Séminaire de philosophie et mathématiques

Tony Lévy

# L'infini, les grandeurs et les nombres : quelques aspects de la doctrine infinitiste de Rabbi Hasdai Crescas (1340-1410)

*Séminaire de Philosophie et Mathématiques*, 1983, fascicule 2
« L'infini et le nombre chez Rabbi Hasdai Crescas (XIVe siècle) », , p. 1-23
<http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1983___2_A1_0>

# L'INFINI, LES GRANDEURS ET LES NOMBRES :

# QUELQUES ASPECTS DE LA DOCTRINE INFINITISTE

# de RABBI HASDAI CRESCAS (1340-1410)

o-o-o-o-o-o-o-o

Par Tony LEVY

L'objet de mon exposé est double : faire connaître la pensée d'un auteur peu étudié et faire rebondir à cette occasion la question délicate du statut philosophique des objets mathématiques.

Un ensemble infini est, aujourd'hui, un objet relativement domestiquable en mathématiques "courantes" : c'est un ensemble équipotent à une de ses parties propres. Bien sûr, le logicien soulèvera des problèmes : cette définition n'équivaut à la définition naïve d'un ensemble infini que si l'on admet l'axiome du choix au moins sous sa forme dénombrable ; on sait que les "tourments" provoqués par l'axiome du choix constituent des problèmes mathématiques non triviaux ; mais ils ne préoccupent, généralement, que le logicien de métier (1).

En revanche, les enjeux philosophiques et théologiques qui ont présidé à l'histoire de la définition d'un ensemble infini sont moins fréquemment étudiés.

Si l'histoire proprement mathématique de cette notion commence avec Cantor et Dedekind l'histoire des débats autour de cette question est au moins aussi vieille que l'histoire des mathématiques ; elle en est même sans doute constitutive.

Je voudrais évoquer une tranche de cette histoire en essayant de rendre compte de la diversité et de la complexité des registres qui sont concernés.

Hasdai Crescas que je vais évoquer maintenant n'est pas un mathématicien ; il n'est pas vraiment un philosophe si l'on entend par là un penseur exclusivement préoccupé par la spéculation rationnelle : c'est un théologien juif, un talmudiste très engagé dans les affaires de son temps, affaires théoriques mais aussi affaires terriblement pratiques. En 1391, par exemple, il est un des principaux responsables spirituels des communautés juives d'Aragon qui sont frappés par une nouvelle vague de persécutions. Le propre fils de Crescas est tué sous les yeux de son père. Ces informations ne sont pas simples indications historiques. En effet, pour faire face à cette situation, pour aider les communautés juives décimées, pour négocier avec les autorités de la Couronne d'Aragon, Crescas est amené à réfléchir : un débat avait agité depuis plus d'un siècle les milieux rabbiniques. L'introduction de la philosophie, des sciences profanes affaiblissait-elle ou non les capacités, les forces spirituelles des communautés juives et surtout des jeunes "intellectuels" durant ces périodes tourmentées ? De plus, certaines personnalités importantes converties au catholicisme menaient contre leurs anciens corrélégionnaires un combat d'autant plus redoutable qu'il s'appuyait sur une connaissance intérieure du monde intellectuel et religieux du judaïsme traditionnel. Une des figures les plus célèbres est celle de Alfonso de Valladolid. On lui doit de nombreux ouvrages philosophiques rédigés en hébreu et dans lesquels il n'hésite pas à invoquer le Talmud et les premiers écrits kabbalistes pour défendre le christianisme et critiquer, parfois avec beaucoup de finesse, les "rationalistes religieux". Les écrits d'Abner de Burgos, nourris aussi de scolastique latine, devinrent le point de passage presque obligé des polémiques philosophico-religieuses. Leur influence semble ne pas avoir été négligeable sur Crescas dans certains domaines comme la notion de libre arbitre (2).

Crescas a bien consacré un petit opuscule à réfuter les efforts apologétiques d'une certaine théologie chrétienne (<u>Bittul Iggerei Notzrim</u> : réfutation des fondements du christianisme, rédigé en castillan et en caractères hébraïques fut traduit en hébreu par un des disciples de Crescas) mais l'intérêt de son grand oeuvre, <u>Or Adonai</u>, la lumière de Dieu, est ailleurs. Dans cet ouvrage, Crescas entend affronter le défi des "rationalistes" sur le terrain même où ces derniers veulent rénover ou enrichir le débat religieux : existence et unicité divines ; nature des attributs divins ; connaissances humaines et connaissances divines ; révélation et sciences profanes. (On ne peut s'empêcher de rapprocher la démarche de Crescas de celle de Al-Ghazali une des grandes figures de la théologie musulmane (mort en 1111), adversaire résolu du péripatétisme arabe, la falsafa) (3).

C'est dans le cadre de cette entreprise que Crescas est amené à étudier dans la première partie de Or Adonai (l'ouvrage est divisé en quatre livres) le résumé des thèses des philosophes tel qu'il est exposé, en 26 propositions, par Maimonide (Introduction au Livre II du Guide des Egarés) (4). Ces propositions sont destinées à établir, du point de vue de Maimonide, l'existence de Dieu, son unicité et le fait qu'il n'est ni un corps ni une force dans un corps.

Il est important de connaître la manière dont Crescas aborde cette étude ; elle nous fait mesurer la singularité et l'importance de ce penseur, tant dans la tradition juive que dans l'histoire de la philosophie et des sciences médiévales.

Dans l'introduction au Livre I, Crescas pose la question : notre connaissance concernant le problème de l'existence de Dieu relève-t-elle de la seule autorité des Ecritures ou pouvons-nous aussi l'acquérir par la voie de la raison et de la spéculation, c'est-à-dire la philosophie.

