SÉMINAIRE DE PHILOSOPHIE ET MATHÉMATIQUES

ELIE ZAHAR

La découverte du principe de relativité d'après Henri Poincaré

Séminaire de Philosophie et Mathématiques, 1983, fascicule 8
« La relativité d'après Henri Poincaré », , p. 1-48
<http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1983___8_A1_0>

LA DECOUVERTE du PRINCIPE de RELATIVITE

d'après Henri POINCARE

Dans ce papier je me propose d'examiner la contribution de Poincaré a la Relativité Restreinte, et de déterminer si son conventionalisme lui servit de guide heuristique, de fil d'Ariane, pendant la genèse de cette théorie. A ma connaissance, Whittaker est le seul historien de la science qui ait exclusivement attribué à Poincaré la découverte du principe de Relativité, dans un chapitre de son "Histoire des théories de l'éther et de l'électricité" où l'oeuvre d'Einstein est à peine mentionnée. Si Whittaker a été profondément injuste envers Einstein, son historique n'en contient pas moins une grande part de vérité. Dans ce qui suit je soutiendrai une thèse d'une simplicité presque aussi brutale que celle de Whittaker ; à savoir que ce fut bien Poincaré qui fit la découverte de la Relativité Restreinte, que sa philosophie des sciences l'y aida, mais que certaines ambiguités de cette même philosophie empêchèrent ses contemporains, et bon nombre d'historiens, d'apprécier son oeuvre à sa juste valeur. Ceci ne diminue en rien le mérite d'Einstein qui, poursuivant une voie parallèle à celle de Poincaré, finit par dépasser la Relativité Restreinte en construisant une théorie généralement covariante de la gravitation. Pour en revenir à Poincaré, nous trouverons utile de réinterpréter sa philosophie en nous plaçant a un point de vue unique qui nous donnera une vue d'ensemble de sa position. En d'autres termes, nous procéderons à une reconstruction rationnelle qui ne s'accordera pas avec le détail de toutes les thèses mises en avant par Poincaré, mais qui, en contrepartie, nous permettra de mieux comprendre sa conception des fondements de la géométrie et du programme relativiste. Nous verrons qu'en 1905 Poincaré était allé bien au delà des résultats obtenus par Einstein ; qu'il avait déjà depuis longtemps, c'est-à-dire depuis 1900, donné une définition opérationelle de la synchronisation qui sera à tort attribuée à Einstein[1] ; qu'il avait énoncé le principe de covariance, puis fondé le programme relativiste sur la théorie des groupes, plus particulièrement sur la structure du groupe de Lorentz ; qu'il avait corrigé la transformation de la densité électrique proposée par Lorentz en 1904, et qu'il s'en était servi pour transformer le champ électromagnétique.

Il avait aussi longuement réfléchi sur l'égalité des masses inertiale et gravifique, et sur la possibilité d'une variation de l'attraction gravitationnelle avec la vitesse. Il avait enfin construit toute une théorie covariante de la gravitation. Poincaré avait donc poussé la Relativité Restreinte jusqu'aux limites extrêmes dont elle lui semblait capable. Si cette oeuvre fut quelque peu oubliée par la suite, c'est aussi parce que, en 1915, c'est-à-dire trois ans après la mort de Poincaré, Einstein perçut la nécessité d'aller, au-delà de ces limites, fonder une nouvelle théorie de la gravitation sur le principe de la relativité générale.

(I) TROIS CATEGORIES D'HYPOTHESES SCIENTIFIQUES

Procédant analytiquement, nous dégagerons de la philosophie de Poincaré certaines tendances en apparence contradictoires. Il y a lieu de distinguer d'une part son conventionalisme, d'autre part une tendance très nette à un empirisme franchement inductiviste. Il s'agira ensuite de lever, autant que faire se peut, certaines contradictions. Il s'avère que Poincaré souscrivait, peut être tacitement, à un réalisme Kantien et que son conventionalisme n'était au fond qu'une vaste pétition de principe. S'il a souvent dit que certaines hypothèses ne sont ni vraies ni fausses, mais plus ou moins commodes, il a aussi affirmé dans d'autres contextes que ces mêmes hypothèses sont plus commodes dans la mesure où elles sont plus vraies, ou plus vraisemblables. Il traite donc la commodité, ou le degré d'esthétique mathématique, comme un indice de vérisimilitude. Il faut immédiatement ajouter que, à la différence de Popper par exemple, Poincaré regarde la vérisimilitude comme un concept intuitif qui n'a rien à voir avec la notion de vérité-correspondance.

Poincaré partage les hypothèses en trois catégories disjointes. La première consiste en certaines suppositions "auxquelles on ne peut guère se soustraire. Il est difficile de ne pas supposer que l'influence des corps très éloignés est tout à fait négligeable, que les petits mouvements obéissent à une loi linéaire, que l'effet est une fonction continue de sa cause". (S.H. p.166) Parmi ces hypothèses fondamentales qui seront les dernières a être abandonnées, on doit aussi compter certaines conventions, comme par exemple les postulats de la géométrie euclidienne et ceux de la mécanique rationnelle.

La deuxième catégorie est constituée par des hypothèses que Poincaré qualifie d'indifférentes, et qui ont une fonction psychologique. Elles soutiennent l'entendement et facilitent certains calculs, sans pour autant influer sur la forme mathématique des théories ou sur leurs prédictions empiriques.

Il y a enfin les lois expérimentales proprement dites qui sont obtenues par généralisation a partir de certains faits scientifiques. Commençons par examiner la nature de ces derniers.

(II) FAITS BRUTS et FAITS SCIENTIFIQUES

Contre le nominalisme d'Edouard Le Roy, Poincaré maintient que le fait scientifique n'est pas créé de toutes pièces par le savant, puisqu'il n'est que la traduction dans un langage commode, c'est-à-dire dans le langage scientifique, d'un fait dit brut. Celui-ci s'exprime par une proposition, que j'appellerai proposition brute, qui est ou vraie ou faussse et qui peut être infailliblement reconnue comme telle. Nous butons ici sur une première ambiguïté dans la philosophie de Poincaré : où se situe le fait brut ? Est-ce sur le plan phénoméologique ou dans le domaine physique ? Est-il purement subjectif ou a-t-il aussi une portée objective ? Dans certains passages de la "Valeur de la Science" Poincaré prétend que le fait brut est individuel, qu'il consiste en certaines perceptions subjectives ; qu'aucune proposition n'est en mesure de le caractériser complètement, c'est-à-dire de l'individuer, puisqu'elle ne dispose que d'un nombre fini de termes pour "exprimer les nuances en nombre infini que mes impressions peuvent revêtir". (V.S. p.157) . Le fait brut peut néanmoins vérifier ou falsifier de façon univoque une proposition qui ne fait que fixer quelques uns de ses aspects. Etant donné le caractère individuel de nos sensations, il me semble qu'un fait scientifique, tel que 'le courant passe', n'est plus en droit la simple traduction dans un langage commode de la proposition 'Je vois le spot du galvanomètre se déplacer'. Seul le fait visuel brut est indubitable, il n'en va pas de même du passage du courant électrique. Ce sont pourtant bien les faits scientifiques dont nous avons besoin pour arriver par induction aux lois empiriques qui nous permettent de prédire, donc aussi d'agir. Nous devons par conséquent reconstituer la position de Poincaré en la modifiant un peu. Nous dirons qu'en vertu de certaines théories d'arrière-plan, les faits scientifiques correspondent à certains faits bruts sans pour autant leur être identiques. Cette correspondance est rompue dès que les théories qui la légitiment se trouvent réfutées. Tant que ces théories sont accpetées, nous pouvons passer des faits bruts aux faits scientifiques, puis de ceux-ci aux lois. Cependant, seuls les faits bruts, et non pas leurs corrélatifs scientifiques, restent en droit indubitables.

(III) <u>UNITE ET INDUCTION</u>

D'après Poincaré, la possibilité des sciences physiques repose sur les deux principes de l'unité et de l'uniformité de la nature. Le premier principe, qui veut que dans la [illegible]nne, est absolument indispensable ; c'est en quelque sorte une vérité transcendentale. Il s'agit pour le savant, non pas de savoir <u>si</u> la nature est une, mais comment elle l'est. D'où le primat méthodologique du critère d'unité sur tous les autres.

Notons qu'aux yeux de Poincaré le degré d'unité d'une hypothèse est très différent de celui de sa simplicité : "A cette tendance la simplicité perd sans doute ; tel phénomène était représenté par plusieurs droites : il faut reccorder ces droites par des courbes plus ou moins compliquées. En revanche l'unité y gagne beaucoup. Ces catégories tranchées reposaient l'esprit, mais elles ne le satisfaisaient pas". (S.H. p.190).

Ce qui fait l'unité d'une théorie, c'est donc une sorte de compacité organique qui se traduit par l'interdépendance de ses diverses composantes. Une telle théorie n'est pas, au point de vue pratique, nécessairement plus simple que ses rivales.

Considérons maintenant le processus inductif qui nous permet de passer du particulier au général. Les résultats d'expérience étant toujours en nombre fini, on peut les généraliser d'une infinité de manières. Il nous faut donc un moyen pour rétrécir l'éventail des possibilités. Ce moyen est le principe d'uniformité, qui nous enjoint par exemple de relier des points donnés dans le plan par une courbe possédant une dérivée bornée plutôt que par une ligne anguleuse. L'induction ainsi comprise constitue un outil dont le savant ne saurait se passer. On aurait pu croire que Poincaré se contenterait de regarder l'induction comme un instrument de recherche sans retombées ontologiques. Il n'en est rien. Poincaré se pose une question qui n'a de sens que pour un métaphysicien réaliste : la généralisation présuppose-t-elle l'uniformité et la simplicité de la nature ? Cette simplicité est-elle superficielle ou profonde ? Il nous fait remarquer que les deux principes d'unité et de simplicité agissent en sens contraire : si la nature est une, toute entité physique, variant en fonction de toutes les autres, obéira à des lois nécessairement complexes. Comme le principe d'unité prime, il faut se demander si l'on peut procéder comme si la nature était simple. La deuxième loi de la thermodynamique nous assure en fait que nous pouvons faire de la sorte sans risquer de trop nous tromper : la nature manifeste au niveau macroscopique une uniformité résultant d'un mélange intime de beaucoup de facteurs dont le détail est très complexe.

(IV) TESTABILITE DES LOIS

Nous devons maintenant soulever une question très importante, celle du statut logique des lois. Encore une fois l'attitude de Poincaré s'avère ambigüe. Dans certaines de ses oeuvres il maintient que les généralisations sont vérifiables et réfutables, dans d'autres que l'expérience ne peut logiquement qu'infirmer les lois. Commençons par le problème de la réfutation empirique qui reste relativement simple. Poincaré fait preuve d'un falsificationisme aussi intransigeant, pour ne pas dire aussi extrémiste, que celui de Popper.

Notons aussi qu'aux yeux de Poincaré les termes qui interviennent dans les lois ont un sens fixé d'avance, et qu'il rejette avec mépris le 'coup de pouce' qui consisterait par exemple à changer le sens du mot 'cygne' au cas où la généralisation 'Tous les cygnes sont blancs' serait réfutée. Bien avant le cercle de Vienne, Poincaré avait jeté un interdit contre les artifices conventionalistes.

Revenons maintenant à la question de la vérifiabilité des lois. Dans 'La Science et l'Hypothèse' Poincaré soutient que "les hypothèses de la troisième catégorie sont les véritables généralisations.

Ce sont elles que l'expérience doit confirmer ou infirmer. Vérifiées ou condamnées, elles pourront être fécondes" (1). Par contre, dans 'la Valeur de la Science', puis encore dans ses 'Dernières Pensées', il reconnait que l'expérience peut réfuter une loi, mais qu'elle n'est jamais en mesure de l'établir définitivement.

Nous devons donc, encore une fois, rectifier la position de Poincaré pour la rendre plus cohérente. Nous répèterons avec lui que les termes descriptifs contenus dans une loi ont un sens inaltérable, fixé d'avance. Il en découle que toute loi est en droit vraie ou fausse. Cependant toute généralisation étant, comme son nom l'indique, une proposition universelle, l'expérience ne peut effec[illegible]alsifier. N'étant pas vérifiable, elle n'est que partiellement décidable. Sur le plan des lois, Poincaré adhère donc instinctivement a la notion de vérité-correspondance.

(V) L'INDUCTION MATHEMATIQUE

Pour souligner l'importance que revêt pour Poincaré le principe de l'induction dans les sciences physiques, je me permettrai une petite digression. Poincaré prend pour accorder que les mathématiques constituent une discipline créatrice, et ce dans deux sens distincts : d'une part les postulats mathématiques ne sont pas des vérités logiques, c'est-à-dire qu'ils ne se réduisent pas à des tautologies ; d'autre part, les règles d'inférence utilisées dans les mathématiques ne sont pas exclusivement celles du syllogisme. Dans un langage plus moderne, nous pouvons dire qu'aux yeux de Poincaré ces règles ne sont pas toutes déductives, puisqu'autrement tout théorème serait implicitement contenu dans les axiomes et ne leur apporterait donc rien de nouveau ; ce que Poincaré trouve indamissible. Parmi les principes mathématiques il doit y en avoir certains qui soient synthétiques a priori ; au rang de ceux-ci on peut compter le raisonnement par récurrence. Ce principe est infaillible justement parce qu'il est a priori ; il ne réfère pas à une réalité extérieure ; il ne fait qu'exprimer la puissance même de l'esprit, qui se sait capable d'engendrer la suite indéfinie des entiers naturels.

---

(1) S.H. p.167

Le raisonnement par récurrence, ou par induction mathématique, se traduit formellement par la règle suivante :

$$\frac{P(o)\ ,\ P(n) \rightarrow P(n+1)}{(\forall n)\ P(n)}$$

Si ce schème est synthétique, c'est-à-dire s'il n'est pas tautologique, c'est que, d'après Poincaré, il nous permet de procéder du particulier en général, augmentant ainsi le contenu des prémisses. Il y aurait donc une analogie profonde entre le raisonnement par récurrence et le principe d'induction physique. La seule différence, c'est que le premier est infaillible, alors que le second ne l'est pas.

Dans son compte rendu de 'La Science et l'Hypothèse' Russell objecta d'une part que le raisonnement par récurrence ne nous permet en aucune façon de généraliser, puisqu'il est sous-entendu que la prémisse $(P(n) \rightarrow P(n+1))$ a le même sens que $(\forall n)\ [P(n) \rightarrow P(n+1)]$; nous passons donc d'une proposition universelle à une autre, à savoir de $[P(0) \wedge (\forall n)\ (P(n) \rightarrow P(n+1))]$ à $(\forall n)P(n)$; en conséquence, toute analogie avec l'induction physique s'évanouit. D'autre part, Russell maintient que l'ensemble ω des nombres naturels est <u>défini</u> au moyen du principe de récurrence. On pourrait par exemple dire, en suivant Russell, que ω est la plus petite classe inductive [c'est-à-dire l'intersection de toutes les classes X telles que :
$[0 \in X) \wedge (\forall n)\ ((n \in X) \rightarrow (n+1 \in X))]]$: ω satisferait donc automatiquement au principe de récurrence.

