SÉMINAIRE DE PHILOSOPHIE
ET MATHÉMATIQUES

E. RANSFORD

Théorie physique et incomplétude au sens de Gödel

Séminaire de Philosophie et Mathématiques, 1989, fascicule 1
« Théorie physique et incomplétude au sens de Gödel », , p. 1-24
<http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1989___1_A1_0>

THEORIE PHYSIQUE ET INCOMPLETUDE AU SENS DE GÖDEL

• Introduction.

La démarche scientifique orthodoxe est du type hypothético-déductif. Elle s'appuie sur des axiomes ou hypothèses, et des règles d'inférence. Par déduction, elle permet de trouver des propriétés et énoncés vrais.

Le premier théorème d'incomplétude (Kurt Gödel, 1931) explicite une limitation assez générale inhérente à ce type de démarche. On peut la schématiser ainsi :

- "la notion de vérité formelle est plus forte que celle de vérité dénombrable"; soit encore :

- "le vrai est irréductible au déductible, il est infiniment plus vaste que lui".

On est tenté d'élargir à la conclusion suivante :

-"Le réel est irréductible à toute connaissance simplement déductive, il est inépuisablement plus riche qu'elle"

Ce résultat restrictif est fondamental. A-t-il une incidence sur les modalités possibles d'une description formelle du monde réel ? Si oui, quelle est-elle ? Qu'en déduire ? Comment l'interpréter ?

Telles sont les questions posées. Plus précisément, quelle est la portée de l'incomplétude ? Est-elle propre :

1) au seul discours de la raison ?
2) au travers de cela, au réel lui-même ?

Dans le deuxième cas, nous avons de facto une restriction du champ des réels phénoménologiques possibles. Comment s'énonce-t-elle; et surtout : quelle information révèle-t-elle ?

• Plan de l'exposé

Nous allons successivement :

A. Rappeler ce qu'est le premier théorème d'incomplétude (énoncé et principe de démonstration)

B. Examiner à quelles conditions l'on peut effectuer le double transfert de signification de l'incomplétude :

$$T_1 : \quad Z_1 \longrightarrow Z_2$$

$$T_2 : \quad Z_2 \longrightarrow Z_3$$

avec :

Z_1 = { limitation portant sur certains systèmes formels }

Z_2 = { limitation propre aux physiques théoriques }

Z_3 = { limitation inhérente à tout réel phénoménologique }

C. Tenter d'élucider la portée et les contenus de ce double transfert (T_1, T_2).

• Le théorème de Gödel

I - Enoncé

Le théorème d'incomplétude dit ceci, en termes non techniques :

"Il existe, pour l'arithmétique ordinaire, des assertions correctes mais que l'on ne peut pas démontrer arithmétiquement (c'est-à-dire : à partir des axiomes et règles de déduction de l'arithmétique)".

Ces assertions, correctes ou non (si l'on prend leur négation), sont dites indécidables. Nous les baptiserons indécises si elles sont à la fois indécidables et vraies (ou correctes). Tout système formel ayant une assertion indécidable au moins est dite incomplet.

II - Principe de la démonstration

K. Gödel s'inspire des paradoxes bien connus du menteur ou de Richard (voir plus loin l'Encadré 3); mais il évite soigneusement de tomber dans le piege qui consiste à confondre langage et métalangage (un métalangage est un discours sur le langage; de même, on parle de la métathéorie d'une théorie donnée)

Il considère un système formel, P; qui est celui des "Principia Mathematica" auxquels sont ajoutés les axiomes de Peano. Il le décrit en montrant comment on peut assigner un nombre unique - dit nombre de Gödel - à chaque symbole, expression et suite finie d'expression de P (ceci englobe les démonstrations finistes dans P).

Encadré 1 : Construction d'un nombre de Gödel

Cela se fait en plusieurs étapes :

a) on liste les symboles de base, par exemple ici :

+	-	x	:	=	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

b) on leur affiche un numéro d'ordre :

+	-	x	:	=	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
↓				↓			↓			↓		↓		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

c) codage de l'expression (E) : 2 + 5 = 7 . On utilise les nombres premiers, 1 étant exclu :

(E)	2	+	5	=	7
	↑	↑	↑	↑	↑
	2	3	5	7	11

d) nombre de Gödel (g) associé à (E) :

$(g) = 2^8 . 3^1 . 5^{11} . 7^5 . 11^{13}$

- nombre énorme !

Grâce à l'unicité de la décomposition d'un nombre en facteurs premiers, on sait retrouver (E) à partir de (g).

Ce procédé lui permet d'"arithmétiser" totalement P, par le biais d'une correspondance biunivoque entre ses expressions et un certain sous-ensemble d'entiers naturels. Cela lui permet de définir les équivalents numériques des relations et fonctions de P.

L'idée de base est, grâce à la correspondance évoquée, de pouvoir traduire des propriétés métathéoriques relatives au système arithmétisé en propositions du système lui-même. (Les propositions métathéoriques ont été projetées sur le formalisme arithmétique; celles qui sont vraies correspondent à des formules arithmétiques exactes).

Pour une suite de formules de P, la propriété d'être ou non la démonstration d'une expression donnée est un exemple d'énoncé métathéorique: elle dit quelque chose sur le système, sans lui appartenir. Godel montre qu'elle est traduisible sous forme de propriété arithmétique spécifique, entre les nombres de Gödel associés.

