Séminaire de philosophie
et mathématiques

André Martinot-Lagarde

Classification des grandeurs et propriétés scalaires

Séminaire de Philosophie et Mathématiques, 1983, fascicule 10
« Un essai de classification des grandeurs mesurables », , p. 1-27
<http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1983___10_A1_0>

Séminaire Philosophie et Mathématique
du Professeur Maurice LOI

5 décembre 1983 : CLASSIFICATION des GRANDEURS
et PROPRIETES SCALAIRES

André Martinot-Lagarde, Université de Lille I, Sciences et Techniques

---

P R E A M B U L E

01 Essayer de classer les grandeurs ? Nous voici aux frontières entre physique, mathématique et logique ; notre exposé risque des critiques de trois côtés : les physiciens pourront dire : banalité, ou subtilité ; les mathématiciens et logiciens : puérilité .

02 Cet exposé sera en deux parties, proposer un mobile mathématique pour les grandeurs, vérifier que ce modèle suffit, quand on considère tels problèmes généraux posés par l'expression des lois expérimentales, ceux d'homogénéité et de similitude. La grandeurs sera comparée à la notion plus générale de propriété, regardée elle-même comme primitive (au sens de Zaremba). Il ne s'agira que des grandeurs scalaires, la question du passage des scalaires aux vecteurs et tenseurs ayant été clarifiée depuis longtemps (voir Paul Langevin).

03 On rencontre au sujet des grandeurs deux vieux énoncés, assez surprenants : "La grandeur est ce qui peut augmenter ou diminuer". Mais, parmi les quantités apparaissant dans les lois expérimentales, refuse-t-on le nom de grandeur à la constante de la gravitation, ou à la densité de l'eau à telle température et telle pression ? Deuxième énoncé : "Pour dire : j'ai défini une grandeur, il faut avoir établi un critère a + b = c " Le premier point, au sujet de l'égalité, est certes nécessaire ; mais par exemple, la somme de deux températures empiriques a-t-elle un sens ? Exiger une définition de l'addition, c'est se limiter aux grandeurs des Grecs, distance, aire, volume, ... (auxquelles on joindra la charge électrique, le moment magnétique ...). Refusera-t-on le nom de grandeur à une abscisse, une date,..à toute grandeur..intensive ?

METHODE , VOCABULAIRE .

11 Après ce préambule, fixons quelques points de méthode et de vocabulaire. Plusieurs auteurs, en particulier M. Landolt, San Juan Llosa,

B. Lefur, ont fait l'effort de construire une algèbre des grandeurs : à part des opérations classiques sur les nombres, qui servent de signifiants aux grandeurs, ils ont défini des opérations sur les grandeurs elles-mêmes. A la suite d'auteurs plus anciens, H. Lebesgue en mathématique, G. Bruhat en physique, nous n'avons considéré ici que les opérations sur les nombres (sauf dans notre annexe).

12 C'est dans l'abstrait que nous allons nous occuper de la représentation des grandeurs, ou des propriétés, par des nombres ; nous avons ainsi à emprunter à la linguistique son vocabulaire élémentaire. Selon le vocabulaire de Spinoza (tel qu'il est présenté en français par Alain), l'univers est formé par des objets, par les idées que tel et tel humain ont de ces objets, et par les noms que les humains donnent à ces idées. A notre connaissance, les linguistes écrivent pour : objet , idée , nom ,
les mots : référent , signifié , signifiant ;
et ils appellent symbole, non pas un signifiant, mais un couple (Signifié, signifiant). Si vous le permettez, nous prendrons ici "symbole" dans son sens usuel de "signifiant" (soit deux syllabes au lieu de quatre, selon le précepte de Paul Valéry "de deux mots choisir le moindre") et "symbolisme" voudra dire un ensemble de couples (signifié, signifiant), autrement dit une correspondance entre deux ensembles (ou un lexique, ou pour mieux dire une fonction, à savoir une fonction <u>d'un ensemble</u> de grandeurs <u>dans un ensemble</u>, de symboles).

13 Il nous parait nécessaire d'introduire ici un autre mot à côté de <u>propriété</u>, le mot <u>attribut</u> par exemple (on pourrait dire au lieu d'attribut, prédicat, ce serait plus exact à l'égard de la grammaire, mais ne serait-ce pas inutilement pédant ?). Notre motif est la réflexion suivante : que signifie une phrase comme : "Soit tel objet présentant telle grandeur"? N'y a-t-il pas ambiguité ? Soit l'exemple d'une table et de la longueur : on peut comprendre :

> cette table a une longueur,
> cette table a telle longueur, par exemple 1,5 mètre.

Nous allons convenir du langage suivant :

> avoir une longueur, une largeur, une hauteur,.. ou une couleur unique : c'est une propriété.
> avoir une longueur de 1,5m, une largeur de...ou la couleur rouge : c'est un attribut.

Ainsi une propriété dans un ensemble A d'objets, est une fonction de source A et de but, un ensemble d'attributs, (incompatibles) : un et un seul attribut est présenté par chaque membre de A .

P R E M I E R E   P A R T I E

21 Nous voudrions dire quelque chose de plus précis et de plus efficace sur la grandeur que le premier énoncé cité, la grandeur peut augmenter ou diminuer. Grandeur, certes évoque l'adjectif quantitatif ; "il faudrait donc sans doute distinguer le domaine du qualitatif et celui du quantitatif. Se contentera-t-on d'une évidence ? Qu'on parle grec, latin ou français (ποιον/ποσον , quale/quantum , de quelle nature/combien ou de quel degré) , on peut dire qu'il y a là une catégorie de l'entendement", au sens d'Aristote, ou de Kant. Mais n'existe-t-il pas une retraduction simple de cette "catégorie" dans le langage des ensembles ?

Le domaine du qualitatif est celui des ensembles, dont la structure ne comporte qu'une relation d'équivalence, soit $\mathcal{R}$; soit A un tel ensemble. A l'aide de A et de $\mathcal{R}$, on construit un ensemble de classes, dit ensemble-quotient $A/\mathcal{R}$, dit aussi <u>partition</u> ; les classes sont disjointes et non vides. La seule chose qu'on sait dire sur toute paire $\{a,b\}$ de membres de A, c'est soit "a,b sont dans la même classe" soit "a,b, ne sont pas dans la même classe". Au sujet du langage du § précédent 13, à chaque classe correspond un attribut, et se <u>donner la partition équivaut à donner la propriété pour A</u>.