Il me semble évident que le premier argument de Russell est valide. Quant au second, il s'avéra par la suite beaucoup moins probant, surtout après la faillite du programme logiciste. Il me semble aussi que, dans sa réponse, Poincaré n'a pas compris, ou plutôt n'a pas voulu comprendre, la première objection de Russell. Il l'interprète comme affirmant que le principe d'induction est plus général que la proposition à démontrer, c'est-à-dire que le schème $\frac{P(0),\ P(n) \rightarrow P(n+1)}{(\forall n)\ P(n)}$ est plus génral que $(\forall n)P(n)$. Une telle réponse équivaut ou à un truisme ou à une erreur catégorielle, et de toute façon elle déforme la position russellienne. Il est étonnant que Poincaré ne se soit pas attaqué au second argument de Russell. Il aurait pu par exemple dire que Russell ne fait que reculer la difficulté, et qu'il ne suffit pas de définir ω ; il faut en outre établir qu'en démontrant les théorèmes de l'arithmétique on n'invoque que les axiomes logiques. Nous savons que par la suite Russell eut besoin des postulats d'infinité et de réductibilité qui, de l'aveu même de leur auteur, sont loins d'être d'ordre logique. Les axiomes mathématiques sont donc synthétiques après tout ; et si l'on veut qu'ils restent indépendants de l'expérience, on devra admettre qu'ils sont syntétiques a priori. J'ai tout de même l'impression qu'en 1902 cette critique aurait déplu à Poincaré, ou plutôt qu'il l'aurait trouvée insuffisante, parce qu'elle concède implicitement que tout le contenu des mathématiques réside dans leurs axiomes ; ce que Poincaré n'admettait justement pas. Dans 'La Valeur de La Science' il répétera que le raisonnement par récurrence est fécond parce qu'il procède du particulier au général. Pour Poincaré le processus inductif est donc le mécanisme du progrès de la connaissance, en mathématiques tout autant que dans les sciences physiques : en physique les conventions ne constituent que des cadres de classification, et en mathématiques les axiomes logiques sont des instruments sans contenu ; seules les généralisations peuvent augmenter le stock des connaissances.

(VI) CRITERE EMPIRISTE DE LA SIGNIFICATION

Pour bien comprendre le rôle et le statut que Poincaré attribue aux conventions dans les sciences, il est utile d'examiner de près sa critique de la mécanique classique. Dans 'La Science et l'Hypothèse' il se demande si la dynamique est une discipline rationnelle ou une science expérimentale (1). Il prétend que le principe d'inertie n'est pas une loi susceptible d'être vraie ou fausse parce qu'il est impossible de la soumettre directement au contrôle de l'expérience :

comme il n'existe pas de corps isolé ou soustrait à l'action de toute force, nous ne pourrons jamais réfuter le principe d'inertie indépendamment de certaines hypothèses auxiliaires. Passons à la loi de l'accélération: $\vec{f} = m\vec{a}$. Pour la tester il nous faut non seulement définir

(1) S.H. Chapitre VI

la masse, mais aussi fournir un moyen de la mesurer. Poincaré recourt en fait à la définition donnée par Mach, [à savoir que $\frac{m_A}{m_B} = - \frac{a_B}{a_A}$, où m_A, m_B, et a_A, a_B désignent respectivement les masses et les accélérations de deux corps, A et B, supposés isolés du reste de l'univers]. Poincaré fait observer que cette définition met en jeu la troisième loi de Newton qui dit que toute action provoque une réaction égale et opposée ; [d'où $m_A \vec{a}_A = - m_B \vec{a}_B$ pour toutes les positions et vitesses initiales de A et de B]. Ce principe de réaction est pris pour accordé ; il est donc traité comme une définition. De toute ceci Poincaré tire la conclusion que les équations de la dynamique ne sont que des conventions commodes n'ayant rien à craindre des nouvelles expériences que nous serions tentés de faire.

Il me semble qu'un moyen cohérent de rendre compte de la position de Poincaré est de dire qu'il adopte implicitement un critère empiriste de la signification. Appelons proposition simple une formule grammaticalement correcte et ne comportant aucune composante propositionnelle plus petite. Une telle formule sera donc atomique, ou elle commencera par un quantificateur. Elle sera dite signifiante si, et seulement si, elle est au moins vérifiable ou au moins falsifiable. En d'autres termes, une proposition simple n'est susceptible de vérité ou de fausseté que si elle est au moins partiellement décidable. Quant aux propositions complexes, elles seront considérées comme signifiantes si toutes leurs composantes le sont.

Les propositions brutes sont complètement décidables et ne posent donc aucun problème. Bien qu'invérifiables, les lois expérimentales peuvent être empiriquement réfutées et sont donc <u>en droit</u> vraies ou fausses. Quant aux propositions purement existentielles, qui sont vérifiables mais non-falsifiables. Poincaré n'en parle presque pas, sans doute parce qu'elles jouent un rôle minime dans la science théorique. Par contre, les conventions, qui occupent une position centrale dans la physique mathématique, ne peuvent être ni vérifiées ni réfutées et ne sont par conséquent ni vraies ni fausses, tout au moins au sens tarskien de ces termes : Rappelons que les schème tarskien consiste à fixer un domaine d'individus, à analyser une proposition donnée en ses termes primitifs dont chacun reçoit séparément un sens déterminé, puis à assigner l'une des deux valeurs, vraie ou fausse, à la proposition au terme de sa recomposition. Pour Poincaré ce processus d'atomisation cesse d'avoir un sens dès qu'il s'agit d'une convention, c'est-à-dire d'une hypothèse absolument indicidable. Les termes descriptifs qui entrent dans une telle hypothèse, considérés isolément, ne signifient rien, ils n'ont pas de sens littral ; mais la proposition qui les groupe a la valeur d'une métaphore qui est plus ou moins adéquate dans la mesure où elle s'avère plus ou moins commode.

Une convention peut donc refléter, de par sa structure syntaxique, une réalité profonde qu'elle n'est pas en mesure de signifier directement. La commodité, et la commodité seule, opère comme un indice de vérisimilitude. Une théorie sera donc d'autant plus commode qu'elle est vraisemblable, ou plutôt vérisimilaire. Répétons encore une fois que Poincaré emploie un concept intuitif de vérisimilitude qui n'est pas tributaire de celui de vérité-correspondance. Il s'agit d'une notion purement tributaire de celui de vérité-correspondance. Il s'agit d'une notion purement syntaxique liée à la structure mathématique d'une théorie et non pas à une relation sémantique entre ses termes descriptifs et la réalité extérieure. Poincaré souscrit en fait a une thèse quasi Kantienne qui nous met en mesure de <u>simuler</u> la chose-en-soi, mais non pas d'en parler directement. Les implications méthodologiques d'un tel Kantisme sont considérables : Poincaré est farouchement anti-essentialiste. Une convention n'est pas susceptible de cerner l'essence des choses précisément parce qu'elle ne réfère pas du tout à la chose-en-soi. Il est donc illégitime de prétendre en faveur d'une hypothèse qu'elle pose une ontologie particulièrement intelligible. Puisqu'en principe elle ne présuppose aucune métaphysique. Seule la commodité de l'hypothèse révèle son degré de vérité. Poincaré rejettera donc toute théorie devenue incommode, quel qu'en soit le degré d'intelligibilité, puisqu'il n'attribue à ce dernier qu'une valeur purement psychologique.

Concernant le rapport entre la commodité et la simplicité d'une part et la vérisimilitude de l'autre, il dit :

> "L'imposante simplicité du principe de Meyer contribue également a affermir notre foi. Dans une loi déduite immédiatement de l'expérience, comme celle de Mariotte, cette simplicité nous apparait plutôt une raison de méfiance : mais ici il n'en est plus de même ; nous voyons

des éléments disparates au premier coup d'oeil, se ranger dans un ordre inattendu et former un tout harmonieux ; et nous nous refusons à croire qu'une harmonie imprévue soit un simple effet du hasard". (S.H. p.146)

A l'opposé de Lorentz, Poincaré ne croit donc pas à l'ontologie classique justement parce que la dynamique, en tant que convention, ne peut être vraie d'aucune ontologie. Si, dans 'La Science et l'Hypothèse', il soutient que la mécanique classique restera toujours la plus commode, il admet aussi que la notion de temps absolu ne constitue pas une nécessité à priori (1). Nous n'avons, suivant Poincaré, aucune intuition directe de la simultanéité de deux événements spatialement séparés, ou ayant lieu dans deux consciences différentes. Seul l'ordre temporel dans une même conscience est donné et ne dépend donc pas de notre volonté. Par contre, le temps physique requiert une convention, et Poincaré n'accepte celle du temps absolu qu'à titre provisoire. Quant à la transformation galiléenne, toujours considérée par Lorentz comme la seule vraie, Poincaré n'hésitera pas à l'abandonner complètement en 1905. Dès qu'elle s'avéra incommode, Poincaré lui substitua la transformation de Lorentz qui lui apparut comme la seule opérante.

(VII) LE CRITERE EMPIRISTE ET LA GEOMETRIE (2)

Le critère empiriste de la signification nous aide à mieux comprendre les vues de Poincaré concernant les fondements de la géométrie. Il maintient que celle-ci ne porte pas sur l'espace physique mais sur des figures idéales placées dans un espace abstrait. Une figure géométrique A' est obtenue à partir d'un corps concret A par un processus d'idéalisation qui consiste à rectifier, ou à simplifier, A de façon à la rendre accessible au raisonnement mathématique. On attribuera le décalage entre A' et A a l'action de certaines forces, dont la résultante sera désigneé par $\vec{D}$. Soit P la loi physique régissant ces forces qui, suivant la terminologie introduite par Reichenbach, seront dites différentielles si elles dépendent de la constitution physique de

(1) S.H. p.112, et V.S., chapitre II

(2) Pour une étude plus détaillée et plus approfondie de la philosophie de la géométrie de Poincaré, cf. R. Torretti (1978) : "Philosophy of geometry from Riemann to Poincaré", pp.320-358 .

A ou si elles peuvent être neutralisées par un écran. Les forces différentielles varieront donc d'une substance à l'autre. Dénotant par G la géométrie sous-jacente, nous pourrons affirmer que seule la conjonction (G & P) peut être confrontée à l'expérience. Prise isolément, la géométrie G n'est donc pas réfutable ; et comme, comprenant des propositions universelles, elle ne peut pas être vérifiée non plus, elle constitue une convention placée hors des atteintes de l'expérience. C'est dans ce sens que, conformément au critère empiriste de la signification, aucune géométrie n'est ni vraie ni fausse mais plus ou moins commode.

En affirmant que G n'est réfutable que conjointement avec une théorie physique P, on ne fait que poser le problème de Duhem-Quine. Dans le cas de la géométrie G, Poincaré résout ce problème, pour ainsi dire négativement, en déterminant une traduction qui applique G sur une géométrie G^* arbitrairement choisie. Soit A" le corps idéal dont traite G^*. Le procédé employé par Poincaré consiste à construire une physique P^* qui explique le passage de A" a A en deux temps : P^* postule d'une part un champ universel $\vec{U}$, c'est-à-dire un champ qui, suivant Reinchenbach, affecte uniformément toutes les substances et explique la transformation de A" en A' ; d'autre part la résultante $\vec{D}$ qui effectue la transition de A' en A. En simplifiant un peu, nous dirons que P^* pose l'existence du champ $\vec{U} + \vec{D}$, alors que P ne suppose que celle de $\vec{D}$. Il est évident que (G^* & P^*) possède exactement le même contenu empirique que (G & P). Le choix entre (G & P) et (G^* & P^*) est donc affaire de pure convention. Prenant acte des conclusions de Poincaré, Reinchenbach stipulera en 1927 que G doit être choisie de façon à faire disparaître tous les champs universels, ce qui lui permet de donner à la Relativité Générale une sorte de priorité méthodologique. Pour conclure cet aperçu de la philosophie de la géométrie de Poincaré, notons une différence qui la sépare de celle de Reinchenbach. Poincaré envisage des objects idéaux tels que A' qui, tout en restant fictifs, n'en sont pas moins légitimes. L'empirisme plus puriste, donc moins nuancé, de Reinchenbach interdit à ce dernier l'emploi de tels devis mathématiques. Reinchenbach essaie, au moyen de définitions dites coordinatives (Zuordnungs definitionen), de faire directement correspondre aux notions géométriques des corps concrets tels que A. Mais, comme la géométrie ne peut pas directement porter sur les objets réels, il faut au préalable corriger A au moyen de ($-\vec{D}$) tout en évitant d'envisager l'entité idéale A'. Inutile de dire que ces procédés sont beaucoup moins élégants, et aussi beaucoup moins clairs, que ceux utilisés par Poincaré.

(VIII) COMMODITE ET PRINCIPE DE CORRESPONDANCE

Essayons de serrer d'un peu plus près la notion de commodité qui, on l'a déjà vu, joue un rôle essentiel dans la philosophie des sciences de Poincaré. Cette notion comprend deux aspects distincts. Sur le plan théorique, le degré de commodité d'une hypothèse se mesure par celui de son unité ; il se traduit donc, comme nous l'avons déjà dit, par les multiples connexions internes reliant les diverses composantes de l'hypothèse en question. Nous avons aussi noté que l'unité théorique diffère profondément de la simplicité au sens pragmatique. Au niveau empirique, une hypothèse sera considérée commode dans la mesure où, entrainant certaines lois expérimentales, elle prédit de nouveaux faits ou établit des rapports inattendus entre des faits connus ; et ce, sans recours à des suppositions auxiliaires ne faisant pas corps avec l'hypothèse centrale. Ces deux aspects sont donc complémentaires : une théorie commode rend compte de l'expérience tout en préservant son unité. Sous l'impact des faits, une hypothèse peut donc se désagréger, se désunir. Dans un pareil cas, il faut éviter de 'donner un coup de pouce' ; c'est-à-dire qu'il ne faut pas procéder à de petites modifications locales qui ont pour effet de fragmenter la théorie en essayant de la raccorder avec certains faits. Il vaut mieux repartir a zéro, mais à condition de satisfaire au principe de correspondance que Poincaré justifie de la façon suivante : si une ancienne hypothèse H s'est avérée uniformément commode dans tout un domaine Δ, quelque restreint que soit Δ , ce ne peut pas être l'effet du pur hasard ; H doit révéler des rapports qui sont vrais, et qui devraient donc réapparaître, peut être sous une forme légèrement modifiée, dans la nouvelle théorie T. Celle-ci doit donc tendre vers l'ancienne hypothèse H, dès que certains paramètres, en tendant vers zéro, nous ramènent au domaine Δ. Se rendant compte quela thermodynamique classique est probablement fausse et devrait donc être remplacée par une hypothèse atomique, Poincaré écrit :

> "Ces conceptions avaient jusqu'ici toujours été confirmées par l'expérience, et les vérifications sont aujourd'hui assez nombreuses pour qu'on ne puisse les attribuer au hasard. Il faudra donc, si de nouvelles expériences

mettent des exceptions en évidence, non pas abandonner la théorie, mais la modifier, l'élargir de façon à lui permettre d'embrasser les faits nouveaux". (D.P. p.113).

(IX) PRELUDE A LA RELATIVITE

Pour ce qui est des conventions, nous avons déjà vu que Poincaré mit en avant deux thèses et fit deux pronostics. Il maintint d'une part que nous serions toujours en mesure de garder la mécanique classique et de nous en tenir a la géométrie euclidienne, pourvu que nous fussions prêts à modifier le reste de la physique. Ces deux thèses, et surtout le second, sont d'ordre logique, donc inattaquables. D'autre part, Poincaré prédit que la mécanique classique et la géométrie euclidienne s'avéreraient toujours les plus commodes et n'auraient donc rien à craindre de nouvelles expériences. Ironiquement, ce fut Poincaré lui-même qui, en critiquant les hypothèses de Lorentz puis en créant le programme relativiste, réfuta le premier pronostic. Il ne vécut malheureusement pas assez longtemps pour accepter, comme il l'aurait sans aucun doute fait, le démenti que la Relativité Générale apporta à sa seconde prédiction.

