Séminaire de philosophie et mathématiques

J. M. Salanskis

Le continu, le fini et la nécessité

Séminaire de Philosophie et Mathématiques, 1988, fascicule 1
« Le continu, le fini et la nécessité », , p. 1-23
<http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1988___1_A1_0>

LE CONTINU, LE FINI ET LA NÉCESSITÉ

Le Continu, le Fini et la Nécessité

Nous voudrions au cours de cette conférence évoquer la question du continu dans la perspective d'une possible modification du dispositif théorique régulateur par l'entremise duquel nous le concevons : une telle perspective nous est aujourd'hui offerte par l'élaboration mathématique ayant cours du côté de l'analyse non standard. Nous chercherons donc tout d'abord à présenter sommairement le contenu de cette élaboration en nous fondant sur l'article *Eléments pous une théorie du continu* [1] de Jacques Harthong, particulièrement représentatif à notre avis, et à dégager les éléments conceptuels qui sont cruciaux pour l'éventuel "changement de paradigme". Cette réflexion restera centrée sur le discours et l'aire idéelle de la mathématique, et fera intervenir comme notions fondamentales le *discret*, le *fini*, et l'*infini*. Dans un deuxième temps, nous essaierons de mesurer le rapport qu'entretient le dispositif régissant actuellement le continu avec la signification ontologique de la *nécessité* physique, et d'anticiper à tout le moins les problèmes que pourrait poser au niveau de ce rapport le passage à une conception non standardiste du continu.

Le but que nous visons à travers une telle étude est d'une part de prouver que le continu est toujours un objet d'investigation, un thème de discussion, y compris à partir de la pensée mathématique, en bref que son "cas" n'est pas "réglé", d'autre part de faire sentir l'importance et la profondeur philosophiques de la question du continu, au-delà ou en marge de sa teneur technique.

I. L'approche finitiste du continu offerte par l'ANS[2], sa confontation avec l'approche classsique

I.a Présentation sommaire du "nouveau continu"

Pour commencer, donc, nous parlerons de la nouvelle possibilité, offerte par l'analyse non standard, d'une approche "finitiste" et "combinatoire" du continu.

La découverte par Löwenheim et Skolem, disons surtout par Skolem, de la nécessité sémantique de "croire" à des modèles non standard de l'arithmétique, dès lors qu'on croyait à des réalisations ordinaires de la théorie des ensembles, a été, on en juge mieux aujourd'hui, un grand événement rationnel : le retard mis à se saisir de cette nécessité, à la penser canoniquement dans une théorie puissante pour ainsi dire conçue afin de l'accueillir (la théorie des modèles[3]), en témoigne sans ambiguité pour qui connait la corrélation non accidentelle entre ce genre de lenteur et les franchissements de seuil fondamentaux.

---

[1] *Astérique* 109-110 (1983) p.235-244.

[2] Conformément à un usage assez largement répandu, nous utilisons ce sigle comme abbréviation de "analyse non standard".

[3] Rappelons que si les principes de l'attribution d'une sémantique ensembliste à une théorie logique sont exposés par Tarski en 1936 dans son article fondateur *Le concept de vérité dans les langages formalisés* (en allemand dans Studia Philosophica, vol.1 (1936), 261-405), Tarski a seulement couvert du label "théorie des modèles" l'ensemble des travaux et recherches dans la ligne de cet article au cours des années 1950 (cf. sur ce point A. Robinson, *Model Theory* in *Selected Papers of A. Robinson*, Amsterdam (1979 North-Holland), tome 2, 524-533), et que le principal et grand essor de la discipline date de ces mêmes années, A. Robinson ayant été l'un des contributeurs les plus éminents à ce développement.

L'analyse non standard est d'abord un aspect du retentissement de cet événement. Dans sa première époque, la robinsonienne, elle a consisté à faire opérer positivement le résultat de Skolem en y reconnaissant la possibilité, pour peu qu'on travaillât dans un second modèle ***R** de la théorie "analyse réelle", en sus du présumé modèle standard **R**, et que les entiers de ce second modèle formassent un modèle non standard de l'arithmétique, de rétablir de façon cohérente le discours infinitésimal. C'est donc plutôt en effectuant sur la théorie "analyse réelle" un travail analogue[4] à celui qui, dans le cas de l'arithmétique formelle, dévoile l'existence des systèmes non standard d'entiers qu'en s'intéressant directement aux possibilités ouvertes par ces systèmes que Robinson a inauguré l'analyse non standard. Restant ainsi centré sur **R** et sa théorie classique, il a créé une théorie fort riche et fort séduisante, mais dont tout le monde remarquait qu'elle présupposait le **R** de Cantor-Dedekind, et qui donc roulait essentiellement sur la même conception du continu que l'analyse moderne, en dépit de la modification dans son "intuition" apportée par la théorie : cette modification, S. Albeverrio propose de la caractériser en disant que le continu robinsonnien est un *continu lisse* , entendez par là que ce continu est "enrichi" de toutes les façons de "tendre vers" quelque chose dans **R** qui étaient associées dans le discours classique à des êtres fonctionnels ou des ultrafiltres : à toutes les suites tendant vers un x_0 réel standard, avec des vitesses ou des styles de convergence variés, correspondent désormais des éléments infiniment proches de x_0 , dont la collection constitue le *halo* de x_0 , partie (externe) de ***R** ; de même, aux diverses suites tendant vers $+\infty$, correspondent des réels infiniment grands positifs. Le continu ainsi complété par rapport à son premier modèle peut être dit métaphoriquement "lissé". L'histoire récente de l'accueil fait à l'ANS de Robinson semble indiquer que ce continu lisse n'a pas paru valoir la peine, dans sa "petite" différence avec le continu classique, de se fatiguer à acquérir la maîtrise de l'ANS, en particulier avec ce que cela suppose de prise en charge d'un savoir *logique* .

Aujourd'hui le problème est relancé par tout un mouvement de refonte de l'ANS qui, en un sens, est un retour sur le résultat de Skolem, une tentative d'aborder les mathématiques directement à partir d'un modèle non standard de l'arithmétique, sans se contraindre d'emblée à récupérer toutes les constructions classiques de l'analyse, et pour commencer, celle qui est la pierre de touche de toutes les autres, à savoir celle de **R**. Georges Reeb, en France, a beaucoup insisté sur cette possibilité de réfléchir les mathématiques en ne se donnant rien de plus que l'éventuelle non standardité d'un modèle de l'arithmétique formelle. Les nouveaux points de vue, de la sorte, s'efforcent de proposer une "analyse" pensant et procédant directement à partir d'une telle donnée. Cette fois l'image corrélative du continu a toutes les chances d'être qualitativement autre que l'image classique, en dépit des recouvrements techniques qu'on n'aura pas de peine à établir. Nous allons essayer de présenter avec un peu plus de détail ces travaux.

I.a.1 L'approche de Harthong

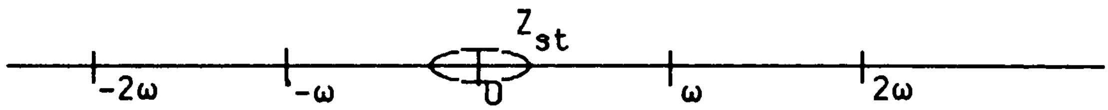
Prenons comme point de départ l'article *Eléments pour une théorie du continu* de Harthong. Celui-ci se donne un modèle de l'arithmétique formelle où est distingué un élément de nom propre ω, plus grand que 0, 1, et en général que tous les entiers standard dont la procession récursive est usuellement supposée épuiser **N** : en même temps que l'élément de nom ω, est donc supposée acquise la distinction standard/ non standard, sur la codification formelle de laquelle Harthong de s'étend cependant pas, en se bornant à signaler que les procédés de formation d'ensemble devront être manipulés avec circonspection s'ils font intervenir le concept de cette distinction (implicitement, il renvoie le lecteur insatisfait à l'article IST[5] de Nelson ; on peut aussi le renvoyer à

---

[4] A ceci près qu'il faut faire passser au premier ordre, ici, une théorie a priori d'ordre infini, point technique dont s'occupe Robinson dans la première partie de *Non standard Analysis* (Amsterdam, (1966 North-Holland)).

[5] Bull. of. Amer. Math. Society, vol. 83, n°6, nov. 1977 ; cet article est la charnière entre les deux phases de la postérité de Skolem que nous venons de définir.

l'axiomatisation à ma connaissance non publiée de P. Cartier, qui aurait ici l'avantage de s'adresser explicitement à **Z** ; le "sentiment" de Harthong est que cette question de la codification de référence est en fait sans importance). Il décide alors de regarder le **Z** en question avec une "échelle" énorme : en prenant ω comme unité. L'entier usuel 2 est alors assimilé à 2ω, 3 à 3ω, -1 à $-\omega$, etc.



Il apparaît alors que l'entier 1, dans la nouvelle unité, vaut $\frac{1}{\omega}$, c'est à dire pas grand chose, moins que n'importe quel $\frac{1}{n}$ pour n standard. Mais ceci est vrai pour 2, 3, et de proche en proche pour n'importe quel entier standard, élément de ce faux-ensemble (cf. supra) qu'on peut appeler $\mathbf{Z}_{st}$, et qui constitue désormais une partie du halo de 0, l'ensemble des éléments infiniment proches de 0. On définit, en effet

$$x \cong y \Leftrightarrow \forall n \ \ n \text{ standard} \Rightarrow n\,|x-y| \leq \omega$$

Cette définition se clarifie si l'on pense au **Q** formellement construit sur le **Z** de départ. $x \cong y$ signifie alors que les fractions $\frac{x}{\omega}$ et $\frac{y}{\omega}$ diffèrent d'une quantitié inférieure à tout $\frac{1}{n}$ avec n standard. En effet

$$\left|\frac{x}{\omega}-\frac{y}{\omega}\right| \leq \frac{1}{n} \Leftrightarrow n\,|x-y| \leq n\omega$$

Harthong peut donc définir ses "réels" comme les classes dans **Z** pour la relation $\cong$ d'abord spécifiée, en ayant à l'esprit que la valeur dans **Q** correspondant à $Cl(x)$ est $\frac{x}{\omega}$, valeur définie à un infiniment petit près. Si l'on ne veut que des réels limités, on se restreindra aux classes d'éléments limités de **Z**, avec la définition évidente

$$x \text{ limité} \Leftrightarrow \exists^{st} n \quad |x| \leq n\omega$$

Un réel au sens classique est donc une classe d'entiers, ou bien une classe de rationnels "modulo l'infiniment petit". Cette dernière façon de voir semble plus commode, mais Harthong trouve certains intérêts techniques à étudier les habituelles fonctions numériques (définies sur une partie de **R**) comme des fonctions sur **Z**, définies sur un support discret ; le résultat est que sa manière de voir **R** comme ensemble de départ consiste métaphoriquement à visualiser sur un écran d'ordinateur à définition "hyperfinie" au sens de Cartier, c'est-à-dire finie mais excédant toute valeur standard. Cependant, pour l'ensemble d'arrivée, c'est le point de vue qui assimile un réel à une classe de rationnels modulo l'infiniment petit qui est adopté. La fonction $x \mapsto x^2$ sera codée ainsi par

