MICHÈLE EMMER

Observation sur art et mathématiques

Séminaire de Philosophie et Mathématiques, 1984, fascicule 4
« Art et mathématiques », , p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1984___4_A1_0>

OBSERVATION SUR ART ET MATHEMATIQUES

par

MICHELE EMMER
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
UNIVERSITA' DI ROMA I

"The mathematician's patterns, like the painter's or the poet's must be beautiful ; the ideas, like the colours or the words, must fit together in a harmonious way. Beauty is the first test : there is no permanent place in the world for ugly mathematics'. (1)

Ainsi écrivait, il y a plusieurs années, le mathématicien anglais G.H. Hardy dans son fameux livre 'A Mathematician's Apology', publié en 1940. Dans le volume 'Les grands courants de la pensée mathématique' paru en 1962, Le Lionnais, dans le spécimen 'La Beauté en Mathématiques', écrit entre autres :

"C'est ainsi que la beauté se déploie en mathématiques comme dans les autres sciences, comme dans les arts, comme dans la vie et comme dans la nature. Parfois comparable à celle de la musique pure, de la grande peinture ou de la poésie, les émotions qu'elle éveille sont le plus souvent d'une nature différente, qui ne peut guère se comprendre lorsqu'on n'en a pas ressenti en soi-même l'illumination" (2).

Plus récemment René Thom a examiné les rapports entre Art et Science :

"L'espoir est évidemment de retrouver, par delà les activités 'a priori' si différentes du savant et de l'artiste, une origine commune". En particulier il observe :

"Etant entendu qu'il s'agit de jeter un pont entre la Science et l'Art, il n'en reste pas moins que ce passage peut être parcouru selon deux directions : soit de l'art vers la science, soit, au contraire, de la science vers l'art. De parcours de premier sens...

Il s'agit, le plus souvent, d'artistes créateurs qui ont mis au point une 'recette' personnelle.... qu'ils ont tenté de chercher dans les grandes images de la science actuelle une illustration, voire une justification de leurs procédés de création......

A l'opposé des artistes qui cherchent à trouver dans la culture scientifique un répondant à leurs initiatives créatrices, je voudrais, empruntant la passerelle dans l'autre sens, exposer la perplexité du scientifique en face de l'enigme de la beauté. Peut-on fonder, pourrait-on rêver une théorie 'scientifique' de l'esthétique ?" (3)

Dans sa conférence, faite le 7 mai 1981 à Munich, Borel a traité le thème 'Mathematics : Art and Science' :

"...An usual answer is that mathematics is to a great extent an art, an art whose development has been derived from, guided by, and judged according to aesthetic criteria. For the lay person it is often surprising to learn that one can speak of aesthetic criteria in so grim a discipline as mathematics. But this feeling is very strong for the mathematician, even though it is difficult to explain : what are the rules of this aesthetic ? Wherein lies the beauty of a theorem, of a theory ?" (4)

D'un côté donc chercher d'utiliser critères esthétiques afin de comprendre les règles de la recherche mathématique, de l'autre chercher de construire une méthode afin d'expliquer la beauté, une méthode mathématique pour l'esthétique qui soit objective comme la démonstration d'un théorème.

On a cherché en particulier d'établir une 'mesure de la beauté', c'est-à-dire d'assigner une valeur, un nombre, à un chef-d'oeuvre, de manière à pouvoir l'étudier et classifier sur la base de critères esthétiques bien exacts. Si on veut mesurer la beauté d'un tableau, on doit assigner une valeur plus élevée au tableau qui contient une plus grande beauté et vice versa. Mais il naît un problème : alors que les mesures des surfaces composées par des figures élémentaires sont facilement comparables (à moins de difficultés particulières qu'on suppose, pour simplifier, qu'elles n'existent pas), dans le cas de deux tableaux, de deux oeuvres d'art, le problème devient plus complexe ou plus simple, selon les points de vue.

