René Thom

Les réels et le calcul différentiel ou «la mathématique essentielle»

Séminaire de Philosophie et Mathématiques, 1982, fascicule 3
« Les réels et le calcul différentiel », , p. 1-20
<http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1982___3_A1_0>

LES REELS ET LE CALCUL DIFFERENTIEL
OU " LA MATHEMATIQUE ESSENTIELLE "

René THOM

1. Objet du cours.

L'objet de ce cours est de donner une vue synthétique de ce que pourraît être le noyau central des mathématiques. Précisons ici notre intention. On ne se préoccupera pas ici de problèmes de fondements, et on ne visera pas non plus à élaborer une nouvelle pédagogie des notions indispensables à l'acquisition du Calcul Différentiel ; on supposera en particulier ces notions connues pour l'essentiel par le lecteur, telles qu'il aura pu les apprendre dans tout bon manuel. Ce qu'on voudrait obtenir ici, c'est d'abord dissiper l'impression de bizarrerie, d'arbitraire qui frappent le débutant lorsqu'il se trouve confronté aux définitions premières de l'Analyse. Pourquoi considérer un objet aussi bizarre que limite, pour n tendant vers l'infini, de $(1+a/n)^n$? Je voudrais de plus défendre l'idée que les possibilités de l'outil mathématique pour la description du réel sont loin d'être toutes connues, ni même clairement aperçues par la plupart des scientifiques. Ceci est particulièrement vrai des disciplines "à théorisation molle" comme la Biologie ou les Sciences Humaines. Les Physiciens, eux, n'ignorent pas l'importance des Mathématiques, mais ont tendance à s'en faire une idée quelque peu étroite et rigide.

La plupart des spécialiste des disciplines "molles" ont vis-à-vis de la mathématique une attitude ambigüe. Beaucoup manifestent pour elle une révérence quasi-mystique, due avant tout à la réputation -hélas non usurpée - de difficulté dont jouit cette science. D'autres, au contraire, conscients du caractère variable, fluctuant, complexe de leur objet d'étude, déclarent "a priori" que les mathématiques, du fait de leur intrinsèque précision, n'ont rien à faire de sérieux dans leur discipline - et qu'en conséquence l'effort intellectuel requis pour les assimiler ne serait pas justifié par le bénéfice qu'ils pourraient éventuellement en tirer pour leur recherche. C'était là, par exemple, le point de vue d'Auguste Comte, lequel a insisté, dans son cours de Philosophie positive, sur le caractère spécifiquement non quantitatif de la Biologie, ce qui, selon lui, aurait pour effet d'y interdire à jamais l'emploi des Mathématiques.

S'il est vrai que les mathématiques sont difficiles, cette difficulté est moins due à leur contenu même - dont on s'efforcera ici de montrer l'implacable nécessité - qu'à la technologie de la preuve. La nécessité où se trouve le mathématicien de "démontrer" ses résultats - d'abord pour lui-même, ensuite pour les autres - demande l'emploi d'une rhétorique dont le caractère local et sociologiquement accidentel a été relevé par de nombreux spécialistes d'Histoire des Sciences. Cette rhétorique est pour beaucoup dans l'aura de redoutable abstraction qui s'est créée autour de notre discipline, et qui en interdit l'accès à beaucoup d'esprits par ailleurs fort doués.

2. <u>Le statut ontologique des mathématiques : thèse essentielle</u>.

Il est temps maintenant d'évoquer notre thèse essentielle, laquelle ne va pas sans contredire les points de vue les plus traditionnels dans la collectivité mathématique.

<u>Thèse</u>. Ce qui justifie le caractère "essentiel" d'une théorie mathématique, c'est son aptitude à nous fournir une représentation du réel. C'est dire que les diverses branches qui composent la mathématique ne sont pas toutes également essentielles. Par "réel" j'entends aussi bien la réalité du monde extérieur - que celle-ci nous soit donnée par la perception immédiate du mondequi nous entoure, ou par une construction médiate comme l'est la vision scientifique ; c'est dire que le "réel", sous sa forme la plus immédiate, est également appréhendé par introspection - comme une "donnée immédiate de la conscience" - .

Or, parmi les intuitions premières, il en est une essentielle : celle du <u>temps</u>. Et le temps, dans le flux de son écoulement, nous apparaît comme fondamentalement <u>continu</u> : entre deux instants a et b , on peut toujours imaginer un instant c intermédiaire. En conséquence, on sera amené à considérer comme "ontologiquement mieux fondée" une théorie comme le Calcul Différentiel, qui vise à la représentation d'êtres géométriques continus - comme les courbes et les surfaces - qu'une théorie purement discrète, comme la Logique ensembliste, par exemple. Cette antériorité du continu que nous postulons va à l'encontre de la démarche traditionnelle qui fait de la droite réelle un objet construit - par une procédure fort peu constructive, d'ailleurs - à partir des entiers, puis des rationnels (par les coupures de Dedekind, ou la complétion des suites de Cauchy). On s'efforcera de montrer ici qu'en un certain sens, la structure algébrique du corps des réels ne préexiste pas au Calcul Différentiel, mais est, au contraire, suggérée par ce dernier.