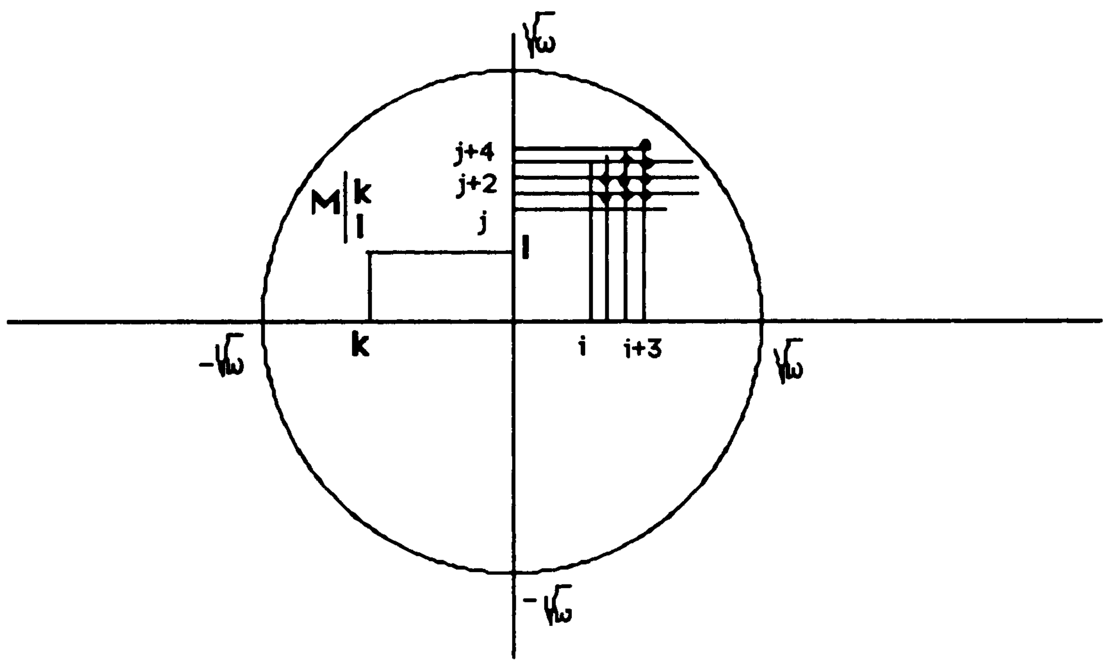
$$Cl_1(x) \mapsto Cl_2\left(\left(\frac{x}{\omega}\right)^2\right)$$

Cl_1 étant relatif à la relation dans **Z** définie plus haut, et Cl_2 à la relation $r \approx r' \Leftrightarrow \forall^{st} n \ |r-r'| \leq \frac{1}{n}$ sur Q.

On a deux "modèles" de R, on prend l'un au départ, l'autre à l'arrivée. Des nombres réels comme Π et $\sqrt{2}$ ont naturellement leur réplique dans ces modèles : il suffit de le vérifier dans l'un ou l'autre, puisque l'application

$$Cl_1(x) \mapsto Cl_2(\frac{x}{\omega})$$

réalise évidemment un isomorphisme d'un modèle sur l'autre (du moins si l'on appelle l'*autre* l'image du premier par cette application, soit un modèle *discret* constitué de fractions de dénominateur ω, et pas le quotient de tout Q par la relation $\approx$; si α est un entier non standard tel que $\alpha<<\omega$, le segment $[\alpha\ \omega]$ contient à son tour un modèle discret semblable de $\mathbf{R}^+$, obtenu en prenant cette fois a comme unité d'échelle ; c'est un des traits caractéristiques de l'approche, et l'une de ses forces, de permettre ainsi la construction d'un enchâssement "fractal" de modèles). Π, pour en revenir à lui, est défini à partir du cercle



($\sqrt{\omega}$ est la racine entière de ω : $\sqrt{\omega} = Sup(\{k \in N | k^2 \leq \omega\})$). Ce cercle contient comme points à coordonnées entières tous les M (k,l) tels que $k^2+l^2 \leq \omega$. Formons alors dans **Z** l'ensemble $A=\{ (k,l) \in \mathbf{Z}^2 \mid k^2+l^2 \leq \omega\}$, ensemble licite car collectivisé sans faire appel à la distinction standard/non standard. La classe de card(A) est le codage cherché de Π. Justifions le approximativement comme ceci : l'application qui à un petit carré du réseau associe son sommet supérieur droit est à peu de choses près une bijection ; donc $card(A) \cong \pi(\sqrt{\omega})^2$, id est $\frac{card(A)}{\omega} \approx \pi$. La preuve *arithmétique* de ce que card(A) a la même suite de décimales que Π est possible. De même $\sqrt{2}$ est représentable par la classe de card $\{k \in N \mid k^2 \leq 2\omega^2\}$ Et la justesse de la représentation choisie est évidente, puisque, si $B=\{k \in N \mid k^2 \leq 2\omega^2\}$, on a

$\text{card}(B) = \text{Sup}(B)+1$

et

$$(\text{Sup}(B))^2 \leq 2\omega^2 < (\text{Sup}(B)+1)^2 \Rightarrow (\frac{\text{Sup}(B)}{\omega})^2 \leq 2 \leq (\frac{\text{Sup}(B)}{\omega}+\frac{1}{\omega})^2$$

$$\Rightarrow 0 \leq 2-(\frac{\text{Sup}(B)}{\omega})^2 \leq \frac{2\text{Sup}(B)+1}{\omega^2}$$

or $\text{Sup}(B) \leq \frac{3\omega}{2}$ (nous en omettons la preuve), donc $\frac{\text{carb}(B)}{\omega} \cong 2$

Dans son article, Harthong prouve de façon purement combinatoire, à partir de telles prémisses, la formule $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\Pi})$, qu'on obtient classiquement avec la formule de Fubini[6]. Sa démonstration est certes plus longue que l'habituel calcul. Mais, comme il le fait remarquer, rien n'est présupposé en dehors de l'arithmétique, et chacun sait qu'il y a tout un travail à faire par exemple pour obtenir un bon exposé de Fubini et du changement de variable.

En fait cette approche du continu ouvre un certain nombre de perspectives, que nous allons laisser pressentir à la fois en racontant vaguement les choses et en nous référant à des travaux précis.

Dans une tentative un peu sommaire de classification, on dirait volontiers que cette approche d'une part permet de *recoder* l'analyse dans le langage et les procédés de l'arithmétique, ou de l'algèbre en nommant plus large, d'autre part offre un *nouveau moyen d'investigation* du continu.

I.a.2 Recodage et nouvelle investigation

Le recodage, c'est ce dont un premier exemple nous est donné par la preuve alternative de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\Pi})$ proposée par Harthong. Comme le résultat est déjà capitalisé par les mathématiques, l'intérêt du recodage est seulement conceptuel : il s'agit de dégager, dans chaque cas, à quels faits ou opérations arithmétiques correspondent les faits classiques de l'analyse, ainsi que les "passages à la limite" ou autres procédures caractéristiques de calcul ou de preuve à travers lesquels nous les connaissons et les concevons. Les résultats ou les situations recodées sont alors nécessairement regardées par un nouveau regard mathématique. Par exemple l'égalité $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\Pi})$ est rattachée à certaines estimations de parties de sommations hyperfinies. Il peut arriver en général que le recodage manifeste un aspect arithmético-combinatoire de l'analyse hétérogène avec le visage classique du fait mathématique concerné (ou réciproquement, les procédés de traduction courant en fait dans les deux sens, des modèles arithmétiques à unité hyperfinie de **R** vers le **R** de Cantor-Dedekind et vice-versa, un concept imprévu d'analyse réelle peut se greffer sur une configuration ou un procédé arithmétiques).

---

6 e^x peut être défini par exemple par $(1+\frac{x}{\omega})^\omega$. Naturellement, une telle définition nous oblige à prouver de manière combinatoire la propriété de morphisme $e^{x+y} = e^x e^y$.

Quelques exemples de ces effets de sens relevant du recodage, qui ont le privilège d'être connus de nous et de nous avoir frappé, peuvent être cités :

-- l'étude de la correspondance nombre-fonction par J.P. Réveillès, fondée sur le principe suivant : si est ω un entier positif non standard, et n un entier positif, je peux écrire sa décomposition ω-adique

$$n = \sum_{k=0}^{K} n_k \omega^k$$

et associer à n la fonction $k \mapsto n_k$. Moyennant quelques conventions sur la taille de n et le choix d'une unité hyperfinie η, je parviens à assimiler cette fonction $k \mapsto n_k$. à une fonction numérique classique. Il apparaît alors un certain nombre de choses amusantes, comme par exemple le fait qu'au produit d'entiers correspond le produit de convolutions de fonctions (devinable en raison de la règle $n'' = \sum_{k=0}^{K} n_k n'_{N-k}$ qui calcule le chiffre de rang N de l'écriture ω-adique de n" en fonction des chiffres des écritures de n' et n). J.P. Réveillès nous a exposé cet exemple à Strasbourg surtout comme un jeu mathématique, mais il nous paraît très représentatif des effets de sens apportés par le recodage.

-- l'exposé systématique des principaux résultats de la théorie de Lebesgue et de certains articles classiques de la théorie des probabilités par Nelson dans *Radically elementary probability* [7]. Nelson accomplit le programme annoncé dans l'article IST et redémontre à très peu de frais, par utilisation intensive d'estimations d'infinitésimalité et de sommations hyperfinies, les théorèmes classiques de convergence dominée, de convergence en probabilité et de convergence presque sûre, des formulations diverses du théorème de la limite centrale et le théorème de décomposition de Radon-Nikodyn. Là encore, l'adoption de ces démonstrations alternatives implique ou enveloppe une autre intuition de toutes les configurations probabilistes sous-jacentes, dont l'accessibilité aux "méthodes de Pascal" apparaît soudain en pleine lumière (à ces méthodes imprégnées de non standard, s'entend).

-- la résolution du problème de Dirichlet concernant une fonction harmonique dans un disque ouvert, telle que l'a esquissée sous nos yeux A. Robert, en utilisant un quadrillage hyperfini du disque.

Il n'est sans doute pas inimportant de dire que le *recodage* est une activité représentative de l'esprit mathématique aujourd'hui dominant, celui-là même qu'on serait tenté d'appeler *bourbachique* , en raison du fait que sa grande expansion et la grande propagande en faveur de sa splendeur ont coïncidé avec la vogue de l'idéologie et de l'enseignement bourbakistes. Pourtant, le style de développement des mathématiques qu'on associe alors avec ce nom a précédé la codification bourbakiste, et survit à la valeur de référence qu'elle a pu posséder pendant un certain nombre d'années. Le *recodage* , en effet, participe de ce que Jean Petitot appelle "entre-expressivité" généralisée de la mathématique actuelle, permettant l'établissement de dictionnaires et de traductions de domaine d'objet à domaine d'objet, de théorie à théorie, de structure à structure, presque toujours et mystérieusement avec un gain d'information à la clef.