La méthode proposée par Crescas comprend trois temps qui le conduisent à distinguer trois parties dans le Livre I :

1 - Etudier les prémisses posées par les philosophes en vue d'établir les preuves de l'existence de Dieu et mesurer la valeur démonstrative de ces prémisses.

2 - En supposant vraies ces prémisses, étudier si les conclusions qui en sont tirées le sont de manière convaincante.

3 - Exposer ces mêmes principes à partir de l'enseignement des Ecritures afin de comparer la force des deux démarches (celle des philosophes et celle de la tradition).

Anticipant les développements, Crescas livre cette conclusion, précieuse pour le situer dans le débat qu'aujourd'hui nous qualifions, sans doute improprement, de débat entre philosophie et religion :

"...il est impossible d'arriver à une compréhension complète de ces principes (les preuves de l'existence de Dieu) si ce n'est par les voies de la prophétie, dans la mesure où les enseignements des prophètes sont attestés par les Ecritures et confirmés par la tradition ; il sera montré que la raison est en accord avec ces enseignements" (5).

Crescas et les spéculations sur l'infini.

Ces préambules visent à indiquer le sens général de la démarche de Crescas. Il s'agit de ce que j'appellerai une métaphysique infinitiste, d'une volonté de penser autrement que la philosophie aristotélicienne de son temps le rapport entre le créateur et l'ordre créé ; c'est dans ce cadre que s'insèrent les spéculations sur l'infini, y compris leurs aspects mathématiques ou physiques.

A cette fin, Crescas entend mobiliser toutes les ressources du savoir qui sont accessibles pour poser des questions qu'on appellerait aujourd'hui des questions de philosophie première. Crescas sera amené ainsi à critiquer les théories aristotéliciennes de l'infini et esquissera, à l'occasion, des raisonnements de type mathématique.

Même si tous ses arguments ne sont pas originaux, en ce sens qu'on peut parfois en déceler la trace chez des prédécesseurs musulmans ou chrétiens, la puissance et la cohésion de l'exposé de Crescas confèrent à sa pensée une importance de premier plan.

Les spéculations sur l'infini conduiront Crescas à analyser les fameux paradoxes : s'il existe une quantité infini, grandeur ou nombre, alors la partie serait égale au tout ; ou bien un infini serait plus grand qu'un autre infini ; ou bien il y aurait un nombre à la fois pair et impair.

Bien entendu, l'analyse de ces paradoxes conduisent

Crescas à étudier toutes les notions mobilisées dans un tel débat : grandeur et nombre, discret et continu, nombrable et nombré, correspondance entre deux grandeurs, limité et illimité etc.

A ce titre, les développements et les solutions proposés par Crescas appartiennent incontestablement à l'histoire de la philosophie et des mathématiques. C'est cet aspect que je développerai, sans oublier cependant la cohérence de l'ensemble du projet qui, en dernier ressort, est théologique : pour Crescas, la mathématique de l'infini est un outil, pas un but.

Le point de départ des discussions sur l'infini est constitué par les distinctions posées par Aristote dans la Physique ou le De Caelo ; je les rappelle très brièvement :

- l'idée d'existence d'une pluralité d'objets infinie <u>en acte</u> est contradictoire.

- une pluralité infinie existe <u>en puissance</u>, en ce sens qu'on peut toujours ajouter un nouvel objet à une pluralité donnée et obtenir ainsi un nombre plus grand.

- la notion d'une grandeur continue (exemple d'une ligne, d'une surface, d'un corps) infinie <u>en acte</u> est contradictoire.

- l'existence d'une grandeur continue infinie <u>en puissance</u> est impossible car le monde est borné : par la pensée, on peut certes ajouter à une grandeur donnée une nouvelle grandeur mais on ne peut ajouter infiniment des grandeurs de même espèce réellement existantes.

- la grandeur continue est infiniment divisible (opposition aux thèses atomistes) ; le temps et le mouvement sont perpétuels au sens où ils n'ont ni commencement ni fin.

Je me propose d'exposer les trois idées suivantes traitées par Crescas et qui constituent, à mon sens, un pas important pour la pensée de l'infini.

1 - une grandeur infinie en acte n'est pas impossible : au cours de son analyse, Crescas proposera de définir le couple fini/infini non pas comme limité/illimité mais comme mesurable/non mesurable. Partant de là, il réfutera l'argument aristotelicien du tout et de la partie.

2 - la grandeur peut croitre à l'infini de la même manière que le nombre, en restant limitée. Cette analyse est l'occasion pour Crescas de faire un rapprochement audacieux entre infiniment grand et infiniment petit.

3 - un nombre infini en acte n'est pas impossible : l'argument du pair et de l'impair ne permet pas d'en réfuter l'existence.
Distinction est faite, à cette occasion, entre le nombrable et le nombré, distinction précisément réfutée par Aristote et ses commentateurs. Crescas est alors conduit à associer l'infinitude en acte à une multitude nombrable, susceptible de "recevoir l'idée de nombrement", mais non effectivement nombrée car, alors, elle ne pourrait être que finie.