Bien entendu, il me faut ici préciser. Du continu à l'état pur, on ne peut rien dire ; c'est un objet aussi indicible que peut l'être la divinité pour un mystique. Pour faire du continu un objet de représentation, pour <u>pouvoir en dire quelque chose</u>, il faut nécessairement y faire des "marques", y tracer des "figures" qui vont s'opposer à un fond indifférencié. Toute représentation communicable comporte ainsi une figuration <u>discrète</u>. La tentation permanente est alors d'oublier le fond pour ne conserver que la figure : simplification abusive qui nous a été très fortement suggérée par le caractère <u>discret</u> de la combinatoire phonologique du langage humain, et dans laquelle les logiciens -, et à leur suite pas mal de mathématiciens formalistes - se sont allégrement rués.

Nous allons nous efforcer ici de construire la mathématique essentielle à la manière d'une cosmogonie. Au commencement était le temps.

3. <u>L'univers unidimensionnel : le temps</u>.

Imaginons un individu dont la vie consciente serait réduite à la seule sensibilité auditive, dépourvu de toute motricité - curarisé -. Pour lui, le monde extérieur se réduirait à un flux de sons qualitativement très divers. Mais le monde de notre individu sera déjà porteur d'une proto-géométrie (plus exactement, une protochronométrie). C'est-à-dire, notre sujet, s'il perçoit deux cellules sonores dont la seconde répète identiquement la première, apercevra cette égalité qui présente pour sa sensibilité un caractère "saillant". En Neurophysiologie, on a pu mettre en évidence des effets sur l'EEG causés par l'attente d'un rythme périodique - ou par sa disruption inattendue (effet dit P-300). Cette faculté d'appréhender les périodes les plus variées dans un rythme périodique pose un problème sérieux en Neurophysiologie. Car si l'on admet volontiers qu'un processus périodique puisse exciter par résonance un oscillateur de la dynamique neuronique, on comprendra plus difficilement comment peuvent coexister, dans cette dynamique, une infinité continue d'oscillateurs virtuels représentant toutes les périodes possibles. Il sera commode d'imaginer que notre sujet dispose d'un rythme préférentiel que nous appellerons son horloge interne, de période T_o ; et que la période de tout autre stimulus périodique se mesure par référence à cette période de référence T_o , par encadrement entre des harmoniques (de période T_o/k) et des sous-harmoniques (de période $T_o.k$). Supposons maintenant que nous ayons deux individus du même type, mais pourvus cette fois d'un dispositif émetteur de sons, capable d'émettre des signaux quasi-instantanés, et dont la propagation physique d'un sujet à l'autre n'altère pas la durée des intervalles qui les séparent. (Noter que cette hypothèse présuppose déjà une géométrie de l'espace ambiant). Soient T_o , T_1 les périodes des horloges internes de nos deux sujets. Supposons qu'à un instant donné les deux sujets émettent tous deux un Top qu'ils répètent ensuite selon la période de leur horloge propre. Peut-il arriver qu'ultérieurement nos deux sujets émettent simultanément un Top ? Si tel est le cas, on a évidemment une relation de la forme $q\ T_o = p\ T_1$, ou p et q sont des entiers naturels. On dira en ce cas que le rapport T_1/T_o des périodes internes à nos deux sujets est le nombre rationnel q/p . Si par la suite, nos deux individus n'émettent jamais des Top simultanément, ceci correspondrait à un rapport irrationnel des périodes T_1/T_o . Cette dernière hypothèse - bien qu'étant "mathématiquement" la plus générale - est évidemment parfaitement irréaliste. En effet, nos signaux ne sont jamais parfaitement ponctuels, instantanés, donc finissent toujours par empiéter l'un sur l'autre. On peut donc croire que sous l'effet du signal émis par l'autre chacun de nos sujets va modifier quelque peu sa période propre, de manière à réaliser un accrochage des périodes sur un rationnel q/p construit avec des nombres entiers q,p assez petits. Si notre univers comportait trois sujets de périodes internes T_o, T_1, T_2 alors, après accrochage commun, on aurait une relation de la forme

$$p.T_o = q.T_1 = r.T_2$$

ce qui montre que pour réaliser un "consensus" chronométrique dans notre société, on doit se servir de la relation

