Séminaire de philosophie et mathématiques

Jean-Paul Pier

Invariance et moyennabilité en analyse harmonique

Séminaire de Philosophie et Mathématiques, 1986, fascicule 1
« Invariance et moyennabilité », , p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1986___1_A1_0>

Invariance et moyennabilité
en analyse harmonique

Jean-Paul PIER

L'analyse harmonique est issue de l'étude des séries de Fourier concernant les fonctions réelles (*). Elle a pris corps avec la fameuse théorie de l'"Intégration dans les groupes topologiques" de Weil généralisant systématiquement des résultats classiques aux groupes localement compacts [27]. Une très grande partie des acquis globaux de l'analyse harmonique ont été inspirés par une étude préalable des groupes localement compacts abéliens et des groupes compacts pour lesquels des prototypes sont constitués par la droite réelle et le cercle unité. Nous nous proposons d'indiquer, parmi la foule des motivations qui ont été à la base du développement prodigieux de l'analyse harmonique, pendant un demi-siècle, la part de l'idée d'invariance et, plus généralement, de quasi-invariance ou d'invariance asymptotique pour les opérations d'un groupe ou d'une algèbre associée. Nous en signalerons, plus particulièrement, l'influence sur le développement de la notion de moyennabilité.

1. *Considérations générales*

L'évolution de l'analyse harmonique est liée très étroitement à des problèmes d'intégration. "De Dirichlet et Riemann à nos jours", écrit Bourbaki, "nous verrons se poursuivre cette étroite association entre l'intégration et ce que nous appelons maintenant l'analyse harmonique qui en constitue en quelque sorte la pierre de touche" [2].

Parmi les propriétés simples dont doit jouir une intégrale pour qu'il y ait une analogie avec celle des fonctions continues, Lebesgue [19] indique en premier lieu la condition d'invariance suivante: Quels que soient les nombres réels a, b, h et la fonction réelle bornée f,

$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+h}^{b+h} f(x-h)\,dx$. Ramenant la question de la détermination des intégrales sur la droite à la considération de fonctions caractéristiques, Lebesgue montre que le problème

---

(*) ~~We thank the referee for his valuable comments.~~
Une version de cette conférence paraîtra dans:
Nieuw Archief voor Wiskunde.

équivaut à la construction d'une mesure d'ensembles jouissant de propriétés traduisant celles de son intégrale. Il appelle ensembles égaux des ensembles qu'on peut faire coïncider par le déplacement de l'un d'eux et exige que deux ensembles égaux aient la même mesure. Notant qu'il y a deux types d'ensembles égaux, ceux que l'on peut faire coïncider par un déplacement de l'axe Ox et ceux que l'on peut faire coïncider par une rotation d'angle π autour d'un point de Ox, il précise que la condition ne s'applique qu'aux premiers. Il ajoute qu'il n'introduit pas cette restriction dans l'énoncé parce que dans la suite il s'astreindra à n'employer comme déplacements que des glissements et que cependant pour deux ensembles égaux de l'une ou l'autre manières il obtiendra des mesures égales.

Plus généralement, soit X un espace vectoriel de fonctions à valeurs complexes définies sur un ensemble E, stable par conjugaison complexe et contenant la fonction unité 1_E. On appelle moyenne (ou état) sur X toute forme linéaire M sur X telle que $M(\bar{f}) = \overline{M(f)}$ si $f \in X$, $M(1_E) = 1$ et $M(f) \geq 0$ pour toute fonction f de X à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. On étudie l'existence d'une moyenne invariante sous l'action d'un groupe.

Une fonction qui est invariante par une translation ou une rotation est dite périodique. En 1924-26 Bohr [1] étudie des propriétés de régularité pour les distributions des valeurs de fonctions non nécessairement périodiques; par exemple, il scrute la fréquence avec laquelle une fonction complexe d'une variable réelle prend des valeurs déterminées sur une parallèle à l'axe des imaginaires purs. Il formule la définition d'une fonction complexe d'une variable réelle qui est presque périodique. La fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est dite presque périodique si, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $h > 0$ tel qu'à tout $a \in \mathbb{R}$ corresponde $b \in [a, a + h]$ pour lequel $|f(x + b) - f(x)| < \varepsilon$ uniformément quel que soit $x \in \mathbb{R}$.

