Florica Campan

Le formalisme et la controverse Poincaré-Hilbert

Séminaire de Philosophie et Mathématiques, 1984, fascicule 6
« Le formalisme et la controverse Poincaré-Hilbert », , p. 1-20
<http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1984___6_A1_0>

LE FORMALISME ET LA CONTROVERSE POINCARE-HILBERT

par prof.dr.doc. Florica T. Campan

Au commencement je désire adresser mes remerciements au Directoire du Séminaire de Philosophie et de Mathématique de l'Ecole Normale Supérieure de Paris et en particulier à M. le professeur Maurice Loi, pour l'honneur de m'avoir invitée à participer à ces conférences. C'est un honneur dont je suis très touchée car, pour les mathématiciens roumains, l'Ecole Normale Supérieure de Paris reste depuis le XIXe siècle, le lieu où ils ont connu : "des penseurs éminents, qui leur ont appris le respect qui est dû à la vérité", selon l'expression même de Poincaré (1). A cette émotion je dois ajouter encore la joie mêlée de crainte, de me trouver acceptée par cette assemblée, dont l'activité, annoncée chaque année par les affiches des conférences, est depuis longtemps admirée par les membres de notre Bibliothèque du Séminaire Mathématique "Alexandre Myller" de l'Université de Jassy.

Je voudrais tout d'abord faire observer que le thème dont je me propose de parler : "Le formalisme et la controverse Poincaré-Hilbert" a, en lui-même, quelque chose d'insolite, à savoir, que cette controverse concernant le formalisme en mathématique. En vérité, le formalisme complet, impliquant donc son interprétation, c'est-à-dire la théorie de la démonstration, a été présenté par Hilbert presque dix ans après la mort de Poincraé. Alors, on pourrait se demander, comment cette controverse a eu lieu ? C'est cela que je voudrais établir, précisément en laissant les faits se dérouler chronologiquement d'eux mêmes.

On sait bien qu'en 1899 Hilbert arriva, dans "Grundlagen der Geometrie" à l'axiomatisation complète de la géométrie (2). Premièrement, il a considéré que la non-contradiction des axiomes de la géométrie peut être démontrée en s'appuyant sur la non-contradiction de l'arithmétique. Mais, par la crise apparue dans la théorie des ensembles, l'argument de Hilbert, relatif à la non-contradiction de la géométrie ne restait plus convaincant. C'est pourquoi, après l'apparition de "Grundlagen" Hiblert pensa aussi à l'axiomatisation de l'arithmétique (3). Et, dans l'article "Sur le concept de nombre", écrit en 1899, il considéra que : "Malgré la haute valeur pédagogique et heuristique de la méthode génétique, la méthode axiomatique est préférable pour une représentation définitive et un complet affermissement logique du contenu de notre connaissance" (4). En conséquence, il a proposé 18 axiomes, presque analogues à ceux qu'il a énoncés dans le "Grundlagen der Geometrie". Ces axiomes ont été rangés en quatre groupes, à savoir :

1) axiomes de liaison, 2) axiomes de calcul, 3) axiomes d'ordre et 4) axiomes de continuité. Dans cette étude, Hilbert a envisagé ainsi les axiomes d'une arithmétique des nombres réels mais il lui restait encore à trouver une manière de démontrer la non-contradiction de ce système. Obsédé par le problème, il l'a mentionné encore dans le cadre du II^{e} Congrès International des Mathématiciens, où Hilbert proposa ses "fameux problèmes", le deuxième est intitulé : "Axiomes de l'Arithmétique" (5). Voici ce qu'il a voulu dire : "Trouver un système d'axiomes régissant et définissant les conceptions arithmétiques. Examiner si ces axiomes sont indépendants les uns des autres et, dans le cas contraire, mettre en évidence les parties communes, de façon à obtenir un système d'axiomes complètement indépendants. Enfin prouver que ces axiomes sont compatibles, c'est-à-dire qu'une suite finie de déductions logiques partant de ces axiomes, ne peut jamais conduire à une contradiction. Nous disons qu'une conception existe au point de vue mathématique, lorsque les axiomes qui la définissent sont compatibles".
Hilbert a considéré encore qu'il faut insister sur le problème de la non-contradiction des axiomes de l'Arithmétique et il l'a fait dès l'Introduction de cette conférence : "Chaque système de concepts nous conduit à créer un système de symboles destinés à servir d'instruments de démonstration. Une démonstration faite au moyen des symboles géométriques sera parfaitement légitime dès que l'on se rendra un compte exact des axiomes qui leur servent de base". Plus loin, il fait aussi allusion aux "difficultés sérieuses" présentées par quelques problèmes et aussi à "l'échec des tentatives faites pour les résoudre", mais il termine ces "Généralités" d'une manière optimiste ; "nous avons la conviction qu'en mathématique il sera toujours possible, ou bien de résoudre le problème, ou bien de démontrer qu'il ne comporte aucune solution. Jamais mathématicien ne sera réduit à dire : Ignorabimus (6).
On peut dire qu'avec cet article a commencé la controverse Poincaré-Hilbert relative au formalisme. Et cela, parce que Poincaré n'avait