## I - UNE GRANDEUR INFINIE EN ACTE N'EST PAS IMPOSSIBLE

Cette assertion vise très précisément la première proposition des thèses philosophiques résumées par Maimonide :

"l'existence d'une grandeur infinie quelconque est inadmissible" (6) . Je vais exposer le détail d'un des arguments de ce débat, argument appelé "la preuve par l'application" ou "la preuve par coïncidence". L'exposé de cet argument est emprunté explicitement par Crescas à un commentateur persan, Al-Tabrizi, qui rédigea, sans doute au cours du 13e siècle, un commentaire en arabe des 25 propositions maimonidiennes, commentaire dont on connaît deux versions hébraiques. Al-Tabrizi écrit :

"...la preuve par l'application est la suivante : s'il existait une distance s'étendant à l'infini dans le plein ou dans le

vide, supposons une ligne commençant par un point appelé A et qui s'en va à l'infini ; appelons-la ligne AB A ______ B et choisissons
. . . C
sur cette ligne un autre point après le point A situé à une distance d'une coudée, ce sera le point C. Nous avons maintenant deux lignes : la première, la ligne AB, finie du côté A et infinie du côté B ; la deuxième, la ligne CB, finie du côté C et infinie du côté B. Supposons maintenant, par la pensée, l'application (la superposition ou la coïncidence) de l'une d'entre elles sur l'autre à partir des deux côtés finis. L'objet de cette application est de faire correspondre par la pensée la première partie de la ligne AB commençant en A à la première partie de la ligne CB commençant en C, la seconde partie à la seconde, la troisième à la troisième et ainsi de suite à l'infini. Continueront-elles ainsi à se correspondre l'une à l'autre à l'infini, sans fin ou bien l'une d'entre elles s'arrêtera-t-elle ? La première possibilité est absurde ; car, dans ce cas, le plus grand serait égal au plus petit, puisque la ligne AB dépasse la ligne CB par la ligne AC. Reste la seconde possibilité. Dans ce cas, on sait que la plus petite ligne sera celle qui aura une fin ; elle sera donc finie ; mais la plus grande dépasse la plus petite longueur finie, à savoir une coudée ; elle sera donc, elle aussi, finie et ainsi la ligne supposée infinie du côté B sera finie du côté B, c'est absurde. Et cette absurdité résulte de ce que l'on a supposé possible une distance infinie. Donc toute grandeur est finie et limitée" (7).

Crescas, en exposant l'argument d'Al-Tabrizi n'en restitue guère le détail. Il écrit, en effet :

"...Supposons une ligne infinie dans une direction ; appliquons lui une ligne infinie et commençons par un point près de l'extrêmité de la ligne, qui est finie. Il s'ensuivra qu'une ligne infinie sera plus grande qu'une ligne infinie. Mais c'est faux car on sait bien qu'un infini ne peut être plus grand qu'un autre infini" (8).

La concision de Crescas présente ici un avantage, celui de nous désigner ce qui, pour lui, est le coeur du débat : la relation quantitative "plus grand que" ou "plus petit que" peut-elle s'appliquer aux grandeurs infinies ?

Cette "preuve par l'application" a une histoire très intéressante à suivre depuis les premières formulations aristotéliciennes sur le tout et la partie jusqu'à aboutissement, à la fin du 19è siècle, aux définitions de Cantor et Dedekind.

Disons très brièvement que la formulation qu'en donne Al-Tabrizi est à peu près celle que l'on trouve chez Avicenne deux siècles avant et qu'on trouve des éléments importants du débat au 9e siècle chez Al-Kindi, chez Thabit ibn Qurra et chez certains penseurs mu'tazilites, à la fin du 8e et au début du 9e siècles (Ibrahim Al-Mazzam) La scolastique latine en fera aussi un usage abondant. L'important à saisir est la place essentielle accordée, quelles que soient les variations de l'argumentation, à l'axiome "un infini ne peut être plus grand qu'un autre infini", lui-même dérive de l'axiome "le tout est plus grand que la partie".

Pour mieux saisir la réfutation que propose Crescas, je vais citer un auteur juif que Crescas avait très certainement étudié. Il s'agit de Abraham Ibn Daoud de Tolède (mort vers 1180), un des premiers représentants de l'aristotélisme juif avant Maimonide. Dans un ouvrage théologique rédigé en arabe, <u>le livre de la foi sublime</u> (dont on ne connaît que des versions hébraiques : <u>Sefer ha Emounah ha Hamad</u>), Ibn Daoud traite de l'argument des lignes infinies à partir, sans doute, de sources avicenniennes :

"S'il est possible qu'une ligne soit infinie, supposons les lignes AB et CD infinies en B et en D. A B
Puis retirons de CD la partie CE d'une C E D longueur fixée et déplaçons la ligne ED de façon que E coïncide avec le point où se trouvait C précédemment. Et voyons maintenant si le reste ED est égal à AB, il s'ensuivra que ED est égal à CD puisque deux choses égales à une même chose sont égales entre elles. Mais ED est plus petit que CD et dire que le plus grand est égal au plus petit est absurde ; c'est donc impossible. Par conséquent, le reste ED n'est pas égal à AB il lui est plus petit. Mais il est aussi infini donc l'infini ED est plus petit que l'infini AB. Mais un infini ne peut être plus petit qu'un autre infini. Donc ED est fini. Et quand nous ajoutons la partie finie CE, la somme ED et CE est aussi finie car la somme de deux finis ne saurait être infinie. Mais la ligne CD est égale à la ligne AB, si bien que les lignes AB et CD sont finies, c'est-à-dire que leur mesure est fixée. Il s'ensuit qu'une ligne infinie n'existe pas..." (9) .

On pourra noter les différences entre la preuve d'Al-Tabrizi et celle d'Ibn Daoud (ces différences seraient fort importantes pour une histoire de l'idée de bijection et les rapports de cette idée avec celle de superposition de deux figures dans le texte euclidien). Al-Tabrizi utilise explicitement l'idée d'une correspondance terme à terme entre les segments consécutifs, d'une longueur une coudée qu'on obtient en décomposant "par la pensée" les deux demi-droites AB et CD. Il en tire la nécessité et l'impossibilité de l'égalité de ces deux ensembles ; paradoxe qui ne se résout qu'en supposant impossibles des lignes infinies. Mais il n'y a paradoxe que parce que Al-Tabrizi utilise, comme allant de soi, la règle "le plus grand ne peut être égal au plus petit". C'est de la même manière que Ibn Daoud aboutit à un paradoxe. Plus explicitement, Ibn Daoud invoque le fait que "un infini ne peut être plus petit qu'un autre infini".