Il nous faut maintenant passer en revue les résultats les plus marquants obtenus par Lorentz, puis essayer de reconstituer la position de Poincaré à partir de la critique qu'il fit de ces résultats.

Prenant la vitesse de la lumière comme étant égale à l'unité, nous pouvons écrire les équations de Maxwell-Lorentz sous la forme :

(1) $\mu_0 = e^2/6\pi c^2 R$; e = charge ; R = rayon (de l'électron) ; c = vitesse de la lumière.

Energie électrostatique : $e^2/8\pi R = \varepsilon$. Il s'ensuit que :

$$\mu_0/\varepsilon = 8/6c^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{c^2}$$

(1) $\nabla\vec{E} = \rho$; $\nabla.\vec{H} = 0$; $\nabla x\vec{E} = -\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$; $\nabla x\vec{H} = \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \rho\vec{v}$

A ces équations Lorentz ajoute l'expression de la force pondéromotrice $\vec{L}$ agissant sur une particule portant une charge e et et animée d'une vitesse $\vec{v}$:

(2) $$\vec{L} = e\,(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{H}).$$

Lorentz se propose de déterminer le champ à partir du mouvement des électrons, ou plus généralement à partir de la distribution de la vitesse $\vec{v}$ et de la densité électrique ρ. Il est ainsi conduit à envisager une équation aux dérivées partielles ayant la forme suivante :

(3) $\phi = \psi(t,x,y,z) = \psi(t,\vec{r})$; où ϕ est une fonction inconnue de t,x,y,z ; $\vec{r} = (x,y,z)$; ψ est une fonction donnée ; et $\Box$ est l'opérateur :

(4) $$\Box = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} - V^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

Lorentz trouve la solution suivante :

(5) $$\phi(t,\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi}\iiint \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}|}\,\psi(t - |r - r'|,x',y',z').dx'.dy'.dz'$$

$\vec{r}'$ étant le vecteur (x',y',z,) par rapport auquel l'intégration s'effectue.

S'appuyant sur les équations (1) et (2), Lorentz avait aussi déterminé la résultante $\vec{R}$ de toutes les forces pondéromotrices agissant sur un système de particules chargées qui occupent une région bornée de l'espace.

(6) $\vec{R} = -\frac{d}{dt}\left[\iiint (E \times H)dw\right]$, dw étant l'élément différentiel dx.dy.dz, et l'intégrale étant étendue à tout l'espace.

A partir de l'équation (6) il avait calculé la masse électromagnétique de l'électron : il avait considéré le champ auquel l'électron donne naissance, puis trouvé que ce champ exerce sur sa source une force de freinage égale à :

(7) $$- \frac{d}{dt} \left[\frac{\mu_o \vec{v}}{\sqrt{1-v^2}} \right]$$, μ_o étant, à un facteur constant près, l'énergie de l'électron. Notons qu'en fait $\mu_o = k\,\varepsilon/c^2$, où ε est l'énergie électrostatique, k une constante, et c la vitesse de la lumière que nous considérons comme égale à 1. La forme $k\,\varepsilon/c^2$ montre que l'énergie ε possède un équivalent inertial $k \frac{\varepsilon}{c^2}$.

$\frac{\mu_o}{\sqrt{1 - v^2}}$ représente donc une inertie électromagnétique variant avec la vitesse, et s'ajoutant à la masse matérielle m qui est supposée constante. Grâce à certaines expériences faites [illegible]nn, Lorentz avait pu conclure que, dans le cas d'un électron chargé négativement, la masse matérielle m est nulle.

Revenons maintenant à la solution (5) qui n'est vraie que dans un système immobile dans l'éther. Comme nous mesurons le champ dans un repère fixe par rapport à la terre, il nous faudra déterminer ce que deviennent les équations de Maxwell dans un repère inertial mobile. Lorentz applique naturellement la transformation galiléenne, c'est-à-dire :

(8) $\bar{x} = x - ut, \bar{y} = y, \bar{z} = z, \bar{t} = t$, qu'il considèrera toujours comme la seule légitime. De (8) il s'ensuit que :

(9) $$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \; ; \; \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \; ; \; \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \; ; \; \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \bar{t}} - u \frac{\partial}{\partial \bar{x}} .$$

L'opérateur $\Box$ devient :

(10) $$\Box = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial t^2} \right) = (1 - u^2) \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} - \left(\frac{\partial}{\partial \bar{t}^2} - 2u \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}\, \partial} \right.$$

En vue de l'existence de la solution (5) de l'équation (3), il est commode, au point de vue strictement mathématique, de trouver une transformation :

$(\bar{x},\bar{y},\bar{z},\bar{t}) \mapsto (x',y',z',t')$, qui ramène l'opérateur

$$\left| (1-u^2) \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial \bar{t}^2} - 2u \frac{\partial}{\partial \bar{x} . \partial \bar{t}} \right) \right|$$ à la forme

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} - \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \right|,$$ ou au moins à la forme :

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} - h^2 \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \right|,$$ h étant une constante .

Par une voie purement mathématique, Lorentz fut ainsi conduit à envisager la transformation suivante :

(11) $x' = \gamma\, \bar{x}$, $y' = \bar{y}$, $z' = \bar{z}$, $t' = \bar{t} - u\, \gamma^2\, \bar{x}$, γ étant la constante $1/\sqrt{1 - u^2}$.

Les équations (11) entrainent : (11') $-\nabla'^2 - \gamma^2 \partial^2/\partial t'^2 = \frac{\partial}{\partial x'^2} + \frac{\partial}{\partial y'^2} + \frac{\partial}{\partial z'^2} - \gamma^2 \frac{\partial}{\partial t'^2}$

Le produit des deux transformations (8) et (11) est donc :

$$\text{(12)} \quad \begin{aligned} & x' = \gamma\, \bar{x} = \gamma(x - ut) \ ; \ y' = \bar{y} = y \ ; \ z' = \bar{z} = z \ ; \\ & t' = \bar{t} - u\, \gamma^2\, \bar{x} = t - u\, \gamma^2 (x - ut) = \gamma^2 (t - ux) \end{aligned}$$

Notons que, à la différence d'un facteur supplémentaire γ dans l'expression de t' près, les équations (12) sont identiques à celles que Poincaré appellera 'transformation de Lorentz'.

On peut dire que la Relativité Restreinte prit naissance, en 1892, le jour où Lorentz décida de munir les relations (12) d'une interprétation physique (1). Comme $x' = \gamma\, \bar{x} = \bar{x}/\sqrt{1 - u^2}$, il s'ensuit que $\bar{x} = x'.\sqrt{1 - u^2}$, c'est-à-dire que $\bar{x}$ résulte d'une contraction de x' en raison du facteur $\sqrt{1 - u^2}$. Lorentz démontra qu'une translation à travers l'éther modifiait la forme et l'intensité de la force pondéromotrice (2). Une charge en mouvement équivaut à un courant donnant naissance à un champ électrique et à un champ magnétique, qui exercent sur l'électron une force différente d'une action purement électrostatique. Il établit ensuite que si les forces moléculaires, traduisant elles aussi certains états de l'éther, subissaient la même altération que leurs homologues électromagnétiques les corps rigides se contracteraient en raison du facteur $\sqrt{1 - u^2}$ suivant la direction de la vitesse $\vec{u}$. Lorentz rendit ainsi compte du résultat négatif de l'expérience de Michelson. Dans son Versuch de 1895 (2) il poursuit aussi une approche qui consistait, en négligeant les quantités du deuxième ordre en u, à transformer conjointement les coordonnées <u>et</u> le champ de telle façon que les équations de Maxwell gardent la même forme que dans le repère absolu. Si l'on néglige les facteurs du deuxième ordre, les équations (12) deviennent :

$$(13)\quad \begin{cases} x' = \gamma\bar{x} \doteqdot \bar{x} = (x-ut), \text{ puisque } \gamma=(1-u^2)^{-1/2} \doteqdot 1 \; ; \; y'=\bar{y}-y \; ; \; z'=\bar{z}-z \; ; \text{ enfin :} \\ t' - \gamma^2(t - ux) \doteqdot t - ux \end{cases}$$

[illegible]s t' le temps local et posons simultanéme[illegible]

$$(14)\quad \vec{E}' = \vec{E} + \vec{u} \times \vec{H} \; ; \; \vec{H}' = \vec{H} - \vec{u} \times \vec{E}$$

Il est aisé de montrer que dans l'éther libre :

$$(15)\quad \begin{cases} \nabla'.\vec{E}' \simeq 0 = \nabla'.\vec{H}' \; ; \; \nabla' \times E' \simeq -\dfrac{\partial \vec{H}'}{\partial t'} \; ; \; \nabla' \times H' \simeq \dfrac{\partial \vec{E}'}{\partial t'} \\ \nabla' \text{ étant l'opérateur } \left(\dfrac{\partial}{\partial x'} , \dfrac{\partial}{\partial y'} , \dfrac{\partial}{\partial z'} \right) . \end{cases}$$

Nous supposons au cours de ces opérations que toutes les quantités du deuxième ordre en u sont négligeables. Notons que les équations (15) ont la même forme que celle des équations vraies dans le repère absolu. De ce résultat Lorentz tire la conclusion qu'une translation uniforme dans l'éther ne donne naissance à aucun effet du premier ordre. En d'autres termes, la covariance de premier ordre de la théorie de Maxwell entraine l'absence d'effets de ce même ordre. On peut considérer la Relativité Restreinte comme la généralisation de ce théorème. Remarquons aussi que Lorentz était déjà allé dans le sens de cette généralisation en montrant que la contraction lorentzienne expliquait l'absence d'effets du deuxième ordre, à tout le moins dans le cas de l'expérience de Michelson.

Notons enfin que, probablement à cause de son adhésion intuitive à la notion de temps absolu, Lorentz ne réussit pas, ou plutôt ne tint pas, à donner du temps local t' une interprétation physique. Dans la plupart des applications il affirma que les différences entre t et t' étaient tellement négligeables que l'on pouvait identifier ces deux quantités. En fait, non seulement il n'interprèta que les coordonnées spatiales, mais il continua de regarder la transformation galiléenne comme la seule vraie, appelant les quantités x', y', z', et t' des coordonnées <u>effectives</u>, c'est-à-dire des artifices lui permettant d'expliquer les résultats de certaines expériences. Dans un repère en mouvement, $\bar{x}$ reste l'abscisse vraie mais, à cause de la contraction des instruments de mesure, l'abscisse mesurée égalera $\bar{x}/\sqrt{1 - u^2} = x'$.

Revenons à Poincaré. En ce qui concerne l'espace, nous ne percevons que des mouvements relatifs, et non pas ceux de la matière par rapport à l'éther. Il s'agit là, d'après Poincaré, d'un fait brut qui nous porte à souscrire instinctivement au principe de relativité. Cet instinct préexiste à toute théorie articulée (1). Quant à l'existence de l'éther, c'est une convention acceptable seulement dans la mesure où elle s'avère commode. Poincaré exprime le principe relativiste sous une forme abstraite qui, tout en transcendant l'expérience, la généralise : les lois de la nature revêtent la même forme dans tous les repères inertiaux. C'est la formulation émise plus tard par Einstein mais que, dans 'La Science et l'Hypothèse', Poincaré relie initialement au groupe de Galilée. Vue notre adhésion intuitive à la Relativité, nous n'y renoncerons que si l'expérience, ou une autre hypothèse plus commode, la démentent. Nous voudrions par exemple étendre le principe de relativité à tous les systèmes, quels qu'ils soient ; mais nous savons que les mouvements accélérés donnent naissance à des effets décelables, c'est-à-dire à des faits bruts que nous ne pouvons pas ignorer.

En ce qui concerne le temps, il n'existe, suivant Poincaré, qu'un seul fait brut dont nous ayons à tenir compte ; c'est l'ordre temporel au sein d'une conscience individuelle. Nous n'avons une idée intuitive ni de l'égalité de deux durées, ni de la simultanéité de deux événements spatialement séparés ou ayant lieu dans deux consciences différentes. <u>Le temps physique comportera donc une stipulation irréductible que l'on ne devrait juger qu'en fonction de la commodité des hypothèses qui l'incorporent</u> (2). Nous voyons déjà pourquoi

---

(1) S.H., Chapître VII.

(2) 'La Mesure du Temps'. Revue de Métaphysique et de Morale 1898

Poincaré, n'étant pas a priori acquis à la notion de temps absolu, sera prêt à l'abandonner en faveru d'un concept plus commode, par exemple celui du temps local.

Dans un article publié en 1895, 'A propos de la Théorie de M. Larmor'(1), Poincaré maintient que la théorie de Lorentz, tout en restant supérieure à ses rivales, déroge aux deux principes de relativité et de réaction. Il est évident en premier lieu que les équations de Maxwell ne sont pas covariantes par rapport à la transformation galiléenne, c'est-à-dire à la transformation (8). En second lieu, la relation (6) entraine, puisque l'intégrale $\iiint (\vec{E} \times \vec{H}).dv$ n'est pas en général constante, que la résultante $\vec{R}$ de toutes les forces pondéromotrices agissant sur un système isolé de particules chargées ne s'annule pas. La quantité de mouvement ne se conserve donc pas, du moins si l'on se restreint à la matière seule, ou plutôt à ce qui en est en principe observable. Poincaré concède que l'on pourrait considérer l'action de la matière comme étant instantanément compensée par une réaction de l'éther ; mais cette hypothèse nous forcerait à regarder l'éther comme étant en mouvement, ce qui contredit une supposition faite au départ par Lorentz. Vers la fin de l'article Poincaré fait une remarque profonde, mais qui reste inexpliquée, à savoir que la violation du principe de réaction est intimement liée à celle du principe de Relativité.

Dans un article publié en 1900 et intitulé 'La Théorie de Lorentz et le principe de réaction'(2), puis dans un chapitre de son 'Electricité' et Optique' qui parut en 1901, Poincaré apporta une solution partielle à cette problématique. Il savait que Lorentz s'était servi, sans l'interpréter, du concept de temps local pour expliquer l'absence d'effets du premier ordre dû au mouvement de la terre. Comme nous l'avons déjà vu, la position philosophique de Poincaré voulait qu'une théorie fût testée par certains faits bruts. Or, les opérations constituant ces faits bruts comportent en général des mesures de durées rendues possibles par une stipulation. Poincaré donna une définition opérationnelle du temps local t' au moyen d'une convention qui fut par la suite attribuée à Einstein : deux horloges A et B, au repos l'une par rapport à l'autre, seront dites synchrones si un rayon lumineux, quittant A à l'instant 0, arrive en B à l'instant t, se réfléchit en B, puis regagne A à l'instant 2t ; étant bien entendu que tous les instants dont il s'agit sont des instants locaux indiqués par des horloges aux points considérés. Le temps t ainsi mesuré ne sera autre que le temps local de Lorentz. La simultanéité dépendra du mouvement du système AB, donc du repère choisi, mais il est impossible pour des observateurs au repos dans ce système de se rendre compte que leur temps local est moins privilégié que le temps absolu.