En général, pour les fonctions définies sur un groupe G, on considère les fonctions translatées. Si $f:G \to \mathbb{C}$, $a \in G$, nous noterons

$$_af(x) = f(ax), \quad f_a(x) = f(xa),$$

$x \in G$; posons aussi $\check{f}(x) = f(x^{-1})$, $x \in G$.

On adopte une définition de la presque périodicité rappelant celle de la continuité uniforme. Si G est un groupe, la fonction $f: G \to \mathbb{C}$ est dite presque périodique si, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe une partition $\{A_1, \ldots, A_n\}$ de G telle que $|f(cxd) - f(cyd)| < \varepsilon$ uniformément pour $c, d \in G$ et $x, y \in A_i$; $i = 1, \ldots, n$. Toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui est presque périodique au sens de Bohr est presque périodique; la réciproque a lieu pour le cas des fonctions continues. Sur l'espace vectoriel $PP(G)$ des fonctions presque périodiques il existe une moyenne M qui est invariante par les translations à gauche, à droite, ainsi que l'inversion sur le groupe i. e. $M({}_af) = M(f_a) = M(\check{f}) = M(f)$ quels que soient $f \in PP(G)$, $a \in G$.

Le pas décisif vers la création de l'analyse harmonique est accompli en 1933 par Haar [14] qui démontre l'existence, pour tout groupe localement compact G à base dénombrable d'ouverts, d'une mesure positive λ qui est invariante par les translations à gauche i. e. si E est une partie mesurable de G et $a \in G$, alors $\lambda(aE) = \lambda(E)$. Cette mesure est la généralisation de celle de Lebesgue pour la droite réelle. La démonstration de l'existence de la mesure de Haar pour un groupe localement compact arbitraire est due à Weil [27]. Cette mesure est unique, à un facteur multiplicatif près; elle est finie si et seulement si le groupe est compact. En vue de simplifier la construction de la mesure de Haar sur les groupes compacts, von Neumann [23] a l'idée de considérer la presque périodicité; la moyenne invariante sur les fonctions presque périodiques s'interprète comme une mesure de Haar sur un groupe compactifié. Une mesure de Haar invariante à gauche n'est pas nécessairement invariante à droite. Tel est pourtant le cas pour la vaste classe des groupes localement compacts dits unimodulaires qui comprend les groupes localement compacts abéliens, les groupes compacts, les groupes discrets.

L'essor de l'analyse harmonique est favorisé par celui de la théorie des algèbres de Banach, en particulier, des algèbres de fonctions qui constituent des espaces normés complets. Une algèbre de fonctions numériques pour la multiplication ordinaire admet la fonction 1 comme unité.

Dans le cadre du vaste déploiement d'efforts visant à l'étude de groupes topologiques généraux signalons d'abord que van Dantzig [5] considère une métrique d sur un groupe G qui est invariante i. e. $d(ax,ay) = d(xa,ya) = d(x,y)$ quels que soient $x, y, a \in G$. Kakutani [18] montre que, pour un groupe topologique G satisfaisant à l'axiome de séparation (T_0), G est métrisable si et seulement s'il admet une base fondamentale dénombrable d'ouverts de l'élément neutre; il prouve que cette métrique peut être choisie invariante par les translations à gauche et à droite.

En l'absence d'unité véritable on cherche à suppléer cette carence par la détermination d'unités approchées, fait qui traduit une propriété d'invariance asymptotique pour la multiplication. Si A est une algèbre de Banach, on appelle unités approchées à gauche [resp. à droite] toute famille filtrée $(a_i)_{i\in I}$ d'éléments de A telle que $\lim_i \|a_i a - a\| = 0$ [resp. $\lim_i \|aa_i - a\| = 0$] quel que soit $a \in A$. Les unités sont dites bornées si $\|a_i\| < c$ pour tout $i \in I$.

A tout groupe localement compact G on associe l'algèbre de Banach $L^1(G,\lambda) = L^1(G)$ des fonctions intégrables par rapport à la mesure de Haar λ. La structure multiplicative de cette "algèbre de groupe" est constituée par le produit de convolution définie de la ~~manière~~ suivante: Si $f, g \in L^1(G)$, $f * g(x) = \int f(y)\, g(y^{-1}x)\, dy$ pour presque tout $x \in G$. L'algèbre admet une unité si et seulement si le groupe est discret. Cependant, pour tout groupe localement compact G, $L^1(G)$ possède des unités approchées bilatères bornées. L'existence d'unités approchées est étudiée dans le cadre plus vaste des algèbres de Segal d'un groupe localement compact pour lesquelles l'algèbre de groupe constitue un exemple [25].