Il construit alors une formule arithmétique G qui exprime, métamathématiquement, sa propre indémonstrabilité. Il montre ensuite que G est démontrable si et seulement si sa négation l'est. Mais ceci ne peut advenir que pour un système non cohérent (ou contradictoire).

Conclusion : si l'on suppose que l'arithmétique est cohérente, alors G n'est pas démontrable. Auquel cas elle est vraie, conformément à la proposition métamathématique qui lui correspond.

Encadré 2 : Une idée de la démonstration de Gödel

Soit P le système formel considéré par Godel, E l'ensemble des énoncés de P relatif à un nombre entier naturel variable, et $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels.

Soit α une application de E x $\mathbb{N}$ dans E qui à (e,n) associe le résultat de l'application de l'énoncé e à l'entier n :

$(e,n) \longmapsto \alpha(e,n)$ (e est un énoncé de P)

On définit :

D : l'ensemble des énoncés dénombrables de E

β : une application injective de E dans $\mathbb{N}$ qui est une numérotation de E

Alors, l'expression e_0 de E est dite diagonale si $e_0 = \alpha\,[e_0, \beta(e_0)]$

Soit F un sous-ensemble quelconque de E . Chacun de ses énoncés est diagonal ou ne l'est pas. Soit $[\Delta_F]$ l'ensemble des numéros de ses énoncés diagonaux.

Soit g un élément de E : on dira que g est un énoncé de Gödel pour F si le fait que g appartient à F($g \varepsilon F$) équivaut au fait que g soit démontrable ($g \varepsilon D$).

Montrons alors que s'il existe un élément ε de E tel que :

$$n \varepsilon \mathbb{N} , \{\alpha(\varepsilon,n) \varepsilon D \Longleftrightarrow n \varepsilon \Delta_F\} \ (1),$$

ceci implique qu'il existe un énoncé de Gödel pour F, qui est $\gamma = \alpha\,[\varepsilon,\beta(\varepsilon)]$

En effet :

par définition de ε : $\alpha[\varepsilon,\beta(\varepsilon)]\,\varepsilon D \Longleftrightarrow \beta(\varepsilon)\,\varepsilon \Delta_F$

par définition de Δ_F : $\beta(\varepsilon)\,\varepsilon \Delta_F \Longleftrightarrow \alpha[\varepsilon,\beta(\varepsilon)]\,\varepsilon F$

d'où finalement :

$$\alpha[\varepsilon,\beta(\varepsilon)]\,\varepsilon D \Longleftrightarrow \alpha[\varepsilon,\beta(\varepsilon)]\,\varepsilon F$$

Mais (1) signifie qu'il existe un énoncé ε de E tel que $\varepsilon(n)$ est démontrable si et seulement si n appartient à Δ_F : l'ensemble de numéros (c'est-à-dire de nombres) Δ_F est représentable par l'élément ε .

Pour finir, prenons comme cas particulier d'ensemble F l'ensemble F des énoncés réfutables de E (tout énoncé réfutable est la négation d'un énoncé démontrable).

Nous venons d'établir d'après ce qu précède que, si Δ_F est représentable par l'énoncé ε, alors il existe un énoncé de Gödel γ pour F, c'est-à-dire :

$$\check{\gamma}\,\varepsilon D \Longleftrightarrow \check{\gamma}\,\varepsilon \tilde{F} \quad (2).$$

Or, la cohérence impose qu'aucun élément de E ne puisse-t-être à la fois démontrable et réfutable : on ne peut pas trouver $\check{\gamma}$ vérifiant (2). Il en résulte que, si $\Delta_{\tilde{F}}$ est représentable, alors $\check{\gamma} = \alpha[\hat{\varepsilon},\beta(\check{\varepsilon})]$ ne peut vérifier (2) : on a à la fois $\check{\gamma} \notin \Delta$ et $\check{\gamma} \notin \tilde{F}$.

Dans ce cas on a identifié un énoncé $\check{\gamma}$ qui n'est pas démontrable ni réfutable : $\check{\gamma}$ est indécidable.

Le second théorème d'incomplétude de Gödel énonce ceci :

il est impossible de démontrer la cohérence de l'arithmétique élémentaire en utilisant ses moyens donc : (l'arithmétique est insuffisante pour cela).

Ce théorème se déduit assez directement du premier théorème d'incomplétude.

• En conclusion

La conclusion de ce qui précède est triple :

1 - L'arithmétique ordinaire est incomplète (on la suppose cohérente)

→ car il existe une expression airthmétique vraie, G, mais non démontrable

2 - Tout système formel cohérent et suffisamment riche ou puissant pour être arithmétisable est incomplet

→ car G est ainsi l'"arithmétisée" d'un énoncé de P, qui est lui-même indécidable (dans P).

3 - Cette incompléltude est sans remède : on ne peut détruire l'existence d'énoncés indécidables (il y en a une infinité)

→ car G étant indécidable par rapport à P, on peut l'ajouter comme axiome supplémentaire à P. Soit R le nouveau système obtenu, arithmétisé par la même procédure que pour P (voir Remarque ci-après). On peut construire dans R, par le même procédé que dans P, une expression H (différente de G) qui sera l'équivalent dans R de G pour P. Les conclusions seront identiques.

Remarque

G, rajouté en tant qu'axiome, devient de facto démontrable. Or nous avons vu l'équivalence :

G : démontrable ⟺ non G : démontrable
N'y-a-t-il pas contradiction ?