Parmi les mathématiciens qui ont essayé de formuler cette 'théorie mathématique de la beauté' il y a l'américain Georges Birkhoff, qui, dans un article de 1931, a posé le problème en ces termes :

"On peut considérer que l'expérience esthétique typique est composée par trois phases successives : 1) un effort préliminaire d'attention, nécessaire pour l'acte de la perception, qui augmente en proportion à celle qu'on appelera la complexeit (C) de l'objet ; 2) le 'feeling' de valeur ou mesure esthétique (M), qui récompense cette effort ; et enfin, 3) la perception de l'objet caractérisé par une certaine harmonie, symétrie, ou ordre (O), plus ou moins caché, qui paraît nécessaire pour atteindre l'effet esthétique". (5)

Cette analyse de l'expérience esthétique nous rappelle que le 'feeling' esthétique peut être déterminé grâce à un degré peu usuel de relations harmonieuses à l'intérieur de l'objet. Plus précisément, si on considère M, O et C comme des quantités variables et mesurables, on peut écrire

$$M = \frac{O}{C}$$

et donc, comprendre dans une formule la conjecture que la mesure esthétique peut être considérée comme résultante de la densité des relations composées dans l'objet esthétique.

Si l'on admet la validité d'une telle hypothèse, nous pouvons donner du problème esthétique, la formulation mathématique suivante : à l'intérieure de chaque classe d'objets esthétiques, il faut définir l'ordre O et la complexité C de façon que soit valable la relation $M = O/C$ qui donne la mesure esthétique des différents objets de la classe. Naturellement tout le problème consiste de supposer que M, O et C soient des quantités mesurables, quantifiables avec un nombre. Il faut ajouter que les théories esthétiques de Birkhoff n'ont pas eu un grand succès parmi ceux qui s'occupent d'esthétique. Sa formule, résumable par l'axiome 'moindre complexité, plus grande beauté' n'est pas cependant si loin de l'idée que les mathématiciens et les philosophes grecs avaient de la beauté ; ils pensaient que le sens esthétique naissait de l'harmonie des proportions.

Il suffit à ce propos de penser à l'importance de la proportion dorée (6).

De cette simple observation on peut comprendre le lien très proche entre mathématiques et art, en particulier entre géométrie et art, au temps des grecs. La géométrie grecque était précisément la science des proportions, des équivalences. D'ici l'intérêt pour les figures régulières, soit planes que solides.

On ne sait pas qui fût le premier à remarquer que le nombre des polygones réguliers (par ex. triangles, carrés, pentagones, hexagones, ...) est infini ; mais la découverte la plus fascinante a été autre : le nombre des solides réguliers dans l'espace est fini, exactement cinq. Il faut rappeler que ce nombre concerne l'espace à trois dimensions, car dans des espaces de dimensions plus élevées le nombre change.

A ce propos, considérons pour un instant, les solides réguliers.

A partir de la simple observation que la somme des angles des faces d'un angoloïde doit être toujours inférieur à 360°, il est possible d'établir que les solides réguliers dans l'espace sont précisément cinq. Ce fait fascina parmi les autres, PLaton qui mit en relation les solides réguliers avec les éléments de l'espace physique. Imaginons de nous trouver à l'école d'Athènes, celle peinte par Raffaello, par exemple : Platon discute avec Aristote ayant sous son bras une copie du "Timée" , où il décrit les cinq solides et d'abord il parle de la création :

"But when the world began to get into order, fire and water and earth and air han only certain fair traces of themselves and were altogether such as everything might be expected to be in the absence of God ('Timée' , 53b). (7). Plus avant : "Let it be consistently maintained by us in all that we say that God made them as far as possible the fairest and best, out of things which were not fair and good" (T.53b). "In the first place, the, as is evident to all, fire and earth and water and air are bodies" (T.53c). "And next we have to determine what are the most beautiful bodies which are unlike one another, and of which some are capable of resolution into one another" (T.53e). "And then we shall not be willing to allow that there are any distinct kinds of visible bodies fairer than these" (T.53e). La construction faite par Platon de cinq solides réguliers est basée sur le plus beau des triangles, le seul dont le double forme un trosième triangle qui est équilatéral.