Mais il y a aussi l'aspect *nouveau moyen d'investigation* . Ce dernier est lié à la pluralité d'échelles naturellement disponibles à l'analyste non standard, dès lors qu'il lui est loisible de prendre en considération autant de modèles du R classique qu'il veut, en variant les unités et en les choisissant dans des rapports d'infinité relative fins. Aux questions en première approche digitales de l'analyse classique sur les comportements locaux des êtres fonctionnels (fonctions, trajectoires, champs), en tant qu'elles se ramènent généralement à l'alternative régulier/irrégulier (ce qui se dit continu/discontinu), se substituent des questions modulées et quantifiables portant sur la "taille infinitésimale" de l'écart de valeurs enregistré *sur la moyenne* en passant d'une petite région à une plus grande petite région, et toutes sortes de questions de cet ordre, qui sont posables parce

---

[7] (à paraître).

que les paramètres des problèmes peuvent être choisis de tailles infiniment petites ou grandes corrélées comme on le veut.

Ainsi, dans la théorie des canards, une fonction décisive revient à notre sens à la possibilité extrêmement simple dans sa formulation de choisir par exemple, dans le cas de l'équation de Van der Pol $\varepsilon x''+(x^2-1)x'+x = a$, ε et a corrélés dans la petitesse du premier et la proximité à 1 du second .

Ainsi, Harthong étudie, soit dans son travail sur le moiré, soit lorsqu'il envisage à des fins variées des fonctions de Z dans Q, divers concepts de moyennisation locale des fonctions.

Ainsi Nelson, dans le même ouvrage sur la théorie des probabilités, remplace la question classique sur la continuité des trajectoires d'un processus stochastique par des questions susceptibles de raffinement quantitatif sur le nombre de ε-fluctuations.

I.b La transcendance classique du continu sur le discret ; rapport avec les fonctions cognitives de l'espace et du temps ; ce qu'il advient de l'ensemble avec le "nouveau continu"

I.b.1 La transcendance classique du continu sur le discret

Quels horizons se dessinnent-ils à partir de cette nouvelle approche du continu, qui procède plus purement encore que l'analyse non standard classique de la notion, due à Skolem, d'une arithmétique non standard, et reste dans son cadre autant qu'elle le peut? Répondre nous force à préciser ce qui nous paraît philosophiquement important dans la version Cantor-Dedekind du continu.

Sur le plan philosophique, le continu classique, celui de la "droite réelle" donc, se situe au bout d'un processus d'enrichissement dont les deux premières étapes sont **Z** et **Q**. Si nous regardons **Z**, **Q** et **R** comme munis de leur topologie de l'ordre, alors nous voyons que **Z** est discret, **Q** dense, et **R** connexe, ceci sur le plan topologique, cependant que sur le plan des cardinalités **Z** et **Q** sont dénombrables et **R** transdénombrable. Le continu s'affirme donc comme "promotion" du discret en deux sens simultanément

1) celui de la cohésion, ou du se-tenir-à-soi-même, par rapport auquel la densité est une première étape, garantissant la divisibilité à l'infini, la connexité une seconde, assurant qu'il n'y a pas même de trou thématisable par le moyen de sous-ensembles ouverts [pas de trous inter-élémentaires, et pas de méta-trous]

2) celui de la cardinalité, puisqu'avec le continu est acquis un excès essentiel de cardinalité sur le dénombrable ; à cet égard **Q** n'est pas un intermédiaire, le "saut" s'accomplit de **Q** à **R**.

Un tel modèle du continu souligne de deux manières parallèles le supplément de **richesse** du continu sur le discret. Richesse de la cardinalité d'une part, richesse du "pullulement" local des nombres, richesse d'une cohésion qui est profusion ubiquitaire. Et notre représentation modernement acquise du continu est faite d'une subtile résonance entre ces deux aspects : nous sentons et pensons le continu comme le substrat riche en ces deux sens, et riche de chaque façon par le moyen ou le truchement de sa richesse de l'autre façon : c'est parce qu'il y a beaucoup de nombres qu'il n'y a pas de méta-trous, et réciproquement.

Il est inutile d'insister sur la prodigieuse profondeur et la patente fécondité de ce modèle. Peut-être est-il en revanche utile de signaler sa complicité avec un horizon ontologique partagé par la physique moderne et la grande tradition philosophique allemande, celle qui commence avec Kant.

I.b.2 Le continu, l'espace et le temps chez les post-kantiens et en physique

Dans cet horizon, pour faire bref, et faire injure aux distinctions pourtant nécessaires, on associe le continu au *"réel"* , et plus exactement à la transcendance du *"réel"* . Le continu se dit avec vérité de ce qui nous est offert comme phénomène ou comme consistance dans l'en-soi de toute objectivité, alors que nos représentations, nos discours, notre pensée, ce que nous mettons en œuvre *spontanément* , relèvent du discret (bien que la dénomination ne soit pas utilisée à l'origine, le concept du discret *structural* étant à la vérité une conquête fort récente). La physique moderne, de Galilée à Einstein et à la mécanique ondulatoire, a contresigné cette valorisation ontologique du continu en faisant coïncider la connaissance de la nature avec sa compréhension en termes d'espace et de temps, elle-même médiatisée par la paramétrisation au moyen de nombres réels ; sur le plan opératoire, cette physique est celle dont l'instrument privilégié est l'équation ou le système différentiels. Du côté philosophique, on peut rapidement dire que les formes a priori de l'intuition kantienne, l'espace et le temps, sont dites continues en un sens mathématiquement distinct du nôtre (puisqu'il se caractérise par la divisibilité à l'infini) mais que tout à la fois la teneur infinitésimale du continu et son excès sur les figures discrètes de l'entendement sont ce que Kant a expressément en vue dans son dispositif, tant et si bien que le continu sert ou réalise la transcendance du champ intuitif, venant se substituer à la transcendance de l'en-soi comme quelque chose de plus sérieux et de plus oppositif, oserions nous dire. Husserl et Heidegger, chacun à leur manière, ont marqué ce lien du continu avec l'originarité de ce qui se donne, soit en installant la phénoménologie "sur" et "dans" le flux héraclitéen du vécu - pour ce qui concerne le premier - soit en décrivant inlassablement la compréhension originaire comme appartenance à une discontinuité (la déclosion de l'Etre dans l'étant) - pour ce qui concerne le second ; par ailleurs tous deux ont convergé pour reconnaître l'*ontologie paramétrisante* comme noyau de la science physique[8].

Ajoutons encore ceci : le continu dans la représentation accordée à ces horizons est probablement avant tout continu *spatial*. Pour ce qui regarde les mathématiques, c'est assez clair, si l'on veut bien voir que la détermination topologique du se-tenir-avec-soi (finalement de la "connexité") aussi bien que l'évaluation quantitative de la cardinalité conviennent à une entité se déployant devant un regard, et valant comme espace : ce point a été remarquablement mis en évidence par la multiplicité d'*espaces topologiques* , nommés espaces vectoriels topologiques, espaces de Hilbert, etc., qu'a pris en considération la mathématique post-cantorienne afin de décliner son savoir du continu. Dans le registre philosophique, les choses sont plus complexes, parce que d'une certaine façon, tous les grands auteurs ont cherché à mettre en place un primat du temps sur l'espace [le schématisme transcendantal chez Kant, le temps égalisé au concept chez Hegel (et la critique constante de l'espace comme non pensée par le même), le temps horizon de la compréhension de l'être chez Heidegger, le temps vécu premier chez Husserl]. Pourtant, à notre avis, cet effort est toujours inconsistant dès lors que le continu ne peut posséder la puissance de rendre transcendant ce qui s'annonce dans son élément que s'il est donné *avant la pensée* , et donné dans un genre d'évidence laissant se manifester l'être-ensemble "gluant" qui lui est propre : ce qui ne saurait avoir cours, comme intuition ou quelque mode de rapport pré-cognitif que l'on voudra, qu'à l'égard de l'espace, entendu ici comme nom de l'*extériorité épaisse* . Chez Kant, cette primarité de l'espace dans l'intuition du continu est en fait très bien marquée dans l'esthétique transcendantale, et la destination "temporelle" des scénarios du schématisme n'y change en fait rien, elle "correspond" seulement au contexte du *je pense* où émergent les catégories. On pourrait, en analysant les textes, montrer comment Hegel, Husserl et

[8] cf. *La crise des sciences européennes et la phénoménologie transcendantale* , Paris (1976 Gallimard), §9, 27-69, pour Husserl, *Le déploiement de la parole* in *Acheminements vers la Parole* , Paris (1976 Gallimard), 194-202, *Introduction à une lecture phénoménologique de la "Critique de la Raison pure de Kant"* Paris (1982 Gallimard), §2, 38-56, pour Heidegger.

Heidegger ont en fait buté sur cette priorité de l'espace que leur prédécesseur avait correctement reconnu.

Dans le champ de la physique, la dominance de l'espace est masquée par la participation du temps au mouvement. Mais en fait, déjà avec Newton[9] se dévoile ce qu'Einstein explicitera : qu'il s'agit profondément d'inclure le temps dans une totalité géométrique (l'espace-temps) au sein duquel la mécanique déploie et contemple des *figures* [10].

I.b.3 Comment retrouve-t-on ce dispositif dans le cadre du nouveau continu?

C'est donc à tout cet ensemble équilibré où les mathématiques, la physique et l'ontologie ont part que la timide proposition de l'ANS prétendrait succéder. En y introduisant quelle sorte de nouveauté, de différence? Les quelques aperçus synthétiques que nous avons donnés sur la "nouvelle approche" du continu devraient nous aider à le dire.

D'un point de vue mathématique, on pourrait certes évacuer le problème en affirmant que même les modèles du continu produits comme quotients des rationnels limités de dénominateur ω modulo les infiniment petits, par exemple, sont, aux précautions nécessaires près, variables selon le cadre formel choisi [par exemple, dans IST, ce quotient est un objet externe] une structure isomorphe au **R** classique. De telles affirmations sont correctes et s'intègrent au corps des "constats de conservativité" (au sens non technique et au sens technique) du nouveau discours par rapport à l'ancien, corps que n'ont cessé d'enrichir par la présentation de nouvelles pièces les non standardistes, à la fois pour désarmer leurs collègues souvent empressés à diagnostiquer le divorce et l'hérésie, et par souci "naturel" de comprendre la mutation qui était en train de passer par eux. Mais il est clair que l'approche "à la Harthong" - baptisons la ainsi - du continu déplace les deux constituants de la figure classique du continu, la connexité et la transdénombrabilité, dans leur teneur régulante pour la pensée mathématique en activité. Ce qui signifie tout simplement que ce ne sont plus les mêmes acquis notionnels qui accompagnent implicitement la "saisie" du continu dans l'exercice de la mathématique, de fait, et *quand bien même ces acquis seraient toujours en droit disponibles* , dès lors qu'on accède au nouveau paradigme.