partagé ni l'optimisme de Hilbert, exprimé dans sa proposition avec "ignorabimus" ni la possibilité de traduire des théories mathématiques en système formels qui pourraient assurer ainsi la démonstration de leur non-contradiction. A cet égard, rappelons d'abord une observation de Bourbaki : "ayant admis le point de vue axiomatique touchant la géométrie... Poincaré se refuse par contre à concevoir que l'arithmétique puisse elle aussi être justiciable d'un traitement axiomatique ; le principe d'induction complète lui paraît en particulier une intuition fondamentale de notre esprit, où il est impossible de voir une pure convention" (7). Lisons aussi ce qu'avait écrit Poincaré dans son article : "Le nombre et la grandeur" : "Le caractère essentiel du raisonnement par récurrence, c'est qu'il contient, condensée pour ainsi dire en une formule unique, une infinité de syllogismes... c'est un instrument qui permet de passer du fini à l'infini... Dans ce domaine de l'arithmétique, on peut se croire bien loin de l'analyse infinitésimale, et, cependant, nous venons de le voir, l'idée de l'infini mathématique joue déjà un rôle prépondérant, et sans elle il n'y aurait pas de science parce qu'il n'y aurait rien de général.. Il est l'affirmation de la puissance de l'esprit qui se sait capable de concevoir la répétition indifinie d'un même acte dès que cet acte est une fois possible. L'esprit a de cette puissance une intuition directe et l'expérience ne peut être pour lui qu'une occasion de s'en servir et par là d'en prendre conscience... Nous ne pouvons nous élever que par l'induction mathématique, qui seule peut nous apprendre quelque chose de nouveau. Sans l'idée de cette induction différente à certains égards de l'induction physique, mais féconde comme elle, la construction serait impuissante à créer la science" (8). Sur cette question il revient encore dans : "L'intuition et la logique en mathématique", où il dit : "La logique ne suffit pas. La science de la démonstration n'est pas la science tout entière et l'intuition doit conserver son rôle comme complément, j'allais dire comme contre-poids ou comme contre-poison de la logique" (9). En ce qui concerne ses opinions sur les axiomes, les voici, exprimées dans "Les géométries non euclidiennes" : "Les axiomes géométriques ne sont ni des jugements synthétiques à priori ni des faits expérimentaux. Ce sont des conventions... En d'autres termes, les axiomes de la géométrie (je ne parle pas de ceux de l'arithmétique) ne sont que des définitions déguisées" (o.c.8, pg. 66). Notons donc que Poincaré refuse de parler "des axiomes de l'arithmétique"! Hilbert n'a pas répondu aux observations de Poincaré et il est revenu sur le problème de l'axiomatisation de l'arithmétique par la conférence : "Sur les fondements de la logique et de l'arithmétique", qu'il a présentée en 1904, au III^{e} Congrès International des Mathématiciens, à Heidelberg. En l'écoutant, on constate que malgré l'intervention de Poincaré, la confiance de Hilbert dans la possibilité d'axiomatiser l'arithmétique est restée inébranlable car il a insisté de nouveau, bien qu'il entrevoie les difficultés : "Si dans la recherche des fondements de la géométrie nous sommes aujourd'hui d'accord, quant à l'essentiel sur les voies à prendre et les buts à poursuivre, on ne saurait en dire autant des fondements de l'arithmétique, ici les opinions les plus différentes se dressent encore en face les unes des autres". En plus, il analyse les points de vue de Kronecker, de Helmholz, de Christoffel, de Frege, de Dedekind et de Cantor et, à la fin il avoue : "J'estime, pour ma part, que toutes les difficultés ainsi soulevées sont surmontables et que l'on peut fonder le concept de nombre d'une manière parfaitement rigoureuse et satisfaisante. La méthode que j'emploie à cet effet est une méthode axiomatique dont je voudrais brièvement faire connaître le principe. On regarde d'ordinaire l'Arithmétique comme une partie de la Logique et, lorsqu'on cherche à fonder cette science, on prend généralement pour point de départ les notions reçues dans la logique usuelle" (10). Je m'arrête de citer encore la conférence de Hilbert car il vaut mieux la traiter par l'intermédiaire de Poincaré, étant donné que le mathématicien et philosophe français n'a pas tardé à commenter les idées exprimées dans cette communication. Premièrement, on trouve quelques allusions dans : "Les mathématiques et la logique" : "Les mathématiques peuvent-elles être réduites à la logique sans avoir à faire appel à des principes qui leur soient propres ? Il y a toute une école, pleine d'ardeur et de foi, qui s'efforce de l'établir. Elle a son langage spécial où il n'y a plus de mots et où on ne fait usage que de signes. Ce langage n'est compris que de quelques initiés...". Dans le chapitre suivant du même article, Poincaré met l'accent sur le formalisme que Hilbert va développer beaucoup d'années plus tard : "Ce qui nous frappe d'abord dans la nouvelle mathématique, c'est son caractère purement formel.." (11). Mais c'est dans "La logique de Hilbert" que se déclenche dans toute sa splendeur ce singulier mélange d'analyse rigoureuse et d'ironie joyeuse : "J'arrive maintenant au travail capital de M. Hilbert qu'il a communiqué au Congrès des Mathématiciens à Heidelberg... . Dans ce travail, où l'on trouvera les pensées les plus profondes, l'auteur poursuit un but analogue à celui de M. Russell, mais sur bien des points il s'écarte de son devancier". "Cependant, dit-il (Hilbert) si nous y regardons de près, nous constatons que dans les principes logiques, tels qu'on a coutume de les présenter, se trouvent impliquées déjà certaines notions arithmétiques, par exemple la notion d'Ensemble, et, dans une certaine mesure, la notion de Nombre. Ainsi nous nous trouvons pris dans un cercle et c'est pourquoi afin d'éviter tout paradoxe, il me parait nécessaire de développer simultanément les principes de la Logique et ceux de l'Arithmétique". Poincaré a interrompu ici le texte de Hilbert pour observer que : "pour M. Russell, la logique est antérieure à l'Arithmétique ; pour M. Hilbert elles sont simultanées.... je préfère suivre pas à pas le développement de la pensée de Hilbert, en citant textuellement les passages les plus importants. Prenons tout d'abord en considération l'objet 1. Remarquons, intervient de nouveau Poincaré, "qu'en agissant ainsi nous n'impliquons nullement la notion de nombre, car il est bien entendu que 1 n'est ici qu'un symbole et que nous ne nous préoccupons nullement d'en connaître la signification". Maintenant, de nouveau, Poincaré reprend le texte de Hilbert : "Les groupes formés avec cet objet, deux, trois ou plusieurs fois répété...." Ah cette fois-ci, s'exclame Poincaré, en souriant malicieusement, "il n'en est plus de même, si nous introduisons le mots deux, trois et surtout plusieurs, nous introduisons la notion de nombre ; et alors la définition de nombre entier fini que nous trouverons tout à l'heure, arrivera bien tard. L'auteur était beaucoup trop avisé pour ne pas s'apercevoir de cette pétition de principe. Aussi, à la fin de son travail, cherche-t-il à procéder à un vrai replâtrage. Hilbert introduit ensuite deux objets simples 1 et = et envisage toutes les combinaisons de ces deux objets, toutes les combinaisons de leurs combinaisons, etc. Il va sans dire qu'il faut oublier la signification habituelle de ces deux signes et ne leur en attribuer aucune". Plus loin, Poincaré continue : "Poursuivons l'exposé des idées de Hilbert. Il introduit deux axiomes qu'il énonce dans son lagage symbolique mais qui signifient, dans le langage des profanes comme nous, que toute quantité est égale à elle-même et que toute opération faite sur deux quantités identiques donne des résultats identiques... Pour lui, les mathématiques n'ont à combiner que de purs symboles et un vrai mathématicien doit raisonner sur eux sans se préoccuper de leur sens. Aussi ses axiomes ne sont pas pour lui ce qu'ils sont pourle vulgaire" (12). J'aimerais continuer de citer Poincaré mais je ne me permets pas d'abuser de votre temps. C'est pour cela que je reviens à la conférence de Hilbert pour mentionner ce passage où il a présenté pour la première fois l'idée originale sur laquelle s'appuiera la métamathématique : "Nous regardons la démonstration elle-même comme une notion mathématique : C'est un Ensemble fini dont les éléments sont reliés par des Propositions, lesquelles affirment que ladite démonstration permet de conclure des Axiomes... à la Proposition. Tout revient alors à montrer qu'une semblable démonstration implique contradiction et ne saurait par suite, selon nos conventions être considérée comme existante". Voilà donc énoncé le point de vue général de la théorie de la démonstration par lequel Hilbert pensait pouvoir consolider les mathématiques classiques. Mais Poincaré, jetant sur ces lignes un regard indifférent, continue : "La fin du mémoire de M. Hilbert est tout à fait énigmatique et nous n'y insisterons pas. Les contradictions s'y accumulent ; on sent que l'auteur a vaguement conscience de la pétition de principe qu'il a commise, et qu'il cherche vainement à replâtrer les fissures de son raisonnement. Qu'est-ce à dire ? Au moment de démontrer que la définition par l'axiome d'induction complète n'implique pas contradiction, M. Hilbert se dérobe comme se sont dérobés MM. Russel et Couturat, parce que la difficulté est trop grande". Poincaré termine son article avec un compliment et, bien entendu, un dernier persiflage : "En résumé, MM. Russel et Hilbert ont fait l'un et l'autre un vigoureux effort ; ils ont écrit l'un et l'autre un livre plein de vues originales, profondes, et souvent très justes. Ces deux livres nous donneront beaucoup à réfléchir et nous avons beaucoup à y apprendre. Parmi leurs résultats, quelques uns, beaucoup même, sont solides et destinés à demeurer. Mais dire qu'ils ont définitivement tranché le débat entre Kant et Leibniz et ruiné la théorie kantienne des mathématiques, c'est évidemment inexact. Je ne sais si réellement ils ont cru l'avoir fait, mais s'ils l'ont cru, ils se sont trompés". Hilbert a passé sous silence les observations de Poincaré et pendant bien des années il n'est plus revenu sur le thème de l'axiomatisation des mathématiques. Constance Reid, la biographe de David Hilbert, mentionnant aussi ce fait, écrivait : "Après cela, Hilbert n'a plus continué ses propositions de Heidelberg. Il s'est occupé de la théorie des équations intégrales et, en même temps, à la suggestion de Minkowski, et dans sa compagnie, il a commencé une étude sur la physique classique" (13). Par ailleurs, il semble que Poincaré a considéré " cet incident" comme clos car, plus tard, lui aussi n'a plus rien mentionné dans ces écrits sur la tentative de Hilbert d'introduire dans l'arithmétique "ce caractère purement formel". On trouve une preuve des plus concluantes, dans le rapport présenté par Poincaré à l'Académie des Sciences hongroise, en 1910, en vue de décerner à David Hilbert, le Prix Bolyai pour son activité scientifique de 1905-1909 et ses recherches antérieures (14). Ce rapport où pas un mot n'est gaspillé en vain, commence par cette mention élogieuse : "Les problèmes traités par M. Hilbert sont tellement variés et leur importance est si évidente qu'un long préambule ne nous semble pas nécessaire. Je crois préférable d'entrer immédiatement dans l'exposé détaillé de ses principaux Mémoires. Le lecteur, en présence de résultats si considérables, tirera la conclusion lui-même" (15). Les résultats, dont parle Poincaré, sont groupés dans l'ordre suivant : "Les invariants, le nombre e , Arithmétique. Dans cette dernière partie il s'agit "des travaux arithmétiques sur les corps algébriques, sur l'étude des corps relativement abéliens, sur le théorème de Waring, etc., mais pas un mot sur ses travaux relatifs aux fondements de l'arithmétique ou sur son essai de l'axiomatiser. Par contre, dans la section suivante, intitulée "Géométrie", nous lisons dès le début : "J'arrive aux travaux si originaux de M. Hilbert sur les fondements de la géométrie". Et, il continue par une ample et profonde analyse des résultats obtenus par Hilbert dans ce domaine. Même dans la dernière partie, intitulée : "Divers" ou dans les "Conclusions" on ne trouve aucune allusion à ses deux communications faites au Congrès de 1900 et de 1904, ni aux autres articles écrits en vue de formaliser l'arithmétique.