22 Soient deux symbolismes pour les classes de l'ensemble A, classes déterminées par R . Soit α une classe de A, u, v deux symboles de α, et x,y,... des membres de A ; on se donne deux fonctions f() , g() représentant la répartition des x,y,... en classes :

$f(x) = f(y)$ veut dire x,y sont dans la même classe ; $g(x) = g(y)$ de même. Notre idée directrice est de considérer l'ensemble des fonctions ϕ qui définissent chacune un changement de symbolisme

$$u = f(x) \qquad v = g(x) \qquad v = \phi(u) = \phi(f(x))$$

La condition nécessaire et suffisante <u>pour que des interlocuteurs se</u>

comprennent toujours est que $[f(x) = f(y)] \Leftrightarrow [g(x) = g(y)]$, à savoir que chaque fonction ϕ soit une bijection.

Les propriétés, au sujet desquelles il n'existe qu'une relation d'équivalence, correspondent à ce que nous avons appelé le domaine du qualitatif ; elles seront appelées propriétés qualitatives. Les changements de symbolisme possibles sont donnés par des bijections.

23 Pour simplifier, on va supposer que tous les symboles u,v.. de toutes les classes α sont des nombres (des réels, ou des rationnels). Alors les bijections vont former un ensemble pour chaque propriété. Et cet ensemble est un groupe, ou du moins engendre un groupe Φ_a . Madame Ehrenfest faisait remarquer autrefois que les changements d'unités, pour les grandeurs, forment un groupe : c'est évidemment vrai déjà pour les changements de symbolisme des propriétés qualitatives.

31 Quel type de structure plus riche rencontre-t-on pour un ensemble A d'objets ? C'est d'abord semble-t-il, le cas où il existe une relation de préordre total entre les membres de A, le préordre étant relation réflexive, transitive, mais sans l'antisymétrie. De ce préordre il résulte un ordre total entre les classes. Il est alors intuitivement commode de choisir un symbolisme tel qu'il exprime cet ordre, et il sera naturel de se restreindre aux changements de symbolisme tels que cet ordre soit conservé dans les autres symbolismes : ainsi les fonctions ϕ seront monotones ; on les prendra en général croissantes. Et, puisqu'on a d'abord posé que ces fonctions seront biunivoques, on se limitera aux fonctions ϕ strictement croissantes. Nous avons un nouveau groupe Φ_b (de fonction ϕ), inclus dans Φ_a .

32 Pour fixer le vocabulaire, nous appellerons, avec G. Birkhoff, ces propriétés des propriétés ordonnées (ordered) ; et on peut appeler les symbolismes correspondants des graduations.

33 Un des exemples les plus connus de propriété ordonnée est la dureté des minéraux ; la relation d'ordre est : une pierre peut en rayer une autre (Il y a bien ordre au sens large, car une pierre aigüe peut rayer une pierre plate du même matériau).

Un autre exemple l'état de la mer, qu'on dit belle, peu agitée, forte, grosse.

Un autre, la force du vent, quand on ne prend pas d'anémomètre, mais qu'on voit les feuilles immobiles, les feuilles seules en mouvement, ou les petites branches, ou les branches moyennes en mouvement ; on dit force du vent 1, 2, 3, avec des numéros ; mais la différence entre deux numéros n'a pas un sens précis ; c'est comme une différence de rang dans un concours ; on ne peut dire si l'écart entre deux concurrents successifs est égal à (-ou plus grand que-) tel autre écart ; on ne peut comparer l'écart entre 1 et 2 et l'écart entre 2 et 3.

34 Reprenons l'exemple de la température annoncé plus haut. On sait lire si deux températures sont égales ou non ; l'égalité correspond au fait particulier que aucun des deux corps ne reçoit de chaleur de l'autre, et au fait général que si un corps ne cède pas de chaleur à un autre et n'en reçoit pas "cette relation entre deux corps est une relation d'équivalence" : ce dernier résultat est appelé parfois le principe zéro de la thermique : il est en effet fondamental à l'égard de l'introduction de cette grandeur nouvelle, la température ; mais, à ce moment là, la température n'est encore qu'une propriété qualitative !

35 Alors apparaît un autre fait ; on observe un phénomène ayant un sens, "tel corps reçoit de la chaleur, ou bien en cède ; de là une relation de préordre total entre les corps, "tel corps est plus chaud ou aussi chaud que tel autre". La température est une propriété ordonnée.

41 Ensuite on va faire une convention, base de la construction des thermomètres de Celsius, ou de Fahrenheit : on convient de poser que deux accroissements de température égaux correspondent à des dilatations apparentes égales du mercure dans le verre. On peut ajouter qu'on a choisi cette convention parce que l'expérience montre qu'à des accroissements égaux de volume apparent du mercure correspondent aussi à peu près des dilatations égales de la plupart des liquides et solides, et des augmentations égales de pression à volume constant des gaz, et des chaleurs reçues égales. Ainsi avec une telle graduation, beaucoup de phénomènes auront des expressions relativement simples.

42 Comme aux § 22 et 31, délimitons l'ensemble des changements de symbolisme possibles. La convention ci-dessus peut s'exprimer ainsi : Si deux couples de températures (t_1, t_2) , (t_2, t_3) correspondent à des accroissements égaux de volume apparent du mercure, soit Δv , on posera que si le symbole de la première température est tel nombre arbitraire t_1 , le symbole de la 2e température sera $t_1 + a\Delta v$, celui de la 3e température $t_1 + 2a\Delta v$, (avec a une constante arbitraire), et ainsi de suite. On aura ainsi construit de proche en proche une graduation de température ; les fonctions de changement de symbolisme sont déterminées par les deux constantes arbitraires t_1 et a . L'ensemble de ces fonctions est le groupe des fonctions affines strictement croissantes $v = \phi(u) = k\,u + k'$ avec $k > 0$,

(k strictement positif, sinon ϕ ne serait pas bijective).

43 L'ensemble des fonctions de changement de symbolisme est un nouveau groupe Φ_c inclus dans le précédent Φ_b . Nous disons que ce groupe caractérise les propriétés affines, et nous proposons d'appeler grandeurs les propriétés affines.