La théorie des groupes finis se généralise naturellement aux groupes compacts. Si G est un groupe compact, $L^2(G)$ est la somme directe de ses idéaux minimaux et ces derniers sont de dimension finie. Loomis [21] dit qu'une fonction f de $L^2(G)$ est presque invariante au cas où les fonctions associées à f par les translations à gauche et à droite engendrent un sous-espace de dimension finie dans $L^2(G)$. L'utilisation du théorème de Stone-Weierstrass permet de voir que toute fonction continue sur G peut être approchée uniformément par des fonctions presque invariantes.

2. *Groupes moyennables*

Parmi les groupes localement compacts, les représentants les plus aisément accessibles sont, d'une part, les groupes abéliens, d'autre part, les groupes compacts. Beaucoup d'investigations portent sur la détermination de classes de groupes localement compacts plus larges, mais possédant encore des propriétés de régularité généralisant celles de ces groupes. Une classe particulièrement riche est constituée par les groupes moyennables (*) dont l'étude dans le cas discret remonte à von Neumann [22]. Les groupes localement compacts résolubles et les groupes compacts sont moyennables; les groupes de Lie semi-simples connexes non compacts ne le sont pas. La moyennabilité d'un groupe localement compact se définit par l'existence d'une moyenne invariante à gauche (ou à droite) sur l'un des espaces de fonctions suivants définis sur le groupe: l'espace des fonctions essentiellement bornées par rapport à la mesure de Haar, l'espace des fonctions continues bornées, l'espace des fonctions uniformément continues bornées [13]. Toute moyenne invariante peut être interprétée comme étant un point fixe par rapport à l'action du groupe sur l'ensemble des moyennes. Si G est un groupe localement compact, $P^1(G) = \{f \in L^1(G) : f \geq 0, \int_G f = 1\}$ est dense dans l'ensemble des moyennes sur $L^\infty(G)$. La moyennabilité de G peut alors se caractériser par une propriété d'invariance inventée par Day [6] : Il existe une famille filtrée (φ_i) dans $P^1(G)$ telle que $\lim \|{}_a\varphi_i - \varphi_i\|_1 = 0$ quel que soit $a \in G$. Une formulation équivalente commode de Reiter s'énonce de la manière suivante [24] : Pour toute partie compacte [resp. finie] K de G et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi \in P^1(G)$ tel que $\|{}_a\varphi - \varphi\|_1 < \varepsilon$ quel que soit $a \in K$. Une caractérisation (due à Følner dans le cas discret) exprime la moyennabilité en termes de quasi-invariance de parties compactes [10] : Pour toute partie compacte [resp. finie] K de G et tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie compacte U de G telle que $\lambda(U) > 0$ et $\lambda(aU \Delta U) < \varepsilon$ pour tout $a \in K$. Aussi le groupe localement compact G est-il moyennable si et seulement si $L^0(G) = \{f \in L^1(G) : \int_G f = 0\}$ admet des unités approchées à gauche [resp. à droite] bornées. La moyennabilité d'un groupe localement compact G se caractérise encore par l'existence d'une moyenne topologiquement invariante sur l'un des espaces pour lesquels il admet une moyenne invariante. Ainsi, par exemple, G est moyennable si et seulement s'il existe une moyenne M sur

---

(*) La terminologie anglaise est "amenable groups".

$L^\infty(G)$ telle que $M(\varphi * f) = M(f)$ quels que soient $f \in L^\infty(G)$, $\varphi \in P^1(G)$. Cette condition donne lieu à une formulation équivalente dans les termes de la propriété de Day.

Dans la théorie de Gelfand, on considère, pour toute algèbre de Banach commutative A, le spectre constitué par les formes linéaires multiplicatives continues non nulles sur A; muni de la topologie faible de dualité, le spectre est localement compact - et même compact si A admet une unité. On peut identifier les moyennes d'algèbres de Banach de fonctions définies sur un groupe avec les mesures de probabilité sur les spectres correspondants. Donc l'existence d'une moyenne invariante se caractérise par l'existence d'une telle mesure de probabilité invariante sous l'action du groupe. Plus généralement, le groupe localement compact G est moyennable si et seulement si la propriété d'existence d'un point fixe universelle est vérifiée: Pour toute action affine continue de G sur une partie compacte convexe d'un espace localement convexe séparé il existe un point fixe dans la partie compacte.

