YVES GAUTHIER

Logique arithmétique

Séminaire de Philosophie et Mathématiques, 1987, fascicule 7
« De l'introduction transfinie à la descente infinie », , p. 1-23
<http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1987___7_A1_0>

<u>LOGIQUE ARITHMETIQUE</u>

De l'induction transfinie à la descente infinie
(ou de Gentzen à Fermat) *

Logique arithmétique signifie arithmétisation de la logique, comme on a dit arithmétisation de l'analyse. Cela veut dire que l'arithmétique est une théorie de la représentation de la logique elle-même définie comme théorie de l'inférence.

C'est donc dire que j'adopte un point de vue anti-frégéen ou anti-logiciste: la logique est représentée dans l'arithmétique qui devient la théorie fondamentale des opérations correspondant aux constantes logiques. Il faut entendre représentation ici dans son sens mathématique usuel, par exemple, la représentation isomorphique (ou homomorphique) du groupe "abstrait" dans un groupe "concret"; cette représentation est "directe" dans le sens où ce sont les opérations arithmétiques qui donnent le sens des constantes logiques. Il ne s'agit pas, comme dans la gödélisation, de représenter l'arithmétique de Peano dans un système formel qu'on arithmétise ensuite, mais de produire une interprétation constructiviste des connecteurs et des quantificateurs dans des domaines arithmétiques.

* Le texte est tiré d'un ouvrage intitulé: <u>Logique arithmétique</u>, qui doit paraître chez Vrin en 1988.

Le programme d'une logique arithmétique s'inscrit dans le dessein général d'une logique interne du discours mathématique: il n'y aurait pas de logique mathématique, mais des logiques des mathématiques qui seraient ordonnées entre elles sans doute mais qui ne seraient pas réductibles à un commun dénominateur, si ce n'est à une logique minimale que nous appelons logique arithmétique. Les structures algébriques, par exemple, n'ont pas la même logique interne que les structures topologiques (dotées d'une logique non-booléenne du deuxième ordre).

J'ai dit que ce programme était anti-logiciste et anti-frégéen: anti-logiciste parce qu'il réduit la logique à l'arithmétique et anti-frégéen parce qu'il s'oppose au conceptualisme frégéen qui fonde la logique dans la théorie abstraite de la proposition et la théorie du nombre dans une doctrine des concepts. La perspective constructiviste défendue ici répugne aux fondements métaphysiques et propose plutôt une démarche concrète intra-mathématique. Mais c'est avec l'arithmétique ensembliste que je voudrais d'abord contraster la logique arithmétique.

En premier lieu, il faut définir l'arithmétique. J'appelle 'arithmétique de Fermat' l'arithmétique ou la théorie des nombres élémentaire sans induction complète (élémentaire a le sens habituel de "sans recours" aux méthodes analytiques ou transcendantes). L'arithmétique de Fermat n'a donc qu'un seul ordinal limite, soit

0. L'arithmétique de Peano (de même que l'arithmétique de Heyting) en a deux au moins, soient 0 et ω, et l'arithmétique de Cantor (ou de Gentzen) en comporte un nombre arbitraire - au moins jusqu'à $\lim \omega = \varepsilon_0$. L'arithmétique de Fermat dans ce sens est la seule arithmétique qui ne soit pas ensembliste, i.e. qui ne fasse pas appel à un ordinal-limite infini - même l'arithmétique récursive de Skolem, de Herbrand ou de Gödel ne saurait s'en passer.

L'induction complète:

$$\forall x\, [\forall y\, (y < x\; Ay) \rightarrow Ax] \rightarrow \forall x\, Ax$$

est déductible du postulat d'induction de Peano.

$$\forall x\, [Ao \wedge \forall x\, (\, Ax \rightarrow A\, Sx)] \rightarrow \forall x\, Ax$$

pour Sx le successeur de x. Les variables $x = \{x, x_1, \ldots, x_n\}$ de la formule A du premier ordre sont remplacées par les sous-ensembles (ou propriétés) X du second ordre.

$$\forall X\, [\, Xo \;\wedge \forall y\, (Xy \rightarrow \; X\, Sy\,)\,] \rightarrow \forall y\, Xy\, ;$$

l'induction transfinie ne fait que substituer des ordinaux aux nombres naturels de l'induction complète.