C'est à la racine de ce paradoxe que s'attache Crescas, négligeant les autres aspects de "la preuve par l'application".

La réfutation de la "preuve par l'application"

La réfutation qu'en propose Crescas intervient après la réfutation des diverses thèses niant l'existence d'une grandeur infinie. Si ces dernières relèvent en propre du corpus aristotélicien, les paradoxes à l'oeuvre dans la preuve "par l'application" feront l'objet de débats intenses à partir du moment où ils s'inséreront dans les débats sur l'éternité du monde. Le premier temps fort de ces polémiques se situe sans doute à l'époque de la fermeture de l'Ecole d'Athènes par Justinien (529) avec les critiques du commentateur chrétien d'Alexandrie, Jean Philopon (Jean "le grammairien").

Voici ce qu'en dit Crescas :

"Quant à la preuve d'Al-Tabrizi, qu'il appelle preuve par l'application, la conclusion n'est pas celle qu'il croyait. L'impossibilité pour un infini d'être plus grand qu'un autre infini ne vaut que du point de vue de la mesure ; lorsque nous utilisons le terme plus grand, c'est dans le sens de grandeur selon la mesure ; mais ce qui est infini n'est pas susceptible de mesure. C'est pourquoi la première ligne (infinie d'un côté dans la preuve d'Al-Tabrizi) n'est pas plus grande que l'autre car aucune des deux n'est mesurable dans sa totalité. Voilà pourquoi l'une n'est plus grande que l'autre même si la première dépasse la seconde par le côté qui est fini. Cela va de soi.

Que cela soit ainsi peut être établi par le témoignage des sens, à partir du problème du temps, qui, selon ceux qui croient en son éternité doit être conçu de manière analogue : il peut être augmenté du côté où il a une limite, tout en étant infini de l'autre côté" (10) .

Notons, pour la souligner, cette distinction essentielle : pour Crescas, l'infini, c'est le non-mesurable ; plus précisément, l'infini n'est plus défini comme l'illimité. Crescas entend soustraire l'infini aux "interdits" qui ne valent que pour le mesurable ; un infini peut, en un certain sens, être limité. Rendre plus fines les distinctions afin de laisser ouverte la possibilité de quantités infinies ; tel est l'objectif de Crescas. En témoignent ces précisions apportées dans le cadre du débat sur l'éternité du monde :

"...ajouter à un infini est impossible d'un point de vue mais possible d'un autre point de vue. Du point de vue de l'infini dans sa totalité, cela est impossible dans la mesure où il ne peut être décrit en termes de plus grand ou plus petit ; de même, du point de vue du côté qui est infini, il (l'infini) ne peut être accru pour les mêmes raisons. Mais du point de vue de son extrêmité qui est finie, l'additibilité est possible et nécessaire" (11).

Résumons les perspectives ainsi ouvertes par Crescas :

* la relation quantitative "plus grand que" ne s'applique pas aux grandeurs infinies. L'axiome "le tout est plus grand que la partie" n'est pas remis en cause. Simplement, sa validité ne concerne que les grandeurs finies.

* une quantité (finie) se reconnaît en ce qu'elle est mesurable par une de ses parties. Il s'ensuit que l'infini, pris dans sa totalité, est lié à la non-mesurabilité. Au couple limité/illimité est substitué le couple mesurable non-mesurable.

* tout ce qui est fini (mesurable) est limité mais la réciproque n'est pas vraie. Il peut exister des grandeurs infinies qui, en un certain sens, sont limitées. Une telle grandeur peut et doit être

considérée sous ce double point de vue. Les paradoxes sont liés à la confusion entre ces points de vue.

* enfin, dire d'une grandeur infinie qu'elle n'est pas plus grande qu'une autre (une de ses parties par exemple) ne revient pas à dire que ces deux grandeurs infinies sont égales.

Les relations quantitatives ne reçoivent donc pas de définition générale, s'agissant des grandeurs infinies. Il est vain de chercher la définition de Dedekind (un ensemble est infini s'il est équipotent à une de ses parties propres) dans les remarques de Crescas, rédigées 5 à 6 siècles plut tôt, dans un tout autre but et un tout autre contexte.

## II - GRANDEUR ET NOMBRE : SI LE NOMBRE PEUT CROITRE A L'INFINI, LA GRANDEUR LE PEUT AUSSI

Au cours de son exposé, Crescas est ramené à réfuter un des arguments de l'école : un corps infini est impossible car il ne pourrait être animé d'un mouvement rectiligne ou d'un mouvement circulaire.

Des six arguments destinés à invalider la possiblité d'un mouvement circulaire pour un corps infini, Crescas donnne une réfutation systématique. C'est à propos du premier argument qu'il ébauche une analyse dont la portée épistémologique dépasse le seul argument concerné. L'argumentation aristotélicienne telle que la rapporte Crescas est la suivante : la distance entre deux rayons d'une sphère s'accroît proportionnellement à l'allongement de ces rayons. Si l'on suppose les rayons de longueur infinie, la distance entre deux rayons sera aussi infinie ; mais on sait qu'il est impossible pour un objet en mouvement de parcourir l'infini (12) . Par conséquent, si on suppose un corps infini, sphérique, animé d'un mouvement circulaire et deux rayons, l'un au repos, l'autre en mouvement, le rayon en mouvement ne pourra jamais coïncider avec le rayon au repos. D'où la contradiction.