Les travaux de Gelfand sur les algèbres de Banach commutatives ont permis l'étude complète de l'analyse de Fourier des groupes localement compacts abéliens. Si G est un tel groupe, on considère l'ensemble $\hat{G}$ des caractères de G i. e. des homomorphismes continus de G dans le groupe des nombres complexes de module 1; $\hat{G}$ est à son tour un groupe localement compact pour la topologie de la convergence compacte et la multiplication définie par $\gamma_1\gamma_2(x) = \gamma_1(x)\ \gamma_2(x)$; $\gamma_1, \gamma_2 \in \hat{G}$; $x \in G$. Si $f \in L^1(\hat{G})$, la transformée de Fourier-Gelfand $Ff = \hat{f}$ de f est donnée par $\hat{f}(x) = \int_{\hat{G}} f(\gamma)\ \overline{\gamma(x)}\ d\gamma$, $x \in G$. L'ensemble $A(G) = FL^1(\hat{G})$ constitue une sous-algèbre fermée de l'algèbre de Banach des fonctions continues bornées sur G; A(G) est l'algèbre de Fourier de G. Cette dernière peut être définie pour un groupe localement compact arbitraire [8]. Une caractérisation remarquable de la moyennabilité d'un groupe localement compact est l'existence d'unités approchées bornées pour l'algèbre de Fourier correspondante [20].

Comme la translation concerne en fait une structure de semigroupe, les propriétés d'invariance peuvent y être envisagées; en particulier, la théorie de la moyennabilité se prolonge dans une certaine mesure aux semigroupes. La moyennabilité s'étudie aussi sur les groupes de transformations et notamment sur les espaces homogènes [9].

Diverses autres classes particulières de groupes localement compacts tirent leur intérêt d'une caractérisation qui se traduit en termes d'invariance par automorphismes intérieurs. La classe $[FC]^-$ est formée des groupes localement compacts G pour lesquels les fermetures de toutes les classes de conjugaison $C_a = \{xax^{-1} : x \in G\}$ $(a \in G)$ sont compactes. La classe [IN] est constituée par les groupes localement compacts G comprenant un voisinage compact de l'élément neutre qui est invariant par tous les automorphismes intérieurs $x \mapsto axa^{-1}$ $(a \in G)$ sur G; [SIN] est la classe des groupes localement compacts pour lesquels tout voisinage de l'élément neutre contient un voisinage compact de cet élément, invariant par les automorphismes intérieurs. Toutes ces classes comprennent les groupes localement compacts abéliens et les groupes compacts; [SIN] et $[FC]^-$ sont des sous-classes de [IN] et les groupes appartenant à $[FC]^-$ sont moyennables.

3. *Résultats récents*

Mentionnons des directions dans lesquelles les propriétés d'invariance ont été développées. Des études portent sur les groupes moyennables intérieurement, qui sont des groupes discrets admettant sur l'espace des fonctions bornées une moyenne non triviale (i. e. différente de la mesure de Dirac δ_e en l'élément neutre e) qui est invariante par les automorphismes intérieurs. Des résultats remarquables concernent les groupes localement compacts pour lesquels le semigroupe des parties compactes non vides, muni de la multiplication $(K_1,K_2) \mapsto K_1K_2 = \{x_1x_2 : x_1 \in K_1,\ x_2 \in K_2\}$ est moyennable et aussi les groupes localement compacts G pour lesquels $P^1(G)$ est un semigroupe moyennable [15][11].

Parmi les algèbres de Banach deux types font l'objet de théories particulièrement importantes: a) les algèbres stellaires ou C^*-algèbres A pour lesquelles il existe une involution $x \mapsto x^*$ sur A telle que $\|x\| = \|x^*\|$ et $\|x^*x\| = \|x\|^2$ quel que soit $x \in A$; b) les algèbres de von Neumann, qui sont des C^*-algèbres à prédual caractérisées aussi par le fait que ce sont des sous-algèbres involutives d'une algèbre d'opérateurs continus sur un espace hilbertien qui coïncident avec leur bicommutant [7][26]. L'algèbre de Fourier est le prédual d'une algèbre de von Neumann.