"I have now to speak of their several kinds, and show out of what combinations of numbers each of them was formed" (T.54e). Après il décrit la construction des cinq solides : "The first will be simplest", le tétraèdre, "which is the original element and seed of fire" (T., 56b). "The second species of solid is formed out of the same triangles... (T.55a). "and let us assign the element which was next in the order of generation to air" (T.56b), l'octaèdre. "And the third body is made up of 120 triangular elements, forming twelve solids angles..." (T.55b) et "the third to water" (T.56b), l'icosaèdre. "But the isosceles triangle produced the fourth elementary figure... and the figure of the body thus composed is a cube, having six plane quadrangular equilateral bases" (T.55c). "To earth let us assign the cubical form", parce que "earth is the most immovable of the four" (T.55d-e).

"There was yet a fifth combination which God used in the delineation of the Universe", le dodécaèdre.

Un des mots le plus fréquent dans la description de Platon est 'Beau'.

Après la redécouverte en Occident, à la fin du Moyen Age, des mathématiques grecques, en particulier des "Eléments" (III^{e} siècle a.C.), les artistes commencèrent à dessiner "les très beaux corps" et ceux dérivés par eux.

On peut dire que chaque livre de perspective pratique était pour la plupart une séquence d'illustrations, de différents points de vue, des solides dans l'espace.

Un des peintres bien supérieur à tous en cette oeuvre fut sûrement Palo Uccello (1397-1475), qui utilisa dans quelques-uns de ses tableaux les plus fameux, plusieurs objets géométriques, par exemple le 'mazzocchio' (usé comme couvre-chef), qui est très intéressant du point de vue perspectif.

Un autre exemple, très fameux, d'intérêt pour les solides platoniciens est celui d'Albrecht Dürer. Dans sa gravure 'Melencolia I' de 1514, paraît un solide qui a intéressé, et continue à intéresser, artistes et savants, même s'il n'est pas facile de comprendre avec quelle perspective le solide a été dessiné. Dans la gravure de Dürer il y a aussi un carré magique, en haut sur la droite, qui est considéré comme un des premiers exemples dans la monde occidental.

L'historien des mathématiques Carl Boyer a écrit que Dürer fut influencé dans son oeuvre par Luca Pacioli (1445-1514), un mathématicien très connu en ce temps là (8). Mais le livre de Pacioli 'De Divina Proportione' (paru à Venise en 1509) est connu surtout parce qu'il reproduit certains dessins des "très beaux corps" dus à la main de Leonardo da Vinci (9). En plus, une partie de cette oeuvre est attribuée à Piero della Francesca (1410-1492). Piero avait écrit un traité 'De Corporibus regolaribus' que Pacioli, son élève, avait inclus dans son livre ; après Piero représenta Pacioli sous l'apparence de Saint-Pierre dans la 'Vierge avec l'oeuf'. Un autre portrait de Pacioli fut fait probablement par Jacopo de 'Barbaris (1440-1516). Ce portrait est particulièrement intéressant parce que à droite il y a représenté un dodecaèdre, tandis qu'en haut sur la gauche il y a un rombecubeoctaèdre, comme a expliqué le mathématicien Coxeter.

A propos de Paolo Uccello il faut rappeler un autre cas intéressant : dans la basilique de Saint-Marc, à Venise, parmi les mosaïques du pavement, on trouve deux dodécaèdres étoilés composés par Paolo Uccello (10).

Il est facile de souligner, comme l'a fait le peintre et savant de Mathématiques Lucio Saffaro, que le dodécaèdre étoilé, attribué à Kepler d'un point de vue mathématique, parut de nombreuses années auparavant dans l'ouevre de l'artiste italien du Quattrocento.