$$r/p = r/q \;.\; q/p$$

c'est-à-dire, en terminologie algébrique moderne, du groupe multiplicatif des rationnels positifs. C'est là, ontologiquement, l'exemple le plus simple d'un consensus réalisé via un groupe. Dans un univers de ce genre, nos sujets, s'ils pouvaient faire de la mathématique, ne construiraient que des nombres rationnels (positifs). On affirme, en Histoire des Sciences, que les Pythagoriciens croyaient que tout nombre est rationnel, croyance que leur aurait inspirée, dit-on, l'étude des accords musicaux. Le scandale des irrationnels n'est apparu que lorsque l'espace est venu jouer un rôle superposé à celui du temps ; l'irrationnalité de $\sqrt{2}$ est ainsi une conséquence du théorème de Pythagore, lequel exige la notion d'angle droit , donc un espace-temps bidimensionnel au moins.

4. <u>L'espace et le mouvement</u>.

On suppose que nos individus curarisés recouvrent leur motricité. Chaque individu est susceptible de prendre un nombre fini d'états cinématiques $w_1, w_2, \ldots, w_k$, qu'il peut réaliser pendant un certain laps de temps que nous supposerons, au début, égal à la période de l'horloge interne T . L'état cinématique w_i , réalise pendant une période T , définit un "mouvementé, noté W_i. On notera X l'ensemble des positions w de l'individu. Si le mouvement W_i peut être effectué à partir de la position x , on notera $W_i(x)$ la position du sujet à la fin du mouvement W_i . Outre les états w_i, on a un "mouvement" privilégié, le <u>repos</u> (r) , qui lui, laisse inchangée toute position x . L'ensemble des mouvements possibles (théoriquement) pour notre sujet est alors défini comme l'ensemble des mots du <u>monoïde libre</u> M engendré par les W_i (un mot est une suite quelconque des symboles W_j). On dénote que $W_j . W_k$ le mouvement obtenu en effectuant d'abord W_k , puis W_j .

A la base de la notion d'espace, il y a, croyons-nous, l'expérience de la cage, ou de la prison. (Pour un anaimal libre, la notion de "territoire" en tient lieu). A partir d'une position x donnée, notre sujet ne pourra en général accomplir qu'un sous-ensemble de M , parce que certains mouvements W vont amener le corps du sujet en contact avec un obstacle qu'il ne pourra pas déplacer ; on désignera par S(x) l'ensemble de ces mots interdits : S(x) sera dit <u>l'ensemble de létalité</u> de la position (x). On doit penser que notre sujet est constamment en train d'explorer son environnement - et ceci à une vitesse arbitrairement grande - ; on peut croire, de ce point de vue, qu'il existe un opérateur R , le retournement, ayant la propriété suivante : si $w_1, \ldots, w_k$ est un mot permis, alors le mot $w_k \ldots w_1 \, R \, w_1 \ldots w_k$ ne déplace pas le sujet (autrement dit, le sujet "revient sur ses pas" après s'être retourné). En fait, on peut penser que ce sont ces explorations même qui permettent au sujet de se forger son espace. Autrement dit, on admettra qu'une position x est entièrement et uniquement définie par l'ensemble S(x) de ses chemins de létalité. Si deux positions x,y ont même ensemble de létalité $S(x) = S(y)$, on en conclura que $x = y$. Un chemin (alias un mot $W \in M$) sera dit un lacet, si toutes ses puissances, W^m sont des mots permis, i.e. n'appartiennent pas à l'ensemble de létalité pour toute position $x \in X$. Pour obtenir une théorie raisonnable, il semble qu'on doive, au sujet des lacets, admettre le postulat suivant : Si $W = A.B$ est un mot permis, alors, pour tout lacet c, le mot $W' = A.c.B$ est permis.

Une telle définition de l'espace d'un sujet conduirait évidemment à un espace uniquement discret. Toutefois, on peut d'ores et déjà munir cet espace d'une métrique, lorsque X est connexe, i.e.: Etant donnés deux points x,y de X, il y a toujours un mot permis W tel que $y = W.x$; on pose alors $d(x,y)$, distance de x à y comme la borne inférieure des longueurs des mots W,W' tels que $y = W.x$ et $x = W'.y$, et cette distance est symétrique et satisfait à l'inégalité du triangle $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$, s'il y a dans le système un opérateur de retournement R ainsi qu'on l'a défini plus haut (mais alors l'opérateur R ne doit pas être compté dans la longueur du mot).

Appelons $O(x)$, orbite de x, l'ensemble des positions de la forme $W.x$: c'est un espace connexe ; un lacet strict C a la propriété suivante : pour tout $y \in X$, la distance $d(y,C^k y)$ reste bornée par un entier fixe, quel que soit k ; désignons par $G(x)$ l'ensemble des positions de la forme $C.x$. Il sera bon de considérer un quotient de la forme $O(x)/G(x)$ comme l'espace effectif associé à la position x.