Pour mieux éclairer cette argumentation, Crescas indique un développement dû à Al-Tabrizi : c'est la preuve dite "par l'échelle".

Supposons deux droites issues du centre et faisant entre elles un angle tel, qu'avec la corde qu'elles découpent sur le cercle elles forment un triangle équilatéral. Si les deux rayons sont infiniment longs la distance entre eux, c'est-à-dire la corde qu'ils découpent et qui leur est égale, sera aussi infiniment longue. Mais l'infini ne peut être parcouru etc.

Crescas ne remet pas en cause "l'intraversabilité" de l'infini, sa réfutation porte sur la manière dont est conçue la distance croissant à l'infini :

> "la distance s'accroît (sous-entendu infiniment) de la même manière que le nombre s'accroît (infiniment), c'est-à-dire sans cesser d'être limitée" (13).

En somme il entend réfuter l'importante différence de traitement, usuellement invoquée, entre l'accroissement à l'infini d'une grandeur et l'accroissement à l'infini du nombre. L'accroissement à l'infini d'une grandeur ne doit pas être confondue avec sa limitation effective (14). Si l'analogie entre accroissement d'une ligne et accroissement d'un nombre n'est pas neuve (on la trouve déjà chez Avicenne), l'usage qu'en fait Crescas et la portée qu'il lui donne méritent d'être relevés.

"qu'il en soit ainsi, cela résulte de ce que l'analyse des contraires est une seule et même science. Il a été démontré dans le livre "les Sections Coniques" qu'il est possible pour une distance de décroître infiniment sans pour autant disparaître complètement. Il est possible, par exemple, de supposer deux lignes, qui, plus on les prolonge, plus elles se rapprochent sans jamais se rencontrer même si elles sont produites à l'infini. S'il y a donc une distance résiduelle qui ne disparaît pas, à fortiori, dans le cas de l'accroissement, il est possible pour une distance d'être accrie indéfiniment tout en conservant une limite" (15).

La référence au livre des Sections Coniques d'Appolonius est sans doute tirée de Maimonide, mais l'usage qu'en fait Crescas est beaucoup plus audacieux puisqu'à partir de l'exemple célèbre des lignes asymptotes (théroème 13 du Livre 11 des Sections Coniques)il est proposé un traitement commun de l'infiniment grand (en puissance) et de l'infiniment petit (en puissance) et cela à partir de l'unité de "l'analyse des contraires."

Dans le Guide des Egarés, Maimonide cite effectivement (Livre 1, ch.73) Appollonius à l'appui de sa polémique contre les Mutakallimun, adversaires mulsumans du péripapétisme arabe. Ces derniers soutenaient un "principe d'admissibilité" selon lequel tout ce qui est imaginable est aussi admissible pour la raison et ce que l'imagination ne peut concevoir est, de ce fait, impossible. La seule limite imposée à ce principe étant que la réunion des contraires ne saurait être admise.

Pour Maimonide, ce principe "qu'il ne faut pas se hâter de repousser entièrement et à la légère" conduit cependant à des choses absurdes car l'imagination, contrairement à l'intelligence, peut conduire à toutes sortes d'errements. SOulignant l'importance de ne point laisser à l'imagination le soin de juger le nécessaire, le possible et l'impossible, Maimonide invite son lecteur à mesurer "combien les sciences mathématiques sont instructives pour nous et combien sont importantes les propositions que nous y puisons". A l'appui de son propos, Maimonide cite le théorème d'Appollonius sur les lignes asymptotes et le commente en ces termes :

"Voilà une chose que l'on ne saurait se figurer et que l'imagination ne saurait nullement concevoir (...) Il est donc démontré qu'il existe des choses qu'on ne peut s'imaginer, et qui (non suelement) ne sauraient être comprises par l'imagination, mais lui paraissent même impossibles" (16).

Crescas retiendra la leçon lorsqu'il achèvera sa démonstration de la possibilité de l'existence d'un corps sphérique infini par la formule : "cela est loin de l'imagination mais la raison nous contraint à l'accepter".

<u>Réfutation de l'argument concernant l'impossibilité d'un corps infini sphérique</u>.

Aristote avait accordé aux mathématiciens l'usage de "grandeurs aussi grandes qu'ils voudront mais limitées" (note 14) ; mais des grandeurs réelles, on ne peut prédiquer l'infini accroissement du fait de la finitude du monde. Pour Crescas qui n'admet pas la finitude du monde et qui a établi l'existence d'un vide infini extra-mondain comme une pièce essentielle de ses conceptions cosmologiques, il peut exister des grandeurs infinies en acte ; en particulier, on peut envisager une sphère de rayon infiniment long. Quant à la contradiction invoquée par les partisans d'Aristote, non seulement il en conteste la validité mais il va transformer l'argument en contradiction pour ses adversaires. Crescas entend établir, à partir des prémisses posées par Al-Tabrizi, que la distance entre deux rayons d'une sphère infinie serait à la fois infinie ET finie ; contradiction qui invalide l'argument lui-même. A suivre Crescas, on ne pourra donc pas, sur cet argument, réfuter la possibilité d'un corps infini sphérique.

Voici son raisonnement : admettons, avec les partisans d'Aristote, que deux rayons d'une sphère (ou d'un cercle) infinie, faisant entre eux un angle donné, seraient infiniment distante l'un de l'autre. Mais on peut montrer que la distance entre ces deux rayons est AUSSI finie. Considérons, en effet, un point situé à une distance donnée, finie, de l'un de ces rayons ; en joignant le centre et ce point on construit une ligne droite qui est un nouveau rayon. Ce nouveau rayon, situé, dès le départ à une distance finie d'un autre rayon devrait être aussi à une distance infinie de ce dernier. D'où la contradiction annoncée.