$$\forall \sigma\, [\, \forall t\, ((\, t < \sigma \rightarrow A\; (\, t\, ,\, x) \rightarrow A\, (\, \sigma\, ,\, x)\,]\, \forall\, \sigma\, A\, (\sigma\, ,\, x\;)$$

où les x sont des variables libres. L'induction transfinie signifie donc l'induction complète jusqu'à $\lim \omega = \varepsilon_0$ dans la hiérarchie suivante:

$$\omega = \;\; \lim \langle\, 0, 1, 2, \; \ldots, n\, \rangle$$

$$\omega . 2 = \lim \langle\, \omega + n\, \rangle$$

$$\omega^2 = \lim \;\langle\, \omega\; .\; n\, \rangle$$

$$\omega^{\omega} = \lim \langle \omega^{n} \rangle$$

$$((\omega)^{\omega})^{\omega} = \lim \langle (\omega^{\omega})^{n} \rangle$$

$$\varepsilon_0 = \lim \langle [((\omega^{\omega})^{\cdots})^{\omega}]^{n} \rangle$$

Chacun des membres de la hiérarchie a pour dernier terme n puisque la hiérarchie est fondée sur la forme normale que Cantor a donnée pour tout ordinal.

$$\xi = \omega^{\beta 1}n1 + \omega^{\beta 2}n2 \ldots \beta_1 > \beta_2 > \ldots > \beta_m \quad \text{et } m, n_1, n_2 \ldots\ldots, n_n$$

sont finis. C'est la deuxième classe de Cantor aussi appelée classe des "ordinaux constructifs" par Kleene et Church; cette classe est, en effet, dénombrable (et récursivement énumérable) au sens de la théorie des ensembles en vertu du terme n, mais n'est pas effectivement énumérable au sens strict, puisqu'on peut trouver un ordinal tel que $\alpha_n \neq \alpha$ pour tous les n; on a qu'à prendre

$$\alpha = \lim \alpha_n, \text{ donc } \alpha_n < \alpha.$$

Je rappelle brièvement ici les origines de la théorie cantorienne des ordinaux transfinis.

Fourier dans sa <u>théorie analytique de la chaleur</u> (1822) a introduit le concept de la représentation d'une fonction f(x) par une série trigonométrique:

$$f(x) = 1/2\, a_0 + \sum_{1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \text{ dans } (-\pi,\pi) \;;$$

le problème, celui de la représentation d'une fonction continue par une série convergente, allait connaître une fortune glorieuse en mathématiques. Dirichlet, Cauchy, Riemann, Hankel, Heine s'y intéressent. C'est le problème hérité de Riemann et posé par Heine qui sera le point de départ des travaux de Cantor sur la question: démontrer que si une fonction f(x) d'une variable réelle x est représentée par une série trigonométrique convergente pour toutes les valeurs de x, alors il n'y a pas d'autre série de la même forme qui converge pour toutes les valeurs de x et représente la fonction f(x). C'est le problème de l'unicité de la représentation ou de la représentation canonique. Cantor obtient sa démonstration en 1871; son idée est de montrer que pour x=0 le coefficients a_n et b_n, arbitrairement petits, sont identiquement nuls sur tous les indices finis n. Mais Cantor ne s'arrête pas là et veut généraliser sa preuve. Aidé par la notion de "condensation des singularités" de Hankel, il obtient le résultat désiré et c'est ici qu'apparaît le concept d'ensemble dérivé de points (exceptionnels ou singuliers) de la première espèce pour n fini. En généralisant, Cantor veut atteindre toutes les espèces, c'est-à-dire une infinité, donc une espèce infinie d'ensembles de points infinis; en d'autres mots des ensembles de points d'ordre arbitraire.

Les suites fondamentales ou les séries élémentaires "Fundamentalreihe" comme il les a d'abord appelées, seront l'instrument essentiel. Une suite fondamentale $(a_1, \ldots, a_n)$ sera définie classiquement comme une suite pour laquelle il existe un entier N tel que pour toute valeur rationnelle positive de ε

$$| a_{n+m} - a_n | < \varepsilon \qquad \forall m \, \forall n > N$$

On voit immédiatement la parenté avec la définition d'une suite de Cauchy. Mais, là où Cauchy et tous les autres voyaient une limite (un nombre réel), Cantor, après avoir dit que ce n'était qu'un symbole, y voit un nombre ordinal. C'est ici précisément que se situe le passage à la transarithmétique: le nombre-limite ou ordinal-limite sera le matériau d'une arithmétique transfinie inventée en substituant un ordinal (en principe fini) à un nombre réel. Ce passage illégitime, Cantor le justifie en quelque sorte par une interprétation géométrique - ce qui deviendra la topologie - des ensembles de points auxquels correspondent des ensembles de nombres (ordinaux). Aussi sa preuve sur l'équivalence (l'équipotence) de tous les continua n-dimensionnels suscitera-t-elle chez lui un détonnant: " Je le vois, mais je ne le crois pas! ".