Pour aboutir à une situation réellement continue, on devra faire l'hypothèse que les champs moteurs W_i peuvent être indéfiniment divisés. Supposons que tout générateur W du monoide M admette une racine carrée ; $W_i = u_i^2$; alors le monoide engendré par les W_i se plonge dans le monoide $M(u_i)$ et l'ensemble X des positions doit être augmenté pour ce nouveau système de mouvements ; si cette division des champs W peut être poursuivie indéfiniment, on devra compléter l'ensemble X par toutes les nouvelles positions créées par les "petits" mouvements. Et on pourra parler de déplacement infinitésimal à la limite.

Une telle division pourrait être ainsi définie : W/k serait obtenu par un état cinématique permanent w/k , qui, réalisé pendant k périodes fondamentales de l'horloge interne, donnerait le même déplacement que W . (w pendant une période). Dans l'interprétation biologique, il est en général impossible de diviser un champ moteur ; en forgeant cette idéalisation (suggérée évidemment par notre intuition du mouvement uniforme), la mathématique diverge considérablement de la réalité physiologique ... mais sans doute pas tellement de la réalité physique. Un être vivant n'a assurément jamais le temps d'itérer indéfiniment un de ses mouvements et de s'assurer ainsi qu'il s'agit bien là d'un lacet. Les lacets qui sont formés de rotations pures affectant l'organisme sont probablement sentis comme tels à l'issue du développement embryologique, et de sa maturation fonctionnelle. Par contre, les lacets qui comportent des translations ne sont reconnus comme tels qu'après exploration continuée : il y a, pour un être vivant, des mots de M présumés être des lacets, et la construction de l'espace à partir de sa "frontière de létalité" se fait par une approximation de plus en plus raffinée, l'espace devenant de plus en plus riche au fur et à mesure qu'il y a moins de lacets.

5. L'espace-temps bidimensionnel ; les réels.

Il s'agit ici d'un monde dans lequel les individus peuvent prendre seulement deux états cinématiques différents : le repos (r) , et un état "excité" v , qui peut varier d'un individu à un autre. On suppose au début que notre espace n'a d'autre frontière de létalité que celle provenant de la collision spatiale entre sujets en mouvement.

Supposons d'abord qu'il n'y ait qu'un seul sujet. Partant d'une position notée O , notre individu pourra effectuer des translations à vitesse v pendant k périodes de son horloge interne. Ces périodes de mouvement peuvent d'ailleurs être séparées par des périodes de repos (r) de longueur arbitraire. En ce cas, le mot W-translation unitaire effectuée dans une période T de l'horloge interne est un lacet, et par suite toutes les positions sont dans l'orbite de O et lui sont équivalentes ; l'espace X est réduit à un point puisqu'il ne comporte qu'une classe d'équivalence. Munissons notre sujet d'un opérateur de retournement R . Deux cas sont possibles ; ou O est une origine absolue, en sorte que le mouvement $WR = -W$ est impossible en O ; en ce cas, l'ensemble des positions du sujet devient isomorphe à l'ensemble N des nombres naturels ; en effet deux positions (k) , (ℓ) obtenues après k,ℓ translations W sont nécessairement distinctes, puisque si $k < \ell$ le mot $W^{\ell}R$ est léthal pour la position (k) , et non léthal pour la position (k) . Traduit algébriquement, ceci veut dire que la soustraction $k-\ell$ est impossible dans N , alors que $\ell - \ell = 0$ est possible.

Ceci suppose toutefois qu'il n'existe aucun entier m tel que $W^m(O) = O$, l'égalité étant définie par la distance d précédemment définie, en pareil cas, avec ou sans retournement R l'ensemble des positions (définies non par équivalence des ensembles de létalité, mais par la métrique d) serait isomorphe à un ensemble de m' points, ou m' est un diviseur de m . Si maintenant on accepte un retournement R , et que $WR = -W$ soit un lacet d'ordre infini (i.e. il n'existe aucun k tel que $(-W)^k(O) = O$), alors l'ensemble des positions X est isomorphe au groupe Z des entiers (positifs et négatifs) ; isomorphisme réalisé par $x = W^m(O)$, ou $m \in Z$. Si le sujet peut modifier la période de son horloge interne selon un rapport rationnel, il aura comme ensemble des positions l'ensemble Q des rationnels.

Pour calculer sa position après un certain nombre de déplacements élémentaires W et -W , le sujet devra procéder comme suit : compter positivement tous les déplacements à droite W et négativement ceux à gauche (-W) . Il obtiendra ainsi l'abscisse de sa position finale ; cette opération est le début du Calcul Intégral, car elle permet de calculer le déplacement total du sujet connaissant l'histoire de ses états cinématiques w(t) , où t varie de 0 à k dans N, et où W(t) peut prendre les valeurs W , -W ou r .

