SÉMINAIRE DE PHILOSOPHIE
ET MATHÉMATIQUES

M. MENDÈS FRANCE

# Principe de la symétrie perturbée, papiers pliés et dimension des courbes

*Séminaire de Philosophie et Mathématiques*, 1981, fascicule 7
« Principe de la symétrie perturbée, papiers pliés et dimension des courbes », , p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1981___7_A1_0>

# PRINCIPE DE LA SYMETRIE PERTURBEE, PAPIERS PLIES ET DIMENSION DES COURBES

M. MENDES FRANCE

## § 1 - INTRODUCTION

Nous montrons en quoi une perturbation de la symétrie enrichie la structure. Cette richesse accrue est liée à une complexité croissante dont la mesure met en jeu la notion de dimension.

Il y a deux ans environ, j'ai fait un exposé sur ce thème au Séminaire de Théorie de Nombres (Delange, Poitou, Pisot 1979-80). Maurice Loi qui y assistait, me signala alors un exposé de Louis Michel sur les symétries brisées. Intrigué, je contactai Louis Michel et me rendit vite compte que le rapport entre nos propos était quasiment nul. Cependant, Louis Michel a bien voulu s'intéresser à mon travail et il m'a fourni des idées qu'on retrouvera dans mon exposé d'aujourd'hui.

## § 2 - SYMETRIE

Soit A un ensemble fini non vide qu'on appellera un alphabet, et soit $A^*$ l'ensemble des mots écrits sur A. Un mot m est donc une suite finie d'éléments de A

$$m = a_1 a_2 \dots a_s \quad , \quad a_i \in A$$

La notation fléchée est pratique et on écrira plutôt

$$\vec{m} = a_1 \; a_2 \; \dots \; a_s$$

et

$$\overleftarrow{m} = a_s \; a_{s-1} \; \dots \; a_1$$

L'opérateur de symétrie $S : A^* \longrightarrow A^*$ est alors défini par

$$S(\vec{m}) = \vec{m}\,\overleftarrow{m}$$

où $\vec{m}\,\overleftarrow{m}$ est le mot deux fois plus long obtenu en accolant (concaténation) les deux mots $\vec{m}$ et $\overleftarrow{m}$ . On peut bien entendu itérer l'opérateur S

$$S^2(\vec{m}) = \vec{m}\,\overleftarrow{m}\,\vec{m}\,\overleftarrow{m}$$

et, après une infinité d'opération,

$$S^\infty(\vec{m}) = \vec{m}\,\overleftarrow{m}\,\vec{m}\,\overleftarrow{m}\,\vec{m}\,\overleftarrow{m}\,\vec{m} \dots$$

On engendre ainsi une suite infinie périodique .

Nous considérons dans notre exposé que la symétrie et la périodicité sont des formes pauvres, triviales. Victor Hugo l'affirme dans les Misérables quand il écrit "Rien ne sert le coeur comme la symétrie" et Pierre Curie le confirme quand il enseigne que "c'est la dissymétrie qui crée le phénomène". Il est vrai que pour William Blake la symétrie semble douée de force et de dynamisme "What immortal hand or eye could frame thy ferful symmetry ?" . On trouvera un plaidoyer pour la symétrie dans les livres classiques de Roger Caillois "Cohérences aventureuses", Vilma Fritsch "la Gauche et la Droite", Martin Gardner "l'Univers ambidextre" et surtout Hermann Weyl "Symétrie et mathématique moderne" (titre désastreux dont le traducteur semble porter la responsabilité. Hermann Weyl eut vomi les "mathématiques modernes" s'il eut été en vie).

Notre propos est de montrer comment une modification de la construction précédente permet d'engendrer des suites infinies dont la structure est beaucoup plus riche. La perturbation apportée à la symétrie rompt la périodicité mais cependant, une certaine stabilité structurelle persiste (contrairement à la brisure de symétrie) en sorte que le chaos reste étranger au phénomène (voir L. Michel pour les brisures de symétrie).