Brouwer montrera plus tard qu'il n'y a pas d'homéomorphisme entre un espace (ou une variété) n - dimensionnel et un espace n+1 dimensionnel, i.e. la bijection n'est pas continue.

En un sens, la théorie des ensembles de Cantor peut être vue comme une extension de l'analyse classique, une "transarithmétisation" de l'analyse, contraire, dans son esprit, à l'arithmétisation de l'analyse, mais comparable à une autre extension de l'analyse classique, l'analyse non standard qui récupère les infinitésimaux auxquels s'opposait Cantor pour des raisons philosophiques; les ordinaux-limites ("Limeszahlen") sont en effet l'équivalent transfini de limites infinitésimales

$\partial_1+\partial_0 = \partial_1$ qui correspondent symétriquement aux transinfinitésimaux. Ce sont là uniquement deux extensions macro-ensemblistes de l'analyse classique à la Weierstrass par "substantification" de la notion (arithmétique) de limite. Il ne faut pas oublier, en effet, que Weierstrass, qui énonce le premier la notion de limite, le fait dans l'esprit de l'arithmétisation de l'analyse dépendance fonctionnelle des ε-∂)

Mais en donnant une "forme normale" pour tout ordinal

$$\alpha = n_1\omega^{\alpha_1} + n_2\omega^{\alpha_2} + \ldots + n_t\omega^{\alpha_t}$$

où les n sont des entiers, Cantor revenait à une sorte de représentation arithmétique (ou canonique) de tous les ordinaux qui pouvait laisser croire que la hiérarchie transarithmétique était non seulement bien ordonnée, comme tentera de le démontrer Zermelo plus tard, mais qu'elle avait une allure "finie", tout comme la représentation de tout entier par un produit de facteurs premiers. Il n'est pas étonnant qu'un Kronecker, qui travaillait sur l'approximation des réels par des rationnels ou un du Bois-Reymond du point de vue de l'analyse aient senti le subterfuge et dénoncé le stratagème avec vigueur. Dedekind, plus conciliant, dira qu'il ne voit pas la nécessité d'introduire plusieurs ordres d'ensembles itérés (la complétude des réels ou $\mathbb{R}$ au sens de Dedekind ne l'exige pas, elle n'exige que le complété de $\mathbb{Q}$).

Gentzen a invoqué une interprétation potentialiste de la traversée de la totalité infinie des ordinaux $< \varepsilon_0$ pour justifier le recours à l'induction transfinie dans sa preuve de la consistance de la théorie des nombres élémentaire. Remarquons en premier lieu que l'infini potentiel chez Aristote (et Euclide) est défini justement comme intraversable " ἀδιεξίτητος " (<u>Physique</u>, livre III, 203b) parce qu'il y a un "toujours plus" inaccessible. Gentzen renverse ce point de vue dans sa démarche ensembliste, et conjoint accessibilité et totalité: si tous les nombres plus petits qu'un nombre β sont accessibles, alors β est aussi accessible. Remarquons encore l'accent cantorien sur la totalité ou l'ensemble des nombres plus petits qu'un nombre β qui devient par là même accessible. La limite classique est encore une fois évacuée au profit d'un quantificateur de totification ou "totificateur", si l'on veut me pardonner ce néologisme, qui n'a pas de justification, même en mathématiques classiques. Arrêtons-nous à la justification de l'induction transfinie que Takeuti a tenté de donner dans sa <u>Proof Theory.</u> Takeuti part du "Gendankenexperiment" de l'interprétation potentialiste de Gentzen, c'est-à-dire du parcours potentiel d'une totalité <u>infinie</u> ou d'un ensemble infini (d'ordinaux). Takeuti s'inspire de la notion d'accessibilité ("Erreichbarkeit") de Gentzen, mais au lieu de suites strictement croissantes d'ordinaux $\beta_0 < \beta_1 < \ldots < \beta_{\varepsilon_0}$, il introduit des suites strictement décroissantes $\mu > \ldots\ldots > \mu_1 > \mu_0$ pour $\mu = \lim (\omega^{\mu} n)$ et tente de montrer par là que toute suite est finie. Sa méthode est en accord parfait avec l'idée de réduction (des dérivations) que l'on trouve chez Gentzen - toute dérivation est associée à un nombre ordinal et toute réduction d'une dérivation diminue la "hauteur" de l'ordinal correspondant.