Il apparait, peut être, que l'assurance de Hilbert dans son projet d'axiomatiser l'Arithmétique a été, en quelque sorte, ébranlée par "la fine ironie et la belle éloquence de Poincaré". L'expression appartient à Jules Tannery qui nous a appris aussi que "le grand mathématicien et philosophe" avait l'habitude "de cogner joyeusement sur les principes, pour entendre s'ils sonnent creux" (16). Serait-ce, par hasard, de cette manière que l'intuition de Poincaré lui a fait entendre quelque chose de creux dans le formalisme proposé par Hilbert ? Et, le même son creux lui a conseillé de ne plus insister sur ce sujet, dans son "Rapport" concernant les travaux de Hilbert ? C'est possible, car Poincaré nous a parlé plusieurs fois de son don d'intuition. Par exemple, dans "L'invention mathématique" (17) où il considère l'intuition comme "le sentiment de l'ordre mathématique, qui nous fait deviner des harmonies et des relations cachées" (18). Encore dans "L'intuition et la Logique en Mathématique" (o.c.9, pag.20) il affirme : "pour faire l'Arithmétique, comme pour faire la Géométrie, ou pour faire une autre science quelconque, il faut autre chose que la logique pure. Cette autre chose, nous n'avons pour la désigner d'autre mot que celui d'intuition" (19).