## § 3 - SYMETRIE PERTURBEE

Soit $\vec{\rho} \in A^*$ . L'opérateur de symétrie perturbée par $\vec{\rho}$ noté $S_\rho$ est défini par

$$S_\rho(\vec{m}) = \vec{m}\,\vec{\rho}\,\overleftarrow{m}$$

Comme précédemment, on peut itérer l'opération

$$S_\rho^2(\vec{m}) = S_\rho(S_\rho(\vec{m})) = \vec{m}\,\vec{\rho}\,\overleftarrow{m}\,\vec{\rho}\,\vec{m}\,\overleftarrow{\rho}\,\overleftarrow{m}$$

et

$$S_\rho^\infty(m) = \vec{m}\,\vec{\rho}\,\overleftarrow{m}\,\vec{\rho}\,\vec{m}\,\overleftarrow{\rho}\,\overleftarrow{m}\,\vec{\rho}\,\vec{m}\,\vec{\rho}\,\overleftarrow{m}\,\overleftarrow{\rho}\,\vec{m}\,\overleftarrow{\rho}\,\overleftarrow{m}\,\vec{\rho}\ldots$$

Cette suite infinie est relativement simple à étudier. Les lettres m et $\rho$ alternent. Que dire de la suite des flèches ? Nous répondons à la question au paragraphe suivant.

## § 4 - PAPIERS PLIES

Prenez une feuille de papier et faites les opérations suivantes. A la première étape, pliez la feuille en rabattant la moitié droite sur la moitié gauche.

Nous effectuons ainsi ce qu'on appellera un pliage positif, le pliage négatif qu'on considérera ultérieurement, consistant à rabattre la moitié droite par dessous la moitié gauche de la feuille.

Après une opération de pliage positif, nous passons à la seconde étape. Celle-ci consiste à replier la feuille pliée, à nouveau dans le sens positif. A la troisième étape, on plie une fois encore dans le sens positif, etc.

Revenons à l'étape 3 et déplions la feuille. On voit apparaître une suite de plis rentrant notés V et de plis sortant $\Lambda$ :

$$V \; V \; \Lambda \; V \; V \; \Lambda \; \Lambda$$

A la quatrième étape, la feuille dépliée laisse apparaître la configuration suivante

$$\underline{V \; V \; \Lambda \; V \; V \; \Lambda \; \Lambda} \; V \; V \; V \; \Lambda \; \Lambda \; V \; \Lambda \; \Lambda$$

dont les $2^3-1$ premiers termes forment la suite finie obtenue précédemment par trois pliages positifs. D'une façon générale, la suite obtenue par $(n+1)$ pliages positifs débute par la suite de longueur $2^n-1$ engendrée par $n$ pliages. Il s'enseuit qu'on peut "passer à la limite" et parler de la suite infinie engendrée par une feuille de papier pliée une infinité de fois sur elle-même.

Théorème 1 Quitte à remplacer la flèche $\rightarrow$ par V et la flèche $\leftarrow$ par $\Lambda$, la suite infinie des flèches décrite au paragraphe 3 est identique à la suite engendrée par pliage infini.

La suite de l'exposé est consacrée à l'étude de la suite engendrée par pliage et ses généralisations.

A chaque étape du pliage, il y a le choix entre le pliage positif et le pliage négatif. Ainsi, au bout de $n$ pliages, on peut engendrer $2^n$ suites finies de longueur $2^n-1$. Donc après une infinité de pliages on obtient une suite infinie parmi une infinité (ayant la puissance du continu) d'autres suites possibles. Toutes ces suites seront dites "engendrées par pliages".