Précisons ce que j'appellerais l'audace épistémologique de Crescas.

* traiter symétriquement l'infiniment grand et l'infiniment petit : à la base de cette démarche, il y a l'idée que l'accroissement à l'infini et la division à l'infini de quantités continues relèvent des mêmes règles et des mêmes limitations. A ce titre, une grandeur infiniment augmentable peut être traitée comme une grandeur finie, c'est-à-dire mesurable par une de ses parties.

* traiter symétriquement grandeur et nombre, du moins du point de vue de l'infini : puisqu'un nombre peut croître potentiellement à l'infini, rien ne permet de refuser cette possibilité à une

grandeur. Cette épistémologie "infinitiste" lui permettra de traiter ultérieurement la possibilité d'un nombre infini en acte à la manière dont il a traité la grandeur infinie en acte.

## III - L'EXISTENCE D'UN NOMBRE INFINI EN ACTE N'EST PAS CONTRADICTOIRE

Si on admet la première proposition mainonidienne : "il n'existe pas de grandeur infiniment frande", on en déduit qu'il n'existe pas un nombre infini de grandeurs. C'est l'objet de la deuxième proposition. Supposer, en effet, un tel nombre de grandeurs conduirait à affirmer l'existence d'une grandeur, "somme" de toutes ces dernières, grandeur qui serait nécessairement infinie.

Pour Crescas qui a réfuté la première proposition, la seconde ne saurait en résulter. Mais il entreprend, tout de même, à cette occasion, d'analyser les arguments généraux destinés à réfuter l'existence de nombresinfinis en acte.

Cette analyse comporte deux volets : d'une part, il rappelle que la négation absolue d'un nombre infini ne représente pas au sens strict le point de vue de Maimonide qui, en cela, s'accorde avec Avicenne et Al-Ghazali : il s'agit de l'exemple d'une série infinie dont l'ordre ne serait qu'accidentel. Je n'examinerai pas ici cette analyse ; je me contente de souligner la manière dont Crescas se saisit de toutes les brèches qu'offrent l'argumentation adverse. D'autre part, Crescas ne livre à une analyse de la notion de nombre destinée à invalider l'argument le plus couramment invoqué contre un nombre infini en acte : l'argument du pair et de l'impair.

### L'argument du pair et de l'impair.

Voici la formulation qu'en donne Crescas :

"tout nombre est soit pair, soit impair ; tout pair et tout impair est limité et fini ; donc tout nombre est fini" (17)

La réfutation que donne Crescas de cet argument est la suivante :

"tout nombre en acte, c'est-à-dire les choses comptées et nombrées (littéralement : comptées avec un nom de nombre) est effectivement déterminé et ce qui est déterminé est nécessairement fini. Mais les choses qui ont un nombre, à savoir celles qui sont susceptibles d'être nombrées mais qui ne sont pas nombrées en acte, il n'est pas impossible d'en prédiquer l'infinitude même si on pose la distinction pair ou impair ; car il est possible d'affirmer que des (nombres) pairs sont infinis ou que des (nombres) impairs sont infinis.

La vérité de la chose, cependant, c'est que la division du nombre entre pair et impair s'applique au nombre fini, déterminé mais le nombre infini, dans la mesure où il n'est pas déterminé n'est pas descriptible en termes de pair et d'impair" (18).

S'il est vrai que la critique de l'argument du pair et de l'impair a déjà été abordée (par exemple par Al-Ghazali dans <u>Tahafut al Falasifa</u>, qui concluait pourtant à la pertinence de l'argument) (19), c'est l'usage qu'en fait ici Crescas qui me paraît devoir retenir l'attention. Crescas est conduit à opérer une distinction entre le nombrable et le nombré ; distinction qu'Aristote avait précisément réfugée lorsqu'il examinait la question de l'infini sous "l'angle logique" :

"le nombre ne sera pas infini en tant que séparé abstraitement ; en effet, le nombre ou ce qui a nombre est nombrable. Si donc le nombrable peut être effectivement nombré, alors l'infini pourrait être parcouru" (20).

Crescas ne semble pas mettre en cause l'argument de l'"intraversibilité" de l'infini (on l'a vu précédemment) mais bien plutôt les limitations que cet argument impose à l'idée de nombrement.

C'est cette limitation qu'entendait un auteur connu et cité par Crescas, Abraham ibn Daoud lorsqu'il écrivait :

"...et celui qui dit cela (qu'un nombre infini existe en acte) c'est comme s'il disait : j'ai compté ce qui n'a pas de fin et je suis arrivé à son extrêmité bien qu'il n'ait pas de fin" (21).

Pour Crescas, identifier les choses nombrables et les choses nombrées est erroné, du moins lorsqu'il s'agit d'infini.

En effet, le seul argument qui nous contraindrait à cette identité entre nombré et nombrable est celui qui s'appuie sur une des propriétés constitutives du nombre : être pair ou impair.

Deux objections de portée différente sont soulevées par Crescas contre cet argument.

* on peut parler de nombres pairs infinis et de nombres impairs infinis. Crescas ne dit rien de plus sur de tels nombres ; on peut trouver des traces de cet argument dans les cercles philosophiques de Bagdad au 10e siècle, peut être à la suite des réflexions attribuées à Thabit ibn Qurra sur l'existence de nombres infinis en acte et dans les vifs débats qui agitèrent la scolastique latine au 13e et 14e siècles.

Manifestement, c'est la deuxième objection qui paraît la plus cohérente avec la démarche d'ensemble de Crescas :

* "la division du nombre entre pair et impair ne s'applique qu'au nombre fini, limité", avec cette conséquence, qu'un nombre infini dans la mesure où il n'est pas limité ou déterminé ne se décrit pas en termes de pair ou d'impair.

