Séminaire de philosophie et mathématiques

M. Fliess

Automatique algèbre différentielle et causalité

Séminaire de Philosophie et Mathématiques, 1987, fascicule 13
« Automatique algèbre différentielle et causalité », , p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1987___13_A1_0>

Automatique, algèbre différentielle et causalité

Michel FLIESS

Laboratoire des Signaux et Systèmes
C.N.R.S.-E.S.E.
Plateau du Moulon
91190 Gif-sur-Yvette

En hommage au Professeur M.-P. Schützenberger
qui m'a appris qu'étudier un problème consiste
d'abord à en extraire la substance algébrique.

Introduction

L'automatique est la science de la commande des machines. Elle a permis l'émergence de quelques notions importantes dont l'une au moins, le bouclage, a connu sous sa dénomination américaine de *feedback* une fortune considérable. Depuis vingt-cinq ans, les méthodes d'espace d'état,introduites sous l'influence de l'informatique et,plus particulièrement,de la théorie des automates et des langages,ont provoqué un bouleversement complet,d'abord en linéaire [12,13],puis en non-linéaire [7,9].Il semble cependant que ces techniques commencent à s'essoufler,ne serait-ce qu'en raison de l'impossibilité de décrire certains systèmes par des équations différentielles du premier ordre.Qu'il suffise de mentionner ici les circuits électriques [8].

Nous avons proposé récemment une approche entièrement renouvelée du sujet à partir de l'<u>algèbre différentielle</u>.Ce corps de doctrine, apparu il y a près de soixante ans à la suite des travaux du mathématicien américain Ritt [18],a pour ambition de produire pour les équations différentielles des outils semblables à ceux qu'offrent l'algèbre commutative pour les équations algébriques,qu'il s'agisse des nombres ou de la géométrie.Quoique le succès,comme en témoignent les livres de Kolchin [14] et de Pommaret [16],ait été certain,ce domaine n'a connu,somme toute,qu'une popularité limitée,ce pour des raisons que nous ne tenterons pas de dégager ici.

Cette Note n'a pas pour but de décrire les progrès déjà considérables dus à l'algèbre différentielle en automatique (voir [4] et sa bibliographie),mais,de façon plus conceptuelle,d'éclairer la notion même de système en la présentant comme l'analogue différentiel des fonctions algébriques (cf. [6]).Alors que les fonctions algébriques s'étudient aujourd'hui à travers les corps de type fini,il suffira en automatique de passer aux corps différentiels de type fini.Comme en algèbre usuelle,où les indéterminées indépendantes forment une base de transcendance,nous appellerons <u>entrée</u> toute base de transcendance différentielle.Une réponse transparente est ainsi apportée à une problématique due à Willems [24,25,26],et aussi étudiée par van der Schaft [20,21] et Schumacher [22].Les entrées peuvent être regardées comme des causes dont les effets sont les <u>sorties</u>.C'est une analyse mathématique de la <u>causalité</u>,certes très épurée,sinon appauvrie,puisqu'elle présuppose une description par équations différentielles.

Pour les systèmes modélisés par des équations aux différences (cf. [5]),l'algèbre aux différences [3] permet une démarche similaire.

I.-Elements de théorie des corps différentiels

I.1. Un <u>corps différentiel</u> [14,16] est un corps commutatif muni d'un nombre fini de dérivations, commutant deux à deux et vérifiant les règles opératoires habituelles. Les quelques propriétés élémentaires dont nous aurons besoin sont la transcription immédiate de faits bien connus pour les corps non différentiels.

I.2. Soient $K \subset L$ deux corps différentiels emboîtés. Deux situations sont possibles:

<u>Extension différentiellement algébrique</u>: Tout élément de L est solution d'une équation différentielle algébrique à coefficients dans K.

<u>Extension différentiellement transcendante</u>: Il existe au moins un élément de L qui ne soit solution d'aucune équation différentielle algébrique à coefficients dans K. Des éléments de L sont dits différentiellement algébriquement indépendants ss'ils ne sont reliés par aucune équation différentielle algébrique à coefficients dans K. Le nombre maximum de tels éléments est le degré de transcendance différentielle de L par rapport à K, noté d° tr diff L/K. Ce degré est nul ssi l'extension L/K est différentiellement algébrique.

II.-Système entrée-sortie

II.1. En automatique,on entend par système entrée-sortie un dispositif reliant une entrée u à une sortie y,souvent représenté par un schéma de type suivant

La "boîte" centrale est en général modélisée par des équations différentielles,ordinaires ou aux dérivées partielles,qui peuvent être dégénérées en équations algébriques.

II.2. Dans le cas d'équations différentielles ordinaires,l'approche par espace d'état,dominante depuis le début des années soixante [12,13,27] ,conduit à employer des équations du premier ordre:

$$\begin{cases} dq/dt = F(q,u) \\ y = h(q,u) \end{cases}$$

L'état q appartient à $\underline{R}^N$ ou,plus généralement,à une variété différentiable.

