SÉMINAIRE DE PHILOSOPHIE ET MATHÉMATIQUES

JEAN BASS

Fonctions aléatoires et pseudo-aléatoires. Leur rôle dans certaines applications

Séminaire de Philosophie et Mathématiques, 1984, fascicule 10
« Fonctions aléatoires et pseudo-aléatoires. Leur rôle dans certaines applications », , p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1984___10_A1_0>

© École normale supérieure – IREM Paris Nord – École centrale des arts et manufactures, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Séminaire de philosophie et mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

FONCTIONS ALEATOIRES ET PSEUDO-ALEATOIRES

LEUR ROLE DANS CERTAINES APPLICATIONS

J. BASS

Jusqu'au début du 20ème siècle, le problème du déterminisme dans les sciences ne se posait guère, ou, ce qui revient au même, il semblait tout résolu. La science a pour objet la prévision des phénomènes. Connaître une cause, c'est être assuré de l'effet. La relation entre la cause et l'effet constitue la loi du phénomène. Elle s'exprime généralement par une formule mathématique.

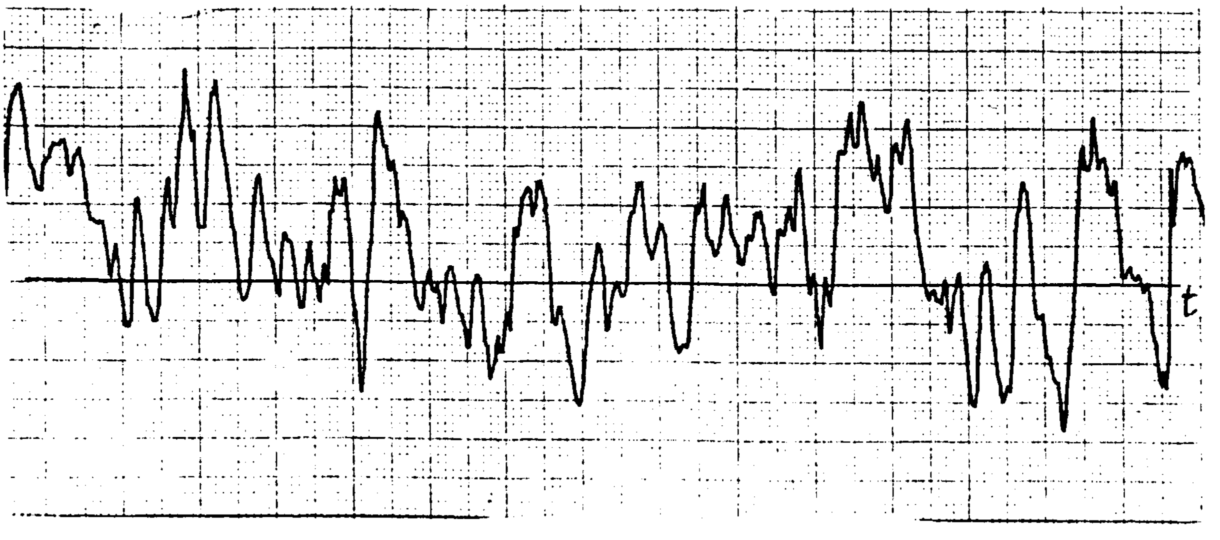
Ces affirmations n'étaient pas considérées comme incompatibles avec la branche des mathématiques appelée calcul des probabilités. Il était bien connu que certains phénomènes sont complétement imprévisibles : une même cause (jeter un dé) peut produire des effets différents. Mais le fait de jeter un dé n'est pas un acte précis. Et d'ailleurs, sa répétition conduit à des conséquences prévisibles, qui sont un cas particulier de la loi des grands nombres.

Une des plus résolument déterministes des sciences de la nature est certainement la mécanique des milieux continus, et en particulier la mécanique des fluides. Contrairement à la mécanique des solides, qui est régie par des équations différentielles ordinaires, la mécanique des fluides dépend d'équations aux dérivées partielles. Elles sont non linéaires dans le cas général, du premier ordre si l'on néglige la viscosité, du second ordre (équations de NAVIER-STOKES) pour les fluides visqueux. La mécanique des milieux continus, et aussi les équations de MAXWELL, expliquent en partie l'intérêt que les mathématiciens portent aux équations aux dérivées partielles.

...

L'objectif est de démontrer des théorèmes d'existence et d'unicité des solutions. Ces théorèmes nécessitent de préciser les données, qui sont des conditions aux limites, comportant, si l'une des variables est le temps, des conditions initiales.

