H. SINACEUR

Corps réels clos et analyse non standard

Séminaire de Philosophie et Mathématiques, 1987, fascicule 2
« Corps réels clos et analyse non standard », , p. 1-18
<http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1987___2_A1_0>

CORPS REELS CLOS ET ANALYSE NON STANDARD

On appelle non standard l'analyse qui démontre les résultats de l'analyse réelle classique par d'autres moyens. Celle-ci est basée, comme on sait, sur une définition du concept de limite débarrassée des idées d'infiniment petit et d'infiniment grand. Celle-là construit un cadre qui permet et légitime l'expression directe de ces idées.

Le titre de l'exposé laisse supposer l'existence d'un rapport entre les deux notions qui y sont conjointes. Supposition fondée. Le but de l'exposé est de déterminer ce rapport, et cela semble d'autant plus utile qu'il paraît fréquemment ignoré. Disons, pour commencer, que le second terme du rapport, l'analyse non standard, y apparaît sous un seul biais : celui de son origine. Les questions liées au développement de cette discipline, celles posées par son fondement, sont laissées de côté. Qui dit origine dit aussi qu'il s'agit exclusivement du concept d'Abraham Robinson tel qu'il est créé vers 1960 et qu'il est exposé sous forme didactique d'abord en 1963 dans Introduction to Model Theory and to Metamathematics of Algebra, puis en 1966 dans Non-standard Analysis. Les formes ultérieures de l'analyse non standard, devenue après 1966 une discipline à part entière, ne sont donc pas considérées ici. Du point de vue chronologique, le thème de l'exposé est donc relatif à une partie de l'oeuvre d'A. Robinson située entre 1950 et 1966. Si l'on tient pour significative la date de la première conférence internationale sur l'analyse non standard (Institut de technologie de Californie, Pasadena, 1967), alors on dira que la période concernée est celle de la préhistoire de l'analyse non standard.

I. Le concept de corps réel clos

On doit l'invention de ce concept à un mémoire écrit par Emil Artin et Otto Schreier en juin 1926, publié en 1927 dans le tome 5 des Abhandlungen du séminaire mathématique de Hambourg. Ce mémoire institue une nouvelle théorie mathématique, dite "Algèbre réelle" par ses auteurs, souvent plus connue sous le nom de "théorie de Artin-Schreier" ou de "théorie des corps réels". Le premier exposé didactique s'en trouve, dès 1930, dans la Moderne Algebra de Van der Waerden (I, chap.11). Van der Waerden raconte, du reste, avoir assisté et participé à la fabrication de la théorie au séminaire d'Artin, l'année 1926.

I.1. Quelques définitions ou rappels

Soit K un corps commutatif .

1. K est "réel" ("formellement réel") si et seulement si $-1 \neq \sum_1^n x_i^2$ pour tout n-uplet $(x_1, x_2, \dots x_n)$ d'éléments de K.
Ou si et seulement si $\sum_1^n x_i^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ pour tout i.

2. K est "réel" si et seulement si K est ordonnable, i.e. si et seulement s'il existe une relation d'ordre compatible avec sa structure algébrique de corps.

3. K est ordonné (totalement) si et seulement si

1. Tout élément $a \in K$ est
ou bien = 0, ou bien > 0 ou bien < 0.

2. Si $a > 0$ et $b > 0$, alors
$a+b > 0$ et $a.b. > 0$.

L'ordre est donc déterminé par l'ensemble des éléments "positifs" de K. D'où une présentation ensembliste en usage aujourd'hui :

K est ordonné si et seulement s'il existe un sous-ensemble $P \subset K$ (appelé le "cône positif" de K) tel que :

1. $\mathcal{P} \cup -\mathcal{P} \cup \{0\} = K$.
2. $\mathcal{P} \cap -\mathcal{P} = \phi$.
3. $\mathcal{P} + \mathcal{P} \subset \mathcal{P}$.
4. $\mathcal{P} . \mathcal{P} \subset \mathcal{P}$.

4. Un corps K est "réel clos" si et seulement si

   1. K est "réel",

   2. Aucune extension algébrique de K n'est "réelle".

Exemples : Le corps R des nombres réels, le corps A_R des nombres réels algébriques.

Le corps Q des nombres rationnels est réel mais non réel clos.