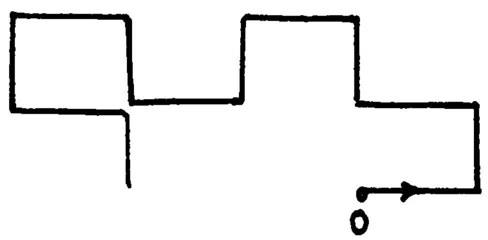
## § 5 - POLYGONES INFINIS

Etant donné une suite infinie de V et de $\wedge$ obtenue par pliages on remplace V par G (gauche et $\wedge$ par D (droite). La suite engendrée par pliages tous positifs s'écrit donc

G G D G G D D G G G D ...

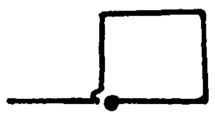
Considérons alors le réseau $\mathbb{Z}^2$ (quadrillage du plan).

Partant de l'origine O, on imagine un mobile qui se déplace sur le segment unité horizontal. A l'extrémité du segment, il tourne à gauche ou à droite selon que la première lettre de la suite est G ou D. Dans l'exemple ci-dessus, il tournera donc à gauche et parcourera le segment vertical montant. Au noeud suivant, il tournera à gauche, puis ensuite à droite, etc.

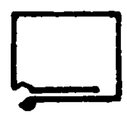



Ainsi à chaque suite infinie obtenue par pliages correspond un polygone infini dessiné sur le réseau. (On peut concevoir un tel polygone comme étant la forme que prendrait une feuille infinie, pliée une infinité de fois puis dépliée à 90°).

On dit qu'une ligne polygonale est "simple" si chacun de ses côtés est simple.



ligne simple



ligne non simple

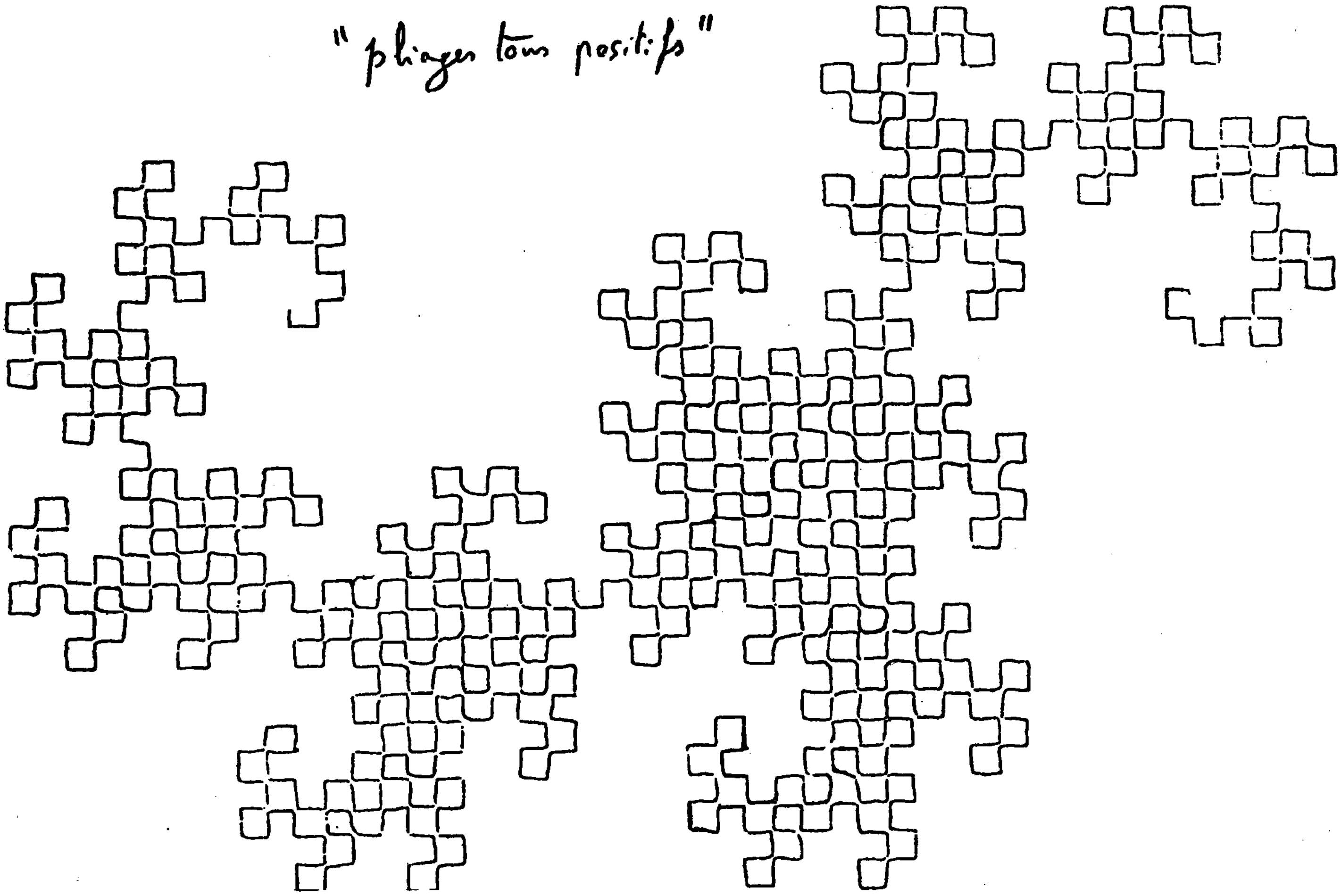
<u>Théorème 2</u> (Ch. Davis, D. Knuth 1970). <u>Les polygones infinis attachés aux suites infinies engendrées par pliages sont simples</u>.