Or, à la fin du 19ème siècle, la découverte des phénomènes turbulents est venue perturber l'idée qu'on se faisait de la mécanique des fluides. Il est presque toujours (mais non pas toujours) admis que le mouvement turbulent obéit aux équations aux dérivées partielles de la mécanique des fluides. Mais, dans le détail, ce mouvement est très irrégulier, et non exactement reproductible, en ce sens que deux expériences, faites dans les mêmes conditions apparentes, fournissent des résultats différents. Par exemple, la courbe donnant la vitesse du fluide, en un point fixé, en fonction du temps, a l'aspect ci-dessous.



Elle renferme certains éléments stables, mais son détail n'a rien de fixe ni de caractéristique. On se trouve donc dans une situation contradictoire.

...

Le détail est important, puisqu'il doit satisfaire à une équation fonctionnelle. Mais il est en quelque sorte imprévisible et les spécialistes refusent souvent de s'y intéresser. Ce qui est stable, c'est un ensemble de moyennes. La situation est celle d'un jeu de dés où la suite des coups serait, sans que le joueur le sache, réglée par un procédé déterministe, mais dont seuls les résultats moyens seraient considérés comme intéressants. L'idée que seules les valeurs moyennes des grandeurs turbulentes ont un caractère reproductible est ancienne (100 ans). L'idée que le détail de la courbe ci-dessus est sans importance a longtemps prévalu (depuis 50 ans) . Elle a contribué à suggérer que la turbulence a une structure probabiliste : depuis une trentaine d'années, on traite chaque fonction turbulente comme une fonction aléatoire du temps, ou plus exactement comme le résultat d'une épreuve sur une fonction aléatoire. Cela signifie que cette fonction $f(t,\omega)$ dépend du temps t et d'un paramètre ω , qui est un point d'un certain espace de probabilité, de sorte que, à un instant donné, $f(t,\omega)$ est une variable aléatoire. Choisir ω dans cet espace, c'est sélectionner une courbe du type ci-dessus parmi toutes les courbes que des expériences physiques successives peuvent fournir.

Cette manière de procéder présente quelques inconvénients. Elle conduit à négliger l'étude détaillée des fonctions f , qui est essentielle lorsque f doit satisfaire à une équation fonctionnelle. Par ailleurs, un seul échantillon de f , connu sur une durée temporelle très grande, suffit à nous apporter tous les renseignements utiles. Est-il nécessaire de rechercher une famille (probabilisée) de solutions de l'équation, alors qu'une seule solution suffit ? Il y a d'ailleurs constamment confusion entre solution

...

aléatoire et solution turbulente. L'exemple suivant montre que ces deux notions ne sont pas équivalentes. La fonction $f = ax^2 + bx + 2at$ est solution de l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$. C'est une fonction aléatoire de x et de t , si l'on considère a et b comme les coordonnées d'un point dans un espace probabilisé (un plan). Cependant elle n'a rien de turbulent. Pour chaque choix de a et b , c'est une fonction linéaire de t .

D'ailleurs, on ne voit pas très bien comment on pourrait choisir pour ω une loi de probabilité. Toutes les expériences sont équivalentes. Elles ne se prêtent pas à être probabilisées. On est donc conduit à la conclusion suivante : pour l'équation aux dérivées partielles proposée, il existe des solutions ayant le caractère souhaité, ces solutions ne sont pas uniques, mais il n'y a pas entre elles une hiérarchie permettant de les probabiliser. On renonce donc à l'indéterminisme absolu, celui qui serait justiciable des méthodes probabilistes, sans cependant atteindre le déterminisme strict, qui exigerait l'unicité.

L'interprétation de la turbulence par des fonctions aléatoires soulève d'autres difficultés. Il s'agit de la définition des valeurs moyennes. Leur rôle est essentiel, car ce sont elles qui ont une valeur stable, la même dans les différentes expériences. En utilisant les fonctions aléatoires, on appelle moyenne de f l'intégrale de LEBESGUE

$$Ef = \int f(t,\omega)dp(\omega) ,$$

où $p(\omega)$ est une mesure de probabilité, supposée connue.

...

Or l'expérience fournit des moyennes temporelles, de la forme

$$Mf = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t,\omega)d\omega$$

(naturellement, dans la pratique, il n'y a pas de limite. On prend pour T une valeur suffisamment grande pour que la moyenne soit stabilisée).
Utiliser la moyenne E pour représenter la moyenne M , c'est faire appel à un principe ergodique. Prouver qu'une équation aux dérivées partielles possède des solutions aléatoires n'est pas facile. Prouver qu'elles sont ergodiques est une difficulté supplémentaire, non négligeable, et bien superflue si l'on se passe de la représentation probabiliste.