Toute suite strictement décroissante est finie en vertu de l'axiome de fondation formulé par Mirimanoff et von Neumann pour la théorie des ensembles.

$$\forall x \, [x \neq \Phi \rightarrow \exists y (y \in x \land y \land x = \Phi)]$$

Malgré son apparente parenté avec le principe de la descente infinie de Fermat (que nous verrons plus loin), la méthode de Takeuti ne produit pas la justification désirée. Pour le voir, définissons la notion d'ordinal uniformément récessible (dans le style de la continuité uniforme):

> Un ordinal μ est uniformément récessible s'il a été démontré que, dans toute suite strictement décroissante, tout μ_n a un récesseur (prédécesseur) immédiat μ_{n-1}

Théorème: ε_0 n'est pas uniformément récessible.

Preuve : la suite des ordinaux de la deuxième classe de nombres de Cantor comporte des points singuliers à chaque ordinal limite de la suite ω, $\omega.2$, ω^2, ω^ω ,..., ε_0; aucun de ces ordinaux n'a de récesseur immédiat.□

La suite des nombres naturels est uniformément récessive à partir d'un n quelconque; c'est le principe d'induction ou de récurrence "naturel". La critique de la notion d'accessibilité ou de récessibilité est valable pour toute théorie ensembliste des ordinaux, qu'elle soit Π^1_2 avec la notion d'échelle ou du second ordre Ω, comme chez un Girard, par exemple. Elle est liée à la critique que l'on peut faire de la logique classique où le quantificateur universel pour la logique des prédicats du premier ordre et l'induction complète pour la théorie des nombres du premier ordre a une fonction implicite de "totification" dans la mesure où le "tous" de la quantification se transforme en un "tout" ensembliste. Gödel a reconnu que déjà le théorème de complétude pour la logique des prédicats du 1er ordre exigeait, selon lui, le point de vue transcendant d'une totalité infinie complétée, c'est-à-dire le point de vue oméga (K. Gödel Complete works, ed. by S. Feferman, Cambridge University Press, London, 1984).

Et Gentzen, selon sa propre analyse, n'a dû recourir à l'induction transfinie que pour justifier l'induction complète (ou infinie). Il serait vain de chercher une justification dans le deuxième théorème d'incomplétude de Gödel sur les preuves de consistance en disant que l'induction complète ne peut se justifier (ou se démontrer) par l'induction complète. L'interprétation "Dialectica" de Gödel propose une autre preuve de consistance par l'induction fonctionnelle sur tous les types finis qui correspond essentiellement à l'induction transfinie. Il y a aussi d'autres preuves équivalentes. Toutes supposent un univers ensembliste qui englobe l'univers arithmétique, quand ce ne serait que par la totalisation opérée par le quantificateur universel et l'induction complète. Cette totalisation ou "totification", comme je l'ai suggéré, caractérise l'arithmétique ensembliste de Frege à Peano et Gentzen (et au-delà jusqu'à aujourd'hui). Comment "désensembler" l'arithmétique et interpréter l'induction tout en la dégageant de la gangue ensembliste? En revenant à Fermat.

L'arithmétique de Fermat se caractérise par la descente infinie et je soutiens que du point de vue métamathématique, c'est-à-dire du point de vue de la théorie des démonstrations, la descente infinie remplit le rôle de l'induction sans pour autant exiger la notion d'ensemble infini. Fermat écrit qu'il a inventé la méthode de la descente infinie ou indéfinie, comme il dit, mais on la trouve déjà "in nuce" chez Euclide. Prenons la proposition 31 du livre VII des Eléments: "Tout nombre composé est divisible par un nombre premier". Il s'agit ici d'une décomposition ou d'une réduction qui ne peut se poursuivre indéfiniment puisque toute suite descendante de nombres naturels est finie. Fermat a utilisé sa méthode, par exemple, pour démontrer l'impossibilité de l'équation diophantienne $x^4 + y^4 = z^2$

qui se ramène à $x^4 + y^4 = z^4$

qui est un cas particulier du dernier théorème de Fermat

$$\forall x \forall y \forall z \; \forall n > 2 \qquad (x^n + y^n \neq z^n)$$

Fermat a donc généralisé une méthode et lui a surtout donné le rôle central en théorie des nombres, rôle qu'elle occupe toujours - on a qu'à songer à son utilisation dans ce qu'on commence d'appeler la géométrie algébrique arithmétique jusque dans la théorie des nombres transcendants (cf. A. Baker <u>Transcendental Number Theory</u> Cambridge University Press ,London and New York 1975). André Weil lui reconnaît une place à part dans l'histoire de la théorie des nombres (cf. André Weil <u>Number Theory</u>, Birkhaüser, Boston-Basel-Stuttgart, 1984). Et si la descente n'est pas toujours effective, son sens réside dans son caractère constructif comme nous allons le voir.