Supposons maintenant que notre sujet puisse varier sa vitesse v ; l'opération la plus simple est celle qui définit la vitesse k.v , ou $k \in Z$. Par définition, le déplacement effectué à la vitesse k.v dans une période fondamentale, est égale au déplacement effectué à la vitesse v pendant k périodes fondamentales (retourner v si k est négatif !) ; de même, on pourra définir la vitesse 1/m.v comme étant celle qui donne le déplacement unitaire W lorsqu'on prend cette vitesse 1/m.v pendant m périodes fondamentales. Ceci permet de donner un sens à la vitesse p/q.m , et l'addition des déplacements correspondants permet de définir l'addition dans le corps Q des rationnels.

Dans cette optique, l'addition des fractions apparait comme une opération infiniment plus délicate que leur multiplication, puisqu'en fait, c'est une intégration !

<u>Remarque</u>. On a utilisé deux définitions de l'espace à partir de l'ensemble X des positions ; l'une par l'équivalence $x \sim y$ si les chemins léthaux issus de x,S(x), sont les mêmes que ceux de y . L'autre par la topologie définie sur X par la distance d(x,y) . La première définition peut identifier des points considérés comme distincts par la seconde (exemple, l'ensemble Z décrit plus haut). Il semble que les deux définitions ne peuvent coïncider que si la frontière de létalité n'est pas vide - et sans doute assez équitablement répartie dans l'espace... .

Considérons maintenant le cas où nous avons deux sujets dans notre espace, doués l'un et l'autre de vitesses constantes v,v' .

On a alors la forme suivante - chronogéométrique - du postulat des parallèles d'Euclide :

Si les vitesses v , v' des deux sujets sont différentes, alors au cours de leur histoire, de $t = -\infty$ à $t = +\infty$, les deux sujets entrent nécessairement en collision.

(Deux droites du plan (t,x) se rencontrent nécessairement dès qu'elles ne sont pas parallèles...).

Ce postulat permet de <u>définir</u> l'égalité des vitesses pour deux sujets qui n'ont par ailleurs aucun moyen de communication sauf d'entrer en contact par collision.

Supposons le premier sujet immobile en 0 pour $t = 0$; si le second sujet est à la position x pour $t = 0$ et est muni de la vitesse v positive, il entre en collision avec le premier soit dans le passé (t négatif) , soit dans l'avenir (t positif). Dans le premier cas, on dit que x est <u>à droite</u> de 0 , dans le second, <u>à gauche</u>. On écrit cela $x > 0$, $x < 0$ respectivement . Ceci définit sur l'espace X une relation d'ordre, ainsi qu'on le vérifie immédiatement ; de même, on définira l'inégalité de deux vitesses ; par exemple, si pour $t = 0$, le premier sujet est en 0 avec la vitesse v , le second en $x = v$ avec la vitesse W , si leur collision a lieu dans le passé, c'est que w est plus grande que v ; si elle a lieu dans l'avenir, alors $w < v$. Grâce à cette interprétation, on peut définir le nombre irrationnel w/v comme une coupure de Dedekind dans l'ensemble des rationnels q , selon que le sujet muni de la vitesse $q.v$ issu de $(t = 0, x = v)$ rencontre le second sujet issu de $t = 0$; $x = 0$ dans le passé $(q < w/v)$ ou dans l'avenir $(q > w/v)$. Par cette construction, à la fois le temps t , l'abscisse x , et la vitesse v sont paramétrés par ce qui est connu classiquement comme la droite réelle R .

Pour passer de la vitesse $V = 1$ à une vitesse W positive, on peut modifier dans la proportion W/V la période de l'horloge interne du sujet ; que l'on essaye de réaliser cette transformation à l'aide de $n-1$ horloges intermédiaires qui sont telles que deux horloges consécutives aient leurs périodes dans un rapport constant, on sera amené à prendre la racine $n^{\text{ème}}$ $\sqrt{W/V}$. Pour n grand, cette transformation multiplicative est voisine de l'unité sur la période, et on peut l'écrire sous la forme

$$1 + a/n \ .$$

On est donc amené à écrire

$$W/1 = (1 + a/n)^n$$

ce qui conduit au logarithme $a = \log W$, pour n tendant vers l'infini.

Où $$W = \exp a \ .$$

Le fait que le temps t, l'abscisse x, et la vitesse v soient tous trois décrits par un même être mathématique, à savoir un nombre réel, est une sorte de miracle qui est à la base du Calcul Différentiel. Si l'on se donne un mouvement $x(t)$ à vitesse $v = f(t)$ où f est une fonction continue du temps, alors le déplacement

$x(T)$ est donné par l'intégrale $\int_0^T f(t)\,dt$.