Si j'ai insisté sur les témoignages de Poincaré relatifs à son don d'intuition c'est parce queje ne vois pas un autre moyen d'expliquer son opposition, par principe, à la certitude absolue de Hilbert que seulement le formalisme sauvera définitivement la mathématique de l'inquiétante question de la non-contradiction . Et son intuition s'avèrera vraie plus tard, par le théorème de Gödel. Mais, jusqu'alors il s'écoulera encore deux décennies. Dans cet intervalle, cinq ans après la mort de Poincaré, Hilbert est revenu sur le problème jadis abandonné. Sa conférence "Pensée axiomatique" tenue à Zürich en 1917, apparaissait plutôt comme une réminiscence. Il répétait, en systématisant, les idées exprimées douze ans auparavant : "Si nous considérons de plus près une théorie déterminée, nous constatons invariablement que l'édifice des concepts doit avoir pour base dans le domaine scientifique un nombre restreint de propositons exceptionnelles qui suffisent à elles seules à construire tout l'édifice d'après des principes logiques. Tous ces principes fondamentaux peuvent, à un premier point de vue, être envisagés comme les axiomes de domaines scientifiques spéciaux... C'est surtout dans les mathématiques pures que ce point de vue s'affirme avec netteté". Et, plus loin, après avoir discuté largement le problème de l'indépendance des axiomes et de l'absence de contradictions, il arrive aussi à la théorie de la démonstration. "Tous les problèmes essentiels que je viens de caractériser...me paraissent un champ important dont la découverte est toute récente. Pour conquérir ce champ nous devons, c'est ma conviction, considérer comme l'objet d'une recherche à part le concept de la démonstration spécifiquement mathématique...". Mais, de nouveau, les problèmes exposés ici sont restés encore quelques années dans la phase de projet, car, à la fin de la conférence, Hilbert reconnaissait que : "La réalisation de ce programme constitue une tâche qui pour le moment est certes loin d'être achevée" (20). Ce qui stimula Hilbert à reprendre ses recherches sur la formalisation complète des mathématiques, c'est-à-dire dans laquelle tous les éléments et toutes les étapes du raisonnement se trouvent formalisés, a été "encore la grande crise des mathématiques", car il espérait qu'ainsi il pourrait établir une théorie mathématique capable "d'écarter définitivement tous les doutes en la parfaite sécurité du raisonnement mathématique, créée par la découverte des antinomies et les amputations demandées par les intuitionistes" (21). Bien que l'usage de symboles mathématiques ait conduit depuis longtemps à une certaine formalisation, la formalisation complète, celle dans laquelle toutes les expressions mathématiques ou logiques soient réduites au schéma purement formel, a été imaginée par

Hilbert (22). Pour établir la preuve de la cohérence interne de cette théorie formalisée, il a fallu prendre cette formalisation même comme objet d'une nouvelle étude mathématique, c'est-à-dire lui superposer une métamathématique. L'analyse métamathématique doit donc prendre comme objet le système des expressions utilisées dans la théorie formalisée, abstraction faite de leurs significations. Mais, ainsi qu'observe Bourbaki (o.c.7, pag.58) ; "reconnaissant implicitement le bien fondé de la critique de Poincaré, Hilbert admet qu'en métamathématique les raisonnements arithmétiques utilisés ne peuvent se fonder que sur notre intuition des entiers (et non sur l'arithmétique formalisée) pour ce faire, il paraît essentiel de restreindre ces raisonnements à des procédés finis". Or, justement ce caractère finitiste, qu'a imposé Hilbert à la métamathématique, a conduit sa théorie à un échec et, au lieu de pouvoir "démontrer, une fois pour toutes que la contradiction était impossible en mathématique" le théorème de Gödel a prouvé qu'il est impossible d'établir la non-contradiction de l'arithmétique si dans la démonstration n'intervient pas de moyen d'inférences plus fortes que celles de la métamathématique. De plus, Gödel a démontré que tout système axiomatique est ou incomplet ou indécidable, en construisant effectivement une proposition formelle qui n'appartenait pas au système considéré, ni elle-même ni sa négation. En démontrant qu'il existe des propositions arithmétiques vraies mais qui ne proviennent pas du groupe d'axiomes considérés, la métamathématique construite par Hilbert recevait un caractère limitatif, ne pouvant démontrer sa propre non-contradiction par ses propres moyens. Voici le commentaire de Gonseth, qu'on trouve dans la conférence : "Les mathématiques et la réalité" tenue en 1974 à Luxembourg, qui résume bien la situation : "Je rappellerai le projet de formalisation de l'ensemble des mathématiques dites classiques (c'est-à-dire appliquant sans restriction le principe du tiers exclu), projet que Hilbert présenta au Congrès International de Bologne en 1928. L'effectuation de ce projet, dont le succès semblait ne lui faire aucun doute, devait lui permettre de répondre aux critiques de l'Intuitionisme brouwerien. En collaboration avec M. Bernays, il avait en effet imaginé une méthode de démonstration permettant de fournir la preuve que jamais le déploiement formalisé de l'une ou l'autre des disciplines mathématiques ne pourrait aboutir à une formule interprétable comme une contradiction... Pour distinguer la mathématique ainsi mise en oeuvre de l'ensemble des mathématiques à formaliser, on lui avait donné un nom : celui de métamathématique... Le théorème de Gödel a mis fin à cet espoir". (o.c.22, pg.32).