Le principe de la descente infinie peut être énoncé comme suit: si l'existence d'une propriété pour un nombre donné n implique l'existence de cette propriété pour un nombre plus petit quelconque, alors cette propriété est possédée par des nombres toujours plus petits que n, ce qui est impossible puisque toute suite strictement décroissante d'entiers naturels est finie.

Plus succinctement, on a

$$\exists x\,[Ax \wedge \exists y\,(y < x)\,Ay] \rightarrow \text{Ɨ} z\,(z < y)\,Az$$

ou le schéma suivant

$$\begin{array}{ccc} & [\,A(a) \in D_{n-m}\,] & m \geq 1 \\ A(a) \in D_n & A(a) \in D_i & \text{Ɨ}\; i < m \\ \hline & \text{Ɨ} x\, A(x) & \end{array}$$

Ce principe d'induction n'a pas de quantificateur universel, seulement des quantificateurs existentiels et un quantificateur "effini" pour la descente indéfinie; effini (de "ex-finitus") signifie infini potentiel, suite indéfinie ou suite infiniment processive de Brouwer. Une suite effinie est une suite qui a une borne prépositionnelle, par exemple, la suite des nombres naturels a une borne prépositionnelle, soit 0, mais n'a pas de borne post-positionnelle - de notre point de vue constructiviste, il n'y a pas de ω.

Puisque la descente infinie ou indéfinie est impossible - toute suite descendante de nombres naturels doit s'arrêter à la borne prépositionnelle 0 ou 1 de la suite effinie des nombres naturels - on peut ajouter la conclusion suivante à notre principe d'induction effinie.

$$\exists x\{[A x \wedge \exists y(y<x)\ A y] \rightarrow \mathrm{I\!\!E} z(z<y) A z\} \rightarrow \mathrm{I\!\!E}\, x \neg A\, x$$

ou le schéma suivant:

$$\frac{A(a) \in D_n \qquad \begin{array}{ll} [A(a) \in D_{n-m}] & m \geq 1 \\ [A(a) \in D_i] & \mathrm{I\!\!E}\ i < m \\ \mathrm{I\!\!E}\, x A(x) & \end{array}}{\mathrm{I\!\!E}\, x \neg A(x)}$$

ce qui signifie simplement que la propriété (ou l'ensemble de propriétés) postulée pour la descente indéfinie est fausse pour tous les nombres naturels <u>effiniment</u>. Le quantificateur effini de la conclusion ne va pas au-delà de ce qui est contenu dans la quantification des prémisses, c'est l'ascension indéfinie de la suite effinie des nombres naturels. L'arithmétique de Fermat est, dans ce sens, finitaire ou si l'on veut, effinitaire et le postulat d'induction de cette arithmétique est en parfait accord avec l'interprétation potentialiste de l'induction que l'on trouve, par exemple, dans "...l'on pourra..." de Poincaré: "Tous les nombres que l'on pourra inventer un jour ... Et c'est ce "l'on pourra" qui est l'infini" (cf. H. Poincaré "La logique de l'infini" dans <u>Dernières pensées</u>, Paris. 1913).

Pour montrer que l'induction effinie est bien de nature arithmétique, il faut produire un modèle arithmétique du quantificateur effini qu'on formule ainsi:

$$\varphi_M\ (\mathrm{I}x\ A\ x)\ [n \times m \times l \ldots] = 1 \text{ ssi}$$

$$\pi\ A_{n\ldots} \in D_M$$

pour D, un domaine de propriétés pour les formules A et φ_M: Form → (0,1) une fonction d'assignation de procédures de vérification et non de valeurs de vérité; $A_{n\ldots}$ signifie que nous avons une suite effinie de nombres naturels et [n x m x l...] signifie que l'on associe un produit continue de nombres naturels à la formule $\mathrm{I}xAx$ où n, m, l sont des segments initiaux de suites de procédures de vérification. Il est évident que le couplage formules-nombres naturels ou ordinaux est arbitraire, mais il a le sens "direct" d'une correspondance effective. Voyons les autres quantificateurs:

$$\varphi_M\ (\forall\, xA\, x)\ [n \times m \times l\ ] = 1, \text{ ssi}$$

$$\Pi A_n \in D_M.$$

pour le quantificateur universel sur des domaines finis.

$$\varphi_M (\exists x A x) [n + m + l \ldots], \text{ ssi } \Sigma A_n \in D_M$$

pour le quantificateur existentiel avec instances numériques n, m, l...