On peut calculer cette intégrale en divisant l'intervalle $[0\ T]$ en N intervalles égaux et en formant la somme de Riemam correspondante. La structure de corps de R n'intervient nullement dans cette construction. La notion de fonction primitive, et par suite, celle aussi de dérivée (pourvu que cette dernière soit continue) n'exigent donc nullement cette structure de corps. A partir de là, on définira, pour les fonctions à plusieurs variables la notion de différentielle, de dérivées partielles (continues d'ordre quelconque), d'application différentiable, de jets, de vecteurs tangents, de covecteurs, de forme différentielle .. et.

On a vu que l'outil essentiel permettant l'introduction du continu est la possibilité de diviser un champ moteur, ce qui permet de construire des opérations infinitésimales - lesquelles conduisent à la théorie des groupes et algèbres de Lie, et par suite à la notion - dont on sait l'importance - de symétrie. En géométrie Euclidienne classique, cette division apparaît dès le théorème de Thalès : des parallèles équidistantes découpent sur une sécante des segments égaux en longueur. Pour diviser un segment OA du plan en n segments égaux $OI_1I_2 \ldots I_{n-1}A$, on porte sur une oblique auxiliaire OD n-segments égaux $OJ_1J_2 \ldots J_{n-1}B$. Alors les points $I_1, I_2 \ldots I_{n-1}$ sont les intersections avec OA des parallèles à AB issues de $J_1J_2 \ldots J_{n-1}$. Il y a la composition d'une construction "motrice" : porter sur l'oblique OD n-segments égaux bout à bout, suivie de la projection "optique" des points I_j sur OA parallèlement à BA . Il ne fait guère de doute que la réalisation de la géométrie par des agents physiques comme la lumière ne soient à la source de notre intuition géométrique. Très probablement en cela, il faut donner raison à Kant, cette intuition de la géométrie nous est innée ; elle est créée par les mécanismes épigénétiques de l'Embryologie. Comment une structure aussi idéelle que la Géométrie peut être codée dans notre patrimoine génétique, et parvient à se réaliser, à la fois organiquement - comme dans la morphogenèse de l'oeil - et mentalement, c'est bien là l'un des mystères les plus profonds de la Biologie. Peut-être la Biologie Moléculaire, en insistant sur l'aspect rigide des configurations tertiaires des protéines (ou des agencements supra-moléculaires qu'elles peuvent constituer) pourra apporter ici quelques indications précieuses ... .

Terminons ces considérations sur l'ontogenèse de mathématiques par une remarque de Physique. Nous avons invoqué deux phénomènes pour justifier la construction de l'espace réel ; la résonance qui synchronise des oscillateurs couplés d'une part, de nature temporelle ; et la collision entre individus, qui, elle permet la définition des chemins de létalité, et par suite la construction des espaces. Fort spéculativement, on associera ces deux processus aux deux grands types de particules connus en Physique : Bosons et

Fermions . Les bosons, de nature essentiellement radiative, ont tendance à s'associer en champs où ils deviennent indistinguables et non localisables ; effet dû à la résonance. Les fermions, de nature essentiellement spatiale matérielle, devraient leur caractère répulsif et individualiste au phénomène de collision qui les sépare .... .

6. La mathématique essentielle.

Nous pouvons maintenant décrire "le noyau essentiel" des mathématiques. Le but de la Science est double : comprendre le monde, agir sur le monde. Ces deux buts sont certes liés par la notion de "représentation" : car pour agir efficacement sur une situation, il faut avoir une représentation mentale aussi fidèle que possible de cette situation, et pour avoir une représentation fidèle, il faut "comprendre" ce dont il retourne dans la situation étudiée. Inversement, la fidélité d'une représentation peut être contrôlée en observant l'effet d'actions imposées au système que cette représentation nous a suggérées. Mais il n'en reste pas moins que "comprendre" et "agir" sont deux activités relativement distinctes, comme le montre le fait bien connu qu'il y a des situations qu'on comprend parfaitement, mais où on ne peut agir, et qu'inversement, on a pu trouver empiriquement des "recettes efficaces" dont le monde d'action nous échappe (cf. la Pharmacie..). Je poserai en principe que correspondant à ces deux pôles de l'activités scientifique, il y a deux mathématiques : une mathématique visant l'intelligibilité, et une mathématique visant la maîtrise.