Voici la description donnée par Kepler du solide qu'il appelle "stellarum duodecim planarum pentagonicarum" dans son livre 'Harmonices Mundi Libri V' paru à Linz en 1619.

Ce n'est pas l'unique cas d'un artiste qui précède un mathématicien, disons si officiel.

Un autre solide étoilé, la 'stella octangula', attribué à Kepler, a en réalité toute autre paternité. Il s'agit, en ce cas, d'un solide 'auto-dual' (un solide est dit dual d'un autre solide régulier s'ils changent entre-eux le nombre des faces et des arêtes). Comme disait Kepler, le tétraèdre est "Coelebs aut Androgynos" (célibataire ou hermaphrodite) pendant que les autres solides sont duals entre eux : le cube de l'octaèdre, l'icossèdre du dodécaèdre. Et bien, la 'stella octangula' se trouve déjà dans un dessin de Leonardo da Vinci dans le livre de Pacioli 'De Divina Proportions déjà cité : il s'agit du tableau appelé 'Octaedron elevatum'.

L'histoire des solides platoniciens ne finit certainement pas avec la Renaissance. Il suffit de regarder tout autour pour en trouver des exemples, surtout dans l'architecture. Les fameux 'Geodesic Dome' de Buckminster Fuller sont dérivées de l'icosaèdre et la même structure se retrouve dans certains types de Virus, observés au microscope électronique. Autres exemples visibles au M/E, on les trouve parmi les squelettes siliceux de certains Radiolaires, Protozoaires marins. Ces squelettes sont illustrés dans le livre reportage sur le voyage fait à la fin du dernier siècle par le navire océanographique Challenger, voyage auquel participa Haekel, l'auteur des dessins. Les illustrations non seulement ont un remarquable intérêt scientifique mais sont aussi très fascinantes d'un point de vue esthétique (11).

On a parlé jusqu'à maintenant des solides réguliers de l'espace à trois dimensions. Mais on peut considérer aussi les solides réguliers dans l'espace à quatre dimensions. Naturellement il s'agit toujours d'un espace euclidien avec une quatrième dimension spatiale (et non la 4ème dimension temporelle) . Un des six solides réguliers qui a eu un intérêt particulier parmi les artistes est l'hypercube ou cube à quatre dimensions. Nous ne pouvons pas espérer voir un objet à quatre dimensions avec nos yeux tridimensionnels, mais en revanche nous pouvons nous en faire une idée. Nous le suggère le personnage principal d'un livre très particulier qui a eu un énorme succès dans les pays de langue anglaise. Le livre s'appelle 'Flatland' et a été écrit par un théologien et professeur de mathématiques, l'anglais E.A. Abbott, en 1884. Le personnage principal du livre est un carré, qui vit à Flatland, le monde plat, à deux dimensions. Parmi les autres aventures qui se présentent au carré il y a aussi la découverte de la troisième dimension et l'essai de parvenir à la quatrième.

L'aspect le plus fascinant est donné par le contexte dans lequel le carré vit : un monde plat, sans hauteur, qui ne lui permet pas de s'apercevoir de l'éventuelle troisième dimension.

Alors, comment le carré arrive-t-il à imaginer la troisième dimension et après, la quatrième ? Par analogie. Si on vivait dans un monde avec une seule dimension, l'analogue d'un carré serait un segment et les analogues des côtés du carré les deux points extrêmes du segment. Donc, dans une seule dimension, on a un segment et deux points extrêmes. Dans le plan on a le carré avec quatre segments comme côtés. On peut continuer et considérer l'analogue du carré dans l'espace à trois dimensions, le cube. Le cube a pour côtés des carrés, précisément six. Donc on peut continuer encore et considérer le cube en quatre dimensions qui aura comme 'côtés' des cubes tridimensionnels et ainsi de suite.