II.3. Ce point de vue,qui a beaucoup apporté,en linéaire comme en non-linéaire,souffre cependant de quelques limitations:

- Il semble difficile à généraliser aux dérivées partielles.
- De nombreux systèmes rencontrés en pratique par les ingénieurs ou les physiciens ne se laissent pas écrire sous cette forme.Nous avons déjà mentionné les circuits électriques où les lois de Kirchhoff donnent des équations algébriques [8].Citons encore un exemple de processus chimique [15],qui illustre la gêne que rencontre alors l'automaticien.

II.4. Le formalisme des corps différentiels aplanit ces obstacles. Soit k un corps différentiel de base,c'est-à-dire fixé.En pratique, ce sera $\underline{Q}$ ou $\underline{R}$,ou encore,dans le cas de coefficients variables avec le temps,un corps de fonctions méromorphes du temps.L'entrée $u = (u_1,\dots,u_m)$ est un m-uplet d'indéterminées différentielles sur k, c'est-à-dire de variables différentiellement indépendantes.On note $k\langle u\rangle$ le corps différentiel engendré par k et u.La sortie $y = (y_1,\dots,y_p)$ est un p-uplet dont les composantes sont différentiellement algébriques sur $k\langle u\rangle$.

II.5. On aura reconnu dans la définition précédente un analogue différentiel des fonctions algébriques. En effet, k étant ici un corps non différentiel, une fonction algébrique en les indéterminées $x = (x_1, \dots, x_m)$ est un élément algébrique sur le corps $k(x)$ de fractions rationnelles.

II.6. Il ne faut pas croire que l'utilisation de corps différentiels nous restreint aux équations différentielles **algébriques**, insuffisantes dans beaucoup de situations pratiques. Il est, en effet, possible de prendre comme coefficients des solutions de telles équations. Ainsi, pour l'équation du pendule

(1) $$d^2y/dt^2 + \omega^2 \sin y = 0 \qquad (m=0, p=1),$$

où ω est une constante, il est facile de vérifier que le degré de transcendance non différentielle de $\mathbb{Q}\langle y\rangle/\mathbb{Q}$ est fini, ce qui signifie qu'une solution de (1) est aussi solution d'une équation différentielle **algébrique** à coefficients rationnels. En guise d'exercice, nous invitons le lecteur à calculer cette équation.

II.7. Il semble malaisé d'imaginer des phénomènes physiques obeissant à des équations différentielles avec des coefficients plus généraux. Il a été remarqué (Shannon [23], Pour-El [17]) qu'aux équations différentielles algébriques correspond une notion de calculabilité par ordinateur analogique.Si le lecteur ne se satisfait pas d'une telle argumentation finitiste,en raison de sa connotation intuitioniste à la Brouwer,rappelons qu'à la suite de Rubel [19],il a été montré que les solutions de certaines équations différentielles algébriques étaient denses dans des espaces fonctionnels usuels (voir [2] et sa bibliographie).

III.-La causalité comme séparation de l'entrée et de la sortie

III.1. La définition précédente des systèmes était orientée [27] car elle suppose connue la cause, c'est-à-dire l'entrée, induisant l'effet, c'est-à-dire la sortie. Cela ne va pas toujours de soi. Il existe des situations où la discrimination de l'entrée et de la sortie exige une analyse plus fine [20-22,25-27] . Dans un circuit électrique, par exemple, quels courants et quelles tensions faut-il choisir comme entrée et sortie? Si l'on fait le pari, sans doute impudent, d'une modélisation de phénomènes biologiques, sociaux ou économiques par équations différentielles, comment affirmer que certaines variables doivent être regardées comme cause explicative?

III.2. Un corps systémique est une extension différentielle de type fini, c'est-à-dire finiment engendrée, de k. Ce corps est donc de la forme $k\langle w\rangle$, où $w = (w_1,\ldots,w_s)$ est une collection de variables différentielles reliées entre elles par des équations différentielles pouvant être dégénérées en équations algébriques.

III.3. Résoudre le problème de la causalité consiste à trouver une partition, non nécessairement unique, $w = (u,y)$, où, comme en II.4,

- $u = (u_1,\dots,u_m)$ est un m-uplet d'indéterminées différentielles sur k,

- les composantes de $y = (y_1,\dots,y_p)$ sont différentiellement algébriques sur $k\langle u\rangle$.

Posons $m = d^\circ$ tr diff $k\langle w\rangle/k$ (nécessairement $0 \leq m \leq s$).On peut extraire de w une base de transcendance différentielle $u = (u_1,\dots, u_m)$ de l'extension $k\langle w\rangle/k$,de sorte que les composantes restantes $y = (y_1,\dots,y_p)$ soient différentiellement algébriques sur $k\langle u\rangle$.