5. Dans K réel clos:

   1. Tout élément positif est un carré.

   2. Tout polynôme de degré impair a au moins une racine.

6. Si l'on suppose K ordonné alors la conjonction de 5.1 et 5.2 équivaut à "K réel clos".

7. Si K est réel clos, alors il n'est ordonnable que d'une seule façon.

8. K réel clos $\Longleftrightarrow$ K(i) algébriquement clos.

9. Dans K réel clos sont vrais "les théorèmes de l'algèbre réelle" c'est-à-dire (définition en extension) :

   - le théorème de la valeur intermédiaire (T.V.I.) formulé pour les polynômes à coefficients dans K;

   - et par suite, les théorèmes de Sturm, Rolle, des accroissements finis,etc... formulés pour des polynômes à coefficients dans K.

10. Théorème d'existence et d'unicité de la "clôture réelle" :

Si K est ordonné alors il existe une et - à un isomorphisme près conservant l'ordre - une seule extension algébrique de K, réelle close, dont l'ordre prolonge celui de K.

Exemples : si K est réel clos sa clôture réelle c'est lui-même ; la clôture réelle de Q est A_{R}.

I.2. Quelques commentaires pour marquer un certain nombre d'innovations ou de ruptures

1. Le concept formel de "réel" est défini par une formule algébrique. Cela en fait un concept opératoire. De plus, comme on démontre que la classe des corps réels est exactement celle des corps ordonnables, l'ordre sur un corps est ramené à des questions de calcul. L'intérêt de la définition des corps réels par Artin et Schreier fut immédiatement perçu par les contemporains. Helmut Hasse, par exemple, en témoigne dans son article Die moderne algebraische Methode (1). On dit aussi que Bourbaki fut très impressionné par le caractère algébrique et simple de cette définition.

2. La théorie de Artin-Schreier n'est pas une théorie du corps R des nombres réels mais une théorie de la classe des corps ayant en commun avec R un certain nombre de propriétés. Ce n'est pas la théorie d'un modèle mais la théorie d'une classe de modèles (et bien entendu ces modèles n'ont aucune raison d'être isomorphes). Cette classe a même été délibérément construite, en sorte à être la plus vaste possible ; elle est censée réunir la totalité des modèles répondant à une certaine structure.

(1) Jahresber. deut. Math.-Verein., 39 (1930), 22-34.

Cette façon de faire constitue un exemple de la mutation produite dans le développement de l'algèbre abstraite par l'introduction de la méthode de Steinitz. On sait l'importance de cette mutation du point de vue algébrique ou mathématique général. Il faut aussi marquer le retentissement qu'elle eut sur le développement d'une branche de la logique mathématique : la théorie des modèles. On verra tout à l'heure en quoi elle intéresse la naissance de l'analyse non standard.

3. L'axiome d'Archimède ne fait pas partie des énoncés axiomatiques de cette théorie. Par conséquent les modèles n'en sont pas forcément archimédiens. Depuis les Fondements de la Géométrie de Hilbert est acquise l'indépendance de l'axiome d'Archimède par rapport au reste des axiomes habituellement considérés comme une description adéquate du corps R. Cela garantit logiquement l'existence de systèmes de grandeurs non archimédiens. Mais ce qui est nouveau ici, c'est que si l'axiome d'Archimède n'est pas un axiome de la théorie des corps réels clos sa négation non plus ! L'ensemble des axiomes décrivant les corps réels clos non archimédiens est identique à l'ensemble des axiomes décrivant les corps réels clos archimédiens. Le concept de corps réel clos subsume, sans les opposer de façon exclusive, les deux ordres : archimédien et non archimédien. Mais alors, si l'on veut développer une analyse réelle abstraite, i.e. une analyse relative non pas à R mais à un corps réel clos quelconque, celle-ci ne serait pas forcément archimédienne. La possibilité d'une analyse non standard est de toute évidence inscrite a priori dans la structure de corps réel clos.

4. L'idée d'algèbre réelle est en rupture avec toutes les axiomatiques de R faites antérieurement, par exemple celle de Dedekind (2), celle de Hilbert (3), celles des mathématiciens de l'école algébrique américaine, en particulier de Huntington (4).

(2) Stetigkeit und irrationale Zahlen, 1ère éd. 1872. Traduction française par Judith Milner et Hourya Sinaceur, 1978, La bibliothèque d'Ornicar (n° 12-13 des Analytica), 31 rue de Navarin, Paris.

(3) Fondements de la Géométrie, Paris, Dunod, 1971. « Über den Zahlbegriff. » Jahresber. deut. Math.-Verein. 8 (1900), 180-184.