C'est ainsi, nous pouvons le dire, que s'est achevé la controverse de Poincaré - Hilbert concernant le formalisme. Bien que l'intuition de Poincaré eût averti Hilbert que la formalisation de l'arithmétique ne serait pas capable d'établir sa cohérence interne, peut-on affirmer, en utilisant la terminologie sportive, que le score final a été 1 à 0 en faveur de Poincaré ? Quoiqu'il semblât alors qu'il en serait ainsi, l'avenir l'a transformé en 1 à 1. Et cela, parce que les résultats de Gödel qui ont imposé certaines limitations n'ont pas supprimé le projet hilbertien de formaliser la mathématique. Par l'emploi de symboles concis, destinés à résumer de longues phrases explicatives, la conception de système formel, introduite par Hilbert, s'est montrée un élément unifiant et aussi bien fécond dans le développement ultérieur de la mathématique. Il n'y a personne de plus indiqué que P. Bernays pour envisager ce sujet. Et voici ce qu'il disait en 1938 : "La théorie de la démonstration vient de passer par une sorte de crise, et plusieurs en ont pris déjà prétexte pour déclarer que l'entreprise hilbertienne avait échoué. Cette opinion s'explique du fait que le programme proposé par Hilbert pour la théorie de la démonstration de 1922-1927, a besoin selon toute apparence, d'être révisé ; la révision portant avant tout sur les fondements méthodiques. En termes techniques, il s'agit de ceci : Pour les raisonnements métamathématiques, on a besoin de moyens plus forts que ceux auwquels Hilbert envisageait tout d'abord de se restreindre, dans le sens de la pensée finie. Le besoin d'un tel élargissement des méthodes se fit déjà sentir à propos du problème - qu'on croyait avoir élucidé - de la non-contradiction du formalisme arithmétique intégral. A ce propos, il se révéla que le point de vue finitiste de Hilbert n'est pas équivalent, comme il avait paru tout d'abord, au point de vue intuitionniste de Brouwer. Gödel a pu montrer que, dans le domaine de la théorie des nombres entiers, tous les raisonnements classiques peuvent être transformés en raisonnements admis par l'intuitionnisme, à l'aide d'une nouvelle interprétation relativement simple. Pour le formalisme arithmétique, Gentzen a fourni une démonstration de non-contradiction dont les suppositions méthodiques représentent un terme intermédiaire entre le point de vue finitiste et l'intuitionnisme ... Par ailleurs, dans le jugement porté sur les résultats de la théorie de la démonstration, il faut relever que les démonstrations de la non-contradiction du formalisme arithmétique ne représentent aucunement les seuls progrès réalisés par les recherches métamathématiques dans les dernières années. En particulier, dans les problèmes de la décidabilité et de la calculabilité effective, des résultats très remarquables ont été obtenus par les travaux de Gödel, Church, Turing, Klein et Rosser. La métamathématique a d'ores et déjà une signification telle que son importance peut être appréciée indépendamment de toute doctrine philosophique sur les fondements" (23).

Ainsi, de plus en plus, le formalisme est devenu un outil de nouvelles découvertes. Citons à cet égard, encore l'opinion de Jean Cavaillès : "La métamathématique, ou théorie de la démonstration, devient la science véritable : ses objets seront les assemblages de signes ou formules, leur organisation en unités de dépendance ou théories. C'est dans le groupement de celles-ci, l'adjonction d'axiomes, l'épreuve de leurs fécondités relatives que consiste le travail réel, capable de procurer une vérité. La pensée est d'ailleurs toujours sûre d'elle-même, puisque la pleine conscience accompagne chacune de ses démarches, en nombre fini" (24). Dans sa conférence : "La formalisation comme suggestion rigoureuse" (25) R. Feys observe aussi : "Aux origines de la formalisation complète, on lui a reproché son apparente stérilité. De fait, elle a déçu et devait décevoir les ambitions gratuites de ceux qui en attendaient une méthode universelle, facile, mécanique, pour vérifier tous les résultats acquis et pour en atteindre d'autres. La formalisation est un instrument de rigueur et pas un instrument de facilité ou d'uniformisation" (26). De même, dans l'article que nous avons rappelé, Gonseth fera observer : "La formalisation peut être envisagée comme une procédure permettant de faire un pas de plus vers la constitution des structures rendues indépendantes des figurations ou des actualisations où elles pourraient apparaître réalisées,... Les résultats de Gödel ont certainement modifié la perspective, les motivations, je dirais même la philosophie de l'intention formalisatrice. Le projet de formaliser les mathématiques dans leur tout ou dans telle de leur partie n'en fut pas moins poursuivi. L'intention de conférer ainsi un statut d'autonomie aux mathématiques en en faisant une science purement formelle n'était pas nécessairement liée au projet de fournir la preuve de l'impossibilité d'une contradiction. Rien ne semblait plus devoir interrompre le foisonnement des études formalisatrices. Pour certains, la formalisation semble peu à peu prendre la valeur d'un but en soi" (o.c.22 pg.33)