Le groupe discret G est moyennable si et seulement si l'algèbre de von Neumann VN(G), duale de A(G), opérant sur l'espace de Hilbert $L^2(G)$, possède la propriété d'invariance suivante dite propriété (P): Pour tout opérateur continu T sur l'espace de Hilbert $L^2(G)$, le commutant de VN(G) admet une intersection non vide avec l'enveloppe convexe fermée des UTU^*, où U décrit l'ensemble des opérateurs continus unitaires sur $L^2(G)$, U^* étant l'opérateur transposé de U.

L'invariance apparaît explicitement dans un contexte cohomologique. Soient A une algèbre de Banach et X un A-module de Banach à gauche et à droite. On définit une application d_1 de X dans l'espace $\mathcal{L}(A,X)$ des applications linéaires continues de A dans X en posant $d_1\xi(a) = a\xi - \xi a$ pour $\xi \in X$ et $a \in A$; on considère une application d_2 de $\mathcal{L}(A,X)$ dans l'espace $\mathcal{L}^2(A,X)$ des applications bilinéaires continues de $A \times A$ dans X en posant $d_2F(a,b) = aF(b) - F(ab) + F(a)b$ pour $F \in \mathcal{L}(A,X)$ et $a, b \in A$. Alors, $\mathit{Im}\, d_1 \subset \mathit{Ker}\, d_2$ et $H_1(A,X) = \mathit{Ker}\, d_2/\mathit{Im}\, d_1$ constitue le premier groupe de cohomologie. Une application linéaire $D: A \to X$ est une dérivation si $D(ab) = aD(b) + D(a)b$ quels que soient $a, b \in A$. En particulier, pour tout $\xi \in X$, $d_1\xi$ est une dérivation appelée dérivation intérieure. Ainsi, dire que $H_1(A,X) = \{0\}$, c'est dire que toute dérivation continue de A dans X est intérieure. Le groupe localement compact G est moyennable si, et seulement si, pour tout $L^1(G)$-module de Banach X, on a $H_1(L^1(G),X^*) = \{0\}$, X^* étant le dual topologique de X [16].

SFRT D8

Si A est une algèbre de Banach, le complété $A \hat{\otimes} A$ du produit tensoriel de A par A peut être muni d'une structure d'A-module de Banach si on pose $a(b \otimes c) = ab \otimes c$, $(b \otimes c)a = b \otimes ca$ pour $a, b, c \in A$. Cette structure se transpose canoniquement en une structure d'A-module de Banach sur le

On définit, en général, une algèbre de Banach A comme étant moyennable si, pour tout A-module de Banach X, $H_1(A,X^*) = \{0\}$. De nombreux travaux récents concernent les algèbres moyennables et, plus spécifiquement, les C^*-algèbres moyennables et les algèbres de von Neumann moyennables.

bidual $(A \hat{\otimes} A)^{**}$ de $A \hat{\otimes} A$. Notons π l'application de $A \hat{\otimes} A$ dans A définie par $\pi(a \otimes b) = ab$ pour $a, b \in A$. On appelle diagonale approchée de A toute famille filtrée bornée (u_i) de $A \hat{\otimes} A$ pour laquelle $\lim (u_i a - a u_i) = 0$ et $\lim \pi(u_i)a = a$ quel que soit $a \in A$. Une diagonale virtuelle de A est un élément Φ de $(A \hat{\otimes} A)^{**}$ tel que, pour tout $a \in A$, $\Phi a = a\Phi$ et a coïncide avec ${}^{tt}\pi(\Phi)a$, ${}^{tt}\pi$ étant l'application bitransposée de π. La moyennabilité de l'algèbre de Banach se caractérise par l'existence d'une diagonale approchée et aussi par l'existence d'une diagonale virtuelle [17].

Soit, en particulier, A une C^*-algèbre admettant une unité. Enonçons une condition nécessaire et suffisante de la moyennabilité de A: Soient Y un A-module de Banach et X un A-sous-module de Banach. Supposons qu'il existe une forme linéaire continue F sur X telle que $F(u\xi u^*) = F(\xi)$ quels que soient $\xi \in X$ et l'élément unitaire u de A, Alors, il existe une forme linéaire continue F' sur Y telle que $F'(u\eta u^*) = F'(\eta)$ quels que soient $\eta \in Y$ et l'élément unitaire u de A [3].