4) Transactions of the Amer. math. soc. 6 (1905), 17-41.

pour ne citer que des tentatives orientées par l'idéal d'une théorie algébrique de R. Toutes ces axiomatiques comportent un énoncé pour exprimer la "continuité", la connexité, de R, même si ce n'est pas l'axiome d'Archimède. L'axiomatique des corps réels clos n'en comporte pas. Et pourtant on y récupère dans une version algébrique, i.e. formulés et démontrés pour des polynômes, un ensemble de théorèmes vrais dans R : T.V.I., Rolle, Sturm, accroissements finis, qui étaient démontrés, jusque là, pour des fonctions continues.

Tant que l'optique était essentiellement la théorie de R, il n'était pas pensable qu'on pût passer sous silence la connexité de R sans rien perdre des théorèmes de l'analyse classique sur les fonctions réelles de variables réelles. Cela le devient dans l'optique d'une théorie algébrique abstraite dont le corps des nombres réels algébriques, qui n'est pas connexe, est un modèle au même titre que le corps connexe des nombres réels.

Ce résultat ne fut pas sans provoquer une certaine surprise. H. Hasse, par exemple (5), souligne le caractère "singulier" dans l'ensemble des résultats de l'algèbre abstraite de la réussite de Artin-Schreier. Plus tard, André Weil écrivant un compte rendu des Collected Papers de Emil Artin publiés, après la mort de ce dernier, par deux de ses amis ou élèves, S. Lang et J. Tate, note : "il n'était pas du tout évident qu'une théorie impliquant les nombres réels pût être considérée comme faisant partie de l'algèbre abstraite" (6).

(5) Article cité dans la note 1.

(6) Oeuvres scientifiques III, 173-174, Springer-Verlag, 1981.

5. C'est le travail de Tarski sur la complétude de l'algèbre et de la géométrie élémentaires (7) qui a permis de donner un contenu précis à l'expression de Artin-Schreier : "les théorèmes de l'algèbre réelle ". Ce sont les énoncés du premier ordre, ou énoncés "élémentaires", vrais dans un corps réel clos quelconque. L'expression "algèbre réelle" visait donc sans l'atteindre explicitement une catégorie d'énoncés et non tous les énoncés vrais dans R. Dans un bref commentaire, A. Robinson reconnaîtra à Artin-Schreier le mérite d'avoir apporté avec "l'algèbre réelle" un concept de grande valeur heuristique en dépit de l'absence d'une définition exacte qui présuppose des notions logiques (8). De plus, étant donné que pour Artin-Schreier il s'agit de construire la classe la plus large possible de corps vérifiant les théorèmes de l'algèbre réelle, on comprend rétrospectivement qu'ils visaient la construction d'une classe élémentaire au sens défini ultérieurement par Tarski : classe de tous les modèles vérifiant les énoncés d'une théorie donnée (classe fermée pour la relation d'équivalence élémentaire (9) et pour l'opération ultraproduit).

(7) Préparé dans son séminaire de l'Université de Varsovie entre 1926 et 1928, ce mémoire fut rédigé une première fois en 1939, en anglais, pour paraître à Paris, aux éditions Hermann. La guerre en ayant empêché la publication, cette première version ne verra le jour qu'en 1967, toujours à Paris, Institut Blaise Pascal. Une traduction française en est donnée dans Tarski, Logique, Sémantique, Métamathématique, II, Paris, A.Colin, 1974, 203-242. Entre temps une deuxième version, rédigée en collaboration avec Mc Kinsey, formellement différente de la première et augmentée de notes substantielles, paraît aux Etats-Unis en 1948. Une dernière version, avec quelques notes et une préface nouvelles est publiée en 1951, University of California Press, Berkeley and Los Angeles.On trouvera ces différents textes dans A. Tarski, Collected papers 1,2,3,4. Ed. Steven R. Givant -Ralph N. McKenzie. Birkhäuser, 1986.

(8) A.Robinson, "On ordered fields and definite functions", Math. Ann. 130 (1955), 257-271. Ici p. 267. Reproduit dans A. Robinson, Selected Papers I, ed. J.H. Keisler, S. Körner, W.A.J. Luxemburg, A.D. Young, Amsterdam, North-Holland, 1979, 355-369.

(9) On dit que deux modèles sont élémentairement équivalents s'ils vérifient les mêmes énoncés du calcul des prédicats du premier ordre.