Méditant cette controverse, je me suis demandé pourquoi ces deux hommes remarquables qui ont eu toutes les qualités nécessaires pour devenir de bons amis, ne l'ont pas été ? N'ont-il pas senti le besoin de se réjouir ensemble de leurs découvertes, d'admirer ensemble certains résultats ou de sonder ensemble l'inconnu mathématique ? Envisageant l'oeuvre de Poincaré, Emile Picard écrivait : "On pourrait dire de Henri Poincaré qu'il ne fut pas seulement un grand mathématicien, mais la mathématique elle-même. Dans l'histoire des sciences mathématiques peu de mathématiciens ont eu, comme lui, la force de faire rendre à l'esprit mathématique tout ce qu'il était à chaque instant capable de donner... l'admiration n'en est pas moins vive pour le noble penseur, le dialecticien subtil et l'écrivain au style personnel où rivalisent l'esprit géométrique et l'esprit de finesse" (27). Richard Courant disait, lui aussi, de son professeur : "David Hilbert a été un des plus grands mathématiciens de son temps. Son oeuvre, sa personnalité scientifique pleines d'enthousiasme ont influencé profondément le développement des sciences mathématiques jusqu'à présent. Sa vision, l'indépendante originalité de ses pensées et l'ampleur des problèmes abordés ont fait de lui un pionnier dans beaucoup de domaines des mathématiques. Il a été une personnalité unique, profondément immergée dans son oeuvre et totalement dévouée à sa science, un professeur et un inspirateur du plus grand ordre, toujours généreux, infatigable et persévérant dans tous ses efforts" (o.c.13, pg.V). Constance Reid nous a relaté diverses rencontres entre ces deux savants. La première a été à Paris, en 1886, quand Hilbert avait 24 ans et a écouté les cours de Poincaré. Bien qu'il fût seulement de 8 ans plus âgé que Hilbert, Poincaré était considéré alors comme le plus renommé des mathématiciens, ayant plus de 100 travaux publiés. Dans une lettre adressée à son professeur Felix Klein, qui lui avait conseillé de visiter Paris et de se lier d'amitié avec Poincaré, il lui écrivit qu'il trouvait les leçons de Poincaré très claires et pour lui faciles à comprendre. Seulement, en ce qui concerne l'amitié avec Poincaré, les choses ne paraissent pas si simples. Dans la visite que Hilbert lui avait faite, celui-ci s'est montré assez réservé, comme si une certaine timidité ne leur avait pas permis de franchir le seuil. En plus de divers Congrès mathématiques où ils se sont toujours rencontrés, en 1909 Hilbert a invité Poincaré à l'Université de Göttingen pour faire quelques conférences. L'invitation ayant été acceptée, Poincaré a parlé sur "Les équations intégrales" et sur "La théorie de la Relativité". Mais, bien que Hilbert se soit adressé toujours à Poincaré en l'appelant "Mon cher ami" et en le nommant "le plus splendide mathématicien de sa génération", Constance Reid avait remarqué que leurs relations étaient restées toujours réservées pour ne pas dire froides. (o.c.13, pg.120). Mais, il est certainement hors de doute qu'ils se sont estimés réciproquement. D'une part, témoigne le Rapport de Poincaré de 1910, qui recommande Hilbert pour le Prix Bolyai, d'autre part c'est dans une conférence de 1930, 18 ans après la mort de Poincaré, que Hilbert saisit l'occasion de rappeler admirativement sa figure. Et voici comment : Observant que "l'instrument mathématique joue le rôle de médiateur entre la théorie et la pratique, la pensée et l'observation", Hilbert ajouta : "Cependant les mathématiciens refusent de mesurer la valeur mathématique à celle de leurs applications". Il appuie cette affirmation par des citations extraites de Gauss, Hermite, Kronecker, Minkowski et d'autres mathématiciens pour continuer : "Poincaré, le mathématicien le plus brillant de sa génération, également physicien et astronome profond, avait une opinion semblable. Poincaré critiqua un jour avec une sévérité exemplaire Tolstoï pour qui la théorie de "la Science pour la Science" était absurde... Poincaré répond à Tolstoï que si les hommes s'étaient entièrement décidés d'après son opinion, aucune science n'aurait pu naître. Il suffit d'ouvrir les yeux (ainsi parle Poincaré) pour voir que les conquêtes de l'industrie qui ont enrichi les hommes n'auraient jamais vu le jour si ces hommes pratiques avaient seuls existé et s'ils n'avaient été devancés par ces fous désintéressés qui ne pensaient jamais à l'utile. Nous sommes tous du même sentiment" (28).

Oui, Poincaré et Hilbert se sont estimé réciproquement mais ils n'ont pas été liés par ce sentiment sublime qu'on appelle l'amitié. Leur cas n'est quand même pas isolé. En commençant par l'antiquité, l'histoire de la mathématique a enregistré beaucoup d'autres cas semblables. Par exemple, le couple Archimède-Apollonius de Perga. Le souvenir de leurs controverses est resté enregistré seulement par le titre "Okitôkion" ("Des naissances rapides") qu'a porté un livre, aujourd'hui perdu, écrit par Apollonius. Ainsi que nous relate Eutoche, dans cette oeuvre, l'auteur satirise Archimède sur deux de ses travaux : "La mesure du cercle" et "L'Arénaire", en montrant d'une part, une méthode plus précise d'approximer la valeur de Π et, d'autre part en présentant un système de numération qui diffère de celui proposé par Archimède. Plus proches de nous, rappelons Descartes et Pascal. Dans les "Pensées" de Pascal on trouve cette phrase : "Ecrire contre ceux qui approfondissent la science : Descartes". Mais, plutôt, lisons ensemble ce qu'a écrit Emile Picard : "Pascal et Descartes. Que de contraste entre ces deux grands génies ! Dans sa vision de la science, Pascal a montré trop de prudence et Descartes a fait preuve de trop d'audace. Jamais esprits ne furent plus dissemblables et moins faits pour se comprendre. Si nous sommes tentés de sourire de l'assurance avec laquelle Descartes trouvait des explications pour toutes choses nous nous étonnons de l'indifférence de Pascal pour les points de vue féconds introduits par les idées cartésiennes" (29). Rappelons seulement encore, à cause de son caractère tragique, le couple Kronecker - Cantor. Leopold Kronecker restera dans l'histoire de la mathématique par l'affirmation : "Dieu a créé les nombres entiers, tout le reste est l'oeuvre de l'homme". Et, la controverse avec Georg Cantor a été la conséquence de cette croyance. Dès 1874, quand Cantor a publié son premier mémoire sur la théorie des ensembles et sur les nombres algébriques, avec ses considérations sur les nombres transfinis, la querelle a commencé. Mais comment ? Kronecker a considéré ces travaux comme une preuve de folie et il l'a attaqué d'une telle manière que le pauvre Cantor a dû trouver son calme dans une maison de santé !