C'est pour le caractère transdénombrable que la chose est la plus claire. Harthong dans son article dénonce tout à fait explicitement le lien classiquement vu entre le continu et une certaine cardinalité superlativement infinie. Il argue de la possibilité de concevoir le continu avec les moyens du fini, et considère que son article est l'ébauche d'une telle approche. On doit certes lui donner acte que le concept cantorien d'une richesse quantitative au-delà du dénombrable n'est plus invoqué dans son approche : même si, vus avec les lunettes classiques (c'est-à-dire regardés en termes des "modèles" de leur théorie qu'on peut "construire" au sein d'un univers de Zermelo-Fraenkel), les "nouveaux réels" formaient à nouveau un ensemble de "forte cardinalité", ce fait ne serait pas appelé à jouer de rôle dans leur considération selon la nouvelle approche. La plupart du temps, on suscitera l'image du continu à partir de l'ensemble des rationnels de dénominateur un ω non standard et de numérateur borné par quelque $n\omega$ avec n standard, ensemble totalement saisissable dans le fini (le fini formel, l'hyperfini). Que ce fini soit seulement formel, soit un fini *ineffectuable* , est ce qui fait le lien avec l'approche antérieure. Mais cette fois le formalisme du couple fini/infini ne vient pas surdéterminer la disjonction discret/continu comme dans la représentation héritée de Cantor. Ceci revient précisément à dire que l'excédent quantitatif du continu sur le discret au niveau de la totalité statique de chacun d'eux n'est pas pris en compte dans le discours alternatif proposé par les non

[9] le temps est le "mouvement uniforme de référence", cf. De Gandt, *Temps physique et temps mathématique chez Newton* , in *Mythes et représentations du temps* , (1985 CNRS), 87-105.

[10] cf. à ce propos le formalisme lagrangien, où l'on cherche des éléments réalisant une condition d'extrêmalité pour une intégrale parmi un espace fonctionnel où sont co-impliqués le temps et l'espace.

standardistes : ce discours correspond à un usage démonstratif *autre* qui secrète d'*autres* notions régulatrices.

Pour ce qui regarde maintenant la connexité, nous devons à nouveau dire qu'elle est dissoute dans la nouvelle approche, du moins si l'on donne la plus grande importance au type d'objet "pratiquement" mis en avant par cette approche, et qui est un "quotient" d'un segment hyperfini de **Z** ou d'une partie de **Q** définie par un dénominateur non standard fixé modulo une certaine qualité d'infiniment petit. On obtient alors un sytème de nombres qui est "discret" dans l'absolu. Mais ce réseau discret est suffisamment fin pour sauver toutes les nuances du continu classique ; certes, l'algèbre sait produire des nombres qui tomberaient entre les jalons du réseau, mais la logique du quotientage, du passage à "l'ombre" nous y fait revenir. Plutôt qu'une connexité actuellement posée dans un objet, nous avons donc une discrétion pratiquement démentie mais toujours restituée.

Faut-il dire alors qu'il y a rupture absolue avec le continu de Cantor et de Dedekind, dans la double détermination que nous en avons donnée? Sûrement pas. Pour justifier ce "sûrement pas", essayons de reprendre à un niveau plus philosophique cette nouvelle image du continu, telle que nous la pressentons d'après ce qui existe déjà en fait de travail mathématique dans son élément.

En premier lieu, il est certes exact que le concept de transcendance *quantitative* du continu sur le discret dénombrable est abandonné dans la nouvelle approche, mais non pas celui d'une transcendance *en général* du même à l'égard du même. Un tel effet de transcendance subsiste, mais il est désormais intégralement porté par le statut de la ou des marques symboliques "supplémentaires" du type ω : le "minimum" techniquement nécessaire à la production de n'importe lequel des nouveaux modèles du continu est une marque d'objet "au-delà" du et-ainsi-de-suite de l'énumération des entiers "naïfs", "effectifs", "constructifs" [selon qu'on emploie un langage intuitionniste, para-informatique, ou logique]. Ce statut réalise donc un certain type de transcendance à l'égard de ce que nous appelons *discret théorique* dans notre thèse[11], à savoir le discret d'une suite inépuisable de termes[12] ; et la restitution de beaucoup (si l'on veut, la totalité) des propriétés du continu classique est manifestement liée à ce type de transcendance. Bien entendu, le changement est comme nous l'avons déjà laissé entendre que cet effet de transcendance n'est plus en correspondance avec un genre de totalité (une ensemblisation) douée d'une cardinalité nouvellement grande. A la place de cet écart ensembliste-quantitatif, vient l'écart entre le fini formel, défini et garanti par un mode réglé de traitement - celui qui s'attribue à ω - et le fini de l'effectuable, celui qui prend sa place dans l'énumération jamais achevée 0,1, 2, ... : écart qui se dramatise comme transcendance du premier sur l'ouverture même associée au second, sur le "discret théorique" donc, avec lequel s'identifiait classiquement le discret dénombrable de **N** et **Z**.

Comment faut-il alors qualifier philosophiquement ce nouveau type de transcendance? L'observation qui nous paraît s'imposer est la suivante : l'au-delà de ω à l'égard de la suite 0,1, 2, ... est *temporel*, alors que l'au-delà de **R** à l'égard de **N** dans le modèle continu est spatial. **R** est le *plein* spatial submergeant le squelette de **N**, et les constructions de **Q** puis de **R** par les suites de Cauchy racontent la façon globale d'obtenir ce plein en "étoffant" le squelette. A l'inverse, ω est placé originairement dans un modèle de l'arithmétique, soit dans un ensemble ordonné "plus loin que" toute énumération ; mais l'énumération étant un procès, ce *plus loin que* est en fait un *après*. D'ailleurs ω dans la tradition notationnelle de la théorie des ensembles, est le nom *ordinal* de **N**, et ce n'est sûrement pas pour rien que Nelson, Reeb et Harthong privilégient le choix d'un tel nom pour désigner un "premier" entier non standard qu'on se donne. On peut aussi penser au "je suis l'alpha et l'omega" de l'Apocalypse ; ici cependant ω est non pas *la* fin d'une histoire *finie*, mais *un* après d'une histoire *infinie*.

---

11 *Le Continu et le Discret*, soutenue à Strasbourg en Octobre 1986.

12 C'est donc la même idée de supplément de transcendance par rapport à l'infini potentiel-dénombrable que dans Cantor.

Dans notre article *Le Potentiel et le Virtuel* [13], nous avons essayé d'insister sur le fait que, en partie depuis la critique intuitionniste et grâce à elle, mais aussi sous l'effet de tout le travail contemporain de la logique et de l'informatique, et de la mathématique finitiste-discrète en général, l'ouverture de la suite naïve des entiers est associée à cette nuance du concept modal de possibilité que nous appelons le *potentiel* : ce qui sera le cas dans un futur (idéalisé, mais pris comme futur tout de même), par opposition au *virtuel*, qui n'est pas le cas et ne le sera jamais, soit qui est seulement le cas dans une réalité parallèle (le virtuel est ce que Diodore Chronos niait). Etant au-delà de tout le potentiel, ω ne peut être qu'un nombre virtuel certes, mais formellement, il s'ajoute au potentiel épuisé dans ce qui est encore un "temps" discret (un bon ordre). Le type de transcendance de ω sur le discret théorique est donc complexe, à la fois temporel (ω est après) et modal-ontique (ω est virtuel alors que les nombres standard sont potentiels). Dans le modèle classique, le clivage virtuel/potentiel se superpose au clivage infini/fini plutôt qu'au clivage continu/discret : **N** est déjà - comme totalité - un référent virtuel, tout autant que **R** ; Hilbert a décrit de façon aussi claire que souhaitable comment l'adjonction des totalités infinies était passage au virtuel dans notre langage, au fictif et au non sémantique (inhaltlos) dans le sien.

En résumé, la nouvelle approche du continu relie la transcendance de ce dernier sur le discret théorique non plus à l'espace mais au temps, et la connecte nouvellement avec la distinction potentiel/virtuel.

Ce commentaire philosophique de la nouvelle approche se laisse prolonger à la question de la *connexité* : nous avons dit, certes, que la propriété de *connexité* comme propriété acquise n'était plus au centre de la nouvelle représentation du continu. Mais en fait, comme nous l'avons dit également, les entiers non standard disponibles permettent de saturer toujours plus loin la droite, par rapport à des ordres de discrétion du modèle eux-mêmes déjà en excès sur toute assignation numérique effective de l'écart entre deux points contigus. En dépit donc du caractère discret dans l'absolu des modèles temporairement adoptés, le nouveau discours dispose en fait d'une connexité potentielle d'une part, d'approximation théoriquement suffisantes de la connexité d'autre part. Ces concepts de connexité potentielle ou de connexité suffisante se distinguent certes de celui classique d'une connexité acquise dans le virtuel par l'objet fictif **R**, mais le thème de la connexité, le fait que le continu bouche ses trous, ses méta-trous et au-delà, jusqu'à la "complétude" qui le caractérise, ne sont pas perdus. On les reprend ou les regagne dans un registre temporel. L'au-delà ou l'après l'énumération naïve permet, par passage à l'inverse, la résorption de tout ce qui reste de la division à l'infini du substrat (que nous pouvons ici poser comme ni temporel, ni spatial), puisqu'il permet en fait de diviser "après" l'écoulement infini du temps, ce qui dans le cas du temps lui-même, voudra dire rétracter la durée sur elle-même plus que selon toute procédure effective. Cette description sommaire d'une connexité potentielle du continu, "vraie" dans le registre temporel et pas dans le registre spatial, nous paraît être ce que madame Peiffer trouve chez Veronese dans son article *L'Infini relatif chez Veronese et Natorp* [14].

I.c Le continu et la possibilité de la discontinuité

I.c.1. Importance de ce trait dans le dispositif classique

Donc la prise en vue du remplacement de l'espace par le temps dans le rôle d'intuition ou de forme fondatrice pour le continu nous permet de comprendre la nouvelle approche comme en un certain sens prolongation, assomption de la précédente (celle qui prévaut aujourd'hui encore, en fait, et n'est "révolue" que dans l'"épistémologie-fiction" à laquelle nous nous livrons) sur les deux points essentiels que sont la transcendance du continu sur le discret théorique et la connexité. Mais nous pouvons encore approfondir la compréhension de la "continuité" (!) entre les deux approches du continu ici discutées en

---

[13] in *L'Analyse non standard, Recherches historiques et philosophiques*, Strasbourg, (1986 I.R.M.A.).

[14] in *L'Analyse non standard, Recherches historiques et philosophiques*, Strasbourg, (1986 I.R.M.A.).

accordant l'importance qu'il mérite au thème de la *discontinuité*. A la fois l'histoire des mathématiques et l'expérience de l'enseignement des mathématiques nous enseignent en effet que la "première" approche de la notion de fonction numérique ne "prévoit" pas, en quelque sorte, la discontinuité en un point comme une possibilité. Ce qui s'est notamment fixé conceptuellement, de Frege à Cantor, c'est une représentation des "ensembles" de nombres et solidairement des objets fonctionnels dans leur pluralité a priori en regard de laquelle la discontinuité d'une fonction numérique en un point est tout d'abord rigoureusement définissable, ensuite "infiniment probable" pour autant qu'on tire au hasard le graphe définissant la fonction comme ensemble. C'est en effet la propriété de continuité de **f** en x_0, qui apparaît, sous la direction de ces concepts désormais régulateurs, comme n'ayant aucune raison d'être satisfaite "sauf exception". Et ceci bien que, naturellement, en raison des "bonnes propriétés" de la topologie de **R**, la quasi-totalité des fonctions naturellement définissables en termes de la structure de corps soient continues partout ou presque partout : ce faux paradoxe est une difficulté connue que rencontrent les enseignants qui ont charge d'exposer la notion de continuité à des esprits ingénus ; et comme nous le disions, c'est bien normal, puisque l'histoire nous enseigne qu'il n'a pas été du tout immédiat, même alors qu'on usait du calcul différentiel, d'arriver aux représentations régulatrices "libérant" la *possibilité de la discontinuité*. Le simple exemple de Lagrange introduisant la considération de l'analyticité des fonctions, mais la concevant alors comme propriété de *toute* fonction, l'illustre de manière criante.