6. Artin a fait dès 1924 une étude particulière du corps $A_{\mathbb{R}}$ des nombres réels algébriques (10). Ce n'est pas à partir de résultats connus pour le cas de R, mais à partir de résultats que lui-même dégage pour ce sous-corps de R, que Artin entame le processus de généralisation qui le conduit à la théorie générale des corps réels. En 1924, Artin démontre que le corps de tous les nombres algébriques a un groupe d'automorphismes qui est fini et d'ordre 2, sous la forme suivante:

Tout sous-corps propre K du corps L de tous les nombres algébriques tel que la dimension de L sur K est finie est, en fait, tel que cette dimension est égale à 2 ; i.e. L = K (i) et K est le transformé de $A_{\mathbb{R}}$ par un automorphisme de L.

Cela lui permet d'établir notamment les corollaires suivants:

α) - 1 n'est pas somme de carrés d'éléments de K, pour K vérifiant les hypothèses du théorème.

β) Tout nombre de K est ou un carré ou l'opposé d'un carré.

γ) Toute somme de carrés de K est elle-même un carré dans K.

α) deviendra l'axiome de "réalité" définissant en général un corps réel quelconque (voir ci-dessus I.1, définition 1).

β) et γ) reconnues vraies d'un corps réel clos quelconque serviront à démontrer qu'un corps réel clos n'est ordonnable que d'une façon (ci-dessus I.1, proposition 2).

Donc $A_{\mathbb{R}}(i) = L$.

Artin-Schreier établissent que pour toute paire de corps K, L, tels que K(i) = L, K est réel clos si et seulement si L est algébriquement clos.

Cela est en particulier vrai si K = R et L = C.

(10) "Kennzeichnung des Körpers der reellen algebraischen Zahlen", Abh. math. Sem. Hamb.3 (1924), 319-323. Reproduit dans E.Artin The collected papers, ed. S.Lang -J. Tate, Addison-Wesley Pub. C°, 1965. Nouvelle éd., Springer. 1982.

Ainsi il apparaît que, du point de vue de la structure algébrique (ordonnée), il n'y a pas de différence entre A_R et R. Cela n'est pas tout à fait une banalité au moment de la fabrication des corps réels et réels clos. N'oublions pas, par exemple, l'article écrit par Cantor en 1873 (11) pour marquer la différence "évidente" entre A_R dénombrable et R continu. Avec Artin, on découvre que cette différence de cardinalité n'empêche pas une identité de structure algébrique.

On peut signaler que Tarski, à peu près à la même époque, mais d'un tout autre point de vue, découvre un résultat similaire. Dans la première version du travail sur la complétude de l'algèbre et de la géométrie élémentaires, le corollaire 2.13 établit, en effet, "qu'un nombre réel est définissable du point de vue de l'algèbre élémentaire si et seulement s'il est algébrique". Comme le note alors Tarski, les théorèmes démontrables dans sa théorie élémentaire de R restent valables si on change l'interprétation des variables d'individus et qu'au lieu de nombres réels on considère des nombres réels algébriques. C'est, ajoute Tarski, la démonstration de la validité du théorème de Löwenhein-Skolem appliqué à la théorie élémentaire de R.

Pour revenir à la théorie de Artin-Schreier on peut dire que l'idée d'"algèbre réelle" est née potentiellement dès 1924 avec les résultats de Artin sur le corps A_R des nombres réels algébriques. Effective en 1926, elle apporte une image algébrique de l'analyse réelle classique, i.e. une théorie des fonctions polynomiales à variables dans un corps ayant les propriétés algébriques communes à A_R et R: à variables dans un corps réel clos quelconque.

Ces explications semblent nous avoir éloignés de l'analyse non standard dont on sait surtout qu'elle a rétabli dans son bon droit le langage des infiniment petits, des limites et de la continuité. Comment rapprocher l'une de l'autre deux théories dont l'une élimine la notion de continuité, dont l'autre la replace en son centre, débarrassée de toute mauvaise conscience?

(11) Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen, J. reine u. angew. Math. 77, 258-262. Reproduit dans G. Cantor, Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts, Hildesheim, Olms, 1966, 115-118.