Non, bien évidemment : G, par rapport à R, n'est plus la traduction arithmétique de la proposition : "je ne suis pas démontrable". Car la proposition métamathématique "être la démonstration de "utilisée par Gödel pour construire G dans P n'a pas la même traduction dans R que dans P, du fait même que G devient sa propre démonstration. On n'a donc plus, dans R, le résultat que G est démontrable si et seulement si sa négation l'est (c'est par contre le cas pour H).

• Peut-on échapper à l'incomplétude ?

Certes oui: K. Gödel lui-même est à l'origine d'un théorème de complétude (il concerne ce qu'on appelle le "calcul logique du premier ordre"). L'arithmétique sans la multiplication est complète, ainsi que toute une classe de systèmes assez pauvres, rudimentaires ou comportant certaines "faiblesses" qui les rendent d'ailleurs difficiles à utiliser (ex : les "semi-systèmes"). Sans oublier les systèmes contradictoires !

Il semble donc que, pour échapper à l'incomplétude ou la contourner, il y ait un prix à payer assez élevé.

En fait, les conditions permettant de démontrer un théorème d'incomplétude sont très générales. "C'est la possibilité d'appliquer à certaines classes d'objet un raisonnement diagonal qui est à la base du théorème de limitation (...). Ce genre de raisonnement peut s'appliquer à n'importe quel système formel. Il faut, pour qu'il soit applicable à un système donné, que ce système soit assez puissant, en particulier qu'il contienne des expressions correspondant aux entiers et qu'on puisse y représenter au moins certains prédicats et certaines fonctions métathéoriques (...). Ce que le raisonnement diagonal fait alors apparaître, grâce aux propriétés paradoxales de l'ensemble qu'il permet de construire, c'est que certaines propriétés metathéoriques d'un système cessent, à un moment donné, d'être susceptibles d'une vérification effective". (M. Ladrière).

De façon générale, il y a deux ingrédients de base indispensables : une autoréférence, et un procédé diagonal. A propos du raisonnement diagonal, on se rappelle que certains paradoxes célèbres (paradoxe de Richard, du menteur, etc.) reposent sur lui. Les analogies qui existent entre la démonstration de Gödel et le paradoxe de Richard suggèrent que l'incomplétude est le prix à payer pour éviter la contradiction que pourrait créer l'auto-référence.

Encadré 3 : Deux pardoxes logiques

A - Le paradoxe du menteur .

Considérons l'assertion (m) : "La phrase entre guillements de ce paragraphe est fausse". Si (m) est vraie, alors ce qu'elle énonce est faux : elle est fausse. Si (m) est fausse, alors ce qu'elle énonce est exact : elle est vraie. Ainsi, (m) est vraie si et seulement si elle est fausse (ce paradoxe est lié à l'autoréférence).

B - Le paradoxe de Richard .

Soit un langage suffisamment élaboré pour permettre de formuler et définir toute propriété purement arithmétique des nombres entiers. Par exemple, la propriété (P), d'être un carré parfait (tel que 4 = 2x2, 9 = 3x3, etc) se définit : (p) = "être le produit d'un entier par lui-même". Chacune de ces définitions contient un nombre fini de mots, donc un nombre fini de lettres. On peut les ordonner et les numéroter selon la règle suivante : la définition la plus courte reçoit le numéro un; une définition a un numéro inférieur à une autre si le nombre de ses lettres est inférieur; si deux définitions ont même longueur, le classement se fera en fonction de l'ordre alphabétique des lettres de même rang en partant de la gauche, dès qu'elles diffèrent.

Ainsi, à chaque définition (finie) correspond un nombre. Dans certains cas, ce nombre vérifiera la propriété qui lui est associée. Ce serait le cas, par exemple, si (p) recevait le numéro 25 = 5 x 5. Dans le cas contraire, un nombre est dit richardien (il correspond à une propriété qu'il ne vérifie pas lui-même).

A présent, considérons cette propriété particulière des nombres, qui consiste à être richardien. Le classement évoqué précédemment lui associe un nombre déterminé, soit : n. Nous posons la question : " n est-il richardien ? ".

En se reportant à la définition du mot richardien, le lecteur aboutira aisément à la réponse suivante : n est richardien si et seulement s'il n'est pas richardien. La contradiction est manifeste.

En fait, le paradoxe provient de l'amalgame illicite opéré subrepticement entre les propriétés mathématiques (arithmétiques) initiales et la propriété métamathématique finale ("être richardien" fait intervenir le nombre de lettres contenues dans des définitions, ce qui n'a rien d'une propriété arithmétique).

De façon très schématique, on peut dire que, lorsque le raisonnement est conduit avec rigueur, il débouche non plus sur la contradiction, mais sur l'indécidabilité! C'est ce que nous enseigne la lointaine parenté du raisonnement (faux) du paradoxe de Richard et du raisonnement (juste) de Gödel.

Bien que cela n'apparaisse pas clairement dans notre brève présentation, ce paradoxe fait appel au raisonnement diagonal (ceci est lié à la notion de "richardien" elle-même).

• **Qu'attendre d'une physique théorique** ?

Une réponse pleine d'un bon sens évident semble devoir être :
"Ce qui est attendu d'une physique théorique est de savoir décrire et prévoir tous les comportements observables et effectifs de la matière, en sa qualité de système formel basé sur un nombre fini - le plus petit possible - d'axiomes indépendants".