Quelle est la nature de ces fonctions déterministes dont on peut dire qu'elles simulent le hasard ? Pour le voir, et malgré l'insuffisance actuelle des résultats théoriques, il est commode de laisser de côté les équations aux dérivées partielles, et de prendre comme modèle des équations différentielles ordinaires. Les théorèmes d'existence et d'unicité se simplifient. Il n'y a plus de véritables conditions aux limites. On demande seulement que les conditions de CAUCHY (conditions initiales) garantissent l'existence globale et l'unicité des solutions.
La question qui se pose, sous une forme bien imprécise, est la suivante : une équation différentielle peut-elle avoir des solutions, définies pour toute valeur (positive) de la variable, présentant un aspect oscillatoire et irrégulier ? Lorsque les coefficients de l'équation sont eux mêmes de ce type, il est vraisemblable que la réponse est affirmative. Lorsque les coefficients sont constants (équation autonome), le problème est d'une tout autre nature.

Il est bien connu qu'une équation linéaire (vectorielle) à coefficients constants peut avoir, dans certaines conditions, des solutions qui sont des polynomes trigonométriques. On connaît des exemples d'équations non linéaires dont les solutions sont périodiques, ou même presque-périodiques. C'est le cas du système

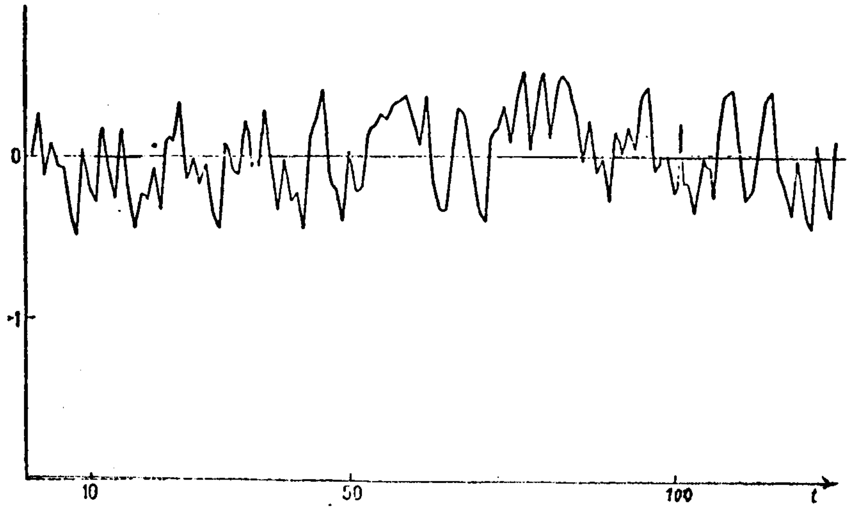
$$x' = yz \,, \quad y' = zx \,, \quad z' = xy \,,$$

dont les solutions sont des fonctions elliptiques.

Mais en général, pour intégrer des équations différentielles non linéaires, on en est réduit à des expériences sur ordinateur. D'habitude, on néglige un peu la forme des solutions considérées comme fonctions de la variable t . On étudie plutôt l'aspect des trajectoires paramétrées par t. Il arrive que cet aspect soit extrêmement complexe, et digne d'être appelé <u>chaotique</u>. Mais cette complexité des trajectoires résulte généralement de celle que présentent les inconnues en tant que fonctions de la variable t . Mises à part les fonctions périodiques, il existe deux familles fondamentales de fonctions irrégulières et oscillatoires. La première, la plus connue, est celle des <u>fonctions presque-périodiques</u>. Ce sont des fonctions qui ont un spectre de raies et dont certaines propriétés rappellent encore le déterminisme : t étant fixé, $f(t')$ reprend des valeurs très voisines de celles de $f(t)$ pour une succession illimitée de valeurs de t'. (1) L'avenir de $f(t)$ n'est pas totalement indépendant du passé. Les <u>fonctions pseudo-aléatoires</u> sont des fonctions à spectre continu, pour lesquelles $f(t')$ tend à devenir indépendant de $f(t)$ lorsque $t'-t$ augmente indéfiniment.