Pour les autres constantes logiques, le modèle de la négation (ou complémentation) locale et de l'implication locale (cf. Y. Gauthier "A Theory of Local Negation. The Model and some Applications" in <u>Archiv für mathematische logik und Grundlagenforschung</u> 25 (1985), 127-143).

La négation s'exprime

$$\varphi_M (\neg A) [n], \text{ ssi } A \in E^D M$$

où $E^D M$ est l'extérieur du domaine D ou le domaine des énoncés niés; et l'implication a pour forme

$$\varphi_M (A \overset{loc}{\Rightarrow} B) [n^m] = 1, \text{ ssi } A \in D_M \text{ se transforme}$$

exponentiellement en $B \in D_M$ qui signifie que l'exponentiation est la représentation arithmétique de l'implication locale (stricte). Une chaîne d'implications quantifiées peut être représentée, par exemple, par une série de puissances ou par un produit de séries de puissances

$$\sum_0^\infty c_n x^n = (\sum_0^\infty a_n x^n) (\sum_0^\infty b_n x^n)$$

pour $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0$, c'est-à-dire la diagonale ou le produit de Cauchy; cette diagonale, que nous appelons aussi diamorphisme, est constructive dans la mesure où elle ne transcende pas la suite des nombres naturels comme la diagonale de Cantor.

Enfin, la conjonction et la disjonction ont pour formules

$$\varphi_M (A \wedge B) [n \times m] = 1, \text{ ssi } A \in D_M \text{ et } B \in D_M$$

et

$$\varphi_M (A \vee B) [n+m] = 1, \text{ssi } A \in D_M \text{ ou } B \in D_M$$

Le modèle arithmétique n'est pas ensembliste, je le répète, ce n'est pas un modèle de l'arithmétique de Peano où l'on a un ensemble infini, des modèles non standard, une théorie catégorique du second ordre, etc... Si l'on peut parler de modèle non standard, de l'implication, par exemple, c'est uniquement dans le sens où une interprétation non arithmétique définit l'implication comme chemin ou arc dans un espace topologique simplement connexe: c'est là le théorème de représentation qui donne un sens concret à l'interprétation intuitionniste de l'implication comme transformation. Mais si la représentation canonique est du second ordre, l'approximation par les séries de puissances - comme dans le cas de fonctions continues représentées par des séries de puissances - permet d'obtenir un modèle arithmétique du premier ordre qui est constructif (et pas seulement structurel).

Revenons à la descente infinie. Nous avons voulu nous assurer que notre version de l'induction demeurait arithmétique ou fermatienne sans addition d'ordinal-limite. Il n'est pas inutile de remarquer que Gentzen, dans sa preuve de consistance de l'arithmétique, interprète la descente infinie (indéfinie) comme une version de l'induction complète. C'est un abus que la plupart des logiciens et mathématiciens ont commis et j'ai tenté de montrer pour quelles raisons cette vue des choses était erronée ou à tout le moins insatisfaisante.

Il me reste à évaluer les mérites logiques et métalogiques de la descente infinie eu égard à son caractère finitaire. Fermat nous dit qu'il a utilisé sa méthode surtout pour les énoncés négatifs, mais qu'elle est applicable aussi pour les assertions - on peut penser ici qu'il a recours à la double négation, qui est inoffensive dans ce cas, puisque la descente ou l'induction est finie.