Pour bien souligner qu'il ne s'agit pas là seulement d'une dissolution du nombre infini dans l'indéfini mais bien d'une caractérisation possible d'un nombre infini en acte, Crescas renvoie à la partie de son ouvrage où cette distinction fonde, entre autres, la possibilité d'un tel nombre : il s'agit de la série infinie en acte des causes et effets dont l'ordre n'est qu'accidentel.

Car ne l'oublions pas, le nombre infini en puissance, contrairement à la grandeur infinie en puissance, est admise par les partisans d'Aristote. Il s'agira pour Crescas, à la suite des réflexions d'Avicenne et Maimonide, de montrer qu'un tel nombre infini en puissance peut s'actualiser.

Cette possibilité avait été vigoureusement combattue par

Averroès. Dans sa réplique à Al-Ghazali (Tahafut al Tahafut), Averroès indiquait pourtant que pour le nombre infini en puissance, identifié au non-existant, la distinction pair/impair ne saurait être applicable, à moins qu'on n'identifie un tel nombre à un nombre existant en acte mais alors il ne pourrait être infini (22).

Pour Crescas, au contraire, l'indétermination au regard de la parité qui s'attache au nombre infini en puissance est tout aussi caractéristique du nombre infini en acte ; à charge, bien sûr, de donner sens à un tel nombre.

C'est un tel "modèle" qu'il entreprend d'exposer dans l'examen de la troisième proposition maimonidienne qui, en apparence, ne concerne guère la mathématique de l'infini puisqu'il y sera question des âmes séparées des corps et de la puissance divine.

Mais il convient de ne pas oublier ; la métaphysique infinitiste de Crescas est un outil théologique, certes, mais elles sait faire usage de tous les outils de la spéculation qu'elle entend ne pas laisser aux seuls philosophes.

Je n'examinerai pas ce "modèle" qui nous conduirait trop loin ; je me contenterai de citer un passage où Crescas évoque le problème de l'omniscience divine, des doutes qui habitent les philosophes dans ce domaine et où il relie sa propre conception de l'omniscience divine à la possibilité de fonder l'idée un nombre infini en acte.

"...et si l'on disait que la connaissance (divine) ne porte pas sur les choses particulières car elles ne sont que particulières, par exemple 3 ou 4 ou une collection de 3 ou 4 objets, comme on ne peut éviter de reconnaître que sa connaissance inclut quelque nombre, puis-je savoir si sa connaissance s'étend à tous les autres nombres ou non ! S'il les connaît : dans la mesure où un nombre peut être ajouté à un autre nombre indéfiniment, il s'ensuit que sa connaissance s'étend à un nombre infini de nombres ; s'Il ne les connaît pas tous, il y a nécessairement une limite qu'il ne sait pas dépasser. Mais alors demeure une question : pourquoi connaît-il les nombres jusqu'à une certaine limite et pas au-delà ? Son savoir serait-il atteint de lassitude ? On ne peut échapper à la conclusion que la pluralité des choses sues est infinie" (23)

## CONCLUSIONS

A l'issue de ce bref exposé, je voudrais soulever les questions suivantes :

* quel sens accorder à ces textes anciens et qui sonnent parfois si étrangement à nos oreilles modernes, "spécialisées" ?

* quel profit peut attendre, pour sa pratique, le chercheur ou l'enseignant de mathématiques de la lecture instruite de ces débats ?

* ces débats intéressent-ils d'autres personnes que le dédiéviste ou l'historien des sciences préoccupé par la gestation de l'arithmétique transfinie ?

Si l'on tente de réfléchir aux problèmes dits des fondements ou aux axiomatiques ensemblistes, il me semble que la violence qui opposait au siècle dernier Cantor à Kronecker n'est plus de mise : le mathématicien a relégué au magasin des accessoires métaphysiques la question du statut ontologique de l'axiome du choix ou celui de l'hypothèse du continu. Il ne s'agit plus pour lui que d'un problème d'équilibre interne des énoncés mathématiques. Le point de vue du mathématicien est un point de vue pragmatique et c'est cela, sans doute, qui fait sa force.

Pourtant, je voudrais, sur deux exemples, évoquer ce que Cantor appelait le "grain de métaphysique" sans lequel aucune science n'est possible.

Lorsque Paul Cohen achève, à la suite de Gödel, de montrer l'indépendance de l'hypothèse du continu (1963), il est amené à s'interroger sur la situation ainsi créée et il conclut à sa conviction intime, non mathématique, que l'hypothèse du continu est fausse (24) alors qu'il venait d'établir son indécidabilité formelle. Pourtant on a discuté y compris cette "conviction intime" de Cohen (25) ; il semblerait donc que les opinions philosophiques voire métaphysiques de Cohen comme celles de Gödel ne regardent pas que les intéressés : au contraire, elles ne sont sûrement pas étrangères à la formation de leur pensée mathématique. On a vu, dans le cas des quelques auteurs médiévaux que j'ai cités à quel point les choses étaient imbriquées. Sommes-nous, sur ce point, très différents de nos ancêtres-philosophes-théologiciens ?