Cette exigence paraît être on ne peut plus raisonnable et légitime. Cependant, est-elle acceptable ?

Depuis Gödel, il y a lieu d'en douter pour des raisons très fortes et très profondes, évidemment liées à l'indécidabilité. Mais pour pouvoir affirmer quoi que ce soit, des précautions sont de rigueur.

• **Premier intermède : quelques notions utiles**.

Notre univers réel, soit R_0, est constitué par un ensemble de phénomènes : R_0 est un cas particulier de <u>réel phénoménologique</u>. Plus généralement, on désignera par R le réel phénoménologique générique. Ce concept désigne tout univers objectif tel que le nôtre. R, outre ses caractéristiques propres et singulières, possède des propriétés universelles, dérivées d'un fait fondamental: le fait d'exister. Cela implique qu'il vérifie un certain nombre de <u>conditions nécessaires d'existence</u> (voir plus loin, Encadré 4).

Supposons que nous disposions d'une théorie générale des réels phénoménologiques et de leurs représentations théoriques (théorie désignée par le sigle : T.G.).

Cette théorie générale va considérer des trinômes :

(R, F, K) = { R, F(R), K(R,F) }

avec :

F = F(R) : <u>physique théorique</u> de R . C'est un système formel cohérent, hypothético-déductif, non rudimentaire et "adapté à son objet" (via K). Si elle a toutes ces bonnes propriétés, elle est dite <u>idoine</u> .

K = (R,F) est une correspondance qui permet à F d'être une représentation de R. A l'énoncé e de F elle fait correspondre la propriété p = K(e) de R.

Elle est dit <u>idoine</u> si elle vérifie certaines propriétés, dont :

- l'interprétabilité (à tout e bien formé elle associe p : K(e) correspondant à une propriété effective).

- La fiabilité (à e vrai correspond p = K(e) effectif; à e faux correspond p = K(e) inexact).

- on sait définir une correspondance "canonique" ou "réduite", qui élimine la redondance, l'imprécision et les ambiguités.

Nous ne pouvons pas définir ces notions rigoureusement : elles n'ont de sens que dans le cadre de T.G.

*Définition*s:

1) Une théorie incomplète au sens de Gödel sera dite <u>godélienne</u>. Un énoncé indécidable mais vrai sera dit <u>indécis</u>. Alors : si F est <u>godélienne</u>, elle admet un énoncé indécis, e* (cf. théorème de Gödel). L'ensemble de ses énoncés indécis s'appelle le <u>domaine d'indécision</u> de F .

2) (R, F, K, e*) étant donné - e* indécis - deux cas se présentent :

a) $p^* = K(e^*)$ n'est pas significatif phénoménologiquement. Alors, e^* est dit neutre au sens de (R,F,K)

ex : certains énoncés indécidables en théorie des nombres (nombres premiers particulièrement) ne peuvent que donner lieu à des propriétés sans importance pour la physique, à ce qu'il semble.

b) $p^* = K(e^*)$ est un comportement original et effectif de R, que la théorie ne doit pas ignorer. Alors, e^* est dit porteur. On dit ainsi que p^* est un comportement (intrinsèquement) imprévisible pour F (il en est de même pour tous les énoncés porteurs, et phénomènes dérivés).

L'existence d'un domaine d indécision porteuse marque une amputation sérieuse du pouvoir descriptif et prédictif de F .

3) De façon analogue, on parlera d'énoncés indécidables porteurs et indécidables neutres.

A présent nous pouvons en venir au coeur de notre exposé.

• Les hypothèses du double transfert.

Ces hypothèses sont soit restreintes (à R_0) soit généralisées (à tout R).

Restreint (R_0)	Generalise (R)
(H_1) Toute physique théorique de notre reel inclut un systeme godélien	(H_1 bis) Toute physique théorique inclut un systeme godélien
(H_2) Tout systeme godélien a un enoncé porteur pour chaque physique théorique de notre reel qui l'englobe.	(H_2bis) Tout systeme godelien possède un enoncé porteur pour chaque physique théorique qui l'englobe

Remarques :

1 - (H_1 bis) peut s'énoncer :
- toute physique théorique est godéleinne
- toute physique théorique a un domaine d'indécision non vide (et infini).

2 - (H_2 bis) est une hypothèse faible car elle se contente de postuler l'existence d'un seul énoncé porteur, parmi l'infinité d'énoncés indécis distincts.

Il est cependant immédiat, pour des raisons déjà évoquées, que (H2 bis) équivaut à affirmer :

> (H_2 bis) Tout système godélien génère une infinité d'énoncés porteurs distincts, pour chaque physique théorique qui le contient.

3 - Pour démontrer (s'il y a lieu, en supposant la question décidable !) la conjecture (H_2 bis), une première étape serait de parvenir caractériser une famille judicieusement choisie d'énoncés porteurs; dont on montrerait ensuite l'inévitable présence quel que soit (R,F,K). Ceci se construirait à partir d'une propriété universelle des réels phénoménologiques, mise en évidence dans le cadre de T.G. et dérivant, nous l'avons dit, des conditions nécessaires de l'existence.

• A la recherche d'une physique théorique pertinente.

Qu'implique le couple (H_1 , H_2) ?