Qu'en est-il de la consistance ou de la non-contradiction? Rappelons le voeu de Hilbert: obtenir une preuve de consistance de l'analyse par des moyens finitaires qui sont seuls à garantir la sécurité "Sicherheit". On sait quel prix il a fallu payer pour cette sécurité: c'est une prime transfinie qu'il faut verser. Mais peeut-être est-ce un prix illusoire. La preuve de consistance de l'induction complète, nous l'avons vu, est une preuve "globale". A-t-on besoin d'une telle assurance? Bourbaki soutient que la consistance est une question empirique et qui relève de chaque cas particulier. De même que la preuve de Matijasevič sur l'indécidabilité du 10ième problème de Hilbert - l'existence d'un algorithme de solution pour les équations diophantiennes - n'a pas d'impact sur la solution d'équations diophantiennes particulières, par exemple, le dernier théorème de Fermat, de même, l'existence d'une preuve de consistance transfinie ne garantit en rien la consistance finie, puisque la validité "effinie" ne se réduit pas, d'un point de vue constructiviste, à la validité finie. L'insolubilité du 10ième problème de Hilbert est liée à l'arithmétique ensembliste (la notion de récursivité énumérable), comme la complétude (la notion de validité pour un ensemble infini) et l'incomplétude (par diagonalisation ou diamorphisme cantorien)*. Faudra-t-il produire des versions constructives de ces résultats métalogiques, à la manière des intuitionnistes qui multiplient les variantes du théorème de Bolzano-Weierstrass, par exemple, ou encore de façon plus fondamentale, imiter les preuves élémentaires de Selberg, Erdös, Bombieri pour des théorèmes de la théorie analytique des nombres? La pratique mathématique ici est plus révélatrice que la pratique logique: on sait mieux ce qu'est

* Un diamorphisme de Cantor est défini par

$$\varphi r : r \overset{dia}{\rightarrow} R_{n+1} \quad \text{pour } \varphi : R \rightarrow R^R$$

alors qu'un diamorphisme de Cauchy est défini par

$$\varphi n : n \overset{dia}{\rightarrow} n_n \quad \text{pour } \varphi : N \rightarrow N^N$$

Ce qui nous donne:

$$\varphi_r (n) = \varphi_r (n) + 1$$

et

$$\varphi_n (n) = \varphi_n (n)$$

respectivement pour des diamorphismes sur les entiers.

une preuve élémentaire, parce qu'on sait mieux ce qu'elle ne peut utiliser, les notions analytiques de fonctions entières, limites infinies qu'on remplace par diverses techniques d'approximation, alors que la logique se contente souvent de ne rejeter que le tiers exclu pour les ensembles infinis. Mais le problème est plus profond et relève d'une analyse plus fine de la quantification (et des constantes logiques) et des notions ensemblistes qui ont investi la théorie logique de Frege à Gödel et jusqu'à maintenant. La pratique logicienne s'est toujours intéressée aux solutions globales du problème et il n'est pas étonnant que les résultats métalogiques les plus intéressants soient négatifs, c'est-à-dire des résultats d'indécidabilité. En effet, ces résultats sont invariablement formulés pour un langage si fort ou si riche en ressources ensemblistes que c'est l'incomplétude de la théorie des ensembles ou l'"effinité" du procès itératif de la construction des ensembles qui est la source de toute la problématique: il n'y a pas d'ordinal de tous les ordinaux pas plus qu'il n'y a de cardinal de tous les cardinaux et Cantor disait dans une lettre à Dedekind que la pluralité "Vielheit" de tous les ordinaux Ω était absolument infinie ou inconsistante (cf. G. Cantor <u>Gesammelte Abhandlungen</u>, hrsg. v. E.Zermelo, G. Olms (Hildesheim: 1966), p.445). Mais pourquoi ne pourrait-on appliquer le même raisonnement à tous les ordinaux finis? Simplement, parce qu'on assigne un ordinal, ω, à l'ensemble de tous les ordinaux finis. La suite Ω':

$0, 1, 2, 3, \ldots \omega_0, \omega_0 + 1, \ldots, \gamma, \ldots$ est une suite bien ordonnée avec plus petit ordinal 0 et γ le type ordinal de la suite de tous les ordinaux qui précèdent γ; mais cette suite bien ordonnée devrait avoir comme type ordinal δ plus grand que tous les nombres dans Ω qui doit pourtant comprendre tous les ordinaux, d'où contradiction; Cantor remarque que c'est à partir de $\omega_0 + 1$ que la suite des ordinaux a cette propriété de l'itération transfinie, c'est-à-dire immédiatement après le premier ordinal-limite (sans prédécesseur immédiat) différent de 0. En d'autres termes, il faut un premier ensemble infini d'ordinaux, soit, ω_0 pour obtenir $\omega_0 + 1$. Les types ordinaux finis correspondent aux cardinaux finis, alors que d'innombrables "unzählig" types ordinaux transfinis appartiennent à une même classe de types ordinaux, c'est-à-dire à un seul cardinal (ibid. , p. 298). Mais si un cardinal α détermine une classe de types ordinaux $[\alpha]$, le cardinal α' qui est déterminé par la classe $[\alpha]$ est différent et même plus grand que α en tant qu'il représente un ensemble bien défini dont les éléments sont constitués par l'ensemble des types α qui ont α pour cardinal: d'où la possibilité d'automorphismes autres que l'identité pour les cardinaux transfinis, ce qui correspond à la définition d'un ensemble infini chez Dedekind, c'est-à-dire la bijection avec un sous-ensemble propre: rappelons que Dedekind avait proposé l'ensemble des pensées ("Meine Gedankenwelt") comme modèle d'ensemble infini - Cantor dira que la totalité du pensable "Inbegriff alles Denkbaren" est inconsistante.