III.4. Nous laisserons à d'autres le soin de décider si nous avons éclairci le principe de causalité,dont Kant écrivait que c'était le plus important des principes synthétiques valides *a priori*. Ajoutons cependant que notre détermination nous semble *réfutable* au sens de Popper.Il est,en effet,possible dans les limites de l'expérience de vérifier l'indépendance des entrées et de constater, une fois celles-ci et les conditions initiales choisies,si les sorties en dépendent.

IV.-<u>Une conclusion mathématique</u>

IV.1. Dans toute cette étude,la notion de corps de type fini a joué un rôle primordial.Quelques auteurs,notamment Kähler [10,11] (voir Berndt [1] pour une intéressante synthèse),ont voulu voir dans cette structure un objet mathématique central,puique,dans le cas non différentiel,il englobe déjà les théories des nombres et des fonctions algébriques.

IV.2. Même pour les corps non différentiels,les différentielles dites de Kähler,qui correspondent à l'espace cotangent d'une variété,conduisent à une analyse fort riche.Il nous semble néanmoins que seuls les corps différentiels peuvent répondre aux ambitions,affichées par Kähler dans son introduction à [10] , de voir les corps de type fini comme principe unificateur en mathématique et en physique.

Bibliographie

1. R. Berndt, Arithmetisch ganze Differentiale, Abh. Math. Seminar Univ. Hamburg, 47, 1978, p. 186-200.

2. M. Boshernitzan, Universal formulae and universal differential equations, Ann. of Math., 124, 1986, p. 273-291.

3. R.M. Cohn, Difference Algebra, Interscience Publishers, New York, 1965.

4. M. Fliess, Nonlinear control theory and differential algebra, Proc. I.I.A.S.A. Conf. Modelling Adaptive Control, Sopron, Hungary, July 1986.

5. M. Fliess, Esquisses pour une théorie des systèmes non linéaires en temps discret, Proc. Conf. Linear Nonlinear Math. Control Theory, Torino, July 1986, Rend. Semin. Mat. Univ. Politec. Torino (à paraître).

6 M. Fliess, Quelques définitions de la théorie des systèmes à la lumière des corps différentiels (à paraître).

7. M. Fliess et M. Hazewinkel, eds, Algebraic and Geometric Methods in Nonlinear Control Theory, Reidel, Dordrecht, 1986.

8. M. Hasler et J. Neirynck, Circuits non linéaires, Presses Polytechniques Romandes, Lausanne, 1985.

9. A. Isidori, Nonlinear Control Systems: An Introduction, Lect. Notes Control Inform. Sc. 72, Springer, Berlin, 1985.

10. E. Kähler, Algebra und Differentialrechnung, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1958.

11. E. Kähler, Geometria aritmetica, Ann. Mat. pura appl. (serie IV), 45, 1958.

12. T. Kailath, Linear Systems, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1980.

13. R.E. Kalman, P.L. Falb et M.A. Arbib, Topics in Mathematical System Theory, McGraw-Hill, New York, 1969.

14. E.R. Kolchin, Differential Algebra and Algebraic Groups, Academic Press, New York, 1973.

15. J. Lévine et P. Rouchon, Disturbances rejection and integral control of aggregated nonlinear distillation models, Proc. Conf.

Antibes,1986,A. Bensoussan and J.L. Lions,eds,Lect. Notes Control Inform. Sc. 83,p. 694-714,Springer,Berlin,1986.

16. J.-F. Pommaret,Differential Galois Theory,Gordon and Breach, New York,1983.

17. M.B. Pour-El,Abstract computability and its relation to the general purpose analog computer (some connections between logic, differential equations and analog computers),Trans. Amer. Math. Soc.,199,1974,p. 1-28.

18. J.F. Ritt,Differential Algebra,Amer. Math. Soc.,New York,1950.

19. L. Rubel,A universal differential equation,Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.),4,1981,p. 345-349.

20. A.J. van der Schaft,System theoretic description of physical systems,CWI Tract 3,Centrum voor Wiskunde en Informatica,Amsterdam, 1984.

21. A.J. van der Schaft,On realization of nonlinear systems described by higher-order differential equations (à paraître).

22. J.M. Schumacher,Transformations of linear systems under external equivalence (à paraître).

23. C.E. Shannon,Mathematical theory of the differential analyzer, J. Math. Phys. M.I.T.,20,1941,p. 337-354.

24. J.C. Willems,System theoretic models for the analysis of physical systems,Ricerche Automatica,10,1979,p. 71-106.

25. J.C. Willems,Input-output and state-space representations of finite-dimensional linear time-invariant systems,Linear Alg. Appl., 50,1983,p. 581-608.

26. J.C. Willems,From time series to linear systems, I & II, Automatica,22,1986.

27. L.A. Zadeh et C.A. Desoer,Linear System Theory:The State Space Approach,McGraw-Hill,New York,1963.