2 a la même signification que av^2. Cela signifie que l'éloignement a au Soleil et la vitesse v varient en sens inverse : plus on s'éloigne, plus le mouvement est lent, et la combinaison av^2 est moins improbable et plus facile à deviner. La partie la plus difficile dans la découverte de Kepler était d'ajuster le raisonnement à un mouvement non circulaire, la vitesse de la planète n'étant pas constante au cours de son voyage autour du Soleil. Il faudra encore un siècle pour passer de la conception de Kepler : "la vitesse dépend de l'éloignement au Soleil" à celle de Newton : "l'accélération à laquelle est soumis un corps par l'action du Soleil ne dépend que de la distance au Soleil". Ce que découvre Newton est la signification profonde de la deuxième et de la troisième loi de Kepler :

Deuxième loi : "l'accélération est dirigée selon la ligne droite qui joint la planète au Soleil".

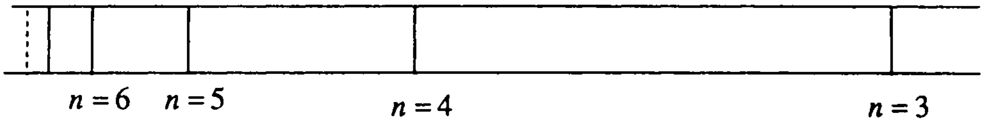
Troisième loi : "l'accelération γ est inversement proportionnelle au carré de la distance r " ; autrement dit, c'est la quantité γr^2 qui est la caractéristique constante, ne dépendant que du Soleil.

Ce jeu de transformation, qui fait passer de a^3/T^2 à av^2, puis à γr^2, suppose une étape intermédiaire : dans le cas du mouvement circulaire uniforme, on confond r et a, et l'accélération et la vitesse sont liées par la relation de Galilée $v^2 = \gamma a$, d'où $av^2 = a^2\gamma = r^2\gamma$. Plus profondément que ce jeu de transformations algébriques, il y a l'étude par Galilée du mouvement de la chute des corps, et la manifestation de l'accélération comme l'élément permanent et dominant. La dernière étape, et la plus difficile pour Newton, fut la démonstration que la première loi de Kepler, sur le mouvement elliptique, est une conséquence logique des lois de la gravitation, et donc indirectement des deuxième et troisième lois.

L'analyse précédente a montré le rôle central de la troisième loi dans l'élaboration de la théorie de Newton. Cette même loi s'est manifestée à nouveau deux siècles plus tard, de manière inattendue. La lumière est le messager céleste, qui nous permet de connaître la position et la forme des objets cosmiques lointains : planètes, étoiles, galaxies. Mais l'analyse spectrale de la lumière, ou décomposition de la lumière selon les couleurs au moyen du prisme, mène à la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle à la découverte des *raies spectrales*. La lumière émise par une espèce chimique déterminée porte la signature de cette espèce sous la forme de raies brillantes (raies d'émission) et de raies sombres (raies d'absorption). Bien sûr, il s'agit là d'une nouvelle intervention de l'analyse harmonique. L'ensemble des raies correspondant à une espèce chimique donnée révèle une harmonie nouvelle dont il faut découvrir les lois. Ce sera l'œuvre de Balmer de découvrir une série de raies qui s'organisent selon la formule

$$\frac{1}{\lambda} = \mathrm{R}\left(\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{n}\right)^2\right);$$

dans cette formule, λ est la longueur d'onde correspondant à la raie (distance entre deux crêtes successives de la vague), R est une certaine constante, et n est un numéro d'ordre qui prend les valeurs 3, 4, 5 ... pour les raies successives



On découvre ensuite d'autres séries de raies liées à l'hydrogène, et Rydberg réussira à unifier toutes les raies dans une unique formule :

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\left(\frac{1}{m}\right)^2 - \left(\frac{1}{n}\right)^2\right).$$

Dans cette formule, m est le numéro d'ordre de la série ($m = 2$ pour la série de Balmer) et n le numéro d'ordre à l'intérieur d'une série, selon le tableau suivant

$m = 1$	$n = 2, 3, 4, \ldots$
$m = 2$	$n = 3, 4, 5 \ldots$
$m = 3$	$n = 4, 5, 6, \ldots$ etc ...

La formule de Rydberg unifiait un assez petit nombre de cas connus ; mais comme la loi de Titus-Bode, comme la classification des espèces chimiques simples par Mendeleiev, elle fournit un cadre avec des cases vides, remplies progressivement par les découvertes ultérieures. Mais chacune de ces lois demandait de la part de son inventeur un certain don de divination. Il est remarquable que les séries de raies, comme les harmoniques d'un même son fondamental, forment une suite qu'on peut numéroter dans l'ordre 3, 4, 5, ... Je n'étudierai pas ici la signification de cette nouvelle symphonie des atomes ; ce serait écrire la naissance de la théorie quantique, une longue histoire. Ici je veux simplement interpréter la constante de Rydberg R , qui est analogue à la constante a^3/T^2 de Kepler.