La mathématique de l'intelligibilité commence par isoler dans une situation globale complexe des détails locaux significatifs. Dans ce processus d'analyse, on attribuera une importance essentielle à ces détails considérés comme facteurs élémentaires dans l'élucidation du processus. Au contraire, la maîtrise vise à une extension de notre connaissance du système ; elle repose essentiellement sur l'élaboration d'algorithmes de prédiction, permettant d'extraire d'une connaissance du passé une connaissance de l'avenir. La mathématique propose à cet effet des mécanismes <u>d'extrapolation</u> d'une fonction dont l'un est de caractère fondamental : le prolongement analytique. Il s'agit là d'algorithmes permettant le passage du <u>local au global</u>.

On proposera donc le tableau suivant :

Comprendre	Agir
Global $\longrightarrow$ Local	Local $\longrightarrow$ Global
Analyse morphologique d'une situation	Extension du domaine d'une fonction Extrapolation

Taxonomie des accidents locaux significatifs

Formule de Stokes

$d\omega = 0 \Longrightarrow \omega = dV$

Notion de Singularité

Prolongement analytique (classique) d'une fonction holomorphe

Syntaxe des singularités

Groupes de Lie et leurs représentations

Prolongement analytique qualitatif
Déformation universelle d'un germe d'ensemble analytique

Bifurcation

Brisure de Symétrie

Les outils essentiels des mathématiques d'intelligibilité sont la formule de Taylor et le théorème des fonctions implicites.

Dans le sens Local $\to$ Global, le théorème de Stokes dans un domaine Ω simplement connexe

$$d\omega = 0 \to \omega = dV$$

est un outil très précieux.

En fait la formule de Taylor -avec le reste de Lagrange- est une application de la formule de Stokes (comme la formule dite d'intégration par parties). Au premier ordre, on écrit pour $f(x)$, $f(0) = 0$,

$$f(x) = \int_0^x f'(y)dy \text{ , soit en posant } y = ux, \; f(x) = x \int_0^1 f'(ux)du$$

on pose alors $u = 1-v$ et il vient

$$f(x) = x \int_1^0 f'(1-v)x) \, (-dv) = x \int_0^1 f'(x(1-v))dv$$

$$= x \left| vf'(x(1-v)) \right|_0^1 - x \int_0^1 vf''(x(1-v)1-x)dv$$

$$= x(f''(0))$$

$$f(x) = xf'(0) + \frac{x^2}{2} \int_0^1 vf''(x(1-v))dv = xf'(0) + \int_0^x (x-y)f''(y)dy \quad .$$

Le changement $u = 1-v$ exprime le principe du "chemin inverse" décrit plus haut au §4 .

<u>Le théorème des fonctions implicites</u> permet la description locale d'un ensemble défini par une équation globale $F(x,y) = 0$. En un point x_0,y_0 où $F'_x\,(x_0,y_0) \neq 0$, on peut résoudre en x et obtenir une fonction locale $x = \phi(y)$ telle que $F(\phi(y),y) = 0$ au voisinage

du point considéré. D'où une meilleure paramétrisation locale de l'ensemble des zéros de F . Comme dans la formule de Taylor, on échange une connaissance globale de la fonction contre une connaissance locale plus spécifique de la fonction au voisinage d'un point choisi.

A cette liste, j'ajouterai deux théorèmes, tous deux dus à Weierstrass

1°) Le théorème d'approximation d'une fonction continue par un polynôme sur un compact.

2°) Le théorème de préparation.

Le premier théorème exprime qu'en topologie C° , on peut approcher toute fonction continue sur un compact par un polynôme. Ceci montre qu'en un certain sens les polynômes "suffisent" pour représenter toutes les fonctions - mais la capacité "prédictive" du théorème est faible. Le 2° théorème de Weierstrass dit théorème de préparation (Vorbereitungssatz) exprime que si en un point 0 , la fonction $F(x,y)$ a une dérivée partielle $F^{(k)}_{(x)}((0,0)$ non nulle, celles d'ordre inférieur $F^{(k-i)}_{(x-i)}$ étant nulles, alors F est de la forme

$$F(x,y) = \lambda(x,y) \;.\; (x^k + \Sigma a_j(y)x^{k-j}), \lambda(0,0) \neq 0 \;.$$

λ, a_j fonctions analytiques (resp. C^∞).

démontrée par Weierstrass-Rückert pour les fonctions analytiques et par Malgrange pour les fonctions C^∞ . (Le théorème des fonctions implicites n'en est qu'un cas particulier $(k=1)$) . La signification de ce théorème est locale : elle exprime que l'ensemble des zéros $F(x,y) = 0$ est autour de l'origine 0 réalisable comme un ensemble algébrique en x , C^∞ ou analytique en les autres variables y . C'est un outil très précieux pour la théorie de l'élimination, et l'étude de la structure topologique locale des ensembles analytiques. A cela, j'aimerais ajouter (par préjugé de spécialiste) le théorème dit de Sard qui exprime que l'ensemble des valeurs singulières d'une application $F : R^n \to R^p$, C^∞ , $n > p$, est de p-mesure nulle. Théorème également très précieux pour l'interprétation des projections ; et pour établir la densité de la transversalité (la position générale).