Pour les algèbres de von Neumann tout particulièrement la moyennabilité équivaut à plusieurs propriétés remarquables, par exemple la propriété (P). La classification des facteurs injectifs mise au point par Connes [4] permet de retrouver d'autres propriétés d'invariance. La moyennabilité d'une algèbre de von Neumann se caractérise par l'existence d'une hypertrace invariante i. e. un état qui est invariant sous l'action des opérateurs unitaires,

<u>Références</u> concernant a) l'analyse harmonique, b) la moyennabilité:

a) Hewitt, Edwin, et Kenneth A. Ross. Abstract harmonic analysis. Springer, Berlin, 2e éd., 1979.

b) Pier, Jean-Paul. Amenable locally compact groups. John Wiley, New York, 1984.

<u>Bibliographie</u>:

[1] Bohr, Harald. Fastperiodische Funktionen. Springer, 1932.

[2] Bourbaki, Nicolas. Eléments d'histoire des mathématiques. Hermann, Paris, 1960.

[3] Bunce, John W. Characterizations of amenable and strongly amenable C^*-algebras. Pacific J. Math. 43, 563-572 (1972).

[4] Connes, Alain. Classification des facteurs. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 38/2, 43-109. American Mathematical Society, Providence 1982.

[5] Dantzig, D. van. Zur topologischen Algebra I. Math. Ann. 107, 587-626 (1932).

[6] Day, Mahlon M. Semigroups and amenability. Proceedings: Symp. Semigroups 5-53. Academic Press, New York, 1969.

[7] Dixmier, Jacques. Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien. 2e éd. Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[8] Eymard, Pierre. L'algèbre de Fourier d'un groupe localement compact. Bull. Soc. Math. France 92, 181-236 (1964).

[9] Eymard, Pierre. Moyennes invariantes et représentations unitaires. Lecture Notes in Mathematics, vol. 300. Springer, Berlin, 1972.

[10] Følner, Erling. On groups with full Banach mean value. Math. Scand. 3, 243-254 (1955).

[11] Ganesan, S. P-amenable locally compact groups. A paraître.

[12] Gelfand, I. M., D. A. Raĭkov, et G. E. Šilov. Anneaux normés commutatifs (En russe). Uspehi Matem. Nauk I, 48-146, 1946.

[13] Greenleaf, Frederick P. Invariant means on topological groups. Van Nostrand, New York, 1969.

[14] Haar, Alfred. Der Massbegriff in der Theorie der kontinuierlichen Gruppen. Ann. of Math. 34, 147-169, 1933.

[15] Jenkins, Joe W. Sigma-amenable locally compact groups. Proc. Amer. Math. Soc. 28, 621-626 (1971).

[16] Johnson, Barry E. Cohomology in Banach algebras. Mem. Amer. Math. Soc. 127 (1972).

[17] Johnson, Barry E. Approximate diagonals and cohomology of certain annihilator Banach algebras. Amer. J. Math. 94, 685-698 (1972).

[18] Kakutani, Shizuo. Über die Metrisation der topologischen Gruppen. Proc. Imp. Acad. Tokyo 12, 82-84 (1936).

[19] Lebesgue, Henri. Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives. Gauthier-Villars, Paris, 1904; rééd. Chelsea Publishing Company, Bronx, 1973.

[20] Leptin, Horst. Sur l'algèbre de Fourier d'un groupe localement compact. C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A 266, 1180-1182 (1968).

[21] Loomis, Lynn H. An introduction to abstract harmonic analysis. Van Nostrand, New York (1953).

[22] Neumann, John von. Zur allgemeine Theorie des Masses. Fund. Math. 13, 73-116 (1929).

[23] Neumann, John von. Almost periodic functions in a group I. Trans. Amer. Math. Soc. 36, 445-492 (1934).

[24] Reiter, Hans. Classical harmonic analysis and locally compact groups. Oxford University Press, Oxford, 1968.

[25] Reiter, Hans. L^1-algebras and Segal algebras. Lecture Notes in Mathematics, vol. 231 . Springer, Berlin, 1971.

[26] Takesaki, Masamichi. Theory of operator algebras I. Springer, Berlin, 1979.

[27] Weil, André. L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications. 2e éd. Hermann, Paris, 1953.

Centre universitaire de Luxembourg,
162 A, Avenue de la Faïencerie,
L 1511 Luxembourg