La convention du § 41 peut s'exprimer plus algébriquement de la manière suivante au sujet des changements de symbolisme : si un symbolisme fournit des symboles u_1, u_2 ... et un autre symbolisme des symboles v_1, v_2,..., si un symbolisme exprime deux accroissements égaux de volume du mercure par

$$u_2 - u_1 = u_4 - u_3 \tag{4a}$$

il sera naturel que tout autre symbolisme l'exprime aussi, et de la même façon, c'est-à-dire que (4a) ait pour conséquence $\phi(u_2) - \phi(u_1) = \phi(u_4) - \phi(u_3)$, à savoir

$$v_2 - v_1 = v_4 - v_3 \tag{4b}$$

Si un auditeur posait la question : "Pourquoi au lieu de (4a) n'écrivez-vous pas une égalité des sommes ?", nous répondrions : "Certes, formellement $u_2 + u_3 = u_1 + u_4$ équivaut à (4a) ; mais nous avons préféré écrire $(u_2 - u_1)$ parce que c'est un nombre indépendant du zéro de la graduation, à savoir le nombre $\Delta v.a$; par contre $u_2 + u_3$ représente le point homothétique (avec rapport 2 et centre le point zéro) du milieu du segment $[u_2, u_3]$".

44 On remarquera que le passage de la graduation de Celsius à la graduation de Fahrenheit se fait par une fonction ϕ affine. Ces deux graduations correspondent donc, dirons-nous, à une même température-propriété-affine.

45 Par contre il est permis d'envisager un autre phénomène que la dilatation d'un liquide pour servir de règle, pour dire si deux différences de température sont égales, par exemple une variation de résistance électrique, ou de force thermoélectrique. La fonction ϕ ne serait plus une fonction affine (ce serait même déjà le cas si l'on changeait de [illegible] thermométrique, s'[illegible] une haute précision). Alors, il s'agirait toujours certes d'une même notion, la température ; [illegible] nous sommes conduits à dire : c'est de la même température-propriété-ordonnée que nous parlons, mais d'une autre température-propriété-affine.

51 Dans le cas des propriétés affines, les changements de graduation permis sont déterminés par deux paramètres k, k' : on peut et changer de zéro, et multiplier tous les nombres représentant une variation de la propriété, par un même facteur. Soit maintenant le cas où le zéro est conservé.

$$\phi(o) = o \quad , \text{ à savoir } \; k' = o \qquad (5a) \quad ;$$

il revient au même de dire que

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\phi(u_2)}{\phi(u_1)} = \frac{ku_2}{ku_1} = \frac{u_2}{u_1} \qquad (5b) \quad ;$$

donc le quotient de deux nombres u_2, u_1 symboles de deux attributs, est conféré quand on change de symbolisme. Nous dirons alors que la grandeur-partition considérée est une grandeur linéaire.

52 On peut donner une définition simple du rapport de deux attributs, membres du but d'une même grandeur linéaire : c'est la valeur commune à tous les quotients $\frac{u_2}{u_1}$, $\frac{v_2}{v_1}$,... correspondant aux différents symbolismes.

A vrai dire, tout cela n'est qu'un autre langage pour exprimer ce théorème d'Euclide, "le rapport de deux grandeurs est égal au quotient de leurs mesures obtenues à l'aide d'un même étalon" et pour le démontrer (ce qui n'est pas immédiat pour les nombres réels) ; mais il nous semble qu'ainsi nous avons amélioré une charnière importante entre mathématique et physique.

53 Dans le cas de la conservation du zéro, l'ensemble des fonctions de changement de symbolisme est le groupe Φ_d des <u>fonctions linéaires strictement croissantes</u>.

$$\phi(u) = ku \qquad k > o \qquad (5c) \;;$$

le groupe est inclus dans les précédents ; (5c) est la justification de ce fait que nous appelons les propriétés considérées "propriétés linéaires" (ou grandeurs linéaires).

Sont grandeurs linéaires la distance, l'aire, la durée (au sens de "mesure d'un intervalle de temps", et non au sens de Bergson)... la température absolue,.. et aussi une <u>différence</u> d'abscisses, une différence de dates, une différence de températures empiriques,...

54 Quant aux grandeurs sans dimension, puisque chacune est conservée dans tout changement d'étalon, (chacune a un seul symbole), on pourrait dire qu'elles ont aussi un groupe de changements de symbolisme, mais ce groupe est réduit... à contenir un seul membre, son membre neutre, la fonction identique.

55 Si maintenant quelqu'un nous demandait de nous résumer, de dire "ce que nous appelons une grandeur" nous dirions...qu'il n'y a pas de réponse. Notre point de départ a été la propriété, une notion primitive dont le cadre mathématique est la partition ; donc pas de définition dans ce départ. Dans la collection des propriétés nous avons délimité une sous-collection par des axiomes relatifs aux changements possibles de symbolisme. Ces axiomes forment seulement un "cadre" (au sens des mots "lois-cadres" en droit constitutionnel) : les mêmes axiomes pourraient délimiter sans doute, sans contradiction, des sous-collections dans d'autres collections.

Avant d'aborder notre deuxième partie (sur l'homogénéité des fonctions ou des équations), deux remarques.

61 Au sujet des fonctions ϕ de changement de symbolisme pour

une grandeur linéaire, à savoir les fonctions linéaires $\phi(u) = ku$, il vient les deux propriétés caractéristiques :

$$\phi(au) = a\phi(u) \quad (6a) \quad ; \quad \phi(u_1+u_2) = \phi(u_1) + \phi(u_2) \quad (6b) \; ;$$

la première a toujours un sens en physique : si on écrit le produit du nombre u par un réel, on peut toujours imaginer qu'on réalise un objet présentant la grandeur-attribut de symbole $a\,u$. Par contre l'équation (6b) peut n'avoir aucun sens en physique, du fait que la somme $u_1 + u_2$ n'a pas d'interprétation expérimentale simple [tandis que $\frac{u_1 + u_2}{2}$ en a une, c'est la valeur moyenne, la somme d'une valeur u_1 et d'une différence $\frac{u_2 - u_1}{2}$] (voir 98 et 43) .

62 Il ne faut pas confondre (6b), qui exprime l'additivité de la fonction ϕ , fonction de changement de symbolisme, avec l'additivité d'une grandeur telle que la surface, ni avec la σ - additivité de la "mesure" au sens du calcul intégral : nous y reviendrons en annexe. (voir § 92 et 93).

63 Soulignons enfin que, selon les conventions faites, une même propriété peut être classée de façons différentes : nous venons de voir (cf. § 45) la Température regardée soit comme une propriété affine, soit comme une propriété ordonnée. Nous avons rangé la distance, (ou la longueur) parmi les propriétés linéaires ; cependant tel artisan menuisier pourra laisser de côté son mètre gradué en mm ; il aura tracé seulement quelque traits... a, b, c... sur une latte de bois, un pour chaque côté d'une pièce du meuble à construire. Il aura alors regardé la longueur, non comme une grandeur linéaire, mais comme une propriété ordonnée, ou même comme une propriété qualitative, avec les deux seules notions, identique/différent.