(1) - Définition précise : ε étant donné, il existe un nombre positif $\ell(\varepsilon)$ tel que tout intervalle de longueur $\ell(\varepsilon)$ contienne un nombre τ pour lequel $|f(t+\tau) - f(t)| < \varepsilon$.

Voici l'aspect, entièrement calculé, d'une fonction pseudo-aléatoire.



La signification du mot "indépendant" se rattache à des propriétés de <u>mesure</u>, qui jouent dans ces questions un rôle analogue, mais non identique, à celui des mesures de probabilité. La mesure asymptotique de la fonction f se définit par sa transformée de FOURIER, qui est la moyenne de $e^{i\lambda f(t)}$, où λ est un paramètre réel. C'est la fonction caractéristique de f. Mais ici il s'agit d'une moyenne temporelle :

$$M\, e^{i\lambda f(t)} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{i\lambda f(t)} dt .$$

On définit de même la fonction caractéristique d'un couple f,g. C'est la moyenne de $e^{i[\lambda f(t) + \mu g(t)]}$

On dit que f et g sont indépendantes si

$$M\, e^{i[\lambda f(t) + \mu g(t)]} = (Me^{i\lambda f(t)}) \times (Me^{i\mu g(t)}) .$$

On peut donc définir une fonction pseudo-aléatoire par la propriété (1) :

$$\lim_{T \to \infty} Me^{i[\lambda f(t) + \mu f(t+\tau)]} = (Me^{i\lambda f(t)}) \times (Me^{i\mu f(t)}) .$$

La fonction caractéristique d'une variable aléatoire existe toujours ; c'est l'intégrale d'une fonction mesurable bornée relativement à une mesure bornée. Il est remarquable que, lorsqu'il s'agit de moyennes temporelles, il puisse arriver que les limites qui définissent les fonctions caractéristiques n'existent pas. En particulier, il peut arriver que, si f et g sont pseudo-aléatoires, elles aient individuellement des mesures asymptotiques, alors le couple (f,g) n'en possède pas.

A défaut de justifications théoriques, les expériences numériques rendent très vraisemblable l'hypothèse que certaines équations différentielles autonomes non linéaires ont des solutions pseudo-aléatoires. L'existence de solutions presque-périodiques est plus facile à contrôler. Bien que ces fonctions soient parfaitement déterminées, leur allure suggère qu'elles ne satisfont peut-être pas à toutes les exigences du pur déterminisme. Cela apparaît clairement dans leur <u>sensibilité aux conditions initiales</u>. Si l'on change très peu la valeur de $f(0)$, il arrive que, pour des valeurs de t suffisamment grandes, la valeur de $f(t)$ soit fortement modifiée, et que l'aspect des trajectoires soit bouleversé.

---

(1) - La définition primitive, due à N. WIENER (autour de 1930), puis à J. BASS (1959), fait appel seulement aux propriétés de la fonction de corrélation. Elle n'introduit pas les fonctions caractéristiques.

Cette circonstance n'a rien de mystérieux. Si l'on considère par exemple la fonction $f(t) = \sin \omega(t+1)$, le nombre $\sin \omega$ est sa valeur initiale. Une très petite variation de ω peut beaucoup modifier $\sin \omega(t+1)$ dès que t est grand. (1) Le même phénomène se produit, plus caché, pour les solutions pseudo-aléatoires de certaines équations différentielles autonomes. Leurs solutions sont irrégulières, instables, et tout à la fois parfaitement définies (en théorie), et très mal définies du point de vue pratique. Cela peut perturber les expériences numériques. Les solutions pour $\omega = \sqrt{2}$ et pour $\omega = 1{,}414$ risquent d'être radicalement différentes. Or, quand on calcule sur ordinateur, on est justement obligé de remplacer $\sqrt{2}$ par une approximation rationnelle.

Nous devons maintenant réfléchir à certaines conséquences de la remarque qui a été faite à propos des mesures asymptotiques : il existe des couples de fonctions qui n'ont pas de mesure asymptotique individuelle. Or une circonstance analogue se rencontre dans une branche de la physique au moins aussi mystérieuse que la mécanique des fluides turbulents : la <u>mécanique quantique</u>. Je vais d'abord rappeler en quoi, jusqu'à un certain point, la mécanique quantique est une mécanique aléatoire.

En mécanique quantique, il n'y a pas de fonctions aléatoires $f(t,\omega)$ ni de fonctions $f(t)$. On définit des moyennes et des fonctions caractéristiques qu'on sait en principe mesurer, mais qui concernent des objets physiques dont l'existence est mal précisée. Voici comment on procède :

---

(1) - Cette fonction vérifie l'équation autonome $f'' = -\dfrac{ff'^2}{1-f^2}$

...