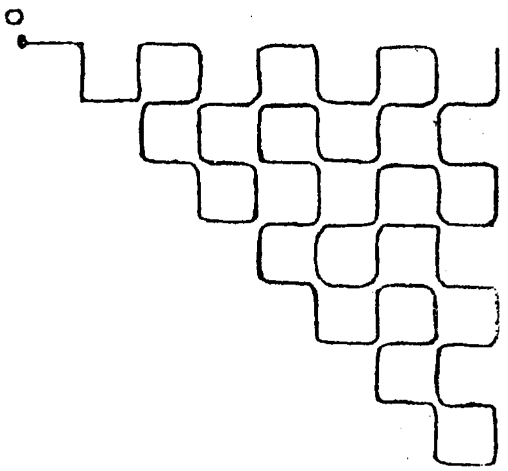
Quand on y réfléchit, ce résultat est surprenant car les polygones infinis sont rarement simples. Supposez qu'à chaque noeud du quadrillage on tire à pile ou face pour savoir si on va à gauche ou à droite. Avec une probabilité 1, la ligne polygonale obtenue n'est pas simple.

Nous avons reproduit l'allure des polygones associés à la suite obtenue par pliages tous positifs d'une part, et par l'une des suites obtenues par pliages alternés, positif, négatif, positif,... d'autre part.