Montrons comment la notion de simultanéité intervient dans l'application du principe de réaction. Considérons un électron A qui agit sur un autre B, A et B étant séparés par une distance l. Une perturbation électromagnétique quittant A se propage vers B avec la vitesse de la lumière c ; lorsqu'elle atteint B au bout d'un intervalle de temps l/c, A sera rentré dans le repos. L'action sur B ne peut donc pas être instantanément compensée par une réaction qui ne parviendra jusqu'en A qu'après un second intervalle de temps l/c. Par conséquent, les équations de Maxwell violent le principe de réaction parce qu'elles prévoient des propagations d'ondes à une vitesse finie incompatible avec la simultanéité de l'action et de la réaction. Nous comprenons maintenant la connexité entre la Relativité Classique et le principe de réaction : la relativité galiléenne repose sur une notion de simultanéité absolue présupposée par le principe de réaction. Il est donc peu étonnant que l'hypothèse de Lorentz, étant inconciliable avec la relativité classique, enfreigne aussi le principe de réaction. D'après Poincaré, nous aurions fait bon marché de la Relativité si elle s'était avérée incompatible avec les théories acceptées *et* avec l'expérience. Or ce sont précisément les faits bruts, sous la forme des expériences de Michelson, qui se sont obstinés à confirmer la relativité des phénomènes optiques. Poincaré accuse Lorentz d'avoir rendu compte de ces résultats en accumulant les hypothèses. Cette critique me semble injustifiée. Après tout, Lorentz n'avait avancé qu'une hypothèse supplémentaire, à savoir que toutes les forces se comportent dans l'éther comme les actions électromagnétiques ; de cette supposition tout à fait naturelle découle la contraction lorentzienne et, nous le savons aujourd'hui, le retardement des horloges donnant naissance au temps local. Poincaré aurait eu raison de dire, non pas que Lorentz avait multiplié les hypothèses, mais qu'il n'avait pas relié sa théorie des forces moléculaires à sa notion du temps local t' ; en fait Lorentz était incapable de faire cette liaison, puisqu'il avait tout simplement omis d'interpréter t' . La convention de synchronisation mise en ayant par Poincaré avait justement comblé cette lacune. Mais Poincaré exigeait beaucoup plus que ça : déjà dans 'La Science et l'Hypothèse' il avait traité l'absence d'effets du premier et du deuxième ordres comme n'étant pas un simple effet du hasard, mais comme révélant un principe universel. Conformément à sa philosophie, et, en vue du principe de relativité régissant la mécanique classique, Poincaré avait généralisé en <u>affirmant</u> qu'aucun effet attribuable au mouvement absolu ne pouvait en principe être décelé. Il avait élevé la relativité au rang d'un postulat s'appliquant non seulement à la mécanique, mais aussi à l'électromagnétisme. Dans une conférence donnée a Saint-Louis en 1904, il exigea la création d'une théorie unifiée rendant compte de tous les phénomènes qui pour le moment, semblaient déconnectés. En fait, ce fut Poincaré lui-même qui construisit une telle théorie en 1905. Rappelons qu'une convention n'est commode que si elle est unifiée et que si elle rend compte de l'expérience sans recourir à des hypothèses ad-hoc. Or, dans la théorie de Lorentz, seul l'emploi des coordonnées effectives, c'est-à-dire des coordonnées effectivement mesurées et servant à décrire les faits bruts, explique les résultats expérimentaux. La transformation galiléenne, quoique considérée comme la seule vraie, rompt la transition entre le repère immobile et les coordonnées effectives. Contestant aux hypothèses scientifiques toute référence ontologique directe, Poincaré est prêt à balayer les coordonnées galiléennes et à baser son nouveau principe de Relativité sur la transformation de Lorentz, c'est-à-dire sur les coordonnées effectives : x',y', z',t', (cf(12)). Nous obtenons ainsi la première composante du programme relativiste, à savoir la covariance par rapport au groupe de Lorentz. Quant à la seconde composante, c'est-à-dire le Principe de Correspondance, nous avons déjà vu dans quel sens Poincaré le tient pour indispensable à tout programme de recherche. Pour satisfaire au principe de relativité, il faudra que la masse matérielle, au cas où elle existerait, dépende de la vitesse de la même manière que l'inertie électromagnétique (1) ; ce qui en fait signifie : Inertie matérielle $= km/\sqrt{1-v^2}$.

Enfin, la soi-disante contraction des corps en mouvement pourrait être expliquée en fonction, non pas d'une altération des forces physiques affectant uniformément toutes les substances, mais d'une modification cinématique de l'éther lui-même (2). N'oublions pas dans ce contexte que pour Poincaré toute référence à l'éther n'est qu'une façon de parler, l'éther étant au fond représenté par la structure de l'espace-temps.

La nouvelle hypothèse relativiste de Poincaré parut en 1905 sous le titre : 'Sur la Dynamique de l'Electron'.

(XI) LA DYNAMIQUE DE L'ELECTRON

En résumé : Poincaré est, tout autant qu'Einstein, l'initiateur du programme relativiste. D'une part, sa conception empiriste de la signification l'amena à donner un sens opérationnel à la notion lorentzienne du temps local ; celui-ci est tout simplement le temps mesuré par une montre réglée d'après ce que l'on appela plus tard la convention d'Einstein : un signal lumineux quitte le point A a l'instant t_1 et arrive à l'instant local t_2 au point B, où il est réfléchi ; le signal revient alors vers A où il arrive à l'instant t_3 . Les deux montres en A et en B seront dites synchrones si et seulement si : $t_2 = \frac{1}{2}(t_1 + t_3)$. (Dans sa biographie d'Albert Einstein, Carl Seelig affirme que 'La Science et l'Hypothèse' était l'une des lectures favorites du jeune Einstein et de ses amis dans les années qui précédèrent la publication en 1905 de 'Sur l'Electrodynamique des corps en mouvement'). D'autre part, Poincaré débarrassa définitivement la physique de la transformation galiléenne que Lorentz interposait toujours entre le repère absolu et les coordonnées effectives, c.a.d. : entre x, y, z, t et : $x' = \gamma(x - ut)$; $y' = y$; $z' = z$; $t' = \gamma(t - \frac{u}{c^2} x)$,. γ étant la constante $1/\sqrt{1 - u^2/c^2}$. Ce sont ces coordonnées effectives que Poincaré considère comme les seules pertinentes. A l'opposé de Lorentz, Poincaré n'est pas pour ainsi dire lié à l'ontologie classique, c'est-à-dire à l'éther et au temps absolu qui font de la transformation galiléenne ($\bar{x} = x - ut$, $\bar{y} = y$, $\bar{z} = z$, $\bar{t} = t$) la seule intelligible. C'est que, d'après le conventionalisme et plus particulièrement d'après la conception falsificationiste de la signification, les hypothèses ne peuvent pas être vraies ou fausses au sens de la vérité-correspondance ; elles sont plus ou moins commodes. La commodité, ou l'esthétique mathématique, joue le rôle d'un indice de vérisimilitude, mais non pas de vérité : une théorie commode simule, de par sa structure globale, une réalité objective qu'elle ne peut néanmoins pas signifier directement. Sans être signifiantes, les théories ont donc une certaine teneur de vraisemblance.

Poincaré est kantien : les hypothèses scientifiques peuvent relféter l'univers des noumènes sans pour autant être en mesure de l'appréhender. L'éther et le temps absolu sont en dernière analyse des artifices ayant pour seul but d'étayer notre imagination ; ils ne révèlent pas la nature profonde des choses et devront donc être rejetés s'ils s'avèrent inutilisables. Or, les coordonnées galiléennes étant devenues incommodes, Poincaré les élimina en faveur de ce qu'il appella lui-même la transformation de Lorentz, c'est-à-dire d'une transformation menant directement d'un repère dit immobile aux coordonnées effectives. Il choisit ses unités de telle façon que la vitesse de la lumière devint égale à l'unité ; puis, il proposa une transformation un peu plus générale que celle construite par Lorentz, à savoir : $x' = k\ell(x + \varepsilon t)$; $y' = \ell y$; $z' = \ell z$; $t' = k\ell(t + \varepsilon x)$, où $k = 1/\sqrt{1 - \varepsilon^2}$, $-\varepsilon$ = vitesse du repère mobile, et ℓ est un paramètre provisoirement regardé comme indépendant de ε . En même temps Poincaré forgea une nouvelle heuristique qui devint celle de tout le programme relativiste. Toute loi physique est assujettie à deux conditions : elle doit d'une part être covariante par rapport au groupe de Lorentz, c.a.d prendre la même forme dans tous les repères inertiaux ; elle devra d'autre part tendre vers une loi classique correspondante lorsque les vitesses envisagées deviennent négligeables en comparaison de la vitesse de la lumière, c.a.d. de l'unité. Les deux piliers du programme relativiste sont donc : le Principe de Relativité, ou de covariance, et le Principe de Correspondance.

Poincaré employa la nouvelle heuristique pour reconstituer, tout en les corrigeant, les transformations de Lorentz pour le champ électromagnétique. C'est ainsi qu'il développa une nouvelle cinématique basée sur les coordonnées effectives, puis utilisa cette cinématique, jointe au principe de la conservation de la charge, pour obtenir une nouvelle transformation de la densité électrique. En 1905 il alla bien au-delà des théories de Lorentz et d'Einstein en proposant une hypothèse covariante de la gravitation prédisant l'existence d'ondes gravifiques qui se propagent à la vitesse de la lumière. Poincaré se posa aussi une question à laquelle Einstein lui-même aurait dû penser ; à savoir pourquoi, la vitesse de la lumière devait constituer un invariant de base et par conséquent jouer un rôle fondamental, non seulement en électrodynamique, mais dans toutes les branches de la physique. A cette question Poincaré imagina deux réponses possibles : ou toutes les forces de la nature sont en dernière analyse d'origine électromagnétique, ou c'est l'observateur qui, en utilisant les rayons lumineux pour mesurer les distances et les intervalles de temps, insère la vitesse de la lumière dans tout l'univers physique. Poincaré envisage donc deux réponses de teneurs philosophiques très différentes : la première est réaliste et la seconde en partie conventionaliste. Poincaré est toujours conscient d'un dualisme inévitable entre le physicien qui crée des conventions pour interpréter la nature, et cette dernière qui lui impose des limites infranchissables.

Je ne propose maintenant d'examiner dans le détail les aspects les plus importants de 'Sur la Dynamique de l'Electron'. Ce qu'il y a dans le texte de plus fascinant pour un historien de la science, c'est qu'on peut y saisir sur le vif la marche heuristique de la pensée d'un puissant génie ; on le voit construire, étape par étape, tout un nouvel édifice physique. N'oublions pas que Poincaré lui-même s'est beaucoup intéressé au processus de l'invention dans les sciences. Vu son intuition mathématique, on a souvent du mal à suivre ses enchainements logiques ; on se verra souvent obligé de reconstituer sous forme de preuve ce qui lui apparait comme une simple évidence. Mais les deux principes régulateurs de sa pensée seront toujours ceux que nous avons déjà mentionnés : la covariance et la correspondance.

Ce qui en outre complique le texte de 'Sur la Dynamique de l'Electron', c'est que Poincaré n'y emploie pas de notation vectorielle ; il nous est souvent difficile d'identifier une divergence, un rotationnel ou même un simple produit vectoriel. J'essaierai donc de simplifier les démonstrations par l'emploi systématique des vecteurs à 3 dimensions .

(a) Cinématique, Electromagnétisme et Dynamique

Nous avons déjà dit que Poincaré prend la vitesse de la lumière comme étant égale à l'unité et qu'il exprime la transformation de Lorentz sous la forme :

(1) $x' = k\ell(x + \varepsilon t)$; $y' = \ell y$; $z' = \ell z$; $t' = k\ell(t + \varepsilon x)$; k étant une constante égale à $1/\sqrt{1 - \varepsilon^2}$, et ℓ et ε étant deux paramètres considérés pour le moment comme indépendants l'un de l'autre. ($-\varepsilon$ est en fait la vitesse du repère mobile). La transformation inverse s'obtient en résolvant (1) pour x, y, z, t en fonction de x', y', z', t'. Il vient :

(2) $x = \frac{k}{\ell}(x' - \varepsilon t')$; $y = \frac{1}{\ell}y'$; $z = \frac{1}{\ell}z'$; $t = \frac{k}{\ell}(t' - \varepsilon x')$. Comme les équations de Maxwell contiennent les opérateurs $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$, et $\frac{\partial}{\partial t}$, il est utile de déterminer les transformations de ceux-ci. $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial t'} = k\ell \frac{\partial}{\partial x'} + k\ell\varepsilon \frac{\partial}{\partial t'}$. Par conséquent :

(3) $\frac{\partial}{\partial x} = k\ell(\frac{\partial}{\partial x'} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t'})$. De même : $\frac{\partial}{\partial t} = k\ell(\frac{\partial}{\partial t'} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x'})$, $\frac{\partial}{\partial y} = \ell\frac{\partial}{\partial y'}$, $\frac{\partial}{\partial z} = \ell\frac{\partial}{\partial z'}$

Les transformations inverses sont :

$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial t} = \frac{k}{\ell}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{k\varepsilon}{\ell}\frac{\partial}{\partial t}$. Donc :

(4) $\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{k}{\ell}(\frac{\partial}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial}{\partial t})$. De même : $\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{k}{\ell}(\frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon\frac{\partial}{\partial x})$, $\frac{\partial}{\partial y'} = \frac{1}{\ell}\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z'} = \frac{1}{\ell}\frac{\partial}{\partial z}$

Nous aurons besoin des vitesses qui elles aussi entrent dans les équations de Maxwell. Soient $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ et $\vec{v}' = (v'_1, v'_2, v'_3)$ deux vitesses correspondantes dans les repères fixe et mobiles respectivement.

$$v'_1 = \frac{dx'_1}{dt'} = \frac{d[k\ell(x+\varepsilon t)]}{d[k\ell(t+\varepsilon x)]} = \frac{k\ell(dx+\varepsilon dt)}{k\ell(dt+\varepsilon dx)} = \frac{(dx/dt)+\varepsilon}{1+\varepsilon(dx/dt)}$$. C'est-à-dire :

(5) $v'_1 = \frac{v_1 + \varepsilon}{1 + \varepsilon v_1}$. De même : $v'_2 = \frac{v_2}{k(1 + \varepsilon v_1)}$, $v'_3 = \frac{v_3}{k(1 + \varepsilon v_1)}$

Nous pouvons aussi exprimer v_1, v_2, v_3 en fonction de v'_1, v'_2, v'_3 .

Il viendra :

(6) $$v_1 = \frac{v'_1 - \varepsilon}{1 - \varepsilon v'_1} \quad , \quad v_2 = \frac{v'_2}{k(1 - \varepsilon v'_1)} \quad , \quad v_3 = \frac{v'_3}{k(1 - \varepsilon v'_1)} \; .$$

Nous avons déjà vu que Poincaré écrit les équations de Maxwell-Lorentz sous la forme :

(7) $\nabla.\vec{H} = 0$, $\nabla.\vec{E} = \rho$, ρ étant la sensité électrique ; et

(8) $\nabla\times\vec{H} = \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \rho\vec{v}$, (9) $\nabla\times\vec{E} = - \frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$

(10) $\vec{L} = e(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{H})$, $\vec{L}$ étant la force de Lorentz, et e et v étant respectivement la charge et la vitesse de la particule en mouvement.