Notre analyse a permis de retracer l'origine du mal. Notons que certains logiciens ensemblistes (dont Reinhardt) dans leur élan itératif vont jusqu'à ordonner Ω et poursuivent leur course au-delà $\Omega+1$ etc... Redescendons. La descente infinie est finiment consistante, parce qu'elle est une méthode concrète et qu'elle garantit la consistance effective. Depuis Tarski, on reconnaît qu'il ne peut y avoir de vérité globale dans les langues formalisées; on pourrait penser qu'il n'y a pas de consistance globale et plutôt que de grimper plus haut dans la hiérarchie des ordinaux pour démontrer la consistance de l'analyse, comme Gentzen pensait pouvoir le faire, il vaut sans doute mieux se limiter aux segments initiaux de la suite des nombres naturels. L'existence, récemment découverte, d'énoncés purement arithmétiques , et non de nature logique, qui sont indécidables dans l'arithmétique de Peano (résultats de Paris, Harrington et autres) nous invite à penser que l'arithmétique de Peano, tout comme la théorie axiomatique des ensembles Zermelo-Fraenkel, (résultats de Cohen, Solovay et autres),n'est qu'un cadre formel non seulement incomplet au sens technique du terme, mais aussi au sens informel d'insuffisant. En effet, un système formel "suffisant" doit rendre compte ou représenter adéquatement les énoncés de la théorie formalisée; l'interprétation sémantique ou la théorie des modèles qui fait pendant généralement au système formel "satisfait" habituellement aux visées de la théorie, mais c'est la plupart du temps en recourant à des notions ensemblistes ou autres (catégoriques, par exemple) dont l'indétermination structurelle n'a d'égale que la relativité des modèles qu'elles viennent saturer. Une attitude pragmatique, mieux en accord avec la pratique, met l'accent sur la résolution locale des notions logiques au profit d'une analyse fondationnelle plus critique des démarches mathématiques ou philosophiques générales. Ce que l'on appelait jadis "métaphysique des quantités évanouissantes" (Lagrange) est devenue "métaphysique des mondes possibles" et la logique comme théorie de la vérité formelle invariante voit son domaine se restreindre à la seule logique du premier ordre défini par les propriétés de complétude, compacité et Löwenheim - Skolem (théorème de Lindstrom). Ces propriétés elles-mêmes en disent la nécessaire ouverture sur la sémantique ensembliste (ou sa saturation). Le retour à une métamathématique et à une métalogique non ensembliste exige le renversement de la perspective frégéenne et la mise en question de l'héritage cantorien. Non pas pour les dénoncer, Frege et Cantor, comme pervertisseurs de la jeunesse, mais pour revenir à une théorie logique qui décrit mieux la pratique mathématique pour la critiquer mieux et en montrer à la fois la portée et les limites.

Ce que j'ai appelé l'arithmétique de Fermat ne résout pas tous les problèmes, mais ouvre une voie alternative dans la recherche fondationnnelle (entreprise à la fois logique et mathématique, philosophique et historique). Je n'ai pas pu, dans mon exposé, exploiter la méthode de descente infinie ou indéfinie (ou d'induction effinie, ce qui est la même chose) en logique élémentaire - par analogie avec la théorie des nombres élémentaire. Tableaux sémantiques de Beth, arbres de consistance ou dérivations en déduction naturelle à la Gentzen se prêtent à un traitement fermatien.

Je n'ai voulu que caractériser l'arithmétique fermatienne et la mettre en relief face à l'arithmétique de Peano surtout. Le programme d'une logique arithmétique est inséparable du dessein d'une logique interne du discours mathématique: si l'arithmétique ou théorie des nombres en est une pièce importante, la plus fondamentale peut-être, il importait de dire comment la logique était arithmétisable dans une perspective constructive, c'est-à-dire arithmétique. Et la descente infinie de l'arithmétique de Fermat m'a paru être l'instrument privilégié d'une telle arithmétisation ou constructivisation de la logique.

Yvon Gauthier,

Université de Montréal.