Mais de cette façon nous n'avons pas encore résolu le problème de 'voir' l'hypercube. Encore une fois l'analogie nous aide, de même qu'un carré est une section d'un cube fait avec un plan, de même nous pouvons penser de sectionner l'hypercube avec notre espace tridimensionnel et observer les projections qui ont seulement trois dimensions. Il faut remarquer que lorsque le carré, dans Flatland, dit qu'il veut voir "le cube divin de la Terre à quatre dimensions", on a le première appartion officielle de l'hypercube dans la littérature.

Le livre 'Flatland' a eu une influence considérable pas seulement dans le monde anglo-saxon. On peut citer de nombreux autres exemples sur l'intérêt des écrivains de science-fiction, entre la fin du XIX^{e} siècle et le début du XX^{e}, pour la quatrième dimension, parmi les autres Wells, Hinton, Bragdon.

Comme a mis en évidence Linda D. Henderson, les artistes européens du début du XX^{e} siècle, connaissaient cette tradition littéraire et, pour certains aspects philosophiques aussi, sur la quatrième dimension, mais ils avaient d'autre part une très faible connaissance des aspects plus scientifiques mathématiques, du problème, même s'ils étaient en contact avec plusieurs mathématiciens. On parle surtout du Cubisme (12). En 1912, Gleizes et Metzinger établirent que : "Si l'on désirait rattacher l'espace des peintres à quelque géométire, il faudrait en référer aux savants non euclidiens, méditer longuement certains théorèmes de Riemman". Pour sa part Apollinaire affirmait : "... Jusqu'à présent, les trois dimensions de la géométrie euclidienne suffisaient aux inquiétudes que le sentiment de l'infini met dans l'âme des grands artistes. Les nouveaux peintres, pas plus que leurs anciens ne se sont proposés d'être des géomètres. Mais on peut dire, que la géométrie est aux arts plastiques ce que la grammaire est à l'art de l'écrivain.

Or, aujourd'hui, les savants ne s'en tiennent plus aux trois dimensions de la géométrie euclidienne. Les peintres ont été amenés tout naturellement et, pour ainsi dire, par intuition, à se préoccuper de nouvelles mesures possibles de l'étendue que dans le langage des ateliers modernes on désignait toutes ensembles et brièvement par le terme de <u>quatrième dimension</u>".

Voici donc que avec le mouvement cubiste, et en partie avec le futuriste, on assiste à une influence croissante des nouvelles idées de la géométrie sur les artistes européens, même si, comme il arrive toujours, cette influence n'est pas directe mais filtrée à travers les expériences littéraires, mystiques-philosophiques, et seulement pour une petite partie scientifique.

La naissance officielle des géométries non-euclidiennes remonte aux articles de Lobachevsky "Sur le principe de la géométrie" de 1829 et de Bolyai "La science de l'espace" de 1832. Ensuite ce fut le grand mathématicien français Jules-Henri Poincaré qui synthétisa enfain la nouvelle situation créée dans le monde de la géométrie, avec cette affirmation : "Les axiomes géométriques sont des simples conventions. Est-ce que la géométrie euclidienne est vraie La question n'a pas de sens ; une géométrie n'est pas ni plus vraie ni plus fausse ; elle est seulement plus commode". Disparu le que la géométrie euclidienne fût l'unique possible, la géométrie devient convention, subjectivité. De cette façon fut ouverte pour l'artiste une nouvelle liberté, un nouvel espace, une nouvelle 'dimension' L'espace qui est autour de nous n'est ni euclidien ni non-euclidien. Mais les artistes ont tendance à confondre leur intérêt pour la quatrième dimension avec celui des géométries non-euclidiennes, donnant des sens symboliques et idéaux à ce nouvel espace sous l'influence comme on disait, de la littérature fantastique et mystique-philosophique d'auteurs comme Ouspensky, Hinton, Wells.