S E C O N D E   P A R T I E

Dans cette seconde partie, nous désirons envisager trois utilisations de ce qui précède, trois "développements", dirait-on en décalquant l'anglais : les formules de changement d'étalon pour les grandeurs linéaires, les conditions à remplir pour qu'une fonction de grandeurs linéaires fournisse une grandeur linéaire, et pour qu'une égalité entre deux fonctions de grandeurs linéaires puisse représenter une loi expérimentale.

La formule pour les changements d'étalon des grandeurs linéaires est classiquement fournie par un théorème d'Euclide, celui cité plus haut : "le rapport de deux grandeurs est égal au quotient de leurs mesures avec un même étalon", ou du moins par un de ses corollaires. Dans le langage que nous proposons, il vient ceci. Soient trois grandeurs-classes (donc des attributs) membres du but d'une même grandeur-partition (donc une propriété) [autrement dit trois grandeurs de la même nature], α, β, γ et deux symbolismes : dans l'un, l'étalon sera la grandeur β, et l'image de la grandeur α sera notée

$$u = F(\alpha,\beta) \quad ;$$

dans l'autre l'étalon sera la garndeur γ et l'image de α s'écrira

$$v = F(\alpha,\gamma)$$

On aura ainsi $F(\beta,\beta) = 1$ et $F(\gamma,\gamma) = 1$.

Ecrivons alors, selon l'axiome du § 53, que le quotient des images données de la même grandeur-classe par deux symbolismes donnés est le même pour toute grandeur-classe :

$$\frac{v}{u} = \frac{F(\alpha,\gamma)}{F(\alpha,\beta)} = \frac{F(\beta,\gamma)}{F(\beta\ \beta)} = \frac{F(\gamma\ \gamma)}{F(\gamma,\beta)} = k \ = \text{fonction de } (\gamma,\beta).$$

On en déduit en particulier $F(\beta,\gamma) = \dfrac{1}{F(\gamma,\beta)}$, puis $F(\alpha,\beta) = \dfrac{F(\alpha,\gamma)}{F(\beta,\gamma)}$, qui est une traduction du théorème d'Euclide cité plus haut ; et si l'on récrit cette dernière après une multiplication, $F(\alpha,\gamma) = F(\alpha,\beta) \ . \ F(\beta,\gamma)$, on a la forme matériellement la plus commode pour effectuer un changement d'unités (voir § 98).

72 Au sujet des fonctions fournissant la représentation d'une grandeur, soient des grandeurs linéaires ; soient trois grandeurs-classes (prises ou non dans la même grandeur-partition) et ayant pour symboles numériques x, y, z ; soit une fonction $\psi(x,y,z)$; quelle est la condition pour que $\psi(x,y,z)$ soit le symbole d'une grandeur linéaire ? Soient k_1, k_2, k_3 les facteurs par lesquels sont multipliés respectivement x, y, z quand on change de symboles. Selon l'axiome de la

grandeur linéaire, il faut et suffit qu'on passe du nombre $\psi(x,y,z)$ au nombre $\psi(k_1x, k_2y, k_3z)$ par multiplication par un facteur k indépendant de x, y, z ; puisque dans cette expression $\psi(k_1x,\ldots)$ il y a de plus les variables k_1, k_2, k_3 donc k est déterminé par k_1, k_2, k_3 :

$$\psi(k_1x,k_2y,k_3z) = k\,\psi(x,y,z) \quad \text{avec} \quad k = \chi(k_1,k_2,k_3) \qquad (7a)\ ;$$

c'est la formule que pose Federmann pour la définition de l'homogénéité d'une fonction ψ .

73 On voit que c'est une extension de la notion usuelle d'homogénéité des cours de propédeutique : celle-ci est le cas particulier (à multiplicateur unique) :

$$k_1 = k_2 = k_3 \qquad k = k_1^m \qquad (7b)\ .$$

74 San Juan Llosa appelle la notion de Federmann, où (7a) est une identité en k_1, k_2, k_3, "homogénéité sans condition" et fait remarquer que dans la pratique des sciences expérimentales, disons dans les essais sur maquette (ou encore disons dans la recherche des "similitudes" en physique, en biologie,) un cas beaucoup plus fréquent est celui où (7a) n'est pas une identité, mais est vérifiée <u>à condition que</u>... ; la condition est que soient satisfaites telles relations entre les facteurs k_j ,

$$\chi_i(k_1\ ,\ k_2\ ,\ k_3) = 1 \qquad (7c)\ .$$

Ainsi on a dans ce cas la relation de conséquence (7c)$\Rightarrow$(7a), et l'homogénéité peut être dite "homogénéité avec condition".

Une locution commode pour exprimer (7a) est de dire que la fonction ψ "a un multiplicateur" (sous-entendu déterminé par les multiplicateurs k_j).

75 Nous voudrions intercaler ici deux remarques ; la première est expérimentale. Nous soulignons (précaution parfois omise) que, dans la pratique des essais sur maquette, on doit essentiellement distinguer les équations (7c) et les équations (7a)

$$\chi_i(k_1, k_2, k_3) = 1 \quad (7c) \qquad k = \chi(k_1, k_2, k_3) \qquad (7a)$$

Du fait que (7c) $\Rightarrow$(7a), les équations (7c) sont des conditions de similitude, les conditions qu'on remplit en <u>préparant</u> un essai sur maquette ; les équations (7a) sont des résultats de similitude, elles fournissent les règles à suivre pour exploiter l'essai , à savoir pour tirer des observations faites sur la maquette, les valeurs des inconnues d'un appareil en projet.

76 La remarque mathématique consiste à citer le théorème de Federmann : "Les fonctions χ et χ_i des § 72 et 74 ne peuvent être que des produits de puissances des multiplicateurs k_j". -Dans les fonctions χ , on aura reconnu les formules de dimension* des grandeurs ψ . L'énoncé ci-dessus avait été admis (comme un axiome), par Aimé Vaschy (1890) pour obtenir son théorème sur la conduite des essais sur maquette. Puis il fut démontré par Federmann (1911), mais avec cette hypothèse relativement étroite que les fonctions χ soient différentiables en tout point ; on peut montrer qu'il est valable dès que les fonctions χ sont continues, ou monotones, (et même quand elles le sont au voisinage d'un seul point), en s'appuyant sur les résultats obtenus par Darboux, Hamel, Aczel, sur les fonctions satisfaisant à l'équation de Cauchy :

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \qquad (7d) ,$$

cela du fait que cette équation s'introduit dès qu'on réfléchit sur l'équation (7a).