Un deuxième exemple : avec l'introduction de l'outil informatique et l'accroissement de la puissance calculatoire qu'elle entraine se posent des problèmes philosophiquement neufs pour le mathématicien. Le théorème des quatre couleurs est-il oui ou non "démontré" alors qu'on sait qu'il a fallu plusieurs milliards de décisions logiques et plusieurs centaines d'heures d'ordinateur pour épuiser les raisonnements combinatoires nécessaires à la conclusion positive ? De même est-il naturel d'appeler FINI un nombre qui ne serait atteint que par un ordinateur de la taille de l'univers, fonctionnant depuis l'origine des temps ? Un tel nombre a pour nous le même statut que, pour nos ancêtres de l'Antiquité, le nombre de grains de sable contenus dans la sphère des fixes (26). Dans ce contexte il me semble intéressant de rapprocher ce genre de problumes des formulations étonnantes de certains textes religieux de l'Inde antique. On y suggère, en effet, de distinguer trois classes de nombres : les nombres nombrés (samkhyata), les nombres non nombrables (asamkhyata) qui échappent au nombrement effectif et les nombres infinis (ananta) (27). Un telle étude n'aurait de sens que si elle nous permettait de comprendre, dans leur contexte et dans leur problématique les efforts de systématisation à l'oeuvre dans les représentations religieuses transcrites dans ces textes.

En guise de conclusion, je dirai que le texte de Crescas dont j'ai commenté quelques passages nous parle encore aujourd'hui car il nous laisse entrevoir la diversité des problèmes mobilisés dans une discussion de type mathématique et la liaison naturelle entre la métaphysique et le statut des objets mathématiques.

Je sais bien que la métaphysique n'a pas bonne presse chez la plupart des mathématiciens ; aussi, je concluerai très diplomatiquement que, hier comme aujourd'hui les mathématiques pèsent d'un poids trop lourd dans nos modèles culturels pour que nous puissions en ignorer les dimensions métaphysiques.

T. LEVY

## BIBLIOGRAPHIE

(1) Taraki a proposé en 1924 une définition différente de la finitude d'un ensemble : a est fini si tout ensemble non vide P de parties $x \subseteq a$ comprend un élément minimal pour l'inclusion, c'est-à-dire une partie $x_0 \in P$ pour laquelle on n'a jamais, à la fois $x \subsetneq x_0$ et $x \in P$. Cette définition qui implique la définition de Dedekind ne lui est équivalente que si on admet l'axiome du choix, au moins sous sa forme dénombrable.
cf. A.Taraki, "Sur les ensembles finis", Fundamenta Mathematicae, 6(1924), 45-95
cf. aussi : A. Lévy, "The independence of various definitions of finiteness" Fund.Mat. 46(1958, 1-13 .

(2) Y. Baer, A History of the Jews in the Christian Spain, Philadelphia, 1966, vol.1, ch.7

(3) Dans la magistrale étude de H.A. Wolfson ; Crescas' Critique of Aristotle, Harvard University Press, 1929, on trouvera une édition critique de la partie de Or Adonai plus spécifiquement consacrée à la critique de la physique d'Aristote ; le texte hébreu est accompagné d'une traduction anglaise et d'un considérable appareil de notes et références. Pour le reste de l'ouvrage, j'ai consulté la version imprimée, publiée à Vienne en 1859.

(4) En français, on peut consulter la traduction du guide des Egarés faite à partir de l'original arable par S. Munk, 1856-66 ; réédition Paris-Maisonneuve 1970.

(5) Wolfson, op. cit. p.134.

(6) Le guide, trad. Munk, vol.2 , p.3.
L'expression originale arabe de Maimonide est : cazm ma la nihaya lah . La traduction hébraïque classique (Ibn Tibbon) en est : bacal shicur ehad ein takhlit lo.

(7) Version hébraïque d'Al Tabrizi citée par Wolfson, op. cit. p.346 , n.54 .

(8) Wolfson, op. cit. p.148

(9) Emunah Haramah, éd. Berlin 1919, p.15-16.

(10) Wolfson, op. cit. p.188-190.

(11) Or Adonai, III, 1,4. Edition Vienne p.67b, lignes 38-41.

(12) cf. Aristote, Physique VIII, 9, 265a, 19-20 : "parcourir l'infini est impossible" ; proposition essentielle dans le dispositif conceptuel destiné à réfuter l'existence de l'infini en acte.

(13) Wolfson, op. cit. p.206.

(14) cf. Phys.III, 7, 207b, 27-30 où Aristote accorde aux mathématiciens la possibilité de se servir "de grandeurs aussi grandes qu'ils voudront, mais limitées".

(15) Wolfson, op. cit. p.206.

(16) Le Guide, trad. Munk, vol.1, p.408.

(17) Wolfson, op. cit. p.218.

(18) Ibid.

(19) Argument cité par Averroès dans Tahafut al Tahafut, trad. anglaise de S. Van Den Bergh : The Incoherence of the Incoherence, London 1978, p.12.

(20) Phys.III, 5, 204b, 7-10.

(21) Ibn Daoud, op. cit. p.16.

(22) Averroès op. cit. p.13.

(23) Or Adonai, II, 1,3. Ed. Vienne p.30b, lignes 35-42.
Cet extrait est cité par N.L. Rabinovitch dans un article qui a le grand mérite d'attirer l'attention des historiens des mathématiques sur les réflexions de Crescas à propos de l'infini : "Rabbi H. Crescas on numerical Infinities". ISIS, 61 (1970), p.224-230. Néanmoins, cet article avance des conclusions bien ha-

sardeuses sur l'interprétation à donner des analyses de Crescas.

(24) P.J. Cohe, Set Theory and the Continum Hypothesis, New York 1956, p.151.

(25) On peut consulter : J.L. Friedman, "The Generalized Continuum Hypothesis is equivalent to the Generalized Maximization Principle", The Journal of Symbolic Logic, 36 (1971), p.39-55.

(26) cf. l'Arénaire d'Archimède.

(27) Dans ce domaine si peu exploré par les chercheurs non indiens, on peut lire : Sri R.D. Shastri, "Positive Integral Kinds of Numbers according to the Jain Concept". Jaina Antiquary (Arrah, India), 15 (1949) p.30-40.