En 1913, Bohr invente le modèle planétaire de l'atome, le noyau atomique jouant le rôle du Soleil, et les électrons celui des planètes. De là, il déduit la formule suivante pour la constante de Rydberg

$$R = (2\pi^2\, m\, e^4/h^3\, c\,)Z^2.$$

Dans cette formule, π est la constante géométrique 3.1415..., m est la masse de l'électron, et e sa charge électrique, c est la vitesse de la lumière, h est la constante nouvellement introduite par Planck. Enfin Z est le nombre atomique de l'atome, de sorte que Ze est la charge électrique du noyau de l'atome. Cette explication de la constante de Rydberg fut un des premiers grands succès de la théorie des quantas. Le fait que, non la masse du noyau, mais sa charge électrique intervienne dans la formule de Bohr atteste que les forces en jeu sont électriques, et non pas la gravitation de Newton - qui ne joue pratiquement aucun rôle au niveau des atomes. Une analyse plus poussée montrerait que le carré dans $\frac{1}{n^2}$ et $\frac{1}{m^2}$ est la contrepartie exacte de la troisième loi de Kepler - que la lumière venue des étoiles nous ait dévoilé l'harmonie des atomes aurait pleinement satisfait Kepler.

DES CALENDRIERS AUX GAMMES MUSICALES

Pour conclure, mentionnons une autre rencontre des harmonies. La mesure du temps, la fabrication des calendriers, sont un des problèmes sociaux les plus anciens. L'astronomie nous fournit trois horloges naturelles :

- le mouvement diurne (alternance du jour et de la nuit, mouvement des étoiles dans le ciel nocturne)
- les phases de la Lune
- le déplacement du Soleil dans le ciel et le retour des saisons.

La troisième horloge est beaucoup moins évidente à observer avec précision que les deux premières. En fait, le retour de la nouvelle Lune, avec une périodicité de 29 jours et demi environ, est aisé à observer avec précision. Il est facile de tenir un décompte de 100 nouvelles lunes successives, et d'obtenir ainsi une précision de l'ordre du quart d'heure sur la durée d'une lunaison. C'est pourquoi tous les calendriers primitifs sont lunaires, et encore aujourd'hui la plupart des calendriers religieux (juif, musulman, chinois) sont à la base de lunaisons. Mais on ne peut manquer d'observer que le mois de Ramadan se décale, tantôt en hiver, tantôt en été, et tourne régulièrement autour des saisons. Il a fallu longtemps et un gros effort d'abstraction, et aussi de ténacité face aux conformismes, pour dépasser le niveau des "coups de pouce" occasionnels, et qui, dans le calendrier romain par exemple, [illegible]

Un des grands progrès fut la découverte du *cycle dit de Meton* (athénien du IV$^{\text{ème}}$ siècle avant J.C.) : l'année comprend 12 mois, et 12 mois lunaires font 354 jours, ce qui laisse un déficit de 11 jours environ. Mais on a

$$19 \text{ années} = 235 \text{ mois lunaires}$$

avec une précision remarquable ; l'écart est de l'ordre de l'heure. Le remède au décalage du calendrier lunaire est alors facile à imaginer ; comme on a

$$235 = 19 \times 12 + 7,$$

il suffit de répartir 7 mois supplémentaires sur un cycle de 19 années : on aura 12 années normales de 12 mois et 7 années surnuméraires de 13 mois. Un calcul simple

$$12 \times 12 + 7 \times 13 = 235$$

montre qu'on a réussi. Je ne vais pas ici analyser l'alternance des années courtes et des années longues, telle qu'elle est prescrite par le calendrier juif par exemple (en Egypte ancienne, on utilisait un cycle analogue de $76 = 4 \times 19$ années). Je ne ferai pas l'histoire (fort complexe) des calendriers ; mentionnons seulement qu'il y a un autre problème, dû à ce qu'une année n'est pas un nombre rond de jours, ce qui a conduit au jeu compliqué des jours bissextiles du calendrier julien et de la réforme grégorienne.