Poincaré s'attaque au problème de la transformation du champ électromagnétique par le biais de la densité électrique et des potentiels scalaires et vectoriels. En vertu de l'équation $\nabla.\vec{H} = o$, nous pouvons poser :

(11) $\vec{H} = \nabla \times \vec{A}$ pour un certain vecteur $\vec{A}$ appelé potentiel vectoriel. Substituant dans l'équation (9), nous obtenons :

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{A}) = - \nabla \times (\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}) \quad , \text{ c'.à.d. : } \nabla \times (\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}) = o \; .$$

Nous en concluons qu'il existe un potentiel scalaire ψ tel que :

$\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = - \nabla\psi$, c.à.d. :

(12) $$\vec{E} = - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \nabla\psi \; .$$

Comme les équations (11) et (12) ne déterminent pas $\vec{A}$ et ψ uniquement, nous pouvons imposer la condition suivante, dite condition de Lorentz :

(13) $$\nabla.\vec{A} + \frac{\partial\psi}{\partial t} = o \quad , \text{ c'.à.d. : } \quad \nabla.\vec{A} = - \frac{\partial\psi}{\partial t} \; .$$

Les deux équations (7) et (12) entraînent :

$$\rho = \nabla.\vec{E} = -\nabla.(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \nabla\psi) = -\left[\frac{\partial}{\partial t}(\nabla.\vec{A}) + \nabla^2\psi\right]$$

$$= -\left[\frac{\partial}{\partial t}(-\frac{\partial\psi}{\partial t}) + \nabla^2\psi\right]$$, en vertu de (13). Donc :

(14) $$-\rho = \left[\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\psi \equiv \Box\psi ,$$ étant l'opérateur défini par :

(15) $$\Box = \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} .$$

De même, les équations (8) (11) et (12) entrainent :

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \frac{\partial}{\partial t}(-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \nabla\psi) + \rho\vec{v}$$, c.à.d. :

$$\nabla(\nabla.\vec{A}) - \nabla^2\vec{A} - \quad + \rho\vec{v} - \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \nabla(\frac{\partial\psi}{\partial t})$$. En vertu de (13), nous obtenons :

(16) $$\Box\vec{A} \equiv [\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}]\vec{A} = -\rho\vec{v} .$$

Les relations (13), (14) et (16) nous permettent de calculer $\vec{A}$ et ψ en fonction de ρ, de $\vec{v}$ et des conditions aux limites. Comme ces équations mettent en jeu l'opérateur $\Box$, nous sommes amenés à déterminer la loi de transformation de ce dernier. D'après (3) et (15) :

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} = k^2\ell^2(\frac{\partial}{\partial x'} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial t'})^2 + \ell^2\frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \ell^2\frac{\partial^2}{\partial x'^2} - k^2\ell^2(\frac{\partial}{\partial t'} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial x'})^2$$

$$= \ell^2\left[\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} - \frac{\partial^2}{\partial t'^2}\right]$$, en vertu de la définition de k : $k = (1 - \varepsilon^2)^{-1/2}$. Par conséquent :

(17) $$\Box = \ell^2[\nabla'^2 - \frac{\partial}{\partial t'^2}] \equiv \ell^2\,\Box' \text{ ; ou : } \Box' = \ell^{-2}\,\Box$$

D'après le principe de Relativité, la densité ρ' et les potentiels ψ' et $\vec{A}'$ pris par rapport à un repère inertial en mouvement sont liés par les relations suivantes :

(18) $\square'\psi' = -\rho'$ et $\square'\vec{A}' = -\rho'\vec{v}'$. En vertu de (17) et de (5), nous obtenons :

(19) $$\square\,\psi' = -\ell^2\rho' \text{ et } \square\vec{A}' = -\ell^2\rho'\left(\frac{v_1+\varepsilon}{1+\varepsilon v_1}, \frac{v_2}{k(1+\varepsilon v_1)}, \frac{v_3}{k(1+\varepsilon v_1)}\right)$$

Par conséquent, si nous arrivons à déterminer la loi de transformation de ρ, les équations (19) nous permettront de transformer $\vec{A}$ et ψ, donc $\vec{E}$ et $\vec{H}$ aussi, puisque : $\vec{E} = -\nabla\psi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ et $\vec{H} = \nabla\times\vec{A}$. C'est à ce stade que Poincaré applique le principe de l'invariance de la charge. Il considère une particule chargée animée d'un mouvement uniforme et entraînant une sphère de rayon r. $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ étant la vitesse de la particule, l'équation de la sphère sera :

(20) $$\begin{cases} (x - v_1t)^2 + (y - v_2t)^2 + (z - v_3t)^2 = r^2. \text{ Nous aurons } \rho = e/(\frac{4}{3}\Pi r^3 \\ = \frac{3e}{4\Pi r^3}, \ \rho \text{ étant la densité et } e \text{ la charge de la particule.} \end{cases}$$

En vertu de la transformation (2), l'équation de la sphère rapportée à un repère mobile est :

$$\frac{k^2}{\ell^2}[(x'-\varepsilon t')-v_1(t'-\varepsilon x')]^2+[\tfrac{1}{\ell}y'-v_2\tfrac{k}{\ell}(t'-\varepsilon x')]^2+[\tfrac{1}{\ell}x'-v_3\tfrac{k}{\ell}(t'-\varepsilon x')]^2=r^2 \;;$$

c'est-à-dire :

(21) $$k^2(1+\varepsilon v_1)^2[x'-(\frac{v_1+\varepsilon}{1+\varepsilon v_1})t']^2+[y'+kv_2(\varepsilon x'-t')]^2+[z'+kv_3(\varepsilon x'-t')]^2 = \ell^2r^2$$

Nous avons donc à faire à un ellipsoïde dont le volume est égal à $\frac{4}{3}\Pi\ell^3r^3\frac{1}{k(1+\varepsilon v_1)} = \frac{4\Pi\ \ell^3r^3}{3k(1+\varepsilon v_1)}$. Comme la charge e est un invariant, la densité ρ' est égale à $e/(\frac{4\Pi\ \ell^3r^3}{3k(1+\varepsilon v_1)})$; c.à.d. :

(22) $\rho' = \dfrac{3e}{4\Pi r^3} \cdot \dfrac{k(1+\varepsilon v_1)}{\ell^3}$. Comparant (22) avec la seconde relation de (20), nous obtenons la transformation de ρ :

(23) $\rho' = \dfrac{k\rho}{\ell^3}(1 + \varepsilon v_1) = \dfrac{\rho(1 + \varepsilon v_1)}{\ell^3\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$ (par la définition de k) .

Revenons maintenant aux équations (19) qui, en vertu de (23), deviennent :

(24) $\Box\psi' = -\ell^2\rho' = -\dfrac{k}{\ell}\rho(1 + \varepsilon v_1) = -\dfrac{k}{\ell}(\rho + \varepsilon\rho v_1)$, et

$\Box\vec{A}' = -\ell^2\rho'\vec{v}' = -\dfrac{k}{\ell}\rho(1 + \varepsilon v_1)\left(\dfrac{v_1+\varepsilon}{1+\varepsilon v_1}, \dfrac{v_2}{k(1+\varepsilon v_1)}, \dfrac{v_3}{k(1+\varepsilon v_1)}\right)$

Il s'ensuit que, en posant $\vec{A}' = (A'_1, A'_2, A'_3)$, nous aurons :

(25) $\Box A'_1 = -\dfrac{k}{\ell}(\rho v_1 + \varepsilon\rho)$, $\Box A'_2 = -\dfrac{1}{\ell}\rho v_2$, $\Box A'_3 = -\dfrac{1}{\ell}\rho v_3$.

Rappelons que $\Box\psi = -\rho$ et que $\Box\vec{A} = -\rho\vec{v}$ (cf.(14) et (16)). Posant $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$, nous obtenons

(26) $\Box\psi = -\rho$, $\Box A_1 = -\rho v_1$, $\Box A_2 = -\rho v_2$, $\Box A_3 = -\rho v_3$.

Les relations (24) et (26) entraînent :

$\Box\psi' = -\dfrac{k}{\ell}(\rho + \varepsilon\rho v_1) = \dfrac{k}{\ell}(\Box\psi + \varepsilon\Box A_1) = \Box\left[\dfrac{k}{\ell}(\psi + \varepsilon A_1)\right]$. De même, (25) et (26) impliquent :

$\Box A'_1 = \dfrac{k}{\ell}(\Box A_1 + \varepsilon\Box\psi) = \Box\left[\dfrac{k}{\ell}(A_1 + \varepsilon\psi)\right]$, et :

$\Box A'_2 = \dfrac{1}{\ell}\Box A_2 = \Box(\dfrac{1}{\ell}A_2)$ etc. Nous pouvons donc écrire :

$$(27)\quad \begin{cases} \Box A'_1 = \Box\left[\dfrac{k}{\ell}(A_1+\varepsilon\psi)\right], \ \Box A'_2 = \Box\left[\dfrac{1}{\ell}A_2\right], \Box A'_3 = \Box\left[\dfrac{1}{\ell}A_3\right], \text{ et} \\ \Box\psi' = \Box\left[\dfrac{k}{\ell}(\psi + \varepsilon A_1)\right] \end{cases}$$

Les équations (27) seront donc automatiquement satisfaites si nous prenons :

(28) $$A_1' = \frac{k}{\ell}(A_1 + \varepsilon\psi) \; , \; A_2' = \frac{1}{\ell} A_2 \; , \; A_3' = \frac{1}{\ell} \; , \; \psi' = \frac{k}{\ell}(\psi + \varepsilon A_1) \; .$$

Pour que $\vec{A}'$ et ψ' représentent les potentiels vectoriels et scalaires respectivement, il nous reste à établir que la condition de Lorentz est satisfaite dans le repère mobile ; c.à.d. qu'il nous faudra démontrer que : $\nabla'.\vec{A}' + \frac{\partial\psi'}{\partial t'} = o$. Nous avons :

$$\nabla'.\vec{A}' + \frac{\partial\psi'}{\partial t'} = \frac{\partial A_1'}{\partial x'} + \frac{\partial A_2'}{\partial y'} + \frac{\partial A_3'}{\partial z'} + \frac{\partial\psi'}{\partial t'}$$

$$= \frac{1}{\ell^2}\left[k^2\left(\frac{\partial}{\partial x} - \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\right)(A_1+\varepsilon\psi) + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} + k^2\left(\frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\right)(\psi+\varepsilon A_1)\right]$$

(cf.(4) et (28))

$$= \frac{1}{\ell^2}\left[k^2(1-\varepsilon^2)\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} + k^2(1-\varepsilon^2)\frac{\partial\psi}{\partial t}\right]$$

$$= \frac{1}{\ell^2}\left[\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial t}\right] \; ; \text{ puisque } k_{Dy} = (1-\varepsilon^2)^{-1/2}$$

$$= \frac{1}{\ell^2}\left[\nabla.\vec{A} + \frac{\partial\psi}{\partial t}\right] = o \; .$$ (cf. (13)). Par conséquent :

(29) $\nabla.\vec{A} + \frac{\partial\psi'}{\partial t'} = o$. La condition de Lorentz est donc satisfaite.

Il s'ensuit que $\vec{A}'$et ψ' sont les potentiels dans le repère mobile, ce qui nous permet d'écrire :

(30) $$\nabla' \times \vec{A}' = \vec{H}' \quad \text{et} \quad -\frac{\partial\vec{A}'}{\partial t'} - \nabla'\psi' = \vec{E}'$$

Il ne nous reste donc qu'à exprimer $\vec{E}'$ et $\vec{H}'$ en fonction de $\vec{E}$ et de $\vec{H}$ directement. De la seconde relation (30) nous tirons :

$$E_1' = -\frac{\partial A_1'}{\partial t'} - \frac{\partial \psi'}{\partial x'} = -\frac{k^2}{\ell^2}\,[(\frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon\frac{\partial}{\partial x})(A_1+\varepsilon\psi) + (\frac{\partial}{\partial x} - \varepsilon\frac{\partial}{\partial t})(\psi+\varepsilon A_1)]\ (\text{cf}(4)\text{et}(28)$$

$$= -\frac{k^2(1-\varepsilon^2)}{\ell^2}\,[\frac{\partial A_1}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x}] = -\frac{1}{\ell^2}\,[\frac{\partial A_1}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x}],\ (\text{puisque } k \underset{\text{Déf}}{=} (1-\varepsilon^2)^{-1/2})$$

$$= \frac{1}{\ell^2}\,E_1\ .\ (\text{cf}(12),\text{ qui entraine } E_1 = -\frac{\partial A_1}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial x})$$

De même : $E_2' = -\dfrac{\partial A_2'}{\partial t'} - \dfrac{\partial \psi'}{\partial y'} = -\dfrac{k}{\ell}\,(\dfrac{\partial}{\partial t} - \varepsilon\dfrac{\partial}{\partial x})\,(\dfrac{A_2}{\ell}) - \dfrac{1}{\ell}\,\dfrac{\partial}{\partial y}\,(\dfrac{k}{\ell}\,(\psi + \varepsilon A_1))$

$$= \frac{k}{\ell^2}\,[-\frac{\partial A_2}{\partial t} + \varepsilon\,\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y} - \varepsilon\,\frac{\partial A_1}{\partial y}] = \frac{k}{\ell^2}\,[-(\frac{\partial A_2}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y}) + \varepsilon(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y})]$$

$$= \frac{k}{\ell^2}\,[E_2 + \varepsilon H_3],\ \text{puisque : } \vec{E} = -(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \nabla\psi)\ \text{et}\ \vec{H} = \nabla \times \vec{A}\ .$$

De la même manière nous obtenons : $E_3' = \dfrac{k}{\ell^2}\,(E_3 - \varepsilon H_2)$. Ainsi

$$(31)\qquad E_1' = \frac{1}{\ell^2}\,E_1\ ,\ E_2' = \frac{k}{\ell^2}\,(E_2 + \varepsilon H_3),\ E_3' = \frac{k}{\ell^2}\,(E_3 - \varepsilon H_2)$$

Quant à la transformation de $\vec{H}$, elle découle de l'équation $\vec{H}' - \nabla'\times\vec{A}'$. Ainsi :

$$H_1' = \frac{\partial A_3'}{\partial y'} - \frac{\partial A_2'}{\partial z'} = [\frac{1}{\ell}\,\frac{\partial}{\partial y}(\frac{1}{\ell}\,A_3) - \frac{1}{\ell}\,\frac{\partial}{\partial z}\,(\frac{1}{\ell}\,A_2)],\ (\text{cf.}(4)\text{ et }(28))$$

$$= \frac{1}{\ell^2}\,[\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}] = \frac{1}{\ell^2}\,H_1\quad (\text{cf. }(11)).$$

De même : $H_2' = \dfrac{\partial A_1'}{\partial z'} - \dfrac{\partial A_3'}{\partial x'} = \dfrac{1}{\ell}\,\dfrac{\partial}{\partial z}\,(\dfrac{k}{\ell}\,(A_1+\varepsilon\psi)) - \dfrac{k}{\ell}\,(\dfrac{\partial}{\partial x} - \varepsilon\,\dfrac{\partial}{\partial t})\,(\dfrac{1}{\ell}\,A_3)$

$$= \frac{k}{\ell^2}\,[(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}) + \varepsilon(\frac{\partial A_3}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial z})] = \frac{k}{\ell^2}\,[H_2 - \varepsilon E_3]\ (\text{cf}(11)\text{ et }(12)).$$

De même : $H_3' = \dfrac{k}{\ell^2}\,(H_3 + \varepsilon E_2)$. La transformation de $\vec{H}$ s'écrit donc :

$$(32)\qquad H_1' = \frac{1}{\ell^2}\,H_1\ ,\ H_2' = \frac{k}{\ell^2}\,(H_2 - \varepsilon E_3)\ ,\ H_3' = \frac{k}{\ell^2}\,(H_3 + \varepsilon E_2)\ .$$

Nous sommes donc arrivés à la loi de transformation du champ $(\vec{E},\vec{H})$ par l'intermédiaire de celle du potentiel $(\vec{A},\psi)$. Remarquons que, en vertu de (28), si $\ell = 1$, le quadruple $(\vec{A},\psi)$ subit la même transformation que les coordonnées (x,y,z,t) ; c'est-à-dire que, si $\ell = 1$, $(\vec{A},\psi)$ constituera un vecteur à quatre dimensions.