Il est clair en effet que cette possibilité est liée aux présuppositions fondamentales constituant l'identité du modèle cantorien du continu. Elle y est liée conceptuellement, puisque l'infinie variété des fonctions non continues résulte de la présupposition concernant la cardinalité et la connexité de tout intervalle ouvert de **R** d'une part, de la réitération de l'argument de transcendance de cardinalité au sujet de F (**R** , **R**) d'autre part. A l'énorme infinité des "approches" possibles en x_0 dans le substrat **R** correspond nécessairement, dans la représentation cantorienne, une infinité encore plus énorme de fonctions à valeurs réelles. Cette variété ne donnant matière à la notion de discontinuité qu'en raison de la non discrétion radicale du support (en l'occurrence, sa connexité ; mais la densité serait suffisante ici) : si le support était discret, les multiples fonctions possibles ne se distingueraient pas les unes des autres selon le critère de "continuité". En d'autres termes, comme nous l'avons dit dans notre article *Continu et Discret* [15], l'acception *adjectivale* du mot continu (fonction continue, discontinue) est dépendante de son acception *substantive* [16]. Il est d'ailleurs possible d'illustrer ce point en présentant l'exemple suivant de fonction :

> sur **R**, on définit la relation de congruence modulo **Q**
> $x \mathcal{R} y$ ssi $y-x \in \mathbf{Q}$
> on s'intéresse ensuite au quotient $\mathbf{R}/\mathcal{R}$; chaque classe est de la forme x+**Q**, donc équipotente à **Q** (dénombrable) ; l'union disjointe des classes devant donner **R**, le cardinal de ce quotient est strictement plus que $\aleph_0$, et inférieur ou égal à $\aleph_1$; en se référant à l'hypothèse du continu, ce cardinal est donc $\aleph_1$; il s'ensuit qu'on peut composer à gauche la surjection canonique $x \mapsto x+\mathbf{Q}$ par une bijection à valeurs dans **R** ; l'application obtenue est une surjection de **R** dans **R** qui prend toute valeur sur un ensemble translaté de **Q**, donc aussi près que l'on veut de tout point ; cette application est par suite partout discontinue ; on voit bien sur cet exemple comment les présupposés ensemblistes (axiome du choix, propriété des cardinaux, hypothèse du continu) permettent la fabrication de l'objet exceptionnellement discontinu.

Que le continu cantorien soit, par une dimension essentielle de lui-même, théâtre de la discontinuité possible, c'est ce que nous confirment deux sortes de données,

[15] in *Encyclopaedia Universalis*, Paris (1985), vol. 5, 416-420.

[16] Bien entendu, dans la perspective de la topologie générale, on garde la dépendance (le concept d'espace topologique est premier par rapport à celui d'application continue), mais on généralise la notion à des cas où la représentation paradigmatique de la continuité et de la discontinuité "née" dans le contexte de **R** se trivialise, ou perd tout ou partie de sa signification : ainsi toute fonction sur un espace discret est continue (mais c'est une autre façon de dire que la distinction, et donc la notion, se sont volatilisées).

positives et négatives :

- que l'époque du développement de l'analyse moderne dans le cadre cantorien ait aussi été celle de la "découverte" de toutes sortes de fonctions "pathologiques" auxquelles manquaient des propriétés de régularité qu'on eût d'abord regardées comme inévitables : en les découvrant, on mettait en œuvre les procédés ensemblistes de construction non constructive qui rendaient patente la multiplicité des irrégularités concevables.

- que la grande réaction critique contre cette mathématique, celle de l'intuitionnisme brouwerien, ait dégagé un concept concurrent du continu linéaire et des "fonctions" tel que, précisément, toute fonction correctement définie sur [0,1] était uniformément continue. En retirant au continu sa *spatialité* (la transcendance de cardinalité et la connexité qui lui sont attribuées en tant que référent virtuel par le point de vue cantorien), en évinçant les procédés non constructifs de génération de fonction, Brouwer supprimait aussi la *discontinuité* comme thème d'investigation possible. La fonction partie entière est pour lui mal définie, parce que je ne puis pas à partir de la seule donnée constructive d'un développement décimal illimité 0,..... décider de manière *effective* si ce nombre est nul ou non (cf. les contre-exemples classiques exhibés par Brouwer).

I.c.2 Perdurance de ce trait dans l'approche non standard

Qu'en est-il dans la nouvelle approche du continu sous ce rapport? Il est tout à fait symptomatique qu'elle conserve le concept de fonction discontinue. Donnons en un exemple dans le cadre harthongien. Une fonction f de **Z** dans **Q** est dite continue si elle est constante (d'ombre[17] constante plutôt) sur les réels (donc $x \cong y \Rightarrow {}^0f(x)={}^0f(y)$). Mais Harthong s'intéresse à la propriété plus faible et "physiquement" plus importante de *moyennisabilité* en un point :

f moyennisable en k ssi {la moyenne des f(k) pour $k \in [k-\alpha\ k+\alpha]$ pour tout α infiniment proche de zéro *assez grand* a une ombre indépendante du choix de α}. Rappelons que le halo de zéro est constitué des entiers α t.q. $\forall^{st} n\ n|\alpha| \leq \omega$, c'est à dire, en sus de Z_{st}, de toute sorte d'entiers infiniment grands, comme $\sqrt{\omega}$.

Cette définition permet de définir des valeurs moyennes, pour une fonction moyennisable, en les divers points de **Z** (c'est plus fin que sur **R**).

En particulier soit la fonction f définie par

$$f(k) = \begin{cases} 0 \text{ si } k<0 \\ 1 \text{ si } k\geq 0 \end{cases}$$

Elle est moyennisable en dehors du halo de zéro parce que constante. En 0 lui-même sa moyenne se calcule comme suit :

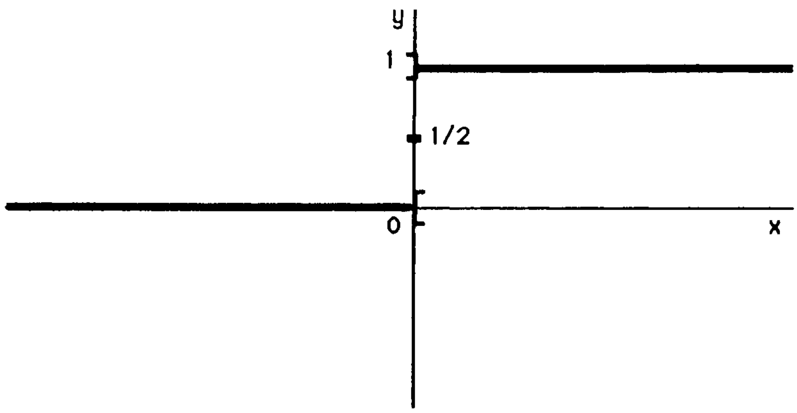
$$\text{pour tout } \alpha \text{ dans Z moyenne} = \frac{1}{2\alpha+1} \sum_{j=-\alpha}^{j=\alpha} f(j) = \frac{\alpha+1}{2\alpha+1}$$

ce qui fait $\frac{1}{2}$ si $\alpha >> 0$ (comme cela finit par se produire loin de 0 dans son halo).

En β du halo de zéro la moyenne varie selon que α est pris plus petit ou plus grand que $|\beta|$, et ne devient $\frac{1}{2}$ que pour un choix beaucoup plus grand que $|\beta|$ de l'infiniment petit α. Donc le graphe correspondant à la moyenne est celui d'une fonction

[17] L'ombre d'un rationnel limité est par définition le réel (la classe d'équivalence) auquel il appartient ; on note ${}^0r$ l'ombre de r.

discontinue classique :



En conservant l'arithmétique formelle, Harthong, - et tous les non standardistes procèdent de la sorte - sauve la possibilité d'avoir des fonctions non naïves, d'esprit "finitiste", mais ne satisfaisant pas aux exigences de déterminabilité "naïve" de l'image ; cette condition, jointe à la qualité de connexité potentielle vraie du substrat, permet la récupération de la problématique classique de la discontinuité, et même, comme en témoignent, nous l'avons signalé, les travaux strasbourgeois sur les canards et l'étude non standard des processus stochastiques par Nelson, une considération plus fine des événements bigarrés manifestant de la discontinuité à tel ou tel niveau (le "plus fin" résultant ici de la loisibilité de formaliser beaucoup plus aisément[18] les ordres de grandeur entrant en jeu dans leurs interrelations).

I.c.3 Orientations différentes des discours non standard et classiques sur la discontinuité

Si on nous accorde qu'il y a, au niveau de cette question de la discontinuité, assomption de l'héritage par la nouvelle approche du continu, on sera peut-être intéressé par la remarque complémentaire qui suit, et qui vise à manifester, au sein de cette convergence, une divergence de nouveau.

Comment l'acquisition de la multiplicité infinie des comportements irréguliers, parmi lesquels les comportements "continus" apparaissaient comme "rares", a-t-elle été en fait exploitée par la "grande" mathématique de ce siècle, notamment celle de l'après-guerre? Pour ce que nous en connaissons, essentiellement comme le prétexte à des "programmes de recherche" de classification, visant à faire émerger, parmi d'énormes paquets d'objets plus ou moins complexes, paramétrés au moins par le continu des nombres réels, des grandes classes auxquelles soient attachés des invariants algébriques ou arithmétiques. Le programme consiste en quelque sorte à "dominer" au sens d'une classification la diversité que les présupposés cantoriens ont mis en position de "fait" défiant la connaissance mathématique. Puisque, dans le domaine de l'analyse au sens le plus large, cette diversité est liée en général au continu, et puisque la classification a pour modèle idéal le rangement dans des "cases" bien isolées les unes des autres, on peut dire que cette mathématique s'est souvent donné comme tâche de faire advenir du discret dans un domaine préalablement mis en scène comme continu.

On peut citer comme exemple de ces sortes de démarches, en puisant à dessein parmi ce qui nous semble être une culture mathématique non exagérément spécialisée, les théories de l'homologie et de l'homotopie, premiers développements de la discipline topologie algébrique : celles-ci, c'est clair, associent des objets algébriques à des espaces topologiques en procédant à de vastes "assimilations" (= en quotientant) corrélées avec l'organisation de structures algébriques adéquates au sein de la multiplicité cantoriennement considérable des lacets ou des q-simplexes singuliers à valeurs dans l'espace, pour toutes les valeurs possibles de q.

[18] Elémentairement, plutôt que fonctionnellement.