77 Notre troisième point sur l'utilisation des axiomes de la grandeur linéaire est la question : quand peut-on dire que telle égalité,

$$\psi_1(x,y,z) = \psi_2(x,y,z) \qquad (7e) ,$$

peut représenter une loi expérimentale ? (Les x, y, z, comme au § 72). Un axiome non encore explicité est qu'on désire que l'équation (7e) soit invariante à l'égard des changements de grandeurs-étalons** . De notre axiome § 71 on tire une condition, suffisante : c'est que les expressions ψ_1 et ψ_2 aient l'une et l'autre un multiplicateur, et que ce soit le même : quand on aura changé de symbolisme, les deux membres de (7e) seront encore égaux.

* les χ_i sont aussi à classer parmi les formules de dimension.

** Cela correspond, dit G. Bruhat, à ceci : on désire décrire un phénomène en éliminant autant que possible des équations les grandeurs étrangères au phénomène que sont les grandeurs-étalons.

78 Mais la condition n'est pas nécessaire ; comme contre-exemple on peut citer une loi de variation de pression p de saturation de vapeur (Dupré) quand varie la température absolue T :

$$\log p = a - \frac{b}{T} - c \log T \qquad (7f) ;$$

ni le premier ni le second membre n'ont de multiplicateur (au sens du § 74). Mais (7f) peut s'écrire :

$$\log \left(\frac{pT^c}{\delta}\right) = - \frac{b}{T}$$

avec b ayant la formule de dimension de T et δ de pT^c .

Plus généralement, soit F( ) une bijection assujettie seulement à

$$F(o) = 1 ,$$

par exemple $F(y) = 1 + \mathrm{Sh}\, y$; on voit que l'équation

$$F(\psi_1(x,y,z) - \psi_2(x,y,z)) = 1$$

équivaut à (7e) : le 2e membre a un multiplicateur, à savoir 1 ; mais le 1er membre en général, n'a pas de multiplicateur.

C O N C L U C I O N

Lord Kelvin écrivait en substance : "On ne peut dire qu'on connaît un phénomène que lorsqu'on a réussi à le représenter à l'aide de grandeurs mesurables". Nous avons rappelé la progression de la connaissance, de la propriété qualitative à la grandeur, en particulier à la grandeur linéaire. A chaque stade nous avons considéré la multiplicité des changements permis de symbolisme et montré que les axiomes proposés s'adaptent aux règles des changements d'unités et a l'étude de l'homogénéité des fonctions utilisées pour représenter l'expérience. Mais un auditeur a dit avec humour : "L'auteur de cet exposé a oublié qu'il était physicien!". Nous reconnaissons une lacune pédagogiquement grave : en effet, sauf au § 71, nous avons raisonné comme si dans tout problème expérimental, on pouvait déclarer choisir une fois pour toutes les unités de sorte que le symbole de chaque attribut (-de chaque grandeur-classe) soit formé par un nombre à lui tout seul.

Pour tout expérimentateur, chercheur ou étudiant, il est certain que pour toute grandeur linéaire le symbole complet d'une grandeur-classe est le couple formé par un nombre et une grandeur-classe de même espèce, dite grandeur-classe-unité ; et l'expérimentateur raisonne sur ce couple comme sur <u>le produit</u> de la <u>grandeur-unité</u> par le <u>nombre réel</u> (qui servait plus haut de symbole à lui seul) (voir 98) .

A N N E X E S

Dans ces annexes nous voudrions d'abord souligner deux distinctions, même si elles sont bien connues.

91 La première consiste à mettre à part les fonctions ψ ψ_1 ψ_2.. qui servent à exprimer les définitions ou les lois expérimentales, -et les fonctions ϕ qui ont pour source et pour but des ensembles de symboles. En particulier les fonctions ψ que donne l'expérience peuvent être discontinues, avoir plusieurs "déterminations". Les fonctions ϕ de changement de symbolisme sont univoques et continues ; et elles sont additives dans le cas des grandeurs linéaires.

92 Une autre distinction est à faire entre la mesure dans son sens usuel en recherche expérimentale - (c'est un nombre attaché à tel objet matériel et à telle grandeur considérée sur cet objet) - et la mesure, au sens du calcul intégral, introduite en particulier par H. Lebesgue - (et c'est une <u>fonction</u> dont le but est R_+ et dont la source est une <u>tribu</u>).

Une tribu est un ensemble B de parties d'un ensemble-de-base, E, donné ; B contient comme membre l'ensemble vide $\emptyset$, est stable à l'égard de toute prise d'un complément, stable à l'égard de toute réunion finie ou dénombrable ; toute fonction-mesure m( ) a pour but R_+ et est σ-additive, à savoir que

$$X,Y \in B \quad \text{et} \quad X \cap Y = \emptyset \qquad . \; m(X \;\; Y) = m(X) + m(Y) \ ,$$

et que cette additivité s'étend à toute réunion dénombrable.

Un contre-exemple a été donné par un auditeur : en général la chaleur reçue en tout par tel corps durant tel intervalle de temps n'est pas une mesure mathématique, elle n'est pas une fonction additive d'ensemble dans la matière .

En effet soit un corps global (a + b) formé de deux parties disjointes (a) (b) ; soit e leur extérieur ; mettons un indice en haut pour la partie d'où vient la chaleur (algébrique) un indice en bas pour ce qui la reçoit. La chaleur reçue par (a) est $Q_a^e + Q_a^b$.., et ainsi de suite. La chaleur reçue en tout par (a + b) diffère de la somme (chaleur reçue en tout par (a) + chaleur reçue en tout par (b)) de

$$-(Q_b^a + Q_a^b) \quad ,$$

et cette quantité (voir Emile Jouguet étudiant le premier principe de la thermique) est égale au travail mutuel des forces de contact entre (a) et (b). Ainsi la chaleur reçue n'est une mesure mathématique que s'il n'y a aucun travail mutuel des forces de frottement entre (a) et (b). Par contre l'entropie d'un corps est toujours une mesure mathématique, à condition qu'on ait fixé une fois pour toute le zéro de l'entropie.