Pour les cubistes, le problème de la représentation plus vraie de la réalité se proposa en termes différents. Afin d'avoir un rapport plus fidèle avec le monde extérieur, il n'était plus suffisant de la simple transposition sur la toile en utilisant les règles de la perspective. Un portrait est plus fidèle à la réalité, plus réaliste, selon les cubistes, si on donne de la personne non seulement une image unique mais différentes images en mouvement et en même temps. Donc la technique qui permet de voir un objet à quatre dimensions, en considérant toutes les projections possibles, devint très utile pour l'artiste cubiste qui abordait le problème de la représentation de l'espace. Comme a souligné Mme Henderson, plusieurs traités sur les modalités plus appropriées afin d'aborder la réalité quadridimensionnelle, en particulier pour dessiner objets à quatre dimensions, furent publiés à Paris pendant les premières années du XX^{e} siècle, et sûrement certains entre eux étaient connus par les cubistes.

Les artistes en utilisant chacun à sa façon certaines des nouvelles idées des géométries non-euclidiennes et de la 'géométrie de la quatrième dimension', devancèrent les mathématiciens en ce qui concerne la perspective. Carl Boyer a observé que les stricts rapports entre art et géométrie pendant la Renaissance auraient pu avoir des conséquences avantageuses pour les mathématiques s'ils avaient attiré l'attention des mathématiciens. Justement

Leonardo da Vinci écrivait dans son traité sur la peinture : "Que ne me lise pas qui n'est pas mathématicien". La raison de cette affirmation est bien expliquée dans le livre ; comme a remarqué le mathématicien Morris Kline, pour Leonardo le but principal de la peinture consiste en effet dans la précision de la reproduction. La peinture est une science et, comme toutes les sciences, doit se fonder sur les mathématiques, car "aucune investigation humaine peut être considérée comme véritable science, si elle ne passe pas par la démonstration mathématique ".

Toutefois ces rapports entre art et mathématiques pendant plus d'un siècle après Piero della Francesca et Albretcht Dürer ne produirent aucun résultat dans le domaine des mathématiques.

Il faut attendre 1639 pour voir apparaître l'oeuvre fondamentale de Desargues sur la géométrie projective. La géométrie projective répondait justement aux problèmes de la perspective posée par les artistes. Nous avons alors, avec la perspective, un exemple très intéressant de l'anticipation avec laquelle les peintres abordèrent certains problèmes mathématiques-géométriques par rapport aux mathématiciens.

Mais dans l'histoire de la culture il y a beaucoup d'autres exemples d'artistes qui anticipent ou créent, indépendamment des mathématiciens, des objets artistiques qui ont une physionomie mathématique.

Un des cas les plus intéressants est celui de l'artiste suisse Max Bill, un des fondateurs de l'Art concret. En 1936 Bill créa un objet qu'il appela 'Ruban sans fin'. La façon, il l'a expliquée lui-même dans un article paru sur 'Mathematics calendar' en juin 1979 : J'ai créé un objet avec une seule face pendant que je cherchais la solution pour une sculpture à suspendre et qui tournait dansl'air. Mes recherches n'étaient ni mathématiques ni scientifiques mais purement artistiques". Le résultat de ces investigations fut exposé à la Triennale de Milan en 1936 ; dans une interview filmée en 1979 sur le 'Ruban de Moebius', film de la série 'Art et Mathématiques', Max Bill a affirmé : "A cette époque là je ne savais absolument rien du ruban de Moebius et je pensais avoir créé une forme nouvelle" (13).

En effet, une sculpture comme celle de Bill avait été décrite dans un article en 1858 par le mathématicien allemand August Fernand Moebius (1790-1860). La propriété caractéristique du 'Ruban de Moebius' est celle qui a une seule face et un seul bord.