Plus caractéristique encore à nos yeux est la fameuse "théorie des catastrophes" de R. Thom. L'objet qu'on se donne à étudier, au départ, est l'ensemble des germes de fonctions C^∞ *singuliers* sur $\mathbf{R}^n$ en 0 disons. La propriété de singularité, même si elle s'attribue à des fonctions C^∞, est en elle-même une propriété de discontinuité, si l'on veut bien voir que la maximalité du rang de la différentielle se conserve au voisinage d'un point où elle est vraie, si bien que le rang de la différentielle est localement continu en les points réguliers, et les points singuliers sont ceux en lesquels ce même rang est possiblement discontinu. On peut donc dire que le regard de la théorie de Thom est posé sur une multiplicité d'objets attestant la discontinuité. Cette multiplicité d'objets est cependant la pré-image par l'application jet-d'ordre-1 d'une sous-variété de la variété des jets, et peut se voir, d'autre part, en revenant des germes aux fonctions, dans la variété de dimension infinie ("de Fréchet") des fonctions C^∞ sur $\mathbf{R}^n$. L'idée régulatrice concevant cet objet comme apparenté aux substrats continus de la géométrie usuelle peut donc guider l'enquête, ce qui se traduit entre autre choses par le recours à des considérations de *transversalité* . Le théorème de classification des singularités élémentaires découpe dans cette grosse entité des strates, repérant en général les singularités par un certain nombre d'entiers stratégiques. Pour nous, ce qui importe est de relever le type d'accomplissement dont il s'agit, et qui consiste à dégager, parmi la multiplicité - où le continu est impliqué - des comportements discontinus, des classes dont les identités soient saisissables par des moyens discrets (ici au moyen des codimensions, corangs ... qui leur sont associés).

En regard de ce fonctionnement royal, la nouvelle approche du continu autorise semble-t-il une autre politique. Cependant, il faut d'abord dire que ses propriétés de conservativité logico-mathématique la rendent a priori capable de participer aux programmes de recherche de classification. Par certains aspects, la théorie des canards peut d'ailleurs être envisagée comme contribution à ces programmes, et tout aussi bien les travaux déjà cités de Nelson.

Mais il y a aussi, on le sent, une autre dimension : la "discontinuité', la diversité des comportements discontinus, devraient pouvoir être directement produits et décrits numériquement avec les moyens d'expression algébrique de l'infiniment petit dans ses tailles diverses dont dispose le non standard. On aurait donc, en ce sens, des théories qui "dévoilent" numériquement les comportements discontinus dans leur diversité, et qui du même coup "présentent" arithmétiquement la richesse du "continu fonctionnel" plutôt qu'ils ne travaillent à réduire en le classifiant ce dernier après se l'être donné comme totalité problématique. Comme, dans la nouvelle approche, on est en quelque sorte toujours "en-train-de" pénétrer le continu au fur et à mesure que l'on prend en compte les entiers non standard pertinents, on peut s'attendre à assister pareillement à la révélation "effective" des discontinuités de l'environnement fonctionnel de proche en proche (discontinuités qui peuplent un continu de second ordre des fonctions, comme en théorie des catastrophes), plutôt qu'à creuser parmi leur totalité disponible les cases d'une saisie classifiante. C'est peut-être une telle orientation qui s'annonce avec ce que nous avons dénommé plus haut *nouvelle investigation du continu* selon l'ANS, en citant quelques exemples.

Cette différence répercute et approfondit, c'est clair, celle qui sépare la prévalence de la représentation spatiale dans le modèle classique de la prévalence de la représentation temporelle dans le nouveau modèle.

En venant à nous poser cette question du statut de la discontinuité en fonction de la représentation englobante du continu comme substrat, nous n'avons pu éviter d'employer un langage *modal* , nous avons tout naturellement décrit le substrat continu comme un réservoir de *possibilités* , rendant à leur tour possibles, sous réserve d'un second choix parmi un éventail de possibilités co-déterminé par l'ensemble but, une mutiplicité de fonctions "généralement" discontinues. L'image du continu comme champ de ou pour des variations *possibles* s'est spontanément imposée, comme elle le fait d'ailleurs dans l'esprit du mathématicien professionnel, croyons-nous pouvoir dire, ne serait-ce que dans la lecture des quantificateurs existentiels subordonnés, omniprésents en analyse (pour tout ... *il est possible de trouver* un ...).

Comme nous avons essayé de le montrer dans un autre travail[19], c'est la question de l'infini mathématique en général qui possède une relevance modale, que le débat Brouwer-Hilbert a fort nettement mise en évidence. Mais nous voudrions ici nous attacher aux implications particulières de cette dimension modale du problème de l'infini dans le cas du continu : nous croyons qu'une valorisation modale spécifique du continu intervient dans le concept prédominant de la necessité physique. Nous voudrions maintenant aborder ce point, en nous référant à Montague et à Kant, et ce sera notre seconde façon d'évoquer la richesse actuelle de la problématique du continu.

II. Le Continu et le nécessaire

II.a Kant, Heidegger et l'interprétation spatio-temporelle de la modalité

On sait que Kant a inclu dans sa *Critique de la Raison pure* une réfutation de la preuve ontologique de l'existence de Dieu, et que cette réfutation consiste à faire valoir l'hétérogénéité fondamentale de la "position" avec toute détermination conceptuelle. "Etre n'est évidemment pas un prédicat réel", dit Kant, ce qui signifie : "Etre" veut dire la position du déterminé dans le champ de l'existence, et non pas une détermination conceptuelle de plus concourant à la perfection conceptuelle. Mais la *position* , pour Kant, l'entrée dans le champ de l'existence, est position (dé-position?) *en un lieu et en une date* , i.e. dans l'espace et dans le temps. En particulier, deux déterminés identiques selon le concept peuvent être distincts dans l'existence, le principe leibnizien des indiscernables est mis en défaut, puisqu'ils peuvent différer par le lieu et la date seulement, une telle distinction ne comptant alors pas comme conceptuelle : ainsi, la répétition, comme l'a remarqué en son temps G. Deleuze[20], est une notion non contradictoire grâce à l'extériorité de l'espace et du temps relativement à l'ordre du concept.

Pour nous, ce qui importe, c'est cette "équivalence" profonde entre "être" et "être en un lieu et en une date". Heidegger a vu dans cette équivalence, qu'il n'attribue cependant pas à Kant, en dépit de l'étude fort consciencieuse de ce dernier à laquelle il s'est livré, le secret de toute l'ontologie de la science physique : il interprète le virage à la science (dans *Sein und Zeit* , ou dans les écrits sur Kant) comme le moment où un projet élabore la constitution d'être d'une région de l'étant, moment qu'il appelle celui de l'*objectivation* ; et il donne comme exemple canonique la science galiléenne, qui s'est fondée sur un projet mathématique de la nature comme système ramené à l'espace et au temps.

On peut donner acte de la justesse de cette description à Heidegger, mais il nous semble qu'il n'a pas clairement vu que ce "filtrage par l'espace et le temps" était interprétation de la *modalité* à laquelle l'étant est sujet plutôt que de l'étant lui-même : tel est le sens qu'il eût pourtant du donner à la locution énigmatique "élaboration de la constitution d'être".

Selon nous en effet, tout le travail de Heidegger sur le verbe être, y compris le travail de la "seconde époque" qui délaisse le privilège métaphysique de la problématique de la vérité de l'étant, pour se traduire devant quelque chose comme la "donation", le donner de la donation, est invinciblement attiré par le registre modal, en tant que c'est dans ce registre seulement que la parole heideggerienne fait sens. Oublier ce qui est donné au profit de la donation, cela ne peut pas aller plus loin que "faire face" à la contingence de la donation par rapport au donné : la donation affecte la pensée plus et autrement que comme donné, la donation arrive, possède son style, sa dimension, l'événement de la présence du donné présuppose la donation, mais ne la saisit pas, ne la décrit pas, ne la détermine pas. A la fois la donation ouvre une dimension extra-ontique, ne se résoud pas en ensemble de choses, et selon cette dimension elle a sa propre variabilité qui ne doit rien

---

[19] in *Le Potentiel et le Virtuel* , in *L'Analyse non standard, Recherches historiques et philosophiques* , Strasbourg (1986 I.R.M.A.).

[20] *Différence et Répétition* , Paris (1968 PUF), 23-24.

(ou ne devrait rien valoir selon l'exigence maximale adressée par Heidegger) aux prédications possibles de l'étant. La question que réanime Heidegger procède du "Pourquoi-y-a-t-il quelque chose plutôt que rien?", question qui semble interroger la nécessité de l'étant, mais qui en fait la dénonce, la détruit ou la réfute *tant qu'elle se pose* , et fait valoir l'Etre (premier Heidegger) ou la donation (deuxième Heidegger) comme nom de la "dimension de contingence" en amont de l'étant.

Chez Kant, au moins dans la CRP, la dimension de la contingence est celle de l'espace et du temps. A la limite, l'étant est justiciable de sa propre déterminabilité logique selon l'ordre du concept, mais le supplément libre qui le consacre comme étant proprement dit est l'assignation de la date et du lieu, contingente par rapport à cette détermination[21]. Et le système kantien rend manifeste le noyau de ce projet objectivant dont procède en effet toute la science contemporaine : *que le champ de la "possibilité" est identifié à l'espace et au temps* . La science est une investigation de la "réalité" selon ce présupposé concernant la "possibilité". Le concept corrélatif de la nécessité physique est alors ou bien celui de la validité d'une détermination quel que soit le système de dates et de lieux donné au départ, ou bien celui du système des lieux en fonction des dates sous l'hypothèse de la connaissance suffisante de son instantiation initiale.

Il y a donc au moins une articulation entre ces deux dimensions de la nécessité physique : le calcul de l'état final du système en fonction de son état initial présuppose la validité de certaines relations *quel que soit l'état considéré* , c'est-à-dire des *lois* physiques, le plus souvent écrites comme équations différentielles. Mais d'autre part, certains jugements pourront être démontrés vrais dans tous les cas si nous parvenons, connaissant la nécessité de l'évolution, à prouver qu'ils sont vrais à l'issue de toute évolution. Cela fait partie, nous semble-t-il, de l'entendement physique, que de considérer comme nécesssaire ce qui est toujours nécessairement devenu.

L'ensemble de ce "jeu de la nécessité" est ce qu'on appelle généralement le *déterminisme scientifique* , où l'on a seulement tort de voir uniquement un principe de *détermination* , un décret nécessitant, puisqu'aussi bien le champ d'une certaine contingence spatio-temporelle est toujours également ouvert par ce "déterminisme". A la limite, "idéellement" au sens de Kant, ce champ se réduirait à la variabilité des conditions initiales de l'univers, exprimées spatio-temporellement. C'est de cette manière que la modalité physique se distingue profondément de la modalité métaphysique, au sens où les mondes possibles qui mesurent la possibilité physique doivent avoir une identité rapportable à celle du monde réel *dans des termes spatio-temporels* , alors que cette contrainte est supprimée dans le registre métaphysique (et, précisons-le, c'est le registre métaphysique qui habite la langue naturelle).

Cela-dit, le champ de la variabilité spatio-temporelle, dans la pensée physique moderne, est surdéterminé par le continu mathématique, et l'objectivation dont parle Heidegger coïncide avec ce qu'il appelle *paramétrisation* dans *Le Déploiement de la parole* . Paramétrer, c'est pour lui greffer sur le déploiement de la donation (de l'étant) un autre déploiement, non temporel au sens le plus vrai du mot temps, mais plutôt *extensionnel*, qui est celui du nombre logiquement maîtrisé en général si l'on veut, mais qui est essentiellement celui du nombre réel dans la démarche centrale de la "physique moderne".