Nous avons :

e* : énoncé porteur $\xrightarrow{K}$ p* : propriété ou comportement effectif de R, intrinsèquement inconnu ou imprévisible pour F

Ainsi, il semble a priori que :

> * quelle que soit F idoine (donc finiste), F est incapable de prévoir une infinité de comportement distinct de la matière (cas particulier $R = R_0$)
>
> * plus grave encore, toutes les prévisons de F sont susceptibles d'être prises en défaut (par interférence perturbatrice et imprévisible de l'inconnu avec le connu, au sens de F).
> Elle n'est donc pas fiable.

En ce point de l'exposé, l'alternative paraît être d'opter pour une représentation théorique :

- soit finiste, mais alors très lacunaire et non fiable

- soit infiniste, mais donc peu maniable, peu exploitable et radicalement inachevable (car il reste sans cesse de nouveaux énoncés porteurs à rajouter aux axiomes de départ, dès lors qu'ils sont identifiés : c'est une théorie en sempiternel chantier !)

• Deuxième intermède : un exemple d'énoncé porteur.

Cet exemple est emprunté à la physique contemporaine. Plus précisément : à la mécanique quantique.

Soit un quanton (ou "particule élémentaire") doté d'un état de spin pouvant prendre deux valeurs; soit "positive", soit "négative" (le spin est un mouvement de rotation interne du quanton).

Alors, l'énoncé e* ci-après est indécidable porteur :

(e*) : "Au cours de telle expérience de mesure du spin, le n-ième quanton enregistré (préparé dans un état le plus général, dit "surperposé") donne une valeur positive comme résultat d'observation."

Remarques :

1 - Seule l'épreuve concrète (extérieure à la théorie) permet de savoir si e* est vrai - indécis - ou faux.

2 - Il existe une infinité de tels énoncés, auxquels on peut à chaque fois associer un énoncé (indécis) porteur (il suffit de prendre la négation, si besoin est).

3 - Le sous-domaine d'indécision correspondant est irréductible dans le cadre finsite, dans la mesure où il témoigne d'un véritable a-déterminisme de R_0 (comme l'affirme la théorie).

4 - Ce sous-domaine est baptisé la réduction du paquet d'ondes, ou activation (cf. bibliographie).

5 - (Définition) R est godélien si et seulement si :
$(F,K) = \{F(R), K(R,F)\}$, e* porteur au sens de (R,F,K).

6 Le couple (H_1 bis, H_2 bis) implique :

les seuls réels phénoménologiques possibles sont godéliens.

• **La notion de situation indécise (et indécidable)**.

1 - (Définition) Un sous-domaine d'indécidabilité porteuse est une situation indécidable si et seulement si il est constitué par une infinité d'énoncés indécidables tels que :

a - Ils sont mutuellement indépendants, c'est-à-dire : quelle que soit F, il y a indérivabilité mutuelle)

b - Ils sont de même type (ils renvoient à un même type d'événements phénoménologiques : notion explicitée dans T.G.).

2 - Un exemple de situation indécidable : l'activation.

3 - Remarques :

a- A toute situation indécidable on sait faire correspondre une situation indécise, notée σ (R,F,K), par "extraction" des énoncés vrais.

b- Une situation indécise est irréductible dans le cadre finiste (on ne peut la faire disparaître par extension finiste; cf. ci-après).

c- σ(R,F,K) est intrinsèque à R :

$\{(R,F,K), (R,F',K')\}, \sigma(R,F,K) = \sigma(R,F',K')$
D'où la nouvelle notation : $\sigma(R,F,K) = \sigma_R$

d- Quelle que soit la situation indécise considérée, elle correspond à une absence de déterminisme : dans le cas contraire, toute théorie physique F décrivant ce déterminisme rendrait les énoncés indécis de σ_R dérivables, ceci est incompatible avec la première clause définissant les situations indécises.

• **Réel standard et réel pathologique**.

1 - (Définition) Soit (R,F,K). On appelle extension finiste F de F (finiste et godélienne) toute nouvelle théorie F obtenue en ajoutant à F en qualité d'axiomes supplémentaires, un nombre fini de ses énoncés porteurs.

2 - (Définition) R godélien est un réel standard si et seulement si :

$$\exists F_0(R) \text{ idoine}, \qquad \exists \Sigma_M = \bigcup_{i=1}^{M} (\sigma_R)_i :$$

$$\forall e^*_{F_0} \text{ (porteur)}, \quad e^*_{F_0} \; \varepsilon \, \Sigma_M \qquad (1)$$

(En langage non symbolique : un réel standard est tout réel dont il existe une physique théorique ayant tous ses énoncés porteurs répartis dans un nombre fini de situation indécises).

$F_0(R)$ telle que (1) est vérifiée est elle-même dite standard, ou saturée .

3 - (Définition) R et l'entier N strictement positif étant donné, une situation d'ordre N, $S_N = S_N(R)$, de R (ou de ses physiques théoriques) est tout ensemble non vide de N situations indécises au plus, arbitrairement choisies parmi les siennes (s'il en existe).

Exemple : $\Sigma_M \quad (\forall M \, \varepsilon \, \mathbb{N}^* \ , \ M \leqslant N)$

4 - (Définition) Un réel non standard est dit pathologique. C'est donc un réel godélien R tel que :

- soit : $\{\sigma_R\} = \emptyset$ (pas de situation indécise)

- soit : $\forall \{N \, \varepsilon \, \mathbb{N}^* \, , F(R) \text{ ioine}, S_N(R)\}$;

$\exists e^* : \{e^* \text{ porteur dans } (R,F,K), \ e^* \notin S_N\}$

Exemple : un réel ayant une infinité de situations indécises distinctes est pathologique.