Comme la force $\vec{L} = e(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{H})$ joue un rôle essentiel dans toute la physique lorentzienne, il faudra pouvoir la transformer aussi. Nous nous appuierons sur les relations (6), (31) et (32). Pour simplifier la présentation nous prendrons e comme étant égale à l'unité. Ainsi, puisque $\vec{L} = \vec{E} + \vec{V} \times \vec{H}$, nous aurons :

$$L_1 = E_1 + (v_2H_3 - v_3H_2),\quad L_2 = E_2 + (v_3H_1 - v_1H_3),\quad L_3 = E_3 + (v_1H_2 - v_2H_1)$$

En vertu du principe de covariance, nous devons aussi avoir :

$$L'_1 = E'_1 + (v'_2H'_3 - v'_3H'_2),\quad L'_2 = E'_2 + (v'_3H'_1 - v'_1H'_3),\quad L'_3 = E'_3 + (v'_1H'_2 - v'_2H'_1)$$

Les équations (5), (31) et (32) entraînent :

$$L'_1 = \frac{1}{\ell^2} E_1 + \left[\frac{v_1}{k(1+\varepsilon v_1)} \cdot \frac{k}{\ell^2}(H_3+\varepsilon E_2) - \frac{v_3}{k(1+\varepsilon v_1)}\frac{k}{\ell^2}(H_2 - \varepsilon E_3)\right]$$

$$= \frac{1}{\ell^2}\left[E_1 + \frac{(v_2H_3 - v_3H_2) + \varepsilon(v_2E_2 + v_3E_3)}{(1+\varepsilon v_1)}\right]$$

$$= \frac{1}{\ell^2(1+\varepsilon v_1)}\left[L_1 + \varepsilon\, \vec{E}.\vec{v}\right].$$ Voir ci-dessus pour l'expression de L_1

Notons que $\vec{L} = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{H}$ entraine $\vec{L}.\vec{v} = \vec{E}.\vec{v}$, puisque $(\vec{v} \times \vec{H}).\vec{v} = o$. Par conséquent :

$$L'_1 = \frac{1}{\ell^2(1+\varepsilon v_1)}\left[L_1 + \varepsilon\, \vec{L}.\vec{v}\right]. \tag{33}$$

De même $L'_2 = E'_2 + (v'_3H'_1 - v'_1H'_3) = \left[\frac{k}{\ell^2}(E_2 + \varepsilon H_3) + \frac{v_3}{k(1+\varepsilon v_1)} \cdot \frac{H_1}{\ell^2}\right.$

$$\left. - \left(\frac{v_1+\varepsilon}{1+\varepsilon v_1}\right) \cdot \frac{k}{\ell^2}(H_3 + \varepsilon E_2)\right] = \frac{k}{\ell^2(1+\varepsilon v_1)}\left[(E_2+\varepsilon H_3)(1+\varepsilon v_1) + \frac{v_3H_1}{k^2} - (v_1+\varepsilon)(H_3+\varepsilon E_2)\right.$$

$$= \frac{k}{\ell^2(1+\varepsilon v_1)} \left[(1-\varepsilon^2)(E_2 - v_1H_3) + \frac{v_3H_1}{k^2}\right] = \frac{1}{k\ell^2(1+\varepsilon v_1)} \left[E_2 + v_3H_3 - v_1H_3\right],$$

puisque $k = (1-\varepsilon^2)^{-1/2}$. Mais $E_2 + (v_3H_1 - v_1H_3) = L_2$. Par conséquent :

$$(34) \quad L'_2 = \frac{L_2}{k\ell^2(1+\varepsilon v_1)} \text{. De même : } (35) \quad L'_3 = \frac{L_3}{k\ell^2(1+\varepsilon v_1)} \text{.}$$

La loi de transformation de la force de Lorentz est donc :

$$(36) \quad L'_1 = \frac{L_1 + \varepsilon\vec{L}.\vec{v}}{\ell^2(1+\varepsilon v_1)}, \quad L'_2 = \frac{L_2}{k\ell^2(1+\varepsilon v_1)}, \quad L'_3 = \frac{L_3}{\ldots}$$

Prenant $\ell = 1$ et $\vec{v} = o$, nous retrouvons les relations $L'_1 = L_1$, $L'_2 = L_2/k$ et $L'_3 = L_3/k$, que Lorentz avait établies entre la force électrostatique dans un système en mouvement et la force correspondante dans un repère immobile. Poincaré avait donc généralisé les résultats obtenus par Lorentz, résultats qu'il allait d'ailleurs utiliser en construisant une nouvelle théorie covariante de la gravitation.

Les relations (36) ressemblent aux transformations des coordonnées et aussi à celles des vitesses. Nous essaierons de pousser cette analogie un peu plus loin en considérant la quantité différentielle $(dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2) = dt^2(1-v^2)$. Il résulte des équations (1) que : $dt'^2(1-v'^2) = (dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2) = \ell^2\left[k^2(dt+\varepsilon dx)^2 - dy^2 - dz^2 - k^2(dx+\varepsilon dt)^2\right] = \ell^2\left[k^2(1-\varepsilon^2)dt^2 - k^2(1-\varepsilon^2)dx^2 - dy^2 - dz^2\right] = \ell^2\left[dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2\right]$, puisque $k = (1-\varepsilon^2)^{-1/2}$. Par conséquent :

$$(37) \quad dt'^2(1-v'^2) = \left[dt'^2 - (dx'^2 + dy'^2 + dz'^2)\right] = \ell^2\left[dt^2 - (dx^2+dy^2+dz^2)\right]$$

$$= \ell^2 dt^2(1-v^2) \text{. DOnc}$$

$$(38) \quad dt'\sqrt{1-v'^2} = \ell dt\sqrt{1-v^2} \text{.}$$

D'après la troisième équation de (1) : $dt' = k\ell(dt + \varepsilon dx)$. Donc :

(39) $dt' = k\ell(1+\varepsilon v_1).dt$. Comparant (38) et (39), nous obtenons :

(40) $$\sqrt{1-v'^2} = \frac{\sqrt{1-v^2}}{k(1+\varepsilon v_1)} = \frac{\sqrt{1-v^2}.\sqrt{1-\varepsilon^2}}{(1+\varepsilon v_1)} .$$ (puisque $k = (1 - \varepsilon^2)^{-1/2}$).

De même, en employant la troisième équation de (2), nous aurons :

(41) $$\sqrt{1 - v^2} = \frac{\sqrt{1-v'^2}.\sqrt{1-\varepsilon^2}}{(1 - \varepsilon v_1')}$$

Divisant (36) par (40), nous obtenons :

(42) $$\frac{L_1}{\sqrt{1-v_2'}} = \frac{k}{\ell^2}\left(\frac{L_1}{\sqrt{1-v^2}}\right) + \varepsilon \frac{\vec{L}.\vec{v}}{\sqrt{1-v^2}}), \quad \frac{L_2'}{\sqrt{1-v'^2}} = \frac{1}{\ell^2} \frac{L_2}{\sqrt{1-v^2}}, \quad \frac{L_3'}{\sqrt{1-v'^2}} = \frac{1}{\ell^2} \frac{L_3}{\sqrt{1-v'^2}}$$

$\left(\frac{\vec{L}}{\sqrt{1-v'^2}}, \frac{\vec{L}.\vec{v}}{\sqrt{1-v^2}}\right)$ semble donc obéir à une loi de transformation analogue à celle des coordonnées $(x,y,z,t) - (\vec{r},t)$. Ceci nous pousse à déterminer $\frac{\vec{L}' - \vec{v}'}{\sqrt{1 - v'^2}}$ en vue de compléter le système d'équations (42). Multipliant (42) par (5), puis additionnant les équations ainsi obtenues, nous aurrons :

$$\frac{\vec{L}'.\vec{v}'}{\sqrt{1-v'^2}} = \frac{1}{k\ell^2(1+\varepsilon v_1)\sqrt{1-v^2}} [k^2(L_1 + \varepsilon \vec{L}.\vec{v})(v_1 + \varepsilon) + L_2 v_2 + L_3 v_3]$$

$$= \frac{1}{k\ell^2(1+\varepsilon v_1)\sqrt{1-v^2}} [k^2(L_1 + \varepsilon\ \vec{L}.\vec{v})(v_1+\varepsilon) + (\vec{L}.\vec{v} - L_1 v_1)]$$

$$= \frac{1}{k\ell^2(1+\varepsilon v_1)\sqrt{1-v^2}} \left[\left(\frac{1+\varepsilon v_1}{1-\varepsilon^2}\right) \vec{L}.\vec{v} + \left(\frac{1+\varepsilon v_1}{1-\varepsilon^2}\right) \varepsilon L_1\right]$$

(en remplaçant k par $(1-\varepsilon^2)^{-1/2}$)

$$= \frac{1}{k\ell^2 \sqrt{1-v^2}.(1-\varepsilon^2)} [\vec{L}.\vec{v} + \varepsilon L_1] = \frac{k}{\ell^2} \left[\frac{\vec{L}.\vec{v}}{\sqrt{1-v^2}} + \varepsilon \frac{L_1}{\sqrt{1-v^2}}\right]$$

(puisque $k = (1-\varepsilon^2)^{-1/2}$).

En conjonction avec (42), nous avons finalement :

$$
(43)\left\{
\begin{array}{ll}
\dfrac{L'_1}{\sqrt{1-v'^2}} = \dfrac{k}{\ell^2}\left(\dfrac{L_1}{\sqrt{1-v^2}} + \varepsilon\,\dfrac{\vec{L}.\vec{v}}{\sqrt{1-v^2}}\right), & \dfrac{L'_2}{\sqrt{1-v'^2}} = \dfrac{1}{\ell^2}\,\dfrac{L_2}{\sqrt{1-v^2}} \\[2ex]
\dfrac{L'_3}{\sqrt{1-v'^2}} = \dfrac{1}{\ell^2}\,\dfrac{L_3}{\sqrt{1-v^2}} & \dfrac{\vec{L}'.\vec{v}'}{\sqrt{1-v'^2}} = \dfrac{k}{\ell^2}\left(\dfrac{\vec{L}.\vec{v}}{\sqrt{1-v^2}} + \varepsilon\,\dfrac{L_1}{\sqrt{1-v^2}}\right)
\end{array}
\right.
$$

La transformation de $\left(\dfrac{\vec{L}}{\sqrt{1-v^2}}, \dfrac{\vec{L}.\vec{v}}{\sqrt{1-v^2}}\right)$ est donc, à un facteur $\dfrac{1}{\ell^3}$ près, la même que celle de $(x,y,z,t) = (\vec{r},\vec{t})$.

Si $\ell = 1$, $\left(\dfrac{\vec{L}}{\sqrt{1-v^2}}, \dfrac{\vec{L}.\vec{v}}{\sqrt{1-v^2}}\right)$ sera un vecteur à quatre dimensions.

Poincaré se rendit compte que Lorentz avait réussi à expliquer les résultats négatifs de Michelson en étendant aux interactions moléculaires les lois de transformation régissant la force pondéromotrice $\vec{L}$. En conséquence, Poincaré décida de traiter $\vec{L}$ comme la paradigme de toutes les forces physiques, et en particulier de l'attraction gravitationnelle. Cependant, dans 'Sur la Dynamique de l'Electron', il n'est pas question de réduire la gravitation à l'électromagnétisme. Poincaré ne s'appuie que sur deux propositions : d'une part la proposition que tous les vecteurs à quatre dimensions obéissent à la même loi de transformation, ce qui est vrai par définition, d'autre part sur l'hypothèse que la gravitation peut être représentée par un tel vecteur. C'est pour cela que je ne partage pas l'opinion d'A. Miller d'après laquelle Poincaré ne pouvait pas être l'auteur du Principe de Relativité parce qu'il était acquis à une conception purement électromagnétique du monde physique. Il est vrai que Poincaré, tout comme Lorentz, a envisagé la possibilité de dériver toute la physique de la théorie de Maxwell ; mais il fit en sorte que ses théories ne dépendent pas logiquement d'une telle réduction. Quoiqu'il fût sûr que l'inertie de l'électron devait être d'origine purement électromagnétique, il ne se prononça pas en ce qui concerne la masse des ions positifs. Nous avons déjà vu que, d'après Poincaré, le

Principe de Relativité entraîne que la masse matérielle d'une particule dépend fonctionnellement de la vitesse de la même façon que son inertie électromagnétique. Ce 'théorème' indique clairement que Poincaré ne considérait pas la masse matérielle comme devant être nécessairement nulle. Nous avons enfin noté qu'il considérait l'existence de l'éther comme très problématique, et que ses références à ce milieu universel n'étaient souvent qu'une façon de parler plus commodément de la structure de l'espace-temps. Ceci suffit, à mon avis, pour montrer que Poincaré est bel et bien l'auteur ou plutôt l'un des deux auteurs, d'un principe universel de relativité qui devait s'appliquer à toute la physique et qui était lié, comme nous le verrons bientôt, à la structure du groupe de Lorentz.

(b) Le groupe de Lorentz

Nous avons déjà vu que, à la différence de Lorentz, Poincaré base son approche au problème relativiste sur la théorie des groupes. Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble de toutes les transformations de la forme :

(1) $$x' = k\ell(x+\varepsilon t)\ ;\ y' = \ell y\ ;\ z' = \ell z\ ;\ t' = k\ell(t+\varepsilon x)\ ;\ k \underset{\text{Déf}}{=} (1-\varepsilon^2)^{-1/2}$$

Tout élément (1) de $\mathcal{H}$ est déterminé par deux paramètres indépendants, ε et ℓ, et peut donc être dénoté par $T(\varepsilon,\ell)$.

Résolvant le système d'équation (1) pour x, y, z, t en fonction de x', y', z', t', nous obtenons la transformation inverse :

(2) $$x = \frac{k}{\ell}(x'-\varepsilon t')\ ;\ y = \frac{1}{\ell}y'\ ;\ z = \frac{1}{\ell}z'\ ;\ t = \frac{k}{\ell}(t'-\varepsilon x')\ .$$

Cette transformation inverse est donc identique à $T(-\varepsilon, \frac{1}{\ell})$ et appartient à $\mathcal{H}$ par la définition même de $\mathcal{H}$. Démontrons que $\mathcal{H}$ forme un groupe. Nous venons juste d'établir que l'inverse de tout élément de $\mathcal{H}$ existe et appartient à $\mathcal{H}$, c'est-à-dire :

(3) $$[T(\varepsilon,\ell)]^{-1} = T(-\varepsilon, \frac{1}{\ell})\ .$$

Il nous reste à prouver que $\mathcal{H}$ est fermé par rapport au produit. Envisageons un autre élément $T(\varepsilon',\ell')$ de $\mathcal{H}$ qui fera correspondre (x'',y'',z'',t'') à (x',y',z',t') de telle façon que :

$$(4) \qquad x'' = k'\ell'(x'+\varepsilon't'); \; y'' = \ell'y'; \; z'' = \ell'z'; \; t'' = k'\ell'(t'+\varepsilon'x'); k' \underset{Def}{=} (1-\varepsilon'^{2}$$

Pour trouver $T(\varepsilon',\ell').T(\varepsilon,\ell)$, il nous faut exprimer x'',y'',z'',t'' en fonction de x,y,z,t. Eliminant x',y',z',t' entre (1) et (4), il vient : $y' = \ell'y' = \ell'\ell y = \ell\ell'y$. De même : $x'' = \ell\ell'z$;

$$x''=k'\ell'(x'+\varepsilon't')=k'\ell'[k\ell(x+\varepsilon t))+\varepsilon'k\ell(t+\varepsilon x)] =kk'\ell\ell'(1+\varepsilon\varepsilon')[x+(\frac{\varepsilon+\varepsilon'}{1+\varepsilon\varepsilon'},)t]$$

De même : $t'' = kk'\ell\ell'(1+\varepsilon\varepsilon')[t+(\frac{\varepsilon+\varepsilon'}{1+\varepsilon\varepsilon'})x]$. Posons $\frac{\varepsilon+\varepsilon'}{1+\varepsilon\varepsilon'} = \varepsilon''$, puis démontrons que $kk'(1+\varepsilon\varepsilon') = (1-\varepsilon''^{2})^{-1/2}$; c.à.d. démontrons que :

$$\frac{1+\varepsilon\varepsilon'}{\sqrt{(1-\varepsilon^2)(1-\varepsilon'2)}} = \frac{1}{\sqrt{1-[(\varepsilon+\varepsilon')/(1+\varepsilon\varepsilon')]^2}}$$

, ce que l'on peut aisément vérifier en élevant les deux nombres au carré. Par conséquent :

$$(5) \left\{ \begin{array}{l} x'' = k''\ell''(x+\varepsilon''t), \; y''-\ell''y, \; z''=\ell'z, \; t''=k''\ell''(t+\varepsilon''x) \; ; \text{ où } \ell'' \underset{Def.}{=} \ell\ell' \; ; \\ \varepsilon'' \underset{Def.}{=} \dfrac{\varepsilon+\varepsilon'}{1+\varepsilon\varepsilon'} \quad \text{et} \quad k'' \underset{Def.}{=} (1-\varepsilon''^{2})^{-1/2} \end{array} \right.$$

En d'autres termes :

$$(6) \qquad T(\varepsilon',\ell').T(\varepsilon,\ell) = T(\frac{\varepsilon+\varepsilon'}{1+\varepsilon\varepsilon'}, \; , \ell\ell')$$

Comme, par définiition de $\mathcal{H}$, $T(\frac{\varepsilon+\varepsilon'}{1+\varepsilon\varepsilon'}, \ell\ell') \varepsilon \mathcal{H}$, il s'ensuit que $\mathcal{H}$ est fermé par rapport à l'opération-produit, donc que $\mathcal{H}$ forme un groupe .