De la sorte, la variabilité continue du monde se trouve investie de la tâche de "traduire" la variabilité spatio-temporelle à laquelle se résume toute contingence dans cette ontologie (convenons d'appeler ontologie toute assignation thématique du champ du possible). Il n'est pas difficile de donner quelques exemples de cette fonction dévolue au continu réel, et de ce jeu de la nécessité en général : à tout seigneur tout honneur, tout commence avec le concept de vitesse instantanée, comme dérivée de la variable espace relativement à la variable temps. Selon ce premier acquis décisif de la mécanique moderne, la capacité de *devenir* ,sur le plan de la localisation, de chaque entité est traduite comme vecteur dérivé. Devenir, c'est en quelque sorte obéir à un vecteur tangent, si nous sommes dans l'enchaînement de la nécessité, sélectionner un tel vecteur si nous nous situons à l'origine contingente des choses ; et la sélection d'un tel vecteur est sélection

---

[21] en un sens, l'exigence formulée par Heidegger est donc satisfaite chez Kant : la spatio-temporalité n'est à proprement parler pas une propriété de l'étant.

parmi la richesse du continu. On comprend, si nous avons raison de placer la science entière sous cette option ontologique, que la physique tende toujours à se réaliser comme mécanique, et que les grandes mécaniques soient les grandes époques de son histoire.

La mécanique hamiltonienne, très clairement, ne consiste en rien autre chose qu'en une présentation de la nécessité et de la possibilité mécanique de cette sorte, le principe de moindre action étant le grand présupposé nécessaire (indépendant de l'espace et du temps) permettant la sélection parmi les trajectoires de l'espace des phases. La mécanique quantique se situe sur le même terrain, s'il est vrai que l'équation de Schrödinger exprime la nécessité du devenir d'un possible identifié comme fonction d'onde, c'est-à-dire encore comme entité spatio-temporelle, mathématiquement produite à partir du continu. Certes, le point de vue "mécanique ondulatoire" n'est, dira-t-on, pas obligatoire : mais même si le champ des possibilités est considéré comme un espace de Hilbert a priori non "fonctionnel", on retrouve cette nature continue des états comme possibilités, soit dès lors qu'on prend une base, soit dès lors qu'on réinterprète l'état en termes de la fonction de probabilité qu'il assigne aux diverse propositions (sous-espaces fermés) ; nous sommes loin de pouvoir parler comme un expert de cette question, mais, jusqu'à plus ample informé, il nous semble que ces liens du formalisme et de son visage ordinaire avec le continu ne sont pas éliminables. Si nous voyons juste, le fameux indéterminisme de la mécanique quantique doit peut-être être compris comme un compromis cohérent avec la "tension modale" qui agite la physique : à la fois, elle décrit toute évolution comme nécessaire, et elle présuppose toujours la contingence spatio-temporelle de données initiales. En donnant aux états le statut de fonctions, à signification probabiliste, elle met la contingence de l'objet "à chaque instant", au lieu que cette contingence soit renvoyée à Dieu et l'origine du monde ; la mécanique est nécessaire, c'est le "réel" comme "état" qui est contingent ; à cela près que dans les conditions macroscopiques cette contingence est éventuellement gommée.

II.b Montague et le fondement caché de la nécessité physique

II.b.1 Théories déterministes, prouvablement déterministes : trois théorèmes

Le lien du problème du déterminisme physique avec le continu et la modalité a été vu et réfléchi de façon pénétrante par A. Montague dans son article *Deterministic theories* [22]. Il nous paraît intéressant, à ce stade de notre étude, de commenter systématiquement ce texte.

Le premier geste intellectuel de cet article nous donne déjà une indication importante, et même essentielle, sur le problème dont nous nous emparons ici après lui. Il envisage en effet une formulation de l'hypothèse déterministe immédiatement réfutable (et réfutée par lui). Celle-ci s'énonce :

> "pour tous instants $\mathbf{t_0}$ et $\mathbf{t}$, il y a des énoncés $\phi(\mathbf{t_0})$ et $\phi(\mathbf{t})$, exprimant l'état de l'univers à la date $\mathbf{t_0}$ et $\mathbf{t}$ respectivement, telles que $\phi(\mathbf{t})$ est déductible de $\phi(\mathbf{t_0})$ combinée avec les lois de la mécanique classique."

Et la réfutation suit :

> "il semble inévitable de supposer que si $\mathbf{t}$ et $\mathbf{t_1}$ sont deux instants distincts, et $\phi(\mathbf{t})$ et $\phi(\mathbf{t_1})$ les énoncés exprimant l'état de l'univers en $\mathbf{t}$ et $\mathbf{t_1}$ respectivement, alors $\phi(\mathbf{t})$ et $\phi(\mathbf{t_1})$ sont aussi distincts. Il s'en suit qu'il y a au moins autant d'énoncés qu'il y a d'instants, c'est-à-dire, de nombre réels. Mais il n'y a qu'une quantité dénombrable d'énoncés (dans tout langage standard), et comme Cantor l'a montré, il y a une quantité plus que dénombrable de nombres réels. Mais nous sommes donc arrivés à une contradiction ..."

---

[22] in *Formal Philosophy* , ..., 303-359.

En bref : l'indexation des états de l'univers par le temps interdit à elle seule que la nécessité physique soit celle de la déduction. Ceci en raison de ce que le temps est cardinalement continu. Mais en fait l'allégation $[t_1 \neq t_2 \Rightarrow \phi(t_1) \neq \phi(t_2)]$, incontournable selon Montague, introduit l'idée que le renouvellement du monde est "à la mesure" de la cardinalité du temps, que le monde se montre capable de varier autant que le repère de son horloge. Par conséquent l'obstacle à l'interprétation logique de la nécessité physique est bien ce que nous avons appelé ontologie continuiste de la physique, c'est-à-dire la détermination a priori du possible comme spatio-temporel, id est, continument paramétrable.

C'est pourquoi Montague se rabat sur une autre définition, qui sera cette fois celle d'une *théorie déterministe*. Celle-ci est donnée sous plusieurs formes et motive quelques attendus subtils. La notion de base est à peu de choses près que pour tout couple (S,S') de modèles de la théorie, si $\mathbf{t_0}$ et $\mathbf{t}$ sont des nombres réels, avec $\mathbf{t_0} < \mathbf{t}$, on a

si $\mathbf{St_S(t_0)} = \mathbf{St_{S'}(t_0)}$ alors $\mathbf{St_S(t)} = \mathbf{St_{S'}(t)}$

la notation $\mathbf{St_S(t)}$ désignant génériquement l'état de l'univers à l'instant **t** selon le modèle S [c'est ici la notion de théorie *futuristement déterministe* que nous avons définie].

Par conséquent une théorie est déterministe si les états ultérieurs sont *sémantiquement contraints* par les états initiaux. Il n'y a pas là l'idée de *déduction* des états ultérieurs à partir des états initiaux, mais seulement celle de leur caractère totalement contraints quant à tous les paramètres pris en compte dans toute *réalisation* possible de la théorie. Dans les mécaniques, dont Montague choisit comme exemples la newtonienne et la céleste, ces réalisations sont des assignations de prédicats et de fonctions sur **R** ou des $\mathbf{R^n}$. La nécessité ainsi posée par Montague est donc bien la même que la nôtre : nécessité de l'instantiation future des paramètres a priori ouverts à un champ continu de possibilités. Mais rien ne dit ici sous quelle forme le déterminisme de la théorie nous deviendrait connu, s'incarnerait.

Montague remarque, cela dit, que par rapport à ce critère, la théorie qu'il appelle **PM** (mécanique classique des particules) n'est pas déterministe : cela suppose qu'il en ait mis à plat une formalisation, naturellement. Dans sa formulation, les "constantes élémentaires" de la théorie sont **P, f, m, s, v** et les "constantes abstraites" sont **R, N**, +, ·. Comme on l'aura compris, cette distinction correspond à l'écart entre les deux niveaux "sémantiques" impliqués dans le discours physique : la sémantique orientée sur les "choses", sur les data "observationnels" et la sémantique orientée sur les idéalités mathématiques. Ici **P** est le prédicat "être une particule", **m, s,** et **v** les fonctions masse, position, vitesse, en sorte que **m(x,t), s(x,t), v(x,t)** sont la masse, position, vitesse de la particule à l'instant **t**. Le supplément de sémantique propre à la physique est donc complètement supporté par la prédicat **P**, et conduit du côté "applicatif" aux problèmes de l'identification empirique des particules et de la procédure empirique des mesures des **m(x,t)**.

Les "états" mentionnés dans la définition des théories sont les valeurs des constantes élémentaires dans le modèle, prises à l'instant considéré. La raison pour laquelle **PM** n'est pas déterministe est que pour déterminer l'état du système de particules à l'instant **t** connaissant son état à l'instant $\mathbf{t_0}$, j'ai besoin de connaître non pas seulement le champ des forces à l'instant $\mathbf{t_0}$, mais son évolution ultérieure sur tout l'intervalle $[\mathbf{t_0}\ \mathbf{t}]$: alors seulement, la coïncidence des fonctions accélération attachées à chaque particule permettra de déduire les valeurs de la position et la vitesse. Mais la théorie par elle-même ne fournit pas le moyen de calculer le champ des forces comme fonction du temps à partir des valeurs initiales. Comme le remarque Montague, on pourrait s'attendre à ce que l'adjonction de la loi de gravitation (qui calcule la force en fonction de $\mathbf{\frac{mm'}{r^2}}$) rende la théorie déterministe (c'est-à-dire le passage à la mécanique *céleste*). Montague déclare ne pas savoir prouver que c'est le cas, et se contente de ramener le problème à un énoncé relativement simple sur les sytèmes différentiels. Il est intéressant de remarquer que ce cheminement de pensée est exactement celui de Hegel dans l'Encyclopédie : lui aussi critique la mécanique de $\mathbf{f=m\gamma}$ comme une théorie comprenant la force comme quelque chose de surajouté au réel et à son devenir, et se demande dans quelle mesure la loi de gravitation résorbe cette extériorité[23].

Mais ici, une remarque s'impose : pour "établir" le caractère non déterministe de **PM**, nous avons spontanément laissé de côté le formalisme de la définition [si $St_S(t_0) = St_{S'}(t_0)$ alors $St_S(t) = St_{S'}(t)$] pour nous ramener à un seul modèle, en considérant implicitement que le déterminisme ne pouvait être garanti que par un calcul de $St(t)$ en fonction de $St(t_0)$ (les indices de modèles étant cette fois omis). Comment peut-on formaliser cette intuition du déterminisme?

Il suffit de demander que pour toute fonction δ (tout "observable") intervenant dans la définition de l'état du système, (soit toute "constante élémentaire"), il existe une formule sans constantes (autres que les constantes abstraites du dispositif mathématique de la théorie) calculant la valeur δt en fonction de δt_0 , t_0 et t. Montague écrit : il existe une formule ψ à 4 variables libres au maximum, ne faisant pas intervenir le vocabulaire "physique" (purement "mathématique"), telle que

$$M_T \cup A_T \vdash \{ Rt_0 \wedge R_t \rightarrow [u = \delta t \leftrightarrow \psi(\delta t_0 , t_0 , t, u)] \}$$

Ici M_T est l'ensemble des vérités mathématiques de la théorie, i.e. l'ensemble des formules bâties à partir des constantes abstraites et vraies dans tout modèle standard : c'est donc, en gros, la bibliothèque du savoir mathématique infini en principe accessible au physicien. A_T est l'ensemble des axiomes de la théorie proprement physique, c'est-à-dire gouvernant l'usage des constantes élémentaires. **R** est le prédicat "être un nombre réel". Donc il est requis que δt soit mathématiquement déterminable (cette détermination étant soutenue par une preuve formelle) dans la théorie physique considérée à partir de δt_0 , t_0 et t.