93 La σ-additivité fait intervenir un ensemble dénombrable infini d'opérations, ce qui n'est pas réalisable par l'expérimentateur. Mais H. Lebesgue, dans sa "Mesure des grandeurs", avait proposé la définition d'une continuité qui convienne directement aux expérimentateurs. Soit une fonction f de source une tribu B et le but R_+ ; soit X un membre de B , soit $f(X) = a > 0$; on pense qu'il existe pour tout nombre a' inférieur à a , $0 \leq a' \leq a$, du moins un membre X de B , membre inclus dans X et tel que

$$f(X') = a' \quad ;$$

on pose de plus que $\underline{f}$ est additive ,

$$X_1 \cap X_2 = \emptyset \quad \text{entraine} \quad f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) + f(X_2) \quad ,$$

mais on ne suppose pas l'additivité réalisée pour les réunions dénombrables, infinies ; nous appellerons ici toute fonction de ce type une quantité. [Cette continuité convenant aux expérimentateurs, nous pourrions l'appeler continuité P (= en physique)]. A première vue, quantités et mesures mathématiques se ressemblent sans être identiques. A parler avec plus de précision, il n'est pas très difficile d'imaginer des contre-exemples, à savoir des quantités qui ne sont pas des mesures et des mesures qui ne sont pas des quantités : par exemple, si l'on parle de masses, la mesure permet de considérer des tribus contenant des membres ponctuels ayant une masse finie ; ce n'est pas possible dans le cas des quantités (voir [12c] p.103-107).

Puis H. Lebesgue a démontré le théorème suivant : Soit un nombre $v = g(X)$, image donnée d'un nombre $u = f(X)$, par une fonction ϕ (univoque), qui soit une quantité, et qui soit déterminée par cette seule variable u, les fonctions f( ) et g( ) ayant pour source la même fibre B , à savoir

$$v = g(X) = \phi(u) = \phi(f(X)) \quad ;$$

alors, les seules fonctions ϕ possibles sont les fonctions linéaires,

$$v = \phi(u) = ku \quad .$$

Ce théorème a deux types d'applications ; deux exemples du premier type : l'ensemble E est l'ensemble des points d'un rectangle ; B est l'ensemble des X rectangles et réunions finies de rectangles, de même largeur que E , f(X) et g(X) sont la longueur et l'aire de X. Ou bien E est un solide homogène ; f(X) et g(X) sont le volume et la masse d'une partie X de E . -Un exemple du deuxième type f(X) et g(X) sont deux nombres-symboles pour une même grandeur-classe observée sur un même membre X de B , longueur, ou aire, ou volume, ou masse,... on retrouve par ce théorème de Lebesgue, le caractère des grandeurs linéaires ; mais il faut bien remarquer qu'en raisonnant sur les grandeurs linéaires [§71], nous n'avons pas supposé qu'elles soient additives.

94 Au sujet des fonctions ϕ de changement de symbolisme, on peut parler des catégories (non au sens d'Aristote, mais au sens de la théorie des ensembles) : on sait qu'on appelle catégorie un triplet $(\mathcal{E}_1, \mathcal{M}, \mathcal{E}_2)$ où $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ sont des ensembles d'ensembles et $\mathcal{M}$ un ensemble de fonctions ; chaque membre de $\mathcal{M}$ a pour source un membre de $\mathcal{E}_1$, pour but un membre de $\mathcal{E}_2$; $\mathcal{M}$ est assujetti à contenir la transformation identique, à être stable à l'égard de la composition des fonctions. Ici $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$ et les membres de $\mathcal{E}$ sont les symbolismes

f( ) , g( ) ... ; les membres de   sont les fonctions ϕ. (Dans le cas présent $\mathcal{M}$ contient de plus la fonction réciproque de chacun de ses membres, et la composition des fonctions ϕ est commutative dans le cas des grandeurs linéaires).

95 Au sujet des fonctions satisfaisant à l'équation de Cauchy

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

lorsque la source et le but de la fonction sont l'un et l'autre l'ensemble des rationnels, la démonstration que les seules solutions sont les fonctions linéaires (voir [4], [13a]) est aisée. Par contre, s'il s'agit de l'ensemble des nombres réels, G. Hamel , puis J. Aczel, ont montré la possibilité d'autres solutions. Mais ces solutions sont du type des fonctions de Peano, elles ne sont bornées dans aucun intervalle de la variable x ; et leur graphe a au moins un point dans tout rectangle du plan $\{.., (x, f(x)) ,...\}$. (L'artifice essentiel de leurs raisonnements est d'étudier la fonction $\overline{f}(x) = f(x) - xf(1)$).

Ainsi ces autres solutions ne sont utilisables, pour construire ni les fonctions ϕ de changement de symbolisme, ni les fonctions χ exprimant les formules de dimension.

Ces mêmes résultats, de G. Hamel ou J. Aczel, permettent de démontrer, assez facilement, le théorème réciproque des remarques évidentes du § 42, théorème disant que les seules fonctions de changement de symbole, satisfaisantes pour les grandeurs que nous avons appelées affines, sont les fonctions affines (voir [13c] p.99).

96 Au sujet des grandeurs affines que sont les coordonnées, on peut citer la notation de Grassmann en géométrie, quand il écrit (voir Marco Longo et Burali Forti, Calcul vectoriel) des relations du type

(9a) $\Sigma\ \lambda_i P_i = o$ avec $\lambda_i \in R$, P_i un point de coordonnées x_i , y_i, z_i , et avec la condition

(9b) $\Sigma\ \lambda_i = 0$.

En effet (9b) suffit pour que les relations (9a) à savoir $\Sigma\lambda_i x_i = o$, $\Sigma\lambda_i y_i = o$,... soient invariantes à l'égard de tout changement d'origine d'unité de longueur, (ou même de base) : on écrit ainsi aisément qu'un point est le milieu d'un segment $M = \frac{1}{2}(A + B)$, ou que deux bipoints ont le même vecteur, $B - A = D - C$,...

97 Nous avons seulement évoqué l'existence des grandeurs intensives ou extensives. Il nous semble que, pour être précis, il faut se limiter, pour ce classement, aux couples de grandeurs dont le produit forme chaque terme dans une équation de l'énergie. Chaque terme est le produit d'une grandeur non additive par la différentielle dans le temps d'une grandeur additive dans la matière, par exemple $p\, dV$, $T\, dS$ ...). La grandeur non-additive est dite intensive et la grandeur additive est dite extensive.