Poincaré définit le groupe de Lorentz $\mathcal{L}$ de deux manières équivalentes, mais conceptuellement distinctes. Suivant l'une des définitions, $\mathcal{L}$ est l'ensemble de toutes les transformations qui s'expriment par une rotation spatiale suivie d'un élément de $\mathcal{H}$ (c'est-à-dire d'une transformation du type (1)) puis d'une seconde rotation.

D'après l'autre définition, tout membre de $\mathcal{L}$ est le produit d'une transformation de la forme : $x_o = \ell x$, $y_o = \ell y$, $z_o = \ell z$, $t_o = \ell t$, et d'une transformation linéaire qui n'altère pas la valeur de la forme quadratique $(x_o^2 + y_o^2 + z_o^2 + t_o^2)$. Désignant par x',y',z',t', les coordonnées finales, nous aurons donc :

$$(7) \qquad x'^2 + y'^2 + z'^2 + t'^2 = x_o^2 + y_o^2 + z_o^2 - t_o^2$$

$$= \ell^2(x^2 + y^2 + z^2 - t^2)$$; ce qui signifie que tout membre de $\mathcal{L}$ multipliera la forme quadratique $(x^2+y^2+z^2-t^2)$ par une constante positive ℓ^2 ; il préservera donc la vitesse unitaire, c'est-à-dire la vitesse de propagation des ondes lumineuses.

Au moyen de considérations <u>physiques</u>, Lorentz avait effectivement déterminé le paramètre ℓ comme devant être égal à l'unité. Il avait raisonné ainsi : si nous supposons que toutes les substances subissent des forces d'origine exclusivement électromagnétique, les corps dits rigides seront contractés, suivant la direction de leur vitesse $\vec{v}$ dans l'éther, par le facteur $(1 - v^2)^{1/2}$. Les horloges aussi seront affectées et retarderont en raison de ce même facteur, ce qui nous conduit à la transformation suivante, dite de Lorentz :

(8) $x'=k(x+\varepsilon t)$; $y'=y$; $z'=z$; $t' = k(t+\varepsilon x)$; $k=(1-\varepsilon^2)^{-1/2}$, $(-\varepsilon)$ étant la vitesse du repère mobile dans l'éther. Ceci signifie que, dans les équations (1), nous devons égaler ℓ à 1.

Lorentz arrive à la même conclusion à partir d'une supposition plus faible, donc plus générale, que celle faite sur l'origine électromagnétique de toutes les forces ; à savoir que ces forces, traduisant en quelque sorte la nature du même éther, seront toutes affectées de la même manière par une translation à travers ce milieu. En d'autres termes, toutes les forces se comporteront comme la force pondéromotrice $\vec{L}$, ce qui nous permet de retrouver les équations (8).

Notons que Lorentz 'explique' les phénomènes de contraction et de retardement contre une cinématique d'arrière-plan fixée a priori, et qui n'est autre que la structure de l'espace et du temps absolus.

Poincaré qui, de par son conventionalisme, ne croit pas à l'intelligibilité <u>en soi</u> de la cinématique classique, procède tout autrement. Profondément anti-essentialiste, il fait table rase du temps absolu et des coordonnées galiléennes qui se sont avérés incommodes. Il obtient le même résultat que Lorentz, à savoir $\ell = 1$, à partir du principe de Relativité et de la supposition que la vitesse $(-\varepsilon)$ du repère mobile détermine le paramètre ℓ de façon unique. Posons donc $\ell = \phi(\varepsilon)$. Soit $\mathcal{P}$ le sous-ensemble de $\mathcal{L}$ constitué par toutes les transformations pour lesquelles $\ell = \phi(\varepsilon)$. En vertu du principe de Relativité, tous les systèmes de référence sont équivalents, ce qui entraine que $\mathcal{P}$ possède nécessairement une strucutre de groupe. Soit $T(\varepsilon,\ell) \in \mathcal{P}$. Par la définition de $\mathcal{P}$, $\ell = \phi(\varepsilon)$. Comme $\mathcal{P}$ est un groupe, $T(\varepsilon,\ell) \in \mathcal{P}$ entraîne $[T(\varepsilon,\ell)]^{-1} \in \mathcal{P}$. En vertu de (3), $T(-\varepsilon, \frac{1}{\ell}) = [T(\varepsilon,\ell)]^{-1} \in \mathcal{P}$. Par conséquent : $\frac{1}{\ell} = \phi(-\varepsilon)$, c.à.d.

$\frac{1}{\phi(\varepsilon)} = \phi(-\varepsilon) = \frac{1}{\ell}$. Donc : (8) $\phi(\varepsilon).\phi(-\varepsilon) = 1$.

Revenons à l'équation (1), et supposons encore une fois que $T(\varepsilon,\ell) \in \mathcal{P}$, ce qui signifie que $\ell = \phi(\varepsilon)$. Faisons subir à chacun des deux systèmes (x,y,z,t) et (x',y',z',t') une rotation de 180° autour de l'axe des y, obtenant ainsi les coordonnées $(\bar{x},\bar{y},\bar{z},\bar{t})$ et (x'',y'',z'',t'') respectivement. Nous aurons donc :

(9) $\bar{x} = -x$; $\bar{y} = y$; $\bar{z} = z$; $\bar{t} = t$; $x''=-x'$;$y''=y'$;$z''=-z'$; $t'' = t'$

Les équations (1) et (9) entraînent :

$x'' = -x' = -k\ell(x + \varepsilon t) = -k\ell(-\bar{x} + \varepsilon\bar{t}) = k\ell(\bar{x} - \varepsilon\bar{t})$

$y'' = -y' = \ell y = \ell\bar{y}$; $z''=-z'=-\ell z=\ell\bar{z}$; $t''=t'=k\ell(t+\varepsilon x)=k\ell(\bar{t}-\varepsilon\bar{x})$. Par conséquent :

(10) $x'' = k\ell(\bar{x} - \varepsilon\bar{t})$; $y'' = \ell\bar{y}$; $z'' = \ell\bar{z}$; $t'' = k\ell(\bar{t} - \varepsilon\bar{x})$.

La transformation qui applique $(\bar{x},\bar{y},\bar{z},\bar{t})$ sur (x'',y'',z'',t'') est donc $T(-\varepsilon,\ell)$. Comme $T(-\varepsilon\ \ell)\ \varepsilon\ \mathcal{P}$, nous aurons $\ell = \phi(-\varepsilon)$. Par conséquent :

(11) $\phi(\varepsilon) = \phi(-\varepsilon)$. En vertu de (8) et de (11) :

$$1 = \phi(\varepsilon).\phi(-\varepsilon) = \phi(\varepsilon).\phi(\varepsilon) = [\phi(\varepsilon)]^2 \text{ . Donc}$$

(12) $\phi(\varepsilon) = \pm 1$. Poincaré choisit la valeur $\phi(\varepsilon) = +1$

(3) THEORIE DE LA GRAVITATION

Poincaré se base sur une analogie avec l'électromagnétisme pour élaborer une théorie relativiste de la gravitation. Rappelons que la force de Lorentz $\vec{L}$ agissant sur un électron animé d'une vitesse $\vec{v}$ et portant une charge e est donnée par l'équation

(1) $\vec{L} = e[\vec{E} + \vec{v} \times \vec{H}]$, $\vec{E}$ et $\vec{H}$ dénotant respectivement le champ électrique et le champ magnétique. Rappelons aussi que Poincaré choisit ses unités de telle façon que la vitesse de la lumière devient égale à 1 ; il détermine aussi la loi de transformation de $\vec{L}$ et est ainsi conduit à envisager, bien avant Minkowski, une force ayant 4 composantes, à savoir $\left(\frac{\vec{L}}{\sqrt{1 - v^2}}, \frac{\vec{L}.\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2}}\right)$. Nous avons déjà vu que cette force constitue un vecteur à 4 dimensions, c'est-à-dire qu'elle est sujette à la même loi de transformation que les différentielles des coordonnées.

Comme la gravitation traite de l'attraction de deux objets matériels, Poincaré cherche à déterminer les invariants les plus simples contenant la position relative et les vitesses des deux corps attirant et attiré. Il conçoit le groupe de Lorentz comme l'ensemble des notations autour de l'origine de l'espace à 4 dimensions formé par les coordonnées $(x, y, z, t\sqrt{-1})$. Désignons le vecteur (x, y, z) par $\vec{r}$.

Soient (x_o, y_o, z_o, t_o) et $(x_o + x, y_o + Y, z_o + z, t_o + t)$ les coordonnées des corps attiré et attirant respectivement. Le corps attirant agit sur le corps attiré, non pas à l'instant considéré t_o

mais à l'instant $t_o + t$. Pour que le principe de causalité soit respecte, $t_o + t$ devra être antérieur a t_o, c.à.d :

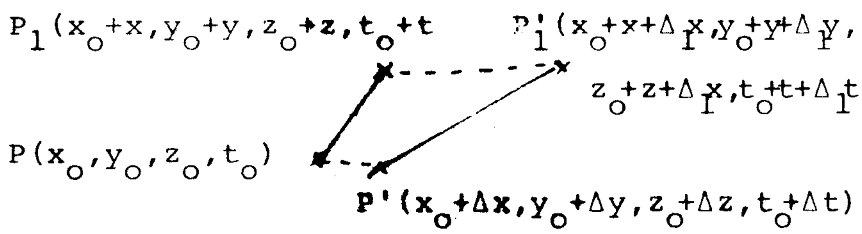
(2) $t < 0$. Désignons par $\vec{v} = (\xi, \eta, \zeta)$ et $\vec{v}_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ les vitesses des deux corps envisagés aux instants t_o et $t_o + t$ respectivement. En accord avec le principe de Relativité, Poincaré exige que t soit déterminé par une équation covariante de la forme :

(3) $\phi(t, \vec{r}, \vec{v}, \vec{v}_1) = o$. Il s'attend aussi à ce que sa loi du champ gravitationnel prenne la forme générale suivante :

(4) $\frac{1}{\text{masse}}$ x force = quantité cinématique.

Pour le second membre de (4) il considère les invariants de Lorentz les plus simplement construits à partir des trois vecteurs (à 4 dimensions) suivants :

$$(5)\begin{cases}(x, y, z, t\sqrt{-1})\\(\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta t\sqrt{-1})\\(\Delta_1 x, \Delta_1 y, \Delta_1 z, \Delta_1 t\sqrt{-1})\end{cases}$$



Notons que le suffixe 1 réfère toujours au corps attirant.

Formant les produits scalaires et les modules de ces vecteurs, nous obtenons les invariants :

(6) $(x^2+y^2+z^2-t^2)-(r^2-t^2), [t.\Delta t-(x.\Delta x+y.\Delta y+z.\Delta z)]$;

$[\Delta t^2-(\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2)]^{1/2}, [t.\Delta_1 t-(x.\Delta_1 x+y.\Delta_1 y+z.\Delta_1 z)]$

$[([\Delta_1 t)^2-(\Delta_1 x^2+\Delta_1 y^2+\Delta_1 z^2)]^{1/2}, [\Delta t.\Delta_1 t-(\Delta x.\Delta_1 x+\Delta y.\Delta_1 y+\Delta z.\Delta_1 z)]$.

Divisant ces invariants les uns par les autres de façon à faire disparaître les différentielles nous aurons:

$$(r^2-t^2) ; [t-(x.\frac{dx}{dt} + y.\frac{dy}{dt} + z.\frac{dz}{dt})]/[1-((\frac{dx}{dt}))^2 + (\frac{dy}{dt})^2 + (\frac{dz}{dt})^2)]^{1/2} = \frac{t-\vec{r}.\vec{v}}{\sqrt{1-v^2}}$$

De même, nous obtenons $\dfrac{t-\vec{r}.\vec{v}_1}{\sqrt{1-v_1^2}}$ et aussi $\dfrac{1-\vec{v}.\vec{v}_1}{\sqrt{(1-v^2)(1-v_1^2)}}$ (par division du dernier invariant de (6) par le produit du troisième et du cinquième).

(7) Posons : $A = \dfrac{t-\vec{r}.\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2}}$, $B = \dfrac{t-r.v_1}{\sqrt{1 - v_1^2}}$, $C = \dfrac{1-\vec{v}.\vec{v}_1}{\sqrt{(1-v^2).(1-v_1^2)}}$

Poincaré considère donc les 4 invariants suivants :

(8) $(r^2 - t^2)$, A, B et C .

Notons que nous aurions pu éviter le recours aux différentielles en construisant dès le départ les 3 vecteurs :

(9) $(\vec{r}, t\sqrt{-1})$, $\left(\dfrac{\vec{v}}{\sqrt{1-v^2}} , \dfrac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1 - v^2}}\right)$, et $\left(\dfrac{\vec{v}_1}{\sqrt{1 - v_1^2}} , \dfrac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1 - v_1^2}}\right)$

Nous aurions ensuite envisagé les modules et les produits scalaires de ces vecteurs, retrouvant ainsi les invariants (8).

Dans les cas limites, où la nouvelle hypothèse devra tendre vers les lois newtonniennes, nous aurons à considérer des vitesses faibles par rapport à celle de la lumière ; c'est-à-dire des vitesses $\vec{v} = (\xi,\eta,\zeta)$ et $\vec{v}_1-(\xi_1,\eta_1,\zeta_1)$ bien plus petites que l'unité. Remarquons que, d'après (7), les quantités :

(10) $(C - 1)$ et $(A - B)^2$ sont du deuxième ordre par rapport à v et v_1

et pourront donc être négligées au cours de l'usage que nous ferons du principe de correspondance.