5 - Ces notions vont nous permettre de dégager des cas (de réels godéliens) où il existe des physiques théoriques idoines (donc finistes), mais néanmoins satisfaisantes, en terme de fiabilité et de pouvoir prédictif (voilà qui peut nous rassurer !). C'est le cas de réels standard (dont la définition peut être aisément étendue : voir plus loin).

• Réel standard et représentation finiste.

On donne : {R standard, $S_N = S_N(R)$, (R,F,K)} avec : F idoine et R "standard d'ordre N" (c'est-à-dire : ayant exactement N situations indécises distinctes).

On sait qu'on peut construire $F_0 = F_0(R)$, standard.

A présent, construisons des physiques théoriques de R plus complètes que F_0. F_0 étant standard, il n'y a qu'une seule façon de procéder : par extension finiste. On construit ainsi une suite $\{F_i\}$ de physiques théoriques :

$F_0, F_1, \ldots, F_n = F_{n-1} \otimes \{e^*_{n-1}\}$ avec e^* porteur par rapport à $\{R, F_{n-1}, K_{n-1}\}$ (donc $e^*_{n-1} \in S_N$).
(La notation $F_n = F_{n-1} \otimes \{e^*_{n-1}\}$ signifie que Fn est l'extension finiste obtenue à partir de Fn-1 en incorporant l'énoncé porteur e^*_{n-1} - pris au hasard - aux axiomes de base de F_{n-1}).

La question qui se pose est la suivant : <u>qu'a-t-on gagné, en passant de F_0 à F_n</u> ?

On a : $S_N(R,F_0,K_0) = S_N(R) = S_N(R,F_n,K_n) \quad \forall n < \infty$

Donc :

- toutes les situations indécises demeurent (elles sont irréductibles dans le cadre finiste)

- tout énoncé e^* n'est axiomatisable qu'une fois "figé" en énoncé vrai (indécis) ou faux. Or, ceci ne peut se faire que par une preuve extérieure à la théorie, qui est l'épreuve phénoménologique, expérimentale.

De ce fait, F_{i+1} n'est pas une représentation de R plus profonde ni plus puissante que F_i : elle ne dégage pas de nouvelles lois ou de nouveaux principes théoriques; son pouvoir descriptif et prédictif n'est pas amélioré.

Le cas de l'activation est clair sur ce point.

Ainsi, il est inutile d'élargir (par extension finiste) une physique standard.

Ce serait non seulement inutile, mais néfaste car bien concombrant ! Savoir que le 15 mai 1957, à Berkeley, la mesure du n-ième spin a donné un résultat positif n'ajoute rien (en tant qu'axiome supplémentaire). Tout au plus cela peut-il donner la satisfaction de l'érudition ...

Définition : Soit R, standard. Toute physique saturée F(R) qui n'est l'extension finiste d'aucune autre physique standard de R est dite optimale.

Remarque. En terme de puissance prédictive théorique, il n'y a rien à rajouter - ni à ôter - à une physique optimale : elle s'accomode au mieux de son cadre finiste et de S_N dont elle connaît l'existence et les conditions de manifestation.

• **De quelle nature est notre réel** ?

1 - Que se passe-t-il dans le cas d'un réel pathologique ? Il n'a pas de réprésentation standard. Pour R pathologique, quelle que soit (R,F,K), le domaine d'indécision est "inapprivoisable" : F = F(R) ne peut être finiste et fiable à la fois.

Comment concevoir un tel "monstre phénoménologique", non maîtrisable et radicalement imprévisible ? Comment interpréter son existence éminemment insaisissable ?

Nul doute que cette question mériterait un examen approfondi, qui enrichirait nos réflexions sur les réels phénoménologiques.

2 - Quoiqu'il en soit, nous posons notre troisième et dernière hypothèse :

(H_3) Notre réel est standard

(s'il ne l'étais pas, nul doute que nos physiciens s'en seraient aperçu ...)

3 - Nous aurions pu adopter deux variantes plus fortes de (H3) :

(H_3 bis) Tous les réels godéliens sont standards
(H_3 ter) Tous les réels sont standards

4 - Remarques .

a - Ces conjectures ne peuvent être considérées que dans le cadre de TG. Elles explicitent peut-être la véritable portée du théorème d'incomplétude.

b - Une condition nécessaire pour avoir (H) est qu'il existe une extension finiste de l'arithmétique élémentaire dont tous les énoncés porteurs (au sens d'une physique théorique englobante) correspondent à un ensemble fini non vide de situations indécises distinctes.

c - Fait encourageant : cet ensemble n'est pas vide, du fait de l'activation (s'il était vide, notre réel R_0 serait pathologique).

• Que cachent les situations indécises ?

L'un des enseignements de T.G. devrait être que tout déterminisme est représentable (au sens de (R,F,K)) car potentiellement prévisible (au plan théorique).

Or, dans le cas d'une situation indécise ou indécidable, il existe une imprévisibilité de principe, ou intrinsèque. On est donc en présence d'un élément d'adéterminisme.

Ainsi :

à chaque situation indécidable correspond un adéterminisme (partiel) du réel.

En conclusion :

(H ter) implique qu'il ne peut exister de réel totalement déterministe.

Remarques .