98 Dans notre conclusion nous avons rappelé ce truisme que, pour désigner une grandeur-classe, il ne suffit pas d'écrire un nombre, mais un nombre et le nom d'une "unité" : autrement dit on doit désigner une autre grandeur-classe, dite étalon ; et on raisonne sur la locution globale comme sur le résultat d'une multiplication. D'où des égalités telles que 1 m = 100 cm ; 20 noeud = 20 $\frac{\text{minute de latitude}}{\text{heure}}$ $= 37{,}04 \frac{2\text{m}}{\text{heure}} = 10{,}29 \frac{\text{m}}{\text{seconde}}$. Il est des mathématiciens pour protester contre une écriture qui comprend 1 = 100 ... Une réponse sur la forme se trouve dans J.B. Rosser : Axiome "[a=b et R(a)] R(b) , mais à condition que R(a) soit un énoncé exprimant un attribut de l'objet de symbole a ; ce peut être faux si R(a) exprime un attribut du symbole a ". 1, et 100 sont des attributs d'un symbole !

Mais on peut répondre sur le fond ceci, en suivant Bruhat (voir § 11), qui fait l'économie d'un système d'axiomes à part pour les opérations sur les grandeurs. Prenons les notations du § 71. Le nombre a, symbole d'une grandeur-classe α quand la grandeur-classe β est étalon, s'écrit $u = F(\alpha,\beta)$; de l'axiome des grandeurs linéaires il résulte (§ 71)

$$F(\alpha,\gamma) = F(\alpha,\beta) \,.\, F(\beta,\gamma).$$

Il est permis de considérer que le symbolisme avec la grandeur γ comme étalon est privilégié, disons un symbolisme canonique. Il y a bijection entre les grandeurs courantes α et leurs symboles $F(\alpha,\gamma)$ avec γ fixé ; alors il n'y a pas d'ambigüité, il n'ya pas d'aspect métaphysique, ni d'aspect purement pragmatique, dans la traduction suivante de l'équation ci-dessus :

"la grandeur α est le résultat de la multiplication, par le nombre $F(\alpha,\beta)$, de la grandeur β ".

D'une manière analogue, pour une grandeur affine, par exemple <u>une date</u>, les mathématiciens ne seront pas scandalisés, pensons-nous, qu'on écrive avec des additions : t heure (en temps universel) = (t + 1) heure (à Paris en décembre) = (t - 5) heure (au fuseau de New-York).

99 Une question importante a été posée par un auditeur : "Quatre types de changements de symbolisme ont été présentés ; n'y aurait-il pas un autre type au moins, utile à considérer, par exemple un type intermédiaire entre les fonctions strictement croissantes et les fonctions affines et strictement croissantes ?". Notre collègue mathématicien Pierre Casal (Marseille) avait posé la question... ; je n'avais pas et je n'ai pas de réponse.

Mais je répondrais volontiers à une question voisine : justifier à nouveau, dans un langage un peu différent, les grandeurs affines ; dire quelques mots, non d'un type intermédiaire, mais d'un type extrême de propriétés, les propriétés additives, à peu près les seules étudiées par les Anciens et par H. Lebesgue.

Au sujet des propriétés affines, faisons appel au comportement des esprits humains, et au fait, souligné par G. Bouligand, que les esprits humains sont souvent en désaccord quand il s'agit de juger que telle notion ou telle démonstration est <u>plus simple</u> que telle autre.

Les théoriciens estiment qu'il est plus simple de définir l'addition avant la soustraction ; les comptables sont d'accord ; leur règle est de ne faire que les additions, d'obtenir une première somme, puis une deuxième qui lui soit égale. -Les expérimentateurs se posent d'abord la même question que les théoriciens : "identiques ou différents ?". Puis ils dépassent tels primitifs, qui ont un mot pour "aujourd'hui", mais un mot unique pour "demain" ou pour "hier". Les expérimentateurs donnent soit le sens plus, soit le sens moins, à chaque non-égalité, qui devient ainsi une inégalité. Puis ils essayent de comparer les différences, jusqu'ici seulement qualitatives ; ils vont se servir de la différence.... cette fois avec le sens de l'arithmétique..., ils utilisent la soustraction avant l'addition; nous voici arrivés aux propriétés affines. -La soustraction a un sens expérimental pour un ensemble plus étendu d'êtres que l'addition.

Mais après avoir considéré quatre types de propriétés (et quatre groupes de changements de symbolisme) dans le corps de cet exposé, nous avons parlé dans l'annexe d'autres types de fonctions, les [illegible] et les mesures mathématiques, à savoir des [illegible]ditives. En physique on rencontre des fonctions additives dans le temps, additives dans l'espace, ou additives dans la matière.

Par exemple toute variation d'énergie interne dans un corps donné est additive dans le temps ; la chaleur reçue et le travail sont aussi additifs dans le temps ; par contre la chaleur reçue et le travail reçu ne sont pas en général additifs dans la matière (voir § 92) ; l'énergie interne est additive dans la matière seulement à la condition que, pour les forces à distance entre les portions du corps, le travail mutuel, entre ces portions, soit nul.

Nous sommes passés, d'une collection de propriétés à une autre, par trois inclusions successives ; nous passons encore par une inclusion, de la collection des propriétés linéaires à la collection des fonctions qui sont en même temps des quantités, à savoir qui sont additives dans une tribu .

Mais nous nous arrêterons là, sans parler plus des mesures au sens mathématique : celles-ci n'intéressent en effet la physique que lorsque celle-ci veut utiliser l'intégrale de Lebesgue. Pour le calcul de cette intégrale on a besoin que soit réalisée, pour une suite monotone, de terme X_n la condition de continuité

$$\lim f(X_n) = f(\text{limite } X_n) \qquad (9c) ,$$

et -théorème- la σ-additivité (voir § 92) est une condition nécessaire et suffisante pour que (9c) soit satisfaite. -Nous laisserons aussi de côté cette difficulté ci : quantités et mesures mathématiques sont, selon les définitions rappelées ci-dessus, des fonctions positives, tandis que les grandeurs peuvent être négatives.

L'ordre que nous avons adopté pour nos paragraphes vient de cette idée : regarder comme "simple" de partir des ensembles ayant la structure la plus pauvre, (une relation d'équivalence) ; nous sommes allés, chaque fois en particularisant, des propriétés qualitatives aux propriétés linéaires (et de là aux propriétés additives). Mais les propriétés affines sont celles dont les différences sont des propriétés linéaires. Alors au lieu de l'ordre systématique ci-dessus nous aurions pu prendre un ordre plus voisin de l'ordre historique, commencer certes par les propriétés qualitatives, puis ordonnées, mais passer ensuite à l'autre extrême, aux propriétés additives, pour revenir aux propriétés linéaires, puis aux propriétés affines.