Un problème analogue a hanté le développement des systèmes musicaux, du système pentatonique (en usage chez les plus anciens, les Incas, les Chinois, ...) au système à sept notes qui forme la base de la musique européenne, et enfin aux douze notes du clavecin bien tempéré de Bach et au dodécaphonisme absolu de Schönberg. Décrivons rapidement le problème de base : les deux premières harmoniques d'un son fondamental de fréquence f, ont les fréquences $2f$ et $3f$, d'où la séquence :

$$f \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{octave}} 2f \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{quinte}} 3f$$

avec la définition classique des intervalles d'octave et de quinte. Il convient donc d'essayer de construire un système musical au moyen des intervalles musicaux d'octave et de quinte. De là vient le *cycle des quintes*, qui est le cauchemar des débutants en solfège, à qui l'on n'explique pas la mathématique sous-jacente. On enseigne que 12 quintes font 7 octaves ; ceci ne peut être strictement vrai car il faudrait que 3/2 multiplié 11 fois par lui-même soit égal à 2 multiplié 6 fois par lui-même, c'est-à-dire qu'on ait

$$2^{19} = 3^{12}.$$

Or toutes les puissances de 2 sont paires et toutes celles de 3 sont impaires, ce qui exclut l'égalité. L'argument est essentiellement celui par lequel Pythagore montre l'impossibilité de mesurer la diagonale du carré au moyen d'une fraction exacte du côté. Le résultat est le suivant : si l'on part de la note "ut" et que l'on accorde son piano par intervalles de quinte, on aura successivement

ut sol ré la mi si fa # ut # sol # ré # la # mi #

mais comme $(\frac{3}{2})^{12}$ est un peu plus grand que 2^7, l'écart entre le mi # ainsi accordé et l'ut supérieur sera un peu plus petit que la quinte naturelle : c'est la "quinte du loup". Le petit écart résiduel entre les 12 quintes et les 7 octaves est le *comma* musical ; il est l'analogue exact du résidu de 1 heure et demie qui subsiste à la fin du cycle de Meton, entre 235 mois et 19 années. En lui-même, ce résidu n'est rien, mais accumulé au cours des siècles, il conduit à des écarts gênants, de même qu'une gamme mal accordée conduit, par transpositions successives, à dénaturer l'harmonie. Quand on y regarde de près, on constate aussi de surprenantes ressemblances entre le cycle des quintes rappelé ci-dessus, et la répartition des mois excédentaires dans le calendrier juif. En fait, dans la relation approchée ci-dessus $2^{19} = 3^{12}$, on voit apparaître les nombres 12 et 19 en exposants, et ils sont aussi intervenus dans le cycle de Meton (qui a 19 années, chaque année normale étant de 12 mois). L'apparition du couple 19, 12 dans ces deux situations est fortuite (jusqu'à nouvel ordre), mais il est permis de rêver à une harmonie nouvelle entre nos systèmes musicaux, et les mouvements célestes de la Lune et du Soleil. En tout cas, c'est le rapport 19/12 qui domine mathématiquement les deux situations.

Une analyse plus poussée conduirait à la théorie des fractions continues, comme celle-ci

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}}$$

Une fraction continue est un moyen condensé d'exprimer les accords presque parfaits, sans cesse améliorés. Le livre V d'Euclide fournit une théorie très abstraite des rapports irrationnels, dépassant le type d'ajustement successif que je viens d'évoquer ; on a récemment suggéré[1] que l'inspiration pour ce livre a été fournie, non seulement par les propriétés géométriques (telles le rapport du côté et de l'hypoténuse dans un carré), mais aussi bien par les problèmes du calendrier que par ceux de la gamme musicale. Nous voici ramenés au *quadrivium*

ARITHMETIQUE MUSIQUE GEOMETRIE ASTRONOMIE

"Que nul n'entre ici s'il n'est géomètre" - ou tout au moins s'il n'est prêt à écouter la Musique des Sphères Célestes.

---

[1] Voir David FOWLER, The Mathematics of Plato's Academy, Oxford, 1987.

Brève chronologie

Euclide (autour de 300 avant J.C)	"Eléments de géométrie"
Protémée (II^{ème} siècle)	
Copernic (1473-1543)	"De revolutionibus" 1543
Tycho Brahe (1546-1601)	
Kepler (1571-1630)	"Astronomia nova" 1609 "Harmonices mundi" 1619
G. Galilei (1564-1642)	"Sidereus nuntius" 1610
I. Newton (1643-1727)	"Principia Mathematica" 1687
J. D'Alembert (1717-1783)	"Encyclopédie des arts et des sciences" 1750-1765
L. Euler (1707-1783)	"Tentamen novæ theoriæ musicæ" 1739
J. B. Rameau (1683-1764)	"Les Indes galantes" 1735
Laplace (1749-1827)	"Le Système du Monde" 1796
J. Fourier (1768-1830)	"Théorie analytique de la chaleur" 1822
Le Verrier (1811-1877)	Découverte de Neptune 1847
Maxwell (1831-1879)	"A treatise on electricity and magnetism" 1873
A. Einstein (1879-1955)	Relativité générale (théorie nouvelle de la gravitation) 1916
N. Bohr (1885-1962)	Modèle planétaire de l'atome 1913