Le prolongement analytique est le modèle universel des moyens d'extrapolation (par exemple en Physique), donc de prédiction. Comme une fonction analytique est en principe définie par ses singularités (par exemple une fonction méromorphe est définie par ses pôles à une fonction holomorphe près), on voit que dans l'hypothèse d'un monde "analytique", l'intélligibilité entarîne la maitrise. Mais nous ne savons pas si la réalité peut être décrite "analytiquement" - sauf dans le domaine étroit de la Mécanique et de la Physique fondamentale. (Encore que même là, on ne sait pas trop si les potentiels d'interaction sont analytiques ...). C'est l'existence d'une géométrie ambiante, qui, en Physique fondamentale, permet d'assurer l'analyticité. L'idéal serait, dans des sciences "molles", de dégager des noyaux d'analyticité où l'intélligibilité entrainerait la maitrise. On ne voit pas malheureusement pourquoi il en serait ainsi et il n'y en a guère d'exemple. Par contre les techniques de prolongement analytique qualitatif-déformation universelle d'un genre d'ensemble analytique - sont parfois généralisables au cas C^∞ . (cas des fonctions, théorème de préparation). Cette méthode ne permet donc pas la maitrise quantitative, mais permet une intelligence qualitative des transformations phénoménales interprétés comme dues à des brisures de symétrie ou des bifurcations (cas des changements de phase, par exemple). Les possibilités d'applications de ces méthodes dans les sciences "molles" paraissent donc de ce fait - plus étendue.

A cette liste des grands théorèmes de l'Analyse, j'ajouterai bien entendu le théorème fondamental des Equations Différentiel-les Ordinaires : Une équation différentielle de la forme $y' = F(x,y)$ où F est lisse, admet par tout point régulier une solution lisse et une seule. C'est en effet dans l'intégration de systèmes différentiels qu'on trouve le paradigme des situations déterministes en science, et il n'y aurait pas de science sans recherche - et conquête - du déterminisme, lequel présente sous cette forme laplacienne son expression à la fois la plus achevée - et aussi la plus complexe ... . C'est d'ailleurs dans ce seul théorème qu'on voit apparaître des arguments d'Analyse fonctionnelle (théorème d'Ascoli). Et c'est dans cette seule preuve qu'on devrait - au moins en première étape - confirmer l'Analyse fonctionnelle. Il y a aussi le phénomène de la transformation de Fourier, qui a une place à part.

J'ai peu parlé d'Algèbre et de Mathématiques discrètes en général. C'est que je pense - comme je l'ai dit au début - qu'une structure abstraite - discrète - n'a d'intérêt que si elle se plonge naturellement dans une structure continue "simple". Peut être ferai-je une exception pour le théorème fondamental de l'Algèbre (un polynôme de degré n sur le corps complexe à n racines). Quant à l'Algèbre linéaire et tensorielle (Multilinéaire), aux espaces vectoriels, où des rudiments d'Algèbre locale, de théorie des groupes, c'est de la mathématique ancillaire qu'il faut assurément connaître, mais qu'on ne saurait considérer comme "essentielle".

7. Conclusion.

L'opposition - que j'ai signalée au début - entre une mathématique de l'intelligibilité et une mathématique de la maîtrise mériterait d'être étudiée sur deux plans : d'une part sur celui de la psychologie individuelle du mathématicien : en général les grands calculateurs sont plus orientés vers la maîtrise : les chercheurs de concepts et de procédures vers l'intelligibilité. Sur le plan de l'histoire, ensuite : je verrai volontiers dans le XVIIIème siècle la grande époque avec la théorie des fonctions analytiques, les méthodes de séries à coefficients indéterminés et l'analyse de Fourier sont apparues dans toute leur force, les mathématiques de la maîtrise (qui n'ont pas peu contribué aux succès du scientisme au XIXème siècle). Au XXème siècle, avec le développement de la Topologie, on a vu un certain retour vers l'intelligibilité. Par exemple une théorie comme la théorie de Morse est une théorie holistique, car elle explique comment la structure topologique globale d'une variété peut faire naître les singularités locales d'une fonction qui est définie. Elle explique donc le local par le global, c'est typiquement une théorie d'intelligibilité. Une théorie comme la transformation de Fourier, avec une formule (quasi-magique !) d'inversion comme celle de Parseval, apparaît typiquement comme une théorie de maitrise. Bien entendu, l'ère des ordinateurs ne fera que renforcer la tendance vers les techniques de maîtrise, qu'on appliquera de plus en plus dans des situations où "a priori" elles n'ont aucune raison de pouvoir s'appliquer.