Cette notion de déterminisme est dénommée "déterminisme prouvable" par Montague. Ce dernier démontre alors trois théorèmes fort intéressants :

--1 le caractère "prouvablement déterministe", qui semble a priori plus fort que le caractère déterministe, n'implique pourtant pas ce dernier.

--2 cependant, l'implication est bonne pour une théorie *prédicative* .

--3 mais même pour de telles théories, il y a forcément des théories déterministes qui ne sont pas prouvablement déterministes.

Le point 1 est simplement la conséquence relativement technique du fait que la formule ψ peut fort bien faire dépendre la valeur δt de certaines propriétés du modèle de la théorie, là où la variabilité est possible, soit du côté de l'"univers du discours", gros réservoir où sont à puiser tous les objets dont il est question, y compris les particules, puisque l'étude de Montague se place dans l'hypothèse métaphysique de l'univocité des termes abstraits **R** et **N**. Alors il se peut que δt soit logico-langagièrement déterminé, mais qu'il puisse varier selon les modèles, δt_0 restant constant, en raison de la relativité de la valeur δt à une quantification sur l'"univers du discours". Et Montague donne un exemple.

Mais si la théorie est *prédicative* , alors les quantifications sont toujours relatives à un prédicat "mathématique" interprété de la même façon dans tout modèle, et ce genre de canular diparaît. Le caractère prouvablement déterministe entraîne le caractère déterministe : c'est le point --2.

[23] cf. *Encyclopédie des Sciences philosophiques* , Paris (1967 Vrin), notamment la fin du §261 : "Cette réflexion, étrangère à la notion (*begrifflos*) considère naturellement que les prétendues forces sont *implantées* dans la matière, c'est-à-dire qu'elles lui sont originairement *extérieures* de sorte que cette identité du temps et de l'espace précisément, à laquelle vaguement on pense à propos de la détermination réfléchie de la force et qui constitue véritablement l'essence de la matière, est posée en elle comme une chose *étrangère* et *contingente* , apportée du dehors." [148]. La problématique de la correction de cette extériorité par le concept de l'attraction universelle apparaît dans la suite du texte.

Quant au point --3, il est ramené par Montague à la non définissabilité du prédicat "vrai" sur les nombres de Gödel des formules de l'arithmétique, résultat célèbre de Tarski. En effet, Montague construit une théorie dont la seule observable δ est définie sur **R** et vaut 1 sur les nombres de Gödel des formules vraies, 0 ailleurs : ces propriétés sémantiques de δ peuvent être contraintes par la théorie au moyen d'une liste dénombrable d'axiomes. Or, une telle théorie ne serait prouvablement déterministe que si le prédicat "vrai" était définissable en termes de la somme et du produit.

II.b.2. La "probabilité" a priori des lois physiques

Ces développements théoriques de Montague nous donnent quelques aperçus profonds sur la nécessité physique : bien que cette nécessité soit définie de manière sémantique, en termes de détermination des valeurs de sortie des paramètres, les valeurs d'entrée étant choisies dans un champ de variabilité continu, la science consiste dans l'inscription discursive d'une telle détermination sous forme de loi. Il y aura en effet une procédure de calcul, donc une formule ψ du type indiqué par Montague si l'on formalise, livrant δt en fonction de t_0 , δt_0 , et t. Montague rappelle alors que cette notion de la nécessité ne capture pas toute la nécessité mathématique dès lors que cette dernière s'adresse à des ensembles infinis : il y a des fonctions dont nous regardons les valeurs comme sémantiquement déterminées et que nous ne savons pas restituer linguistiquement à partir des briques fournies par la théorie.

Mais c'est un autre commentaire qui nous vient le plus à l'esprit. Il nous semble qu'à certains égards, toute la "dignité" de la nécessité physique se comprend par rapport à l'écart entre déterminisme prouvable et déterminisme.

Prenons en effet l'exemple le plus banal, celui de la chute des corps. Pour satisfaire à l'exigence du déterminisme, il suffirait que ce soit un fait sémantique que, la position et la vitesse étant déterminées comme d'habitude, il y ait une fonction de **R x R x R x R** dans **R x R** qui à un quadruplet (x_0 , v_0 , t_0 , t) associe le couple (x_t , v_t), les valeurs données par la fonction étant celles-là et pas d'autres dans tout modèle standard de la théorie. Et la fonction pourrait être un animal ensembliste très étrange. Mais la physique cherche et obtient, au contraire, des formules les plus simples possible, qui la situent en permanence dans le champ du déterminisme *prouvable* : dans notre exemple, une formule polynomiale de bas degré.

Si le domaine ontologique d'attribution des valeurs d'entrée était discret, paramétré par **N** disons, les fonctions "exprimant" le déterminisme seraient semi-récursives, ou pire récursives si l'on forçait un peu l'exigence. Les fonctions laissées pour compte par l'exigence du déterminisme s'agrègeraient, certes, déjà en une infinité énorme, puisque les fonctions semi-récursives sont en quantité dénombrable, et N^N a la puissance du continu. On aurait donc déjà une situation de référence où les fonctions admises, attendues, espérées, sont cherchées dans une case beaucoup plus petite que l'ensemble des fonctions possibles (cependant, pour dire cela, notons-le, il faut "posséder" la transcendance de $\aleph_1$ sur $\aleph_0$). Mais ce phénomène est encore accru par l'ontologie continuiste : les fonctions acceptables sont toujours en quantité dénombrable, au sens où on les veut explicitables dans un langage de référence, et l'ensemble des fonctions possibles a une cardinalité de l'ordre de $2^{\aleph_1}$.

Il nous paraît évident que le coefficient de certitude ontologique qui s'attache aux lois de la physique est lié à cette "petitesse" de l'ensemble où les lois sont espérées par rapport à l'ensemble sémantique des "corrélations déterministes" mathématiquement concevables. Cette formulation des choses rend compte de l'intuition quasi-probabiliste qui s'exprime par "ça ne peut pas coïncider avec l'expérience en étant si simple sans être vrai".

II.c Conclusion : le continu et le nécessaire à l'heure de l'ANS

Ce passage par Montague après Kant nous aura donc permis de dégager la fonction ontologique du continu à la fois dans l'ontologie philosophique et l'ontologie physique ou scientifique : le continu, dans sa richesse substantielle, est le réservoir du possible pour la donation, la présentation du phénomène, en tant que ce possible est spatio-temporel ; et la nécessité physique tire son "prestige" cognitif de la faible probabilité des énoncés législatifs qui la disent, non pas seulement faible en regard des expérimentations effectives (comme le dit Popper) mais faible en regard des *data possibles* (et cet aspect met en jeu la nature de l'objectivité mathématique mise en scène par ces énoncés). La "simplicité" qu'on prête aux grandes lois systématiques (aux équations de Maxwell, à $\mathbf{F}=m\gamma$, à l' équation de Schrödinger) provient de la conscience corrélative qu'on a de l'infini numérique des valeurs possibles des paramètres pertinents a priori contrôlé par ces lois, et non pas de la pluralité effective des mesures rapportées, que nous comprenons plutôt comme prélevée sur cet infini.

Mais il se trouve, reconnaissons-le, que la fonction ontologique du continu est mieux remplie par le continu classique de Cantor-Dedekind que par le "nouveau" continu : en effet, le continu classique a pour lui d'être "posé" comme élément appartenant à la réalité virtuelle dont s'occupe la mathématique (la réalité ensembliste). Or le "réservoir des possibles" ne doit-il pas être pensé comme totalité virtuelle, sous peine que la pensée vacille? Le parti-pris de décrire un univers fictif, qui est dans le débat fondationnel le point faible du formalisme hilbertien et post-hilbertien, n'est-il pas le point fort de ce formalisme par rapport à la fonction *ontologique* (au sens que nous avons précisé) du continu? Et, dans la même ligne, la hiérarchie cantorienne des cardinaux ne donne-t-elle pas un contenu à l'intuition de la "faible probabilité" des lois parmi les possibilités sémantiques? Ne serait-on pas conduit à perdre cette hiérarchie si, pratiquant une analyse non standard à la Harthong, et ce avec des convictions quasi-brouweriennes, on tournait complètement le dos aux considérations cantoriennes?

Ce sont de très profondes questions, auxquelles nous ne saurions répondre vraiment pour le moment. Il y a, cependant, trois niveaux de réponse que nous pouvons mentionner, en tant que toute approche plus radicale du problème, à notre avis, devra en tenir compte :

- tout d'abord, IST témoigne de ce que la nouvelle approche peut coexister avec l'ancienne, ou plutôt l'ancienne dans la nouvelle, avec loisibilité de traduction du nouveau discours vers l'ancien chaque fois qu'on le souhaite. Si le langage cantorien était décisivement meilleur pour l'ontologie, il resterait donc toujours possible de le mobiliser à cette fin.

- comme nous l'avons vu, les nouveaux nombres réels conservent dans la nouvelle approche un mode de transcendance sur les nombres du système des entiers. Après tout, la qualité de réservoir des possibles est peut être tout aussi bien "restituée" par un système de rationnels à numérateur et dénominateurs éventuellement hyperfinis que par le **R** classique et ses puissances. Sur ce plan même, on pourrait dire que les entiers non standard sont une meilleure manière de faire place à la modalité du virtuel[24] pour déployer les nombres chargés de paramétrer la contingence des phénomènes. En revanche, aucun argument immédiat ne "rachète" la perte du raisonnement probabiliste.

- mais, par ailleurs, nous avons du côté de la connaissance scientifique des indices de la pertinence de la nouvelle approche. En particulier, l'utilisation probabiliste du continu est la plupart du temps celle d'un instrument d'idéalisation et de simplification pour décrire des faits combinatoires extrêmement complexes portant sur de très grands nombres : on considère des distributions binomiales comme des distributions de Poisson parce que le traitement est plus simple, par exemple. Ce recours au continu comme à un mode de description du discret fin est en fait en geste habituel à toutes sortes de niveaux et dans toutes sorte de branches : dans l'écriture même de beaucoup d'équations différentielles de la physique classique, c'est cette hypothèse là qui porte la pensée

[24] Cf. à nouveau notre article *Le Potentiel et le Virtuel*.

physique et pas celle d'une continuité "en soi" du phénomène ; aujourd'hui, dans le traitement de problèmes informatiques, notamment ceux du parallélisme d'unités extrêmement complexes, on n'hésite pas non plus à "continuiser" pour pouvoir se servir de l'intuition géométrique et du calcul différentiel et intégral. Pour cette autre valeur du continu, non plus "ontologique" mais "modélisante", le rapport des nouveaux modèles de **R** au système discret des entiers est mieux adapté que celui du modèle classique : l'idéalisation que s'autorise le savant est un simple passage à la limite, ou l'assimilation du très grand avec le hors d'atteinte, au lieu d'être un "viol ontologique" des données. Peut-être donc, le nouveau continu est-il adéquat avec une modification du discours de science que certains signes paraissent annoncer.

J.M. Salanskis
CNRS Strasbourg