II. La méta-algèbre d'A.Robinson

II.1. Source immédiate de l'analyse non standard

On sait, Robinson l'a dit lui-même (12), que c'est la construction par Skolem d'un modèle non standard de l'arithmétique (13) qui induisit directement l'idée d'une analyse non standard. Skolem lui-même, en mettant un ordre asymptotique sur un ensemble de fonctions de N dans N, met à profit une idée qu'on trouve pour la première fois dans les Fondements de la Géométrie de Hilbert. Hilbert y construit un corps de fonctions algébriques comme ensemble fermé pour les quatre opérations usuelles plus l'opération qui consiste à prendre la valeur absolue de la racine carrée d'une somme de deux carrés et l'ordonne asymptotiquement. Le dessein de Hilbert était de fournir un modèle de géométrie non archimédienne.

Skolem est donc une source immédiate évidente, enrichie peut-être par un résultat de Henkin. En 1950, en effet, L. Henkin déduit l'existence des modèles non standards de l'arithmétique du théorème de compacité, celui-ci étant lui-même dérivé du théorème de complétude du calcul des prédicats du premier ordre (14). Peu avant, Henkin avait introduit la méthode dite d'addition des constantes (15) dont on verra plus bas en quoi elle consiste.

II.2. Source précursive

En 1963, dans l'introduction à un article antérieur à son livre sur l'analyse non standard (16), Robinson nous informe que l'idée d'une extension non archimédienne de R, "analoque et en liaison avec" l'extension non archimédienne de N par Skolem, lui est venue à la fin de l'année 1960. En effet, dès janvier 1961, à une réunion de l'American Mathematical Society et de la Mathematical Association of America, Robinson révéle au monde des mathématiciens son idée d'analyse non standard.

(12) Non standard analysis, Amsterdam, North-Holland, p. 278.
(13) "Über die Nicht-charakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vielier Aussagen mit ausschliesslich Zahlenvariablen", Fund. Math. 23, (1934), 150-161.
(14) "Completeness in the theory of types", J.S.L. 15 (1950),81-91.
(15) "The completeness of the first order functional calculus", J.S.L. 14 (1949), 159-166. Cet article et celui de la note précédente sont traduits en français par Jean Largeault, Logique mathématique. Textes. Paris, A. Colin (Collection U), 1972.
(16) "Topics in non-archimedean mathematics", The theory of models. Proc. 1963 intern. symp. Berkeley, California. North-Holland, 1965, 285-298. Reproduit dans A.Robinson, Selected papers II, 99-112.

Or, à cette date, Robinson travaille depuis dix ans, déjà, à des résultats modèle-théoriques, relevant d'une discipline qui lui apparaît essentiellement comme une méta-théorie de théories de l'algèbre abstraite. Rappelons quelques ouvrages, réunissant, pour certains, des résultats d'abord présentés dans des articles relativement brefs :

1951 : On the Metamathematics of algebra,

1956 : Complete theories,

1963 : Introduction to model theory and to metamathematics of algebra,

tous antérieurs au livre de 1966 sur l'analyse non standard (respectivement désignés ci-après par R.1951, R.1956, R.1963 et R.1966).

Précisons davantage. Le premier article de Robinson sur l'analyse non standard (17) mentionne explicitement le mémoire de Artin-Schreier parmi les travaux qu'il considère comme précurseurs de son analyse non standard, à côté notamment de l'article de Du Bois-Reymond de 1875 et de l'article de H. Hahn de 1907 (18). "Précurseurs" dit Robinson. Si l'on traduit cette indication chronologique dans un autre registre, on peut dire que la théorie des corps réels clos contient, du point de vue mathématique, les prémisses théoriques qui rendent possible la construction abstraite de l'analyse non standard.

De fait dès 1950-51, Robinson explicite les conséquences de l'invention du concept de corps réel clos. Il met en valeur le fait que tout énoncé du premier ordre, vrai dans un corps réel clos archimédien, est vrai dans tout corps réel clos non archimédien en vertu de la propriété logique de complétude de la théorie des

(17) "Non-standard analysis", Indag. math. 23 (1961), 432-440. Reproduit dans Selected papers II, 3-11.

(18) Du Bois-Reymond, "Über asymptotische Werthe, infinitäre Approximationen und infinitäre Auflösung von Gleichungen", Math. Ann. 8 (1875), 363-414.
H. Hahn, "Über die nichtarchimedischen Grössen-Systeme, Sitzungsber. kaiserl. Akad. Wiss. Wien 116, section II a (1907), 601-655.

corps réels clos, i.e. de ce que lui appelle un "principe de transfert" (19). C'est le théorème 5.6.2 de R.1951. En conséquence de ce théorème, il démontre qu'il existe un corps ordonné non archimédien K tel que tout polynôme sur K possède une racine dans K dans tout intervalle où le polynôme change de signe (théorème 5.7.1). D'où l'existence de corps ordonnés non archimédiens vérifiant les énoncés du premier ordre vrais dans R, par exemple le théorème de Sturm auquel Robinson s'intéresse particulièrement, et aussi le théorème de Rolle, etc...

