Séminaire de philosophie et mathématiques

Henri Cartan

Remarques d'Henri Cartan

Séminaire de Philosophie et Mathématiques, 1983, fascicule 1
« Le modèle cartésien dans la théorie musicale : RAMEAU », , p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1983___1_A2_0>

R E M A R Q U E S d'Henri CARTAN

Dans le traité de Rameau intitulé "Génération harmonique" et dédié à "Messieurs de l'Académie Royale des Sciences" (paru en 1737), l'un des buts que se propose Rameau est de justifier l'usage du "tempérament", c'est-à-dire de la gamme tempérée, dans laquelle l'intervalle d'octave est partagée en douze intervalles égaux. Les pages 94 à 100 sont très claires à cet égard, autant du moins que le permet le langage de l'époque, et le fait que Rameau n'utilise pas les logarithmes.

Je vais tenter de traduire cela en langage mathématique d'aujourd'hui.

Rameau introduit d'abord la "gamme de Zarlin" en procédant comme suit. Choisissons un son fondamental, appelé ut. Les harmoniques d'ut sont les sons dont les fréquences s'obtiennent en multipliant la fréquence d'ut par les facteurs 2, 3, 4, 5, 6,.... Un son de fréquence double d'un autre est à l'octave de l'autre et porte le même son. La considération des harmoniques d'ut définit les sons sol et mi, comme suit :

ut	ut	sol	ut	mi	sol
1	2	3	4	5	6

Si on ramène les sons de sol et mi ainsi obtenus à l'intérieur de l'octave (ut 1, ut 2), on obtient la suite

ut	mi	sol
1	5/4	3/2

qui constitue l'accord parfait d'ut majeur. L'intervalle (ut, sol), de rapport 3/2, est la quinte. L'intervalle (ut, mi), de rapport 5/4, est la tierce majeure. L'intervalle (mi, sol), de rapport 6/5, est la tierce mineure.

L'accord parfait de sol majeur définit les sons si et ré :

sol	si	ré
3/2	15/8	9/4

Si enfin on définit le son fa tel que (fa, ut) soit une quinte, on l'accord parfait de fa majeur, qui définit fa et la :

fa	la	ut
2/3	5/6	1

Ramenons les sons de ré, fa, la dans l'octave (ut1, ut2) : on obtient la gamme de Zarlin :

$$\text{ut} \underbrace{\quad}_{9/8} \text{ré} \underbrace{\quad}_{10/9} \text{mi} \underbrace{\quad}_{16/15} \text{fa} \underbrace{\quad}_{9/8} \text{sol} \underbrace{\quad}_{10/9} \text{la} \underbrace{\quad}_{9/8} \text{si} \underbrace{\quad}_{16/15} \text{ut}$$

On voit que les intervalles entre deux notes consécutives de la gamme de Zarlin sont de 3 sortes :

- le ton de rapport 9/8
- le ton de rapport 10/9
- le demi-ton de rapport 16/15.

Remarque : la gamme de Zarlin fournit les suites

$$\text{la} \underbrace{\qquad}_{\textit{tierce min.}} \text{ut} \underbrace{\qquad}_{\textit{tierce maj.}} \text{mi} \quad \text{et} \quad \text{mi} \underbrace{\qquad}_{\textit{tierce min.}} \text{sol} \underbrace{\qquad}_{\textit{tierce maj.}} \text{si}$$

qui sont des accords parfaits mineurs : dans chacun d'eux, le premier intervalle est une tierce mineure et l'intervalle total est une quinte. (Attention : l'intervalle (ré,la) n'est pas une quinte).

la "différence" entre les deux sortes de tons est mesurée par le rapport

$$(9/8) : (10/9) = 81/80 .$$

C'est le comma de Zarlin.

En musique, transposer c'est changer de son fondamental, en effectuant une "translation" dans le groupe multiplicatif des fréquences. Essayons par exemple de prendre comme nouveau son fondamental le ré de la gamme précédente : dans la gamme de ré que l'on va obtenir, la première note qui se présente est celle dont la fréquence est 9/8 de la fréquence de ré : or ce n'est pas le mi, mais un son situé un comma au-dessus du mi de la gamme d'ut. D'où la difficulté de transposer.

Comment remédier à cette difficulté ? C'est ce que Rameau explique dans son Chapitre IV, sans d'ailleurs faire référence à Pythagore. La gamme de Pythagore, différente de celle de Zarlin, s'obtient en construisant, à partir du son fondamental d'ut, des quintes successives, ce qui donne, par définition, les notes suivantes :

fa	ut	sol	ré	la	mi	si
2/3	1	3/2	9/4	27/8	81/16	243/32

Si on ramène ces notes à l'intérieur de l'octave (ut 1, ut 2), on obtient la <u>gamme de Pythagore</u> :

$$\text{ut} \underbrace{\quad}_{9/8} \text{ré} \underbrace{\quad}_{9/8} \text{mi} \underbrace{\quad}_{2^8/3^5} \text{fa} \underbrace{\quad}_{9/8} \text{sol} \underbrace{\quad}_{9/8} \text{la} \underbrace{\quad}_{9/8} \text{si} \underbrace{\quad}_{2^8/3^5} \text{ut}$$

Ici il n'y a plus que 2 sortes d'intervalles :

- le ton de Pythagore, de rapport 9/8 ,
- le demi-ton de Pythagore (ou <u>demi-ton diatonique</u>),

de rapport $2^8/3^5$.