On donne un espace de HILBERT abstrait, dont la réalisation utile est un espace L^2 . On note $< . , . >$ le produit scalaire dans cet espace. On y fait choix d'un élément ψ de norme 1 . On admet l'existence de particules auxquelles on peut associer certaines grandeurs mécaniques : position, vitesse, énergie, etc. A chacune de ces grandeurs on fait correspondre un opérateur linéaire de l'espace de HILBERT. Les opérateurs ainsi obtenus peuvent ne pas être bornés. Mais, pour simplifier l'exposé et éviter des difficultés inutiles, je supposerai qu'ils le sont. On associe à A une valeur moyenne, égale à $< \psi, A\psi >$, et qui dépend de ψ .
Que ce produit scalaire ait le caractère d'une moyenne apparaît plus clairement si A est hermitien et si l'on se sert de A pour construire la famille d'opérateurs unitaires $e^{i\lambda A}$ dépendant du paramètre λ . Alors la moyenne

$$< \psi, e^{i\lambda A} \psi >$$

est une fonction de λ qui est de type positif. On l'interprète comme la fonction caractéristique d'une loi de probabilité.

Mais des difficultés apparaissent si l'on considère simultanément deux opérateurs A et B . Peut-on, par l'intermédiaire de sa fonction caractéristique, leur associer une loi de probabilité jointe ? L'expression naturelle d'une telle fonction caractéristique est :

$$< \psi, e^{i(\lambda A+\mu B)} \psi > .$$

Si A et B commutent, cette expression est valable. Si au contraire AB est différent de BA , le produit scalaire ci-dessus existe bien, mais n'a pas relativement à λ et μ les propriétés d'une fonction caractéristique sauf peut être pour des valeurs exceptionnelles de ψ .

...

Au couple A,B , il n'est pas possible d'associer une loi de probabilité (1). Ainsi donc, la structure logique de la mécanique quantique est en désaccord avec celle des probabilités.

Par contre, elle présente des analogies avec les structures que nous avons rencontrées en cherchant à simuler les variables aléatoires par des fonctions $f(t)$. Nous avons vu qu'il existe des couples de fonctions f,g pour lesquelles la moyenne temporelle

$$M e^{i(\lambda f(t) + \mu g(t))}$$

n'existe pas : elle existe pour certains couples de valeurs de λ et μ (par exemple $\lambda,0$ ou $\mu,0$) mais non pour tous. Nous allons préciser les analogies qui existent entre les espaces de fonctions et les espaces d'opérateurs.

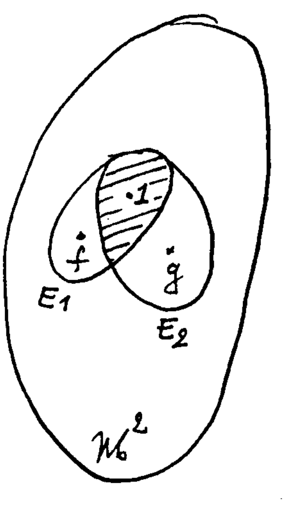
Les fonctions qui nous intéressent ont la propriété que leur moyenne quadratique $M\,|f|^2$ existe. L'ensemble de ces fonctions n'a pas une structure d'espace vectoriel, mais on peut le plonger dans un espace vectoriel. C'est l'espace de MARCINKIEWICZ $\mathcal{M}^2$, qui avait déjà été utilisé par BESICOVITCH pour l'étude des fonctions presque-périodiques. Ses éléments sont des fonctions f à valeurs complexes telles que

$$\lim_{T \to \infty} \sup \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(t)|^2 dt$$

(1) - D'après les relations d'incertitude de HEISENBERG, le produit des écarts-types de A et de B est supérieur à un nombre positif (une constante physique). Cela ne contredit pas en soi l'existence d'une loi de probabilité jointe.

soit fini [1]. Dans l'espace $\mathcal{M}^2$, l'expression ci-dessus a les propriétés du carré d'une norme (plus exactement d'une semi-norme). Relativement à cette norme, l'espace est complet. Il contient des fonctions pour lesquelles la moyenne quadratique $M\,|f|^2$ n'existe pas, des couples f, g pour lesquels $M\,f\,\overline{g}$ n'existe pas.