Comme on le voit, il s'agit de la reprise, dans un cadre logique précis : celui du calcul des prédicats premier ordre, des résultats du mémoire de Artin-Schreier. Cela permet, en particulier, d'expliciter l'idée directrice de ce mémoire, à savoir que R (ou A_R) partage avec certains corps non archimédiens suffisamment de propriétés formelles pour constituer une structure propre : celle de corps réel clos. L'idée d'algèbre réelle induit (comme on l'a annoncé dans I.2, 3ème remarque), l'idée d'une théorie des fonctions avec pour corps de base un corps ordonné non archimédien vérifiant les propriétés des corps réels clos.

L'idée directrice mais implicite dans le mémoire de Artin-Schreier va orienter Robinson vers la création de l'analyse non standard. C'est lui-même, en effet, qui remarque que l'analyse non standard substitue un fait précis à une idée vague (20). L'idée vague c'est celle que l'analyse classique avait, en autorisant, dans la pratique, à traiter, moyennant des précautions convenables, les quantités infinitésimales <u>comme si</u> elles avaient les mêmes propriétés que les quantités finies. Le fait précis c'est que R et son extension non archimédienne $^*R$ vérifient le <u>même ensemble d'énoncés du calcul des prédicats du premier ordre.</u> Or l'existence de la structure de corps réel clos était <u>déjà</u> une preuve que R et des corps réels clos non archimédiens vérifient ensemble certains énoncés, le fait que ces énoncés soient du premier ordre n'étant évidemment pas précisé par Artin-Schreier.

(19) Robinson est le premier, à ma connaissance, à utiliser l'expression "principe de transfert". Voir "'On the application of symbolic logic to algebra", Proc. intern. cong. math. Cambridge, Mass, 1950. Reproduit dans <u>Selected papers I</u>, 3-12. Ici p.5, § 3.

(20) R.1966.

Du reste, Robinson remarquera plus tard, dans un article à vocation didactique (21), que d'une façon générale l'étude de structures algébriques abstraites conduit naturellement un esprit logicien, un théoricien des modèles, à mettre en évidence l'existence de structures mathématiques non standard partageant avec les structures standard de la théorie considérée un certain nombre de propriétés formelles.

Il y a donc une continuité "naturelle" pour reprendre à Robinson un qualificatif utilisé par lui, entre le fait que la structure de corps réel clos dénonce l'hypothèse d'unicité (à isomorphisme près) de modèle vérifiant certaines propriétés vérifiées par R et l'extension de R par les éléments infinis.

II.3. Contexte général : la méta-algèbre générale

Robinson a toujours affirmé que les structures générales mises en évidence par l'algèbre abstraite furent le laboratoire de formation et d'application des concepts modèle-théoriques. C'est pourquoi il a souvent défini la théorie des modèles comme méta-algèbre générale.

La méta-algèbre de Robinson est traversée dès le début par deux grandes préoccupations. Ce ne sont pas les seuls axes du travail de Robinson, mais ce sont ceux qui ont un lien avec la création de l'analyse non standard.

1. La recherche de principes de transfert, qui sont les méta-théorèmes correspondant aux théorèmes de structure de l'algèbre abstraite, et qui permettent de passer d'un modèle à un autre d'une même classe élémentaire. Si, au lieu des langages mathématique et métamathématique, on utilise le langage logique, cette recherche est celle de théorèmes de complétude au sens de Tarski.

(21) "Model theory as a framework for algebra", Studies in model theory, MAA Studies in math.8 (1973), Math. assoc. Amer., Washington D.C., 134-157. Reproduit dans Selected papers I, 60-86.

On en a vu un exemple dans l'analyse des corps réels clos : là le principe de transfert est appelé principe de Tarski-Seidenberg. On en a un autre exemple dans la théorie des corps algébriquement clos : un théorème démontré pour un corps algébriquement clos particulier de caractéristique fixée est vrai de tout corps algébriquement clos de même caractéristique (c'est une forme générale du principe dit "de Lefschetz").