Les notes ut, ré, fa, sol sont les mêmes que dans la gamme de Zarlin ; les notes mi, la, si sont un comma au-dessus des notes de même nom de la gamme de Zarlin. On observera que dans la gamme de Pythagore tous les rapports d'intervalles sont des fractions qui ne font intervenir que les entiers premiers 2 et 3, tandis que dans les rapports de la gamme de Zarlin interviennent les entiers premiers 2, 3 et 5.

Comme l'explique Rameau, on peut poursuivre indéfiniment les superpositions de quintes, dans les deux sens ; on définit ainsi les <u>dièzes</u> (notés aujourd'hui ♯) et les <u>bémols</u> (notés b), au moyen des suites de quintes

...mi   si   fa♯   ut♯   sol♯   ré♯   la♯   mi♯   si♯

et

fa b ut b sol b ré b la b mi$b$ si$b$ fa   ut .

(On pourrait continuer et définir les doubles dièzes et les doubles bémols).

Le problème de la transposition se résout alors facilement : la gamme de sol se déduit de la gamme d'ut en multipliant toutes les fréquences par 3/2, ce qui donne

sol   la   si   ut   ré   mi   fa♯   sol .

De même, dans la gamme de ré, il y a deux dièzes, le fa♯ et l'ut♯ . Et ainsi de suite. Dans la gamme de fa, il y a un bémol, le si b , etc.

Qu'arrive-t-il quand, de proche en proche, on passe de l'ut au si♯ par superposition de 12 quintes ? L'oreille du musicien constate que l'on aboutit pratiquement à un ut. Cela correspond au fait que si l'on ramène le si dans l'octave (ut 1, ut 2), l'intervalle (ut, si♯) a pour rapport de fréquences $3^{12}/2^{19} = 1{,}01364...$, suffisamment voisin de 1 pour que l'oreille puisse l'assimiler à 1. En fait, cet intervalle, que Rameau appelle le <u>comma de Pythagore</u>, est un peu plus petit que 1/51 d'octave. Rameau observe alors que si l'on abaisse la quinte d'un intervalle égal à 1/12 du comma de Pythagore, la superposition de 12 de ces nouvelles quintes sera exactement égale à un intervalle de 7 octaves ; cela permettra d'identifier le si♯ et l'ut (et du même coup d'identifier ut♯ à ré♭ , ré♯ à mi♭ , mi à fa♭ , mi♯ à fa, fa♯ à sol♭ , sol♯ à la♭ , la♯ à si♭ , si à ut♭). Telle est la gamme tempérée, qui est formée de douze notes séparées par des "demi-tons" tous égaux entre eux. Un ton tempéré est exactement le double d'un demi-ton tempéré. Le "rapport" de fréquences d'un demi-ton tempéré est $\sqrt[12]{2}$.

Si l'on désire que les mesures d'intervalles s'ajoutent (au lieu de se multiplier) lorsqu'on compose deux intervalles consécutifs, il suffit de passer aux logarithmes. Convenons désormais que la mesure additive d'une octave est <u>un</u> ; alors la mesure d'un intervalle dont le rapport des fréquences est a sera

$$\frac{\log a}{\log 2} \quad \text{(peu importe la base des logarithmes).}$$

L'intervalle dont il faut diminuer la vraie quinte pour obtenir la quinte tempérée est 1/12 de celui dont le rapport de fréquences est $3^{12}/2^{19}$ (comma de Pythagore). Sa mesure additive est donc

$$u = \frac{\log 3}{\log 2} - 19/12 = 0{,}00162916737...$$

Dans une octave il y en a un nombre égal à

$$1/u = 613{,}81047...$$

Voilà qui précise numériquement les indications données par Rameau. Il est alors facile de placer les notes de la gamme de Pythagore par rapport à celles de la gamme tempérée (pour le son fondamental ut) :

ut	ré	mi	fa	sol	la	si	ut
o	2u	4u	-u	u	3u	5u	o

(la 2e ligne indique les intervalles qu'il faut ajouter, ou retrancher, pour passer de la gamme tempérée à la gamme de Pythagore).

L'intervalle (ut, ut♯) de Pythagore (demi-ton chromatique) vaut 7u de plus que le demi-ton tempéré ; l'intervalle (ut♯, ré) de Pythagore (demi-ton diatonique) vaut 5u de moins que le demi-ton tempéré.

Une question que n'aborde pas Rameau, c'est la comparaison du comma de Pythagore et du comma de Zarlin. Le comma de Zarlin a pour mesure additive

$$z = \frac{\log(81/80)}{\log 2}$$

Le calcul (avec une machine) montre que, curieusement, z est très sensiblement égal à 11 u (alors que le comma de Pythagore est 12 u). D'une façon précise, on a

$$z - 11\,u = 10^{-6} \times 1{,}0668\ldots\,.$$

Cette différence z - 11 u est donc à peu près égale à un millionième d'octave, quantité vraiment négligeable pour l'oreille.
Avec cette approximation, nous pouvons situer les notes de la gamme de Zarlin par rapport à celles de la gamme tempérée :

ut	ré	mi	fa	sol	la	si	ut
o	2u	-7u	-u	u	-8u	-6u	o

Observons qu'on passe du fa♭ de Pythagore au mi de Zarlin en ajoutant u ; de même, on passe du si♭♭ de P. au la de Zarlin en ajoutant u, et du ut♭ de P. au si de Zarlin en ajoutant u. Rappelons que ut, ré, fa et sol sont les mêmes dans les gammes de Pythagore et de Zarlin.

17 janvier 1983