Cette mésentente a préoccupé aussi Poincaré et dans ces écrits il nous donne une réponse. Par exemple, dans "Les mathématiques et la Logique", il disait : "De tout temps, il y a eu en philosophie des tendances opposées et il ne semble pas que ces tendances soient sur le point de se concilier. C'est sans doute parce qu'il y a des âmes différentes et qu'à ces âmes nous ne pouvons rien changer. Il n'y a donc aucun espoir de voir l'accord s'établir, parce qu'elles ne parlent pas la même langue et qu'il y a des langues qui ne s'apprennent pas" (o.c.1, pg.161). D'une autre manière il revient sur ces choses dans Introduction de son livre "La valeur de la science" ; "Que l'esprit du mathématicien ressemble peu à celui du physicien ou à celui du naturaliste, tout le monde en conviendra ; mais les mathématiciens eux-mêmes ne se ressemblent pas entre eux ; les uns ne connaissent que l'implacable logique, les autres font appel à l'intuition et voient en elle la source unique de la découverte, et ce serait là une raison de défiance. A des esprits si dissemblables, les théorèmes mathématiques eux-mêmes pourront-ils apparaître sous le même jour ? La vérité qui n'est pas la même pour tous, est-elle la vérité ? Mais en regardant les choses de plus près, nous voyons comment ces ouvriers si différents collaborent à une oeuvre commune qui ne pourrait s'achever sans leurs concours. Et cela déjà nous rassure" (o.c.9 pg. 5).

Non seulement cela nous rassure mais encore le fait qu'on connait aussi des amitiés bien cimentées entre mathématiciens. Rappelons le cas Arthur Cayley - James J. Sylvester ou Georg Cantor - Richard Dedekind ou, enfin celui le plus incroyable, le plus enviable : le groupe Bourbaki !

Florica T. Campan

NOTES

1. Henri Poincaré : "Le libre examen en mathématique" dans : "Dernières pensées". Flammarion, Paris, 1933, pg. 330.

2. Dans plusieurs articles H. Poincaré a analysé minutieusement et souvent critiqué l'oeuvre principale de Hilbert "Grundlagen der Geometrie". Par exemple, dans "Les fondements de la géométrie" (o.p.1, pg.261) d'où nous citons : "M. Hilbert a, pour ainsi dire, cherché à mettre les axiomes sous une forme telle qu'ils puissent être appliqués par quelqu'un qui n'en comprendrait pas le sens, parce qu'il n'aurait jamais vu ni points, ni droite, ni plan... On pourra ainsi construire toute la géométrie, je ne dirais pas précisément sans y rien comprendre, puisqu'on saisira l'enchaînement logique des propositions, mais tout au moins sans y rien voir... On pourrait confier les axiomes à une machine à raisonner... et on en verrait sortir toute la géométrie" (o.c.1 pg.267). De même dans : "Pourquoi l'espace a trois dimensions" : "M. Hilbert a cherché à fonder une géométrie qu'on a appelée rationnelle parce qu'elle est affranchie de tout appel à l'intuition. Elle repose sur un certain nombre d'axiomes ou de postulats qui sont regardés, non comme des vérités intuitives, mais comme des définitions déguisées" (o.c.1, pg.94). Ou, encore dans : "La logique de l'infini", ou nous lisons : "au début de la géométrie, M. Hilbert introduit des choses.... Pour que cela soit légitime, il faut démontrer que les axiomes ainsi introduits ne sont pas contradictoires, et M. Hilbert y a parfaitement réussi en ce qui concerne la géométrie, parce qu'il supposait l'analyse déjà constituée" (o.c.1, pg.122).de même dans : "Les logiques nouvelles", Poincaré ajoute : "Quel est en somme le théorème fondamental de la Géométrie ? C'est que les axiomes de la Géométrie n'impliquent pas contradiction et, cela, on ne peut le démontrer sans le principe d'intuition. Comment Hilbert démontre-til ce point essentiel ? C'est en s'appuyant sur l'Analyse et par elle sur l'Arithmétique, et par elle sur le principe d'induction. Et si jamais on invente une autre démonstration, il faudra encore s'appuyer sur ce principe, puisque les conséquences possibles des axiomes, dont il faut montrer qu'elles ne sont pas contradictoires, sont en nombre infini" (dans "Science et Méthode, pg.185).

3. Il est bien connu qu'il existe deux méthodes fondamentales pour présenter les systèmes mathématiques : la méthode génétique ou constructive et la méthode axiomatique. La méthode constructive est fondée sur les généralisations successives qui découlent des notions simples préalablement établies. Pour la géométrie, les choses sont différentes car elle ne peut accepter que le point soit à la base du continuum. C'est par les définitions et par les axiomes que Euclide a introduit les points, les lignes et les surfaces.

4. David Hilbert : Uber den Zahlbegriff. Jahrsber. Deutsch. Math.Ver. T.8, 1900, pg.84 .

5. Dans "Proceeding of Symposia in Pure mathematics, vol.XXVIII, Amer. Math. Soc. 1976 sont publiés les conférences du "Symposium sur le développement mathématique ultérieur des problèmes proposés par Hilbert en 1900". Les pages 93-131 contiennent le travail de G. Kreisel : "What have we learnt from Hilbert's second problem"?

6. D. Hilbert : Problèmes mathématiques. L'Enseignement mathématique. T.II, 1900, pg.349.

7. N. Bourbaki : Elements d'histoire des mathématiques. Hermann, Paris, 1969, pg.52 .

8. H. Poincaré : "Le nombre et la grandeur", dans la science et l'Hypothèse, Paris, 1925, pg.20-28.

9. H. Poincaré : "L'intuition et la logique en mathématique" dans : La valeur de la Science. Paris, 1925, pg.25 .

10. D. Hilbert : "Sur les fondements de la logique et de l'arithmétique", dans : l'Enseignement mathématique, TVII, 1905, pg.89 .