2. La compréhension du mécanisme des extensions de structures algébriques. Là encore, corps algébriquement clos et corps réels clos fonctionnent comme deux paradigmes parallèles. –Noter que ce parallélisme fut une option délibérée de Artin et Schreier créant le concept de corps réel clos et de clôture réelle par analogie avec ceux de corps algébriquement clos et de clôture algébrique.– Dès 1951, Robinson se pose la question de savoir dans quelles conditions on peut étendre une structure algébrique donnée. Plus précisément étant donnés un ensemble S d'énoncés non vide et consistant, M un modèle de S, peut-on trouver M', $M' \supset M$ et M' modèle de S (R.1951, 6.6, 73-78). Question qu'on peut reformuler à l'aide du concept d'extension élémentaire dont l'origine se trouve dans les travaux de Tarski et la mise au point dans un article de Tarski et Vaught de 1957 (22).

Cette question conduit Robinson à un concept important en théorie des modèles, celui de diagramme d'un modèle (23), et à une technique bien connue : la méthode d'addition de constantes due à Henkin comme on l'a rappelé plus haut.

Définition du diagramme d'un modèle

Soient S un ensemble d'énoncés non vide et consistant, et M un modèle de S. On appelle diagramme de M, et on note D (M), l'ensemble des propositions atomiques définies et satisfaites dans M et des négations des propositions atomiques définies mais non satisfaites dans M.

(22) "Arithmetical extensions of relational systems", Compos. math.13, fasc.2, 81-102. On trouve dans R.1963, 7.2, la prise en compte du concept d'extension élémentaire.
(23) Défini pour la première fois dans R.1951, p.74.

Et d'une façon plus formelle :

Soit M un modèle d'un ensemble S non vide et consistant d'énoncés écrits dans un langage L. On définit $L_M = L \cup \{c_m | m \in E_M\}$ en ajoutant un nouveau symbole de constante c pour chaque élément m de l'ensemble d'individus sous-jacent à M, noté E_M. Puis on définit $M' = (M,m)_{m \in E_M}$ dans L_M en interprétant chaque nouvelle constante c_m par l'élément m.

D (M) est alors l'ensemble des propositions atomiques de L_M satisfaites dans M et des négations de propositions atomiques de L_M non satisfaites dans M.

Grâce au concept de diagramme, Robinson parvient à ramifier le concept de complétude en plusieurs concepts distincts : modèle-complétude, modèle-complétude relative, modèle-complétion, introduits respectivement en 1955, 1957 et 1963 (24). Je ne mentionne cette direction de recherches que pour signaler au passage sa fécondité dans le champ mathématique proprement dit : solution facile et générale du 17è problème de Hilbert. En ce qui concerne les extensions de modèles, le concept de diagramme a une importance structurelle. En effet, la question de savoir si on peut étendre un modèle M en un modèle M' vérifiant les mêmes énoncés élémentaires que M revient à se demander si une extension de M' est un modèle de D(M) (25).

Grâce à la méthode d'addition des constantes, Robinson construit $^*R$, extension non archimédienne de R, élémentairement équivalente à R, i.e. vérifiant les mêmes énoncés du premier ordre que R. Par transfert, les théorèmes du premier ordre concernant les fonctions réelles de variables réelles sont valables pour les fonctions à variables dans $^*R$.

(24) Pour les définitions de modèle-complétude et de modèle-complétion d'une théorie, voir, par exemple, R.1963, chap. 4, parag. 2 et 3, et chap.5, parag.5.

(25) Voir Chang-Keisler, Model theory, Amsterdam, North-Holland, 1973, théorème 2.1.18.

III. De la méta-algèbre à l'analyse non standard

III.1 Il n'a pas été évident depuis le début pour Robinson que la méta-algèbre pouvait donner des fruits dans le champ de l'arithmétique et de l'analyse. Par exemple en 1959, il remarque que "tandis que les systèmes d'axiomes de l'algèbre standard semblent particulièrement propres à la discussion des propriétés modèle-théoriques des structures satisfaisant ces propriétés, surtout en ce qui concerne les propriétés d'extension et d'intersection, le contraire semble vrai pour l'arithmétique" (26). La théorie algébrique des modèles d'un côté, la théorie arithmétique des fonctions récursives de l'autre lui semblent un paradis d'ordre, de clarté, de richesse, à côté des "déserts arides d'une théorie des modèles de l'arithmétique non standard", dans lesquels il serait sans doute aventureux de s'avancer.