Considérons maintenant le premier membre, $\dfrac{\text{force}}{\text{masse}}$, de (4). Soit $\vec{G}$ le champ gravitationnel en P, qui dépendra à priori de $\vec{r}$, $\vec{v}$ et $\vec{v}_1$. En vue de l'analogie avec la force de Lorentz $\vec{L}$, nous exigerons que $\left(\dfrac{\vec{G}}{\sqrt{1-v^2}} , \dfrac{\vec{G}.\vec{v}\sqrt{-1}}{\sqrt{1-v^2}}\right)$ soit un vecteur à quatre dimensions, c'est-à-dire qu'il subisse la même transformation que les coordonnées $(x,y,z,t\sqrt{-1})$.

Envisageons les quatre vecteurs suivants :

(12) $\left(\dfrac{\vec{G}}{\sqrt{1-v^2}}, \dfrac{\vec{G}.\vec{v}\sqrt{-1}}{\sqrt{1-v^2}}\right) = \left(\dfrac{\vec{G}}{\sqrt{1-v^2}}, \dfrac{T\sqrt{-1}}{\sqrt{1-v^2}}\right)$ T, dénotant la quantité $\vec{G}.\vec{v}$. ;

$$(r, t\sqrt{-1}) \;;\; \left(\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1-v^2}}\right) \;;\; \left(\frac{v_1}{\sqrt{1-v_1^2}}, \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1-v_1^2}}\right) .$$

(13) Posons $k_o = (1-v^2)^{-1/2}$ et $k_1 = (1-v_1^2)^{-1/2}$. Les expressions (12) deviennent :

(14) $(k.\vec{G}, k.T\sqrt{-1})$; $(\vec{r}, t\sqrt{-1})$; $(k.\vec{v}, k.\sqrt{-1})$; $(k_1\vec{v}_1, k_1\sqrt{-1})$.

Essayons de construire une théorie covariante de la gravitation en exprimant le premier vecteur de (14) comme une combinaison linéaire des trois autres, les coefficients de cette combinaison étant naturellement des invariants de Lorentz. Nous aurons :

$$k_o\vec{G} = \alpha\vec{r} + \beta k_o + \gamma k_1\vec{v}_1 \quad \text{et} \quad k_oT = \alpha t + \beta k_o + \gamma k_1 \text{ , c-à-d :}$$

(15) $G = (\alpha/k_o)\vec{r}+\beta\vec{v}(\gamma k_1/k_o)\vec{v}_1$ et $T = (\alpha/k_o)t + \beta + (\gamma k_1/k_o)$; α, β, et γ étant des invariants de Lorentz.

Rappelons que $T \underset{\text{Déf}}{=} \vec{G}.\vec{v}$. Multipliant la première équation de (15) par $\vec{v}$, puis retranchant le résultat ainsi obtenu de la seconde équation, nous aurons :

$0 = \alpha(t-\vec{r}.\vec{v})/k_o + \beta(1-v^2)+\gamma k_1(1-\vec{v}.\vec{v}_1)/k_o$. Comme $k \underset{\text{Déf}}{=} (1-v^2)^{-1/2}$, la dernière équation multipliée par $k_o^2 = (1-v^2)^{-1}$ entraine :

$0 = [\alpha(t-\vec{r}.\vec{v}).(1-v^2)^{-1/2} + \beta + \gamma(1-\vec{v}.\vec{v}_1).(1-v^2)^{-1/2}.(1-v_1^2)^{-1/2}]$.

(16) c.à.d. $0 = [A\alpha + \beta + C\gamma]$. (cf(7)). Par conséquent, tout au plus deux des trois paramètres α,β,γ seront indépendants.

Si nous choisissons $\beta = o$, il s'ensuivra que $0 = [A\alpha + C\gamma]$, donc $\gamma = -A\alpha/C$, et d'après (15)

(17) $\vec{G} = \left(\dfrac{\alpha}{k_o}\right)\vec{r} - \alpha\left(\dfrac{Ak_1}{Ck_o}\right)\vec{v}_1 = \dfrac{\alpha}{k_o}\left[\vec{r} - \dfrac{Ak_1}{C}\vec{v}_1\right]$. Dans ce cas il ne nous restera qu'à déterminer α.

Toute équation de la forme (15) sera covariante par rapport au groupe de Lorentz ; par conséquent elle satisfera à la première condition imposée par Poincaré, à savoir le Principe de Relativité. Reste la seconde condition, c'est-à-dire le Principe de Correspondance. Nous devons donc déterminer, d'une part l'intervalle t au moyen d'une équation covariante $\phi(t,\vec{r},\vec{v},\vec{v}_1) = o$, d'autre part les coefficients α,β,γ de façon à ce que la théorie newtonnienne soit un cas limite de la nouvelle hypothèse. Nous avons déjà dit que, en vue de (16), il suffisait de fixer deux des trois quantités α,β,γ .

Commençons par la détermination de ϕ, c'est-à-dire de la vitesse de l'action gravifique. Comme ϕ doit être un invariant, nous pouvons par exemple prendre $\phi \equiv r^2 - t^2$ (cf(8)). L'équation (3) s'écrit alors : $O = \phi \equiv r^2 - t^2$. Donc $t = \pm r$. En vue de (2) : (18) $t = -r$; ce qui signifie que la perturbation gravifique se propage à la vitesse 1, c'est-à-dire à la vitesse de la lumière. A cause de l'analogie avec l'électromagnétisme, cette supposition apparait à Poincaré comme la plus plausible (1). Il opte donc pour l'équation (18). Celle-ci nous permet, au cas où $\beta = O$, d'exprimer $\vec{G}$ sous une forme vectorielle suggestive, parce que semblable à celle de la force de Lorentz. Prenant $t = -r$, nous aurons, d'après (7) :

$$A = \frac{-r-\vec{r}.\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2}} \quad , \quad C = \frac{1-\vec{v}.\vec{v}_1}{\sqrt{(1-v^2)(1-v_1^2)}}$$

. Rappelons que

$$k_o = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \quad \text{et} \quad k_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - v_1^2}}$$

. Substituant toutes cex expressions dans (17), nous obtenons :

$$(19) \quad \vec{G} = \frac{\alpha}{k_o}\,[\vec{r}-k_1\frac{A}{C}\,\vec{v}_1] = \frac{\alpha\sqrt{1-v^2}}{(1-\vec{v}.\vec{v}_1)}\,[(1-\vec{v}.\vec{v}_1)\vec{r}+(\vec{r}+\vec{r}.\vec{v})\vec{v}_1] = \frac{\alpha\sqrt{1-v^2}}{(1-\vec{v}.\vec{v}_1)}\,[(\vec{r}+r\vec{v}_1)+\vec{v}\times(\vec{v}_1\times\vec{r}$$

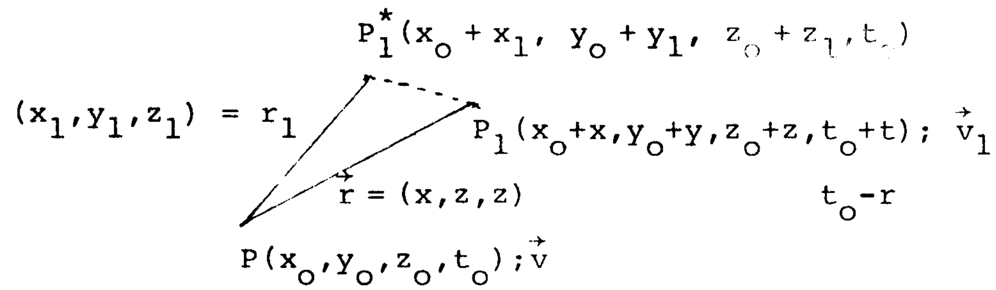
Les vecteurs $(\vec{r} + r\vec{v}_1)$ et $(\vec{v}_1 \times \vec{r})$ peuvent être assimilés aux champs électrique et magnétique respectivement. Négligeant dans l'expression de $\vec{G}$ les termes du deuxième ordre en $\vec{v}$ et $\vec{v}_1$, il viendra :

---

(1) Une autre raison est que, si par exemple nous prenions $\phi \equiv A$ ou $\phi \equiv B$, nous aurions $t = \vec{r}.\vec{v}$ ou $t-\vec{r}.\vec{v}$, qui pourraient mener à des solutions positives pour t. Ceci contredit la condition (2).

(20) $\quad G \doteq \alpha[\vec{r} + r\vec{v}_1]$, puisque v^2, $\vec{v}.\vec{v}_1$ et $\vec{v} \times (\vec{v}_1 \times \vec{r})$ sont tous du deuxième ordre.

Considérons maintenant la théorie newtonienne qui veut que l'attraction subie par P à l'instant t_o soit, à un facteur près, égale à : $-\dfrac{\vec{r}_1}{r_1^3} = -\dfrac{1}{r_1^3}(x_1\ ,\ y_1\ ,\ z_1)$, $\vec{r}_1 = (x_1\ ,\ y_1\ ,\ z_1)$ étant le vecteur joignant P au corps attirant P_1^* <u>considéré au même instant t_o</u> .



Rappelons que la vitesse du corps attirant en P_1 est $\vec{v}_1$ et que $t = -r$, donc que t est négatif. Par conséquent, dans l'intervalle de temps $-t = r$, le corps attirant se déplace de P_1 à P_1^* . Regardant les variations de la vitesse entre P_1 et P_1^* comme négligeables, nous pouvons écrire : $P_1P_1^* \doteq -t\vec{v}_1 - r\,\vec{v}_1$. Donc :

(21) $\quad \vec{r}_1 = \vec{r} + P_1P_1^* \doteq \vec{r} + r\,\vec{v}_1$. Substituant dans (20), nous obtenons :

(22) $\quad \vec{G} \doteq \alpha[\vec{r} + r\vec{v}_1] \doteq \alpha\vec{r}_1$.

Notons qu'il faut que $\vec{G}$ soit approximativement égal à $-\dfrac{\vec{r}_1}{r_1^3}$ pour que les vitesses faibles ; c'est ce qu'exige le principe de correspondance . L'équation (22) entraîne donc :

(23) $\quad \alpha \doteq \dfrac{-1}{r_1^3}$.

Notons aussi que α doit être un invariant de Lorentz. Nous examinerons donc ce que deviennent les invariants A, B, et C, lorsque nous négligeons toutes les quantités du deuxième ordre en $\vec{v}$ et $\vec{v}_1$. L'invariant C ne présente aucune difficulté puisque :

(24) $C = \dfrac{1 - \vec{v}.\vec{v}_1}{\sqrt{(1-v^2)(1-v_1^2)}} \doteq 1$. Aussi, suivant (10) : $(A-B)^2 \doteq 0$

Les équations (7) et (18) entraînent :

(25) $A = \dfrac{-r-\vec{r}.\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2}}$, $B = \dfrac{-r-\vec{r}.\vec{v}_1}{\sqrt{1 - v_1^2}}$. Par conséquent :

(26) $A \doteq -r-\vec{r}.\vec{v}$, $B \doteq -r-\vec{r}.\vec{v}_1$

Il nous faut donc examiner les deux quantités $(r+\vec{r}.\vec{v})$ et $(r+\vec{r}.\vec{v}_1)$. D'après (21) : $r_1 \doteq \vec{r} + r\vec{v}_1$. Multipliant les deux membres par $\vec{v}$, puis négligeant $\vec{v}_1.\vec{v}$, nous obtenons :

(27) $\vec{r}_1.\vec{v} = \vec{r}.\vec{v}$.

De même multipliant les deux membres par v_1, puis négligeant v_1^2 , nous aurons :

(28) $\vec{r}_1.\vec{v}_1 = \vec{r}.\vec{v}_1$

De $\vec{r}_1 \doteq \vec{r} + r\vec{v}_1$ il résulte que $\vec{r} = \vec{r}_1 - r\vec{v}_1$. Elevant les deux membres au carré, puis négligeant le terme $r^2v_1^2$:
$r^2 \doteq r_1^2 - 2r\ \vec{r}_1.\vec{v}_1$. Par conséquent $r_1^2 \doteq r^2+2r\vec{r}_1.\vec{v}_1 \doteq r^2+2r\ \vec{r}.\vec{v}_1$ (cf.(28))
Donc : $r_1^2 \doteq r^2 + 2r\ \vec{r}.\vec{v}_1 \doteq (r + \vec{r}.\vec{v}_1)^2$ (puisque $(r.v_1)^2$ est négligeable).
Donc :

(29) $r_1 \doteq r + \vec{r}.\vec{v}_1$ Par conséquent :

(30) $r \doteq r_1 - \vec{r}.\vec{v}_1 \doteq r_1 - \vec{r}_1.\vec{v}_1$ (cf.(28)).

Les équations (26) et (29) entraînent :
$B \doteq -(r + \vec{r}.\vec{v}_1) \doteq -r_1$. D'après (26), (27) et (30) :

$A \doteq -(r + \vec{r}.\vec{v}) \doteq -(r_1 - \vec{r}_1.\vec{v}_1 + \vec{r}_1.\vec{v}) = -[r_1 + \vec{r}_1.(\vec{v}-\vec{v}_1)]$.

Par conséquent, nous pouvons écrire :

(31) $A \doteq -[r_1 + \vec{r}_1.(\vec{v}-\vec{v}_1)]$, $B \doteq -r_1$; donc : $\frac{1}{B^3} \doteq -\frac{1}{r_1^3}$

Comme nous voulons que $\alpha \doteq -1/r_1^3$ la supposition la plus simple sera : $\alpha = 1/B^3$. Ce choix n'est certainement pas unique. Nous pouvons aussi prendre $\alpha = C/B^3$, ou $\alpha = (C + (A-B)^2)/B^3$ etc., puisque $C \doteq 1$ et $(A-B)^2 \doteq 0$. Notons que, d'après (7) et (25) :

(32) $$\frac{1}{B^3} = -\frac{(1 - v_1^2)^{3/2}}{(r + \vec{r}.\vec{v}_1)^3} \text{ , et } \quad C = \frac{1 - \vec{v}.\vec{v}_1}{\sqrt{(1-v^2)\ (1-v_1^2)}}$$

(33) Prenant $\alpha = 1/B^3$, nous obtenons, en vertu de (19) et de (32) :

$$\vec{G} = -\frac{(1-v^2)^{1/2}.(1-v_1^2)^{3/2}}{(r + \vec{r}.\vec{v}_1)^3\ (1 - \vec{v}.\vec{v}_1)} [(\vec{r} + r\ \vec{v}_1) + \vec{v} \times (\vec{v}_1 \times \vec{r})]$$

(34) Prenant $\alpha = C/B^3$, nous aurons :

$$\vec{G} = -\frac{(1 - v_1^2)}{(r + \vec{r}.\vec{v}_1)^3} [(\vec{r} + r\ \vec{v}_1) + \vec{v} \times (\vec{v}_1 \times \vec{r})]$$

Dans 'Sur la Dynamique de l'Electron' Poincaré ne s'appesantit pas sur le problème de la variation de la masse gravifique, avec la vitesse par exemple. Il n'en est pas moins conscient de l'importance du Principe d'Equivalence, qui veut que la masse gravifique soit strictement égale à la masse inertiale, et qui entraîne que tous les corps placés dans le même champ gravitationnel subissent la même accélération indépendamment de leur constitution physique. Il n'accorde cependant pas au Principe d'Equivalence la validité absolue qu'Einstein lui attribuera. Poincaré requiert seulement que ce Principe constitue un cas limite de sa nouvelle hypothèse. C'est peut être ce qui lui permet de s'en tenir à la relativité restreinte comme cadre de sa théorie de la gravitation. Quant à Einstein, nous savons que son adhésion sans réserves au Principe d'Equivalence le contraignit à abandonner la Relativité Restreinte et à étendre la covariance à tous les repères.