1 - Un peu de réflexion (ou de raisonnement heuristique) permet de pressentir le fait que le réel ne puisse-t-être enfermé dans le déterminisme. L'argument est le suivant : un déterminisme n'est jamais auto-explicatif ou auto-justificatif. Il ne peut être auto-engendrant. Une

entité déterministe est, fondamentalement, une entité déterminée ... par autre chose. Pour qu'elle existe, il faut qu'elle puisse exister. Ce qui exige la réalisation préalable de certaines conditions "permissives". C'est la recherche de ces conditions nécessaires de l'existence qui est en cours du défi posé par l'énigme de l'ontogenèse.

Pour revenir au déterminisme : son existence renvoie à une réalité sous-jacente, "fondatrice", distincte de lui.

Au début de la chaîne causale qui part d'un déterminisme donné pour remonter aux réalités sous-jacentes successives, on doit trouver de l'auto-engendrant, par essence a-déterminé et donc, a-déterministe.

(Nous supposons implicitement que l'état originel de référence est le néant. Mais ceci n'est pas sans raison).

2 - Il y a deux types d'a-déterminismes :

a) L'indéterminisme : c'est le hasard pur - sans contenu -, la conséquence sans cause. Sur le plan logique, c'est un concept creux et peu enrichissant. Postuler son existence est le contraire d'une clause restrictive. L'information que cela apporte est assez pauvre ! (les clauses trop peu restrictives sont souvent d'un intérêt très limité. C'est le cas, par exemple, pour le fameux "tout est dans tout, et réciproquement").

b) L'autodétermination : cette notion introduit celle d'événement authentiquement créateur. Elle est une réflexivité active, une spontanéité endogène, par laquelle l'irruption soudaine de nouveaux éléments de réalité devient concevable.

Ce concept, parfaitement acceptable sur le plan théorique, est source d'un pouvoir explicatif propre. Il permet de reconsidérer le problème de l'ontogénèse (qui gravite autour de la question : "pourquoi y-a-t-il quelque chose plutôt que rien ?")

• **Conclusion générale**.

Les idées que nous venons de présenter ne sont pas un point d'achèvement, mais au contraire un point de départ. Elles nous suggèrent les remarques qui suivent.

A - Si les conditions du transfert de la godélianité des systèmes formels (s.f.) ou réels phénoménologiques (r.ph.) sont réalisées, selon notre schéma initial :

godélianité (s.f.) $\xrightarrow{(T_1, T_2)}$ godélianité (r.ph.), alors :

* R est représentable s'il est standard
* S'il est standard, il n'est pas totalement déterminé.

En quelques sorte, l'a-déterminisme (partiel) serait le prix à payer pour avoir une indécision "maîtrisable" ou "domptable". Sur ce point, on pourrait d'ailleurs assez facilement élargir et généraliser la notion de réel standard. La définition présentée ici se limite à l'existence d'un nombre fini de situations indécises distinctes; mais ceci n'est qu'un exemple très particulier d'indécision "apprivoisable". On peut concevoir des familles infinies de situations indécises, possédant certaines caractéristiques de régularité ou de simplicité rendant le sous-domaine d'indécision correspondant "maîtrisable". On peut même imaginer d'autres types de sous-domaines "maîtrisables", que celui des situations indécises, en raison de propriétés spécifiques; etc...

Il y a là une source assez immédiate de définitions sans cesse plus générales et plus profondes du concept de réel standard (et, en creux : de réel pathologique).

B - T.G. englobe et repose sur la théorie générale des réels phénoménologiques. Cette dernière doit être une onto-théorie, T, dont l'objet premier est :

- d'expliciter les conditions nécesaires de l'existence, nécessaires donc universelles, car valides quel que soit le réel phénoménologique R); et

- d'en dégager le contenu informationnel (c'est-à-dire : faire apparaître les conséquences structurelles et phénoménologiques de ces conditions nécessaires).

A priori, une onto-théorie (ou théorie de l'onto-genèse) fait appel à trois ingrédients de base :

d : le déterminisme
i : l'indéterminisme
a : l'autodétermination

L'onto-théorie donnée T repose en principe sur un, deux ou trois des éléments du triplet (d,i,a). Ceci conduit à 7 types possibles d'onto-théorie, par calcul combinatoire immédiat ($7 = C_3 + C_2 + C_1$) .

Sont-elles toutes acceptables ?

L'observation (de notre réel : R_0) montre que d existe. Ceci conduit a priori rejeter (comme insuffisantes parce qu'incomplètes le cas général) les onto-théories qui ignorent le déterminisme. Sont écartés les types suivants :

{ T(i,a) , T(i) , T(a) }

Par ailleurs, le raisonnement heuristique développé précédemment conduit à rejeter toute onto-théorie basée sur le déterminisme seul :

{ T(d) } n'est pas acceptable.

Enfin, que faire de i ? Si on l'accepte, cela revient à admettre la conséquence sans cause. Le problème de l'ontogenèse est alors potentiellement résolu, puisqu'il est permis d'affirmer, sans explication complémentaire, qui : "il existe quelque chose parce que ...rien".

Si nous refusons cette solution d'extrême facilité cela élimine toutes les onto-théories qui incluent l'indéterminisme dans leur outillage conceptuel de base.

Au total, il ne reste plus qu'un type d'ontothéories acceptable :

{ T(d,a) }.