Esprit aventureux, Robinson l'était sans doute ! Moins d'une année plus tard, en effet, il est venu à bout des déserts arides !

Il présente la construction de $^*R$ comme une application du théorème de complétude du calcul des prédicats du premier ordre. Il prend acte également du fait que des modèles tels que $^*R$ peuvent être construits par ultraproduit.

Robinson ne donnera le détail de la construction que deux ans plus tard. Le voici d'après R.1963, 9.4, p.245:

Soit : $L = \langle \langle +, \cdot, = \rangle, a_\nu \rangle$,

a_ν étant des symboles de constantes pour tous les éléments de R.

Soit T l'ensemble de toutes les propositions de L vraies dans R. Soit c un symbole de constante différent de tous les a_ν et posons $T' = T \cup G$ où G est l'ensemble de toutes les propositions $\neg (c = a_\nu)$ pour tout a_ν.

Par compacité, T' est consistante.

Par complétude, T', consistante, a donc un modèle. Appelons le $^*R$.

(26) "Model theory and non-standard arithmetic", Infinitistic Methods, Proc. symp. foundations of math., Varsovie, 1959. Pergamon Press, New-York, 1961, 265-302. Reproduit dans Selected papers I, 167-204. Ici p. 170.

1. $^{*}R \supset R$ et $^{*}R \neq R$, puisque c est le symbole d'une constante n'appartenant pas à R.

2. $^{*}R$ vérifie les mêmes propositions que R, donc $^{*}R$ est une extension élémentaire de R.

3. C'est une extension propre, donc $^{*}R$ est non archimédien.

On peut construire $^{*}R$ à l'aide d'un langage plus économique, en se passant du symbole de la relation d'égalité et en ne prenant comme symboles de constantes que 0 et 1. En élargissant ensuite le langage par un nouveau symbole de constante c, différent de 0 et de 1, on adjoindra à la théorie T l'ensemble des énoncés $\{n\,1 \leqslant c\}$ pour tous les entiers $n \geqslant 1$. $^{*}R$, modèle de la théorie élargie, ne vérifie évidemment pas l'axiome d'Archimède(27).

Conclusion

On peut noter, pour conclure, deux choses, l'une relative au rapport des mathématiques avec la logique, l'autre d'ordre épistémologique.

1°) La création de l'analyse non standard illustre parfaitement la conception qu'au dire de Gödel (28), Robinson avait de la logique mathématique comme ars inveniendi conforme à l'idéal leibnizien. Pour Robinson, en effet, la logique est un outil de production de solutions systématiques pour des problèmes mathématiques qui, vus de l'intérieur de la discipline, ne donnent pas la pleine mesure de leur généralité. Comme un autre logicien, G. Kreisel, mais d'un autre point de vue que lui, Robinson a maintes fois soutenu et montré le caractère fécond et simplificateur de l'application de la logique mathématique aux mathématiques. Bien sûr, beaucoup de gens résistent à cette conviction.

(27) Chang-Keisler, op.cit., corollaire 2.1.11, p.70.

(28) Gödel a confié cela à S. Kochen,. Voir l'article nécrologique de A. Robinson par A.D. Young, S. Kochen, S. Körner et P. Roquette, Bull. London Math. soc. 8 (1976), 307-323.

2°) La réhabilitation des infinitésimaux par Robinson résulte du croisement de résultats extérieurs au champ de l'analyse infinitésimale, qu'il s'agisse des retombées de la structure abstraite de corps ordonné et réel clos ou de méthodes proprement modèle-théoriques comme la méthode d'addition des constantes. Nous avons, là, l'illustration d'une situation épistémique susceptible de se retrouver dans d'autres disciplines, et, naturellement, à d'autres époques : savoir l'élaboration d'un concept ou d'une technique dans un milieu de pensée, de travail, supposé étranger, voire hostile, au contexte de valorisation de ce concept ou de cette technique. Ce dont résultent deux conséquences complémentaires l'une de l'autre :

1. Il n'y a pas de contexte naturel ou privilégié. Tout contexte peut être propice à la formation d'un concept nouveau.

2. Quelle que soit l'importance du rôle inducteur du contexte de formation d'un concept, celui-ci peut tout à fait mener, ensuite, une vie indépendante de son contexte d'origine.

Hourya Benis-Sinaceur

CNRS, Paris