11. H. Poincaré : "Les mathématiques et la Logique", dans Science et Méthode. Paris, 1927, pg.152 et 156 .

12. H. Poincaré : "Les Logiques nouvelles" Chap.VI : La logique de Hilbert. (o.c.11, pg.179) .

13. Constance Reid : Hilbert. Springer-Verlag, Berlin, 1970, pg.100 .

14. Rappelons d'abord que ce prix a été décerné pour la première fois en 1905, quand l'Académie hongroise des sciences a décidé de fonder ce prix international, qui devait porter le nom de Prix Bolyai, pour être attribué au mathématicien qui avait le plus contribué au progrès de la mathématique pendant les dernières 25 années. Les seuls mathématiciens en vue étant Poincaré et Hilbert, c'est Poincaré qui a reçu le prix avec unanumité de voix. D'après le règlement, ce prix devait être ensuite décerné de cinq en cinq ans et, en 1910, H. Poincaré a été désigné comme Rapporteur de la Commission élue par l'Académie pour établir le nouveau candidat du second prix Bolyai.

15. Procès-verbal : Prix Bolyai : Bull. Sci. Math, T.35, I, Paris, 1911, pg.67 .

16. Jules Tannery : "La philosophie de M. Henri Poincaré" dans : "Science et Philosophie". Paris, 1924, pg.68 .

17. H. Poincaré : "L'invention mathématique". (o.c.11, pg.43)

18. De même que Descartes, qui disait : "J'entends par intuition non la croyance au témoignage des sens en les jugements trompeurs de l'imagination, mais la conception d'un esprit sain et attentif, si facile et si distinct qu'aucun doute ne reste sur ce que nous comprenons", Poincaré a considéré l'intuition comme la faculté de vision intellectuelle directe, une opération de l'esprit que l'on oppose à la connaissance logique.

19. Dans le même article (pg.26) Poincaré ajoute encore : "L'analyse pure met à notre disposition une foule de procédés dont elle nous garantit l'infaillibilité ; elle nous ouvre mille chemins différents où nous pouvons nous engager en toute confiance ; nous sommes assurées de n'y pas rencontrer d'obstacles ; mais, de tous ces chemins, quel est celui qui nous mènera le plus promptement au but ? Qui nous dira lequel il faut choisir ? Il nous faut une faculté qui nous fasse voir le but de loin, et cette faculté, c'est l'intuition. Elle est nécessaire à l'explorateur pour choisir sa route, elle ne l'est pas moins à celui qui marche sur ses traces et qui veut savoir pourquoi il l'a choisie".

20. D. Hilbert : "Pensée axiomatique". L'Enseign. Math. T.XX, 1918, pg.122 .

21. On sait bien que "la grande crise des mathématiques", selon l'expression de H. Weyl, consistait dans une série de difficultés apparues dans la théorie des ensembles, difficultés considérées de nature purement logique ou, plutôt de nature philosophique. C'est pourquoi les mathématiciens ont cherché de trouver les assurances de la non-contradiction en réexaminant de près les procédés de raisonnement utilisés dans les fondements des mathématiques. Mais l'intention s'est transformé bientôt dans une polémique entre les logisticiens, les intuitionistes, les formalistes, etc. Le formalisme, conçu par Hilbert, a été inspiré par la méthode de formalisation utilisée par les logiciens qui ont montré qu'on peut exprimer les raisonnements mathématiques par des symboles, réduisant ainsi les démonstrations à des règles. Celles-ci permettaient de passer d'une série de formules à d'autres. La non-contradiction devant être prouvée en démontrant qu'il est impossible de déduire deux formules contradictoires A et $\bar{A}$.

22. Je veux rappeller la controverse qui opposa, dans les premières années de ce siècle, Borel et Lebesgue, ainsi que quelques autres mathématiciens français à Hilbert et aux tenants du formalisme en mathématique." Là où Hilbert se bornait à exiger la non-contradiction des théories, Borel et Lebesgue réclamaient une certaine forme d'existence des êtres mathématiques. Les constructions proposées par les formalistes et faisant intervenir notamment des ensembles non dénombrables paraissaient inacceptables à leurs adversaires, parce qu'ils ne correspondaient à aucune réalité". (G. Hirsch : Mathématisation et réalité, dans : "Actes du Colloque sur "Les mathématiques et la réalité". Séminaire de Mathématique de Luxembourg, 1974. pg.12 .

23. F. Gonseth : "Sur les questions méthodologiques actuelles de la théorie hilbertienne de la démonstration" dans : "Les entretiens de Zürich sur les fondements et la méthode des sciences mathématiques, 1938". Zürich, 1941, pg.144 .

24. Jean Cavaillès : Axiomatique et système formel. II, Paris, Herman, 1928, pg.98 .

25. R. Feys : "La formalisation comme suggestion rigoureuse" dans : "Les méthodes formelles en axiomatique" Colloques internat. C.N.R.S. Paris, 1950, pg.55

26. L'article de Feys continue ainsi : "Le domaine propre des méthodes formalisées est celui de la recherche des propriétés déductives : constance, perfection (suffisance), indépendance. Dans ce domaine les méthodes formalisées ont ouvert des perspectives nouvelles ou ont révélé les limites insoupçonnées au raisonnement plutôt que de donner aux questions une solution simpliste et définitive....
Un système formalisé peut également servir à exprimer des lois de la nature, du fait qu'il y a correspondance entre ses symboles et les événements". Enfin, l'auteur termine son étude en citant cette maxime d'Héraclite que je trouve trop belle pour la laisser de côté "Le Dieu qui est à Delphes -Apollon, le Dieu de l'oracle- ne révèle pas, il ne cache pas, il s'exprime par signe". Il suggère par signes, dit R. Feys, et ces signes énigmatiques ne sont pas une tromperie. Mais à nous de les interpréter".

27. Emile Picard : "L'oeuvre de Henri Poincaré" dans : Discours et mélange. Paris, 1922, pg.201 .

28. D. Hilbert : "La connaissance de la nature et la logique". L'Enseig. Math. T.30, 1931, pg.22 .

29. Emile Picard : "Pascal, mathématicien et physicien" dans "Eloges et Discours académique". Paris, 1931, pg.20 .