Nous venons de faire des comparaisons entre addition et soustraction. Nous en permettrez-vous encore une, il est vrai dans un autre domaine ? ; c'est une citation de notre collègue Robert Mazet : n'aime-t-il pas dire : "Enseigner d'abord aux enfants ... à donner, à se départir ... car c'est ainsi qu'ils vont ... GRANDIR ".

S O M M A I R E

0. Préambule : deux énoncés anciens sur les grandeurs.

1. Au lieu de construire une algèbre des grandeurs, nous ne parlerons que d'opérations sur les nombres leur servant de symboles - Symbolisme - Propriété et attribut.

2. A une propriété qualitative, il correspond une relation d'équivalence, donc une partition. Les changements de symbolisme pour une propriété qualitative se font par <u>bijections</u> ; si les symboles sont des nombres, la collection de ces fonctions est un ensemble et c'est un groupe.

3. Existence d'un préordre total dans l'ensemble considéré, d'un ordre dans la partition : la propriété ordonnée - La graduation - Le groupe des fonctions <u>strictement croissantes</u> - La température propriété-qualitative - La température propriété-ordonnée.

4. Une convention expérimentale pour l'égalité de deux différences - Le groupe des fonctions <u>affines</u> croissantes - Distinction entre deux graduations correspondant à la même température-propriété-affine et deux graduations correspondant à la même température-propriété-ordonnée - Vocabulaire : une propriété affine sera dite une grandeur.

5. Graduations avec conservation du zéro - Conservation de tout quotient - Définition d'un rapport - Les propriétés <u>linéaires</u> - Les Grecs n'appelaient grandeurs que les propriétés linéaires - Toute différence entre deux grandeurs est une grandeur linéaire - Les grandeurs sans dimension.

6. Ne pas confondre... - La même propriété, selon les conventions faites, peut apparaître comme une propriété de l'un des <u>quatre</u> types considérés.

7. La formule des changements d'étalon - L'homogénéité selon les définitions de Federmann, de San Juan Llosa (l'homogénéité avec condition) - Les formules de dimension ne peuvent être que des produits de puissances - Conditions pour qu'une expression permette de définir une grandeur linéaire, pour qu'une équation représente une loi expérimentale ou théorique.

8. Paragraphe final.

9. ANNEXES - Les fonctions continues ou non, univoques ou non - Al-

I N D E X

avec renvoi aux paragraphes

---

propriété = fonction :

$A \longrightarrow$ un ensemble d'attributs
ensemble

propriété = fonction :

$x \longmapsto$ un attribut α
membre
de A

symboles d'un attribut : $\alpha = (F(\alpha,\beta),\beta)$ ou tout couple de ce type $F(\alpha,\beta) \in R_+$

TABLEAU DE CORRESPONDANCE

la propriété est qualititative $\longmapsto$ les fonctions-de-changement-de-symbolisme sont bijectives.

la propriété ordonnée $\longmapsto$ les fonctions-de-changement-de-symbolisme sont strictement croissantes

la propriété affine (ou dite grandeur) $\longmapsto$ les fonctions-de-changement-de-symbolisme sont affines

la propriété linaire (ou dite grandeur linéaire) $\longmapsto$ les fonctions de-changement-de-symbolisme sont linéaires.

symbole = un signifiant,

symbolisme = un ensemble de couples (signifié, signifiant) = une fonction.

B I B L I O G R A P H I E

1. J. Aczel, Lectures on functional analysis, Ac. Press 1966
2. G. Birkhoff, Hudrodynamics, Princeton, 1960 Ch III IV p.97
3. G. Bruhat, Mécanique, Paris 1940, p. 249-261
4. G. Darboux a) Bull. des Sc.math 9, 1875 p. 281 - b) Math Ann. 1880
5. T. Afanassievna Ehrnefest a) Math. Ann. 77 1915 p.259 - b) Phil. Mag. 1926 p. 257-272
6. L. Federmann Bull. Inst. Polytechn. Petersburg 16, 1911, p. 124-131
7. G. Hamel, Math Ann 60, 1905, p. 459-462
8. E. Jouguet Revue de Mécanique 1906 p. 41-56 (et 1907)
9. M. Landolt, Grässe, Mapzahl und Einheit, Zür[illegible]
10. P. Langevin, Encyd.d.Sc. math, Paris 1912 IV 16, P. 1-60
11. H. Lebesgue a) Leçons sur l'intégration Paris 1904 - b) La mesure des grandeurs Lausanne 1935
12. B. Lefur, J. de Mécan. théor. et appl. 1, 1982, p. 59-71
13. A. Martinot-Lagarde a) C.R. Ac Sc. Paris 223, 1946, p. 136 b)Similitude physique (Mem. Sc. Phys.) Paris 1960 - c) Mem. et public. Soc. d. Sc. du Hainaut 85, 1974 p. 75-142 - d) Symmetry Colloquium Calgary 1974 p. 107-118
14. P. Provost & Cl. Jelensperger, Doss. pedag. R.T.V. scalaire Paris 1971-72
15. J.B. Rosser, Logic for Mathematiciens, New-York, 1953
16. R. Saint-Guilhem, a) C.R. Ac. Sc. Paris 248, 1959, p. 3124 - b) Memorial des Sc. Math., 1960.
17. San Juan Llosa, Teoria de la magnitudas fisicas, Madrid 1947.
18. A. Vaschy Theorie de l'électricité et du magnetisme Paris 1890 p.4-5
19. S. Zaremba, Mém. d. Sc. Math, Paris 1926.

Sur une algèbre des grandeurs : 9,12,17 sur le préordre 14,
Sur les grandeurs vectorielles 10,13c, sur l'équation de Cauchy 1,4,7,13a,16

sur la similitude en physique 2,3,6,12,13ab,16,17,18.

Résumé bibliographique

Il est proposé une modélisation mathématique des grandeurs dans les sciences expérimentales : l'auteur a considéré les groupes de fonctions représentant les changements de symbolisme possibles ; il est conduit à une comparaison, d'une part avec les propriétés en général, d'autre part avec les mesures au sens du calcul intégral.

19 décembre 1983
A. Martinot Lagarde