Cette catégorie d'onto-théories impose-t-il des restrictions fondamentales sur l'existant ? Montrons sur un exemple comment il est possible de répondre par l'affirmative à ce genre de question.

Encadre 4 : Des conditions nécessaires de l'existence aux propriétés universelles des réles phénoménologiques (un bref aperçu).

Supposons que nous ayons défini rigoureusement - par rapport à un schéma explicatif causal explicité - la notion de chaîne causale (elle lie les existants successifs à leurs entités explicatives sous-jacentes). Supposons que nous ayons défini une notion de longueur de ces chaînes causales.

Supposons, enfin, que nous ayons montré que, dans tout réel phénoménologique pertinent, certaines de ces chaînes ont nécessairement une longueur finie.

Alors, au début de l'une de ces chaînes finies, on a le résultat que :

(r) "l'être n'existe que parce qu'il se fait exister".

Ceci provient du postulat de rejet de l'indéterminisme. En début de chaîne, l'être est autodéterminé : c'est ce qu'exprime (r). Il est un processus d'autogenèse permanente : c'est encore ce qu'exprime (r).

En conséquence, il n'est pas statique : l'être est fondamentalement d'essence dynamique.

C'est un premier exemple de propriété universelle de l'existant, que l'on peut dégager dans le cadre d'une onto-théorie. On peut l'approfondir par la notion générale de mouvement intrinsèque (d'où l'on peut tirer un premier critère d'existence, ou de réalité).

Il est exclu de développer ces questions ici. Remarquons seulement que nos différentes réflexions correspondant bien au cas particulier de notre réel et, plus spécifiquement, du quanton (voir en bibliographie).

D'autres caractéristiques universelles de l'existant peuvent être mises en évidence dans le cadre d'une onto-théorie. Elles se rapportent à des concepts plus ou moins élaborés. Nous pouvons par exemple citer :

- l'étalement - ou épaisseur - irréductible de l'être (en un sens à préciser)

- le fait que l'être doive renfermer, dans certains cas, du virtuel et de l'inertiel.

Ce dernier point est important, car c'est à partir de lui que l'on peut concevoir et comprendre le passage du réversible (autodéterminé à l'irréversible éterministe)

En approfondissant cela, on découvrirait que, en un certains sens, le déterminisme est un cas particulier de l'autodétermination. Ceci permet d'identifier une onto-théorie du type T(d,a) à une onto-théorie du type T(a).

En profondeur, l'autodétermination est une modalité réversible, ou variable, d'autoconstruction - de l'être par l'être -; alors que le déterminisme en est une modalité irréversible, ou figée (par déploiement inertiel). Ces définitions font bien apparaître que le déterminisme - modalité rigidifiée - est un cas particulier de l'autodétermination (modalité fluctuante, donc plus générale puisqu'elle englobe la précédente par une sorte d'"effet inertiel", dont nous ne pouvons parler ici-même).

Ces problèmes mériteraient, on s'en doute, un exposé séparé qui n'a pas sa place ici. Ce qu'il est important de noter est qu'une onto-théorie s'articule autour de deux problématiques fondamentales :

a - Origine et raison d'être (permissive) de la transition :

néant $\longleftrightarrow$ être autodéterminé

(cette transition est réversible)

b - Genèse du déterminisme, c'est-à-dire de la transition :

réversible $\longrightarrow$ irréversible

(elle pose un problème logique a priori insurmontable !)

C - Comme nous l'avons déjà suggéré, il devrait être possible d'identifier d'autres types de (sous-)domaines d'indécision que ceux mentionnés dans ce texte, mais qui rendent néanmoins représentables - dans le cadre finiste - les réels correspondants. Il faut pour cela étudier toutes les catégories concevables d'indécidabilité susceptibles d'être rendues "domptables", eu égard à leur prise en compte théorique.

D - Parallèlement, l'indécidabilité "inapprivoisable" ou "non maîtrisable" demande à être mieux connue : peut-on en dégager une typologie, des contenus phénoménologiques spécifiques, etc. ? Eventuellement, (H_3 ter) est-elle démontrable ?

Ce ne sont là que quelques-unes des probématiques et questions multiples qui surgissent. Toutes suggèrent d'entreprendre un vaste programme de recherches qui renvoient toutes, peu ou prou, à la nécessite d'élaborer T.G. ...

(le 11 mai 1989)

• Bibliographie sommaire.

- Kurt GODEL : "Obras completas, "Ed. Alianza Editorial", Madrid, 1981

- J. LADRIERE : "Les limitations internes des formalismes", Gauthier-Villars éd., Paris, 1957

- E. NAGEL et J. NEWMAN : "Gödel's proof", New-York Univ. Press, 1958

- E. RANSFORD, dans : "La Jaune et la Rouge", 5, rue Descartes 75005 PARIS

  * sur l'indécidabilité : N° 419, Nov 1986 :
    "Où sont passés les énoncés indécis de la physique théorique ?"

  * sur la nature du "quanton" (et la dualité onde-corpuscule) :
    N° 730, Déc. 1987 : "Pourquoi la lumière est-elle si obscure ?"

  * sur la problématique de l'ontogenèse :

1) N° 401, Jan. 1985 : "Proposition pour un modèle psychophysique de notre réalité"

2) N° 440, Avr. 1989 : "Histoire pas toujours vraisemblable du crocodile qui se mordait la queue"

3) Un nouvel article, plus approfondi, est en préparation.