Le fameux graphiste hollandais M.C. Escher aussi s'occupa plusieurs fois du ruban de Moebius. Celui d'Escher représente un cas très singulier dans l'histoire des rapports entre l'art et les mathématiques : pendant toute sa vie l'artiste hollandais fut en contact avec plusieurs savants, comme le physicien-mathématicien Roger Penrose, le mathématicien H.S.M. Coxeter, le cristallographe G. Mac Gyllarvry (14).

Un exemple significatif de ses rapports avec le mathématicien Coxeter concerne une de ses plus connues séries d'incisions : le 'Circle limit'. Escher fut attiré par une figure parue sur un livre de Géométrie écrit par Coxeter. Cette figure là était un modèle d'un genre particulier de géométrie non-euclidienne, la géométrie hyperbolique, due à Poincaré qui l'avait utilisé cent années auparavant dans l'étude de certains genres de fonctions. Escher fit successivement quatre incisions en utilisant le modèle de Poincaré et suivant les suggestions de Coxeter, il appela la série 'Circle limit' donnant un numéro progressif aux différentes oeuvres ; dans un récent article Coxeter a expliqué comment l'incision appelée 'Circle limit III' (1959) fut exécutée avec une précision tout à fait parfaite. Le mathématicien a formulé aussi une opinion 'esthétique' sur les différentes exécutions : 'Circle limit III' ce n'est pas l'exemplaire qu'il préfère pour "la présence des arcs blancs qui séparent artificiellement chaque poisson en deux parties différentes" ; Coxeter préfère plutôt 'Circle limit IV', le célèbre 'Anges et démons' (1960).

B I B L I O G R A P H I E

(1) G.H. Hardy 'A Mathematician's Apology', Cambridge Univ. Press, London (1940), p.25 .

(2) F. Le Lionnais 'La Beauté en mathématiques' dans 'Les grands Courants de la Pensée Mathématiques', Librairie Scien. et Technique, Paris (1962), p.457-458 .

(3) R. Thom 'Local et global dans l'oeuvre d'Art', dans 'De la Catastrophe', Centre d'Art Contemporain, Genève (1982) p.42-43 .

(4) A. Borel 'Mathematics : Art and Science', The Mathematical Intelligencer, Vol.5, n.4 (1983), p.12 .

(5) G. Birkhoff 'A Mathematical Approach to Aesthetics', Scientia, Sept. (1931), p.133-146 .

" 'A Mathematical Theory of Aesthetics', The Rice Inst. Pamphlet, July (1932), vol.19, p.189-342 .

(6) R. Fiscler 'On the Application of the Golden Ratio in the Visual Arts, Keonardo, Vol.14 (1981), p.31-32 .

Elisa Maillard 'Les Cahiers du Nombre d'Or', n.I,II,III,IV,V (1960-1968), Tournon & Cie, Paris.

M.C. Ghyka 'Le Nombre d'Or', Gallimard (1931), Paris .

(7) Platon 'Timée' , dans 'The Great Books of the Western World', Encyclopaedia Britannica (1952), vol.7, p.442-477 .

(8) C. Boyer 'A History of Mathematics', J. Wiley (1968), New York .

(9) L. Pacioli 'De Divina Proportione' Venezia (1509) .

(10) M. Emmer 'Art and Mathematics : the Platonic Solids', Leonardo, Vol. 15, n.4 (1982), p.277-282 .

(11) Report on the Scientific Results of the Voyage of H.S.M. Challenger during the years 1873-76, Zoology, Vol.XVIII, London (1887) .

(12) L.D. Henderson 'The Fourth Dimension and non-euclidean Geometry in Modern Art', Princeton Univ. Press (1983).

(13) M. Emmer 'Visual art and Mathematics : the Moebius band', Leonardo, vol.13 (1980), p.108-111 .

" 'The Moebius band', Film de la série 'Art and Mathematics' (1979) .

(14) M. Emmer 'M.C. Escher : part I', film dans la série 'Art and Mathématics (1982) .

" 'M.C. Escher : part II' film dans la série 'Art and Mathematics (1984) .