L'espace $\mathcal{M}^2$ n'est pas un espace de HILBERT, mais il contient des sous-espaces hilbertiens. Ils sont constitués par des ensembles de fonctions f,g ... telles que toutes les moyennes $M\,f\,\overline{g}$ existent. Elles définissent les produits scalaires $< f,g >$. La norme de f est la racine carrée de $M\,|f|^2$. Particulièrement intéressants sont ceux de ces sous-espaces qui contiennent la fonction 1, de sorte que f a une moyenne.
S'ils ont en outre une structure d'algèbre, ils contiennent f^n , et par fermeture $e^{i\lambda f}$, limite de la somme $1 + i\lambda + \dots + \frac{(i\lambda)^n}{n!} f^n$.
Dans un tel espace, le produit $e^{i\lambda f}\, e^{i\mu g}$ a une moyenne, c'est-à-dire que le couple f,g a une mesure asymptotique. Mais, si l'on considère deux sous-espaces hilbertiens E_1, E_2, de $\mathcal{M}^2$, la situation est celle du schéma ci-contre.
Les couples d'éléments situés dans $E_1 \cap E_2$ ont une mesure asymptotique. Mais les couples de fonctions f,g marquées sur la figure n'en ont pas.



(1) - Dans la pratique, t varie à partir de 0 et on écrit

$\frac{1}{T}\int_0^T$. Pour la théorie, $\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}$ est plus commode.

Avec les opérateurs de l'espace de HILBERT, on obtient un schéma tout à fait comparable. Appelons N l'ensemble de tous les opérateurs normaux (bornés) A,B, ... sur un espace de HILBERT donné H .
Ce n'est pas un espace vectoriel, mais on peut le plonger dans un espace vectoriel, à savoir l'espace V de tous les opérateurs linéaires. Soit ψ un élément normé de l'espace H . L'expression $\|A\psi\|$ a, dans V , les propriétés d'une semi-norme.

Dans l'espace V , le produit n'est pas en général commutatif. Mais l'espace V contient des sous-espaces dont les éléments sont des opérateurs normaux deux à deux commutatifs. Soit E l'un d'entre eux. E a une structure hilbertienne, avec le produit scalaire $(A,B) = < A\psi , B\psi >$ $= < B^{*}A\psi, \psi > = < AB^{*}\psi, \psi >$.

Supposons en particulier que A soit un opérateur hermitien.
E contient l'opérateur unité I , et par fermeture l'opérateur unitaire $e^{i\lambda A}$ (λ réel) . Le produit scalaire $(I,e^{i\lambda A}) = <\psi,e^{i\lambda A}\psi>$ est la moyenne de A (dans l'état ψ) . La moyenne de $e^{i\lambda A}$ est identifiable à une fonction caractéristique. Si A et B appartiennent à E , la moyenne $< \psi, e^{i(\lambda A + \mu B)}\psi >$, produit scalaire de deux exponentielles, a les propriétés d'une fonction caractéristique. Mais si E_1 et E_2 sont deux sous-espaces distincts d'opérateurs normaux, il existe des éléments de E_1 qui ne commutent pas avec certains éléments de E_2 , et le couple de ces opérateurs n'admet pas de fonction caractéristique. On ne peut pas lui associer une loi de probabilité.

...

Le schéma des opérateurs est donc identique à celui des fonctions. Il suffit de remplacer $\mathcal{M}^2$ par V , 1 par I , les fonctions f et g par des opérateurs normaux A,B . Cette identité de forme n'est cependant pas parfaite. Avec les couples de fonctions, l'expression $Me^{i(\lambda f + \mu g)}$ peut ne pas avoir de sens. La limite n'existe pas. Avec les opérateurs, $< \psi, e^{i(\lambda A + \mu B)}\psi >$ existe toujours, mais peut ne pas avoir de signification probabiliste.

Essayons de conclure. La nature nous présente diverses sortes de phénomènes, dont l'irrégularité et une certaine imprévisibilité nous semblent peu compatibles avec l'idée fondamentale de déterminisme.
Pour en parler sans abandonner le langage traditionnel, nous leur imputons une cause virtuelle que nous nommons hasard et l'outil mathématique par lequel nous essayons de les analyser est la théorie des probabilités. Il existe cependant de nombreux cas, intermédiaires entre le déterminisme et l'indéterminisme, où les représentations mathématiques ne semblent pas nécessiter l'intervention des probabilités. Parfois leurs propriétés mathématiques constituent ce qu'on appelle une simulation du hasard. Parfois elles présentent avec les structures probabilistes certaines contradictions, dont la justification n'est pas encore éclaircie.