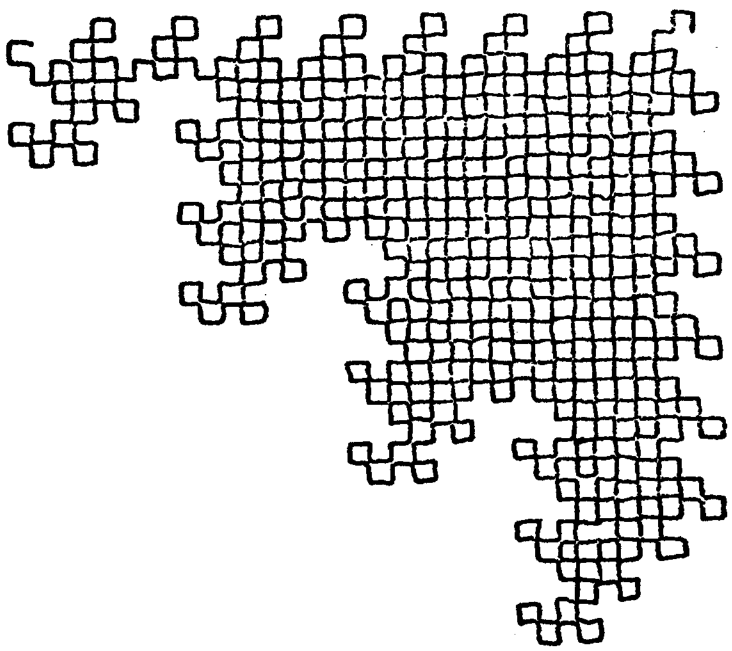
Ces deux dessins - et ceux qu'on trouve dans l'article de Davis et Knuth - sont tout à fait frappant et suggèrent que chacune de ces lignes polygonales remplissent une portion positive du réseau. Ceci est en fait vrai et nous nous proposons de décrire cela en terme de dimension.

"pliages tous positifs"





" pliages alternativement positifs et négatifs "



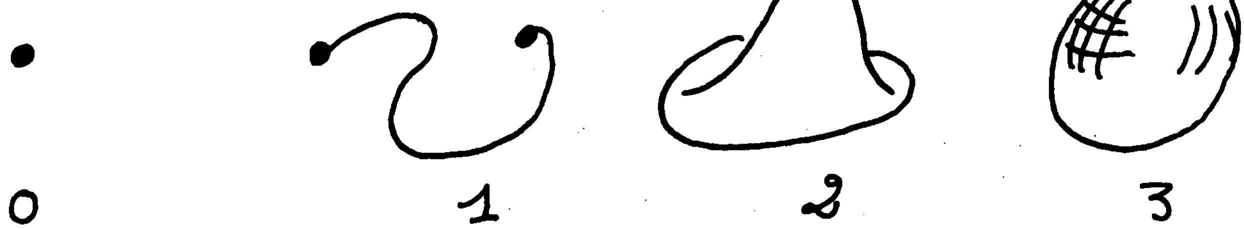
" Courbe obtenue par J. Brette en pliant du papier selon la loi des décimales binaires de $\Pi$ "

## § 6 - DIVERSES DEFINITIONS DE LA DIMENSION

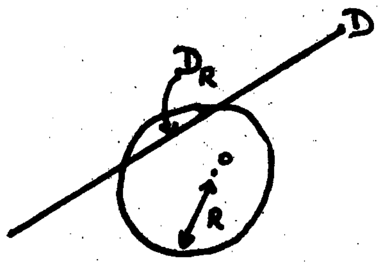
Il existe quantités de définitions non équivalentes de la dimension. L'approche la plus intuitive est sans aucun doute celle de H. Poincaré selon laquelle l'espace aurait autant de dimensions que nous avons de muscles. Autrement dit, la détermination d'un point dans l'espace implique le travail de chacun de nos muscles. Supposons que nous ayons N muscles. Désignons par $T_1$ , $T_2$ ,...., $T_N$ les tensions respectives de chacun d'eux. Alors la donnée des N nombres $T_1$ , $T_2$ , ..., $T_N$ détermine un point de l'espace et réciproquement. En cela, l'espace est N-dimensionnel.

En fait, nous le savons tous, notre espace usuel est tridimensionnel. C'est que notre espace usuel est essentiellement visuel et notre esprit contracte les dimensions en liant les valeurs $T_1$ , $T_2$ , ..., $T_N$ . Il n'est pas tout à fait clair pourquoi on arrive au nombre 3 , mais il me semble que cette analyse prouve au moins que la dimension est une propriété liée à la fois à notre espace et à nos structures mentales.

Cette approche de la dimension, toute intéressante qu'elle soit, est cependant bien limitée. C'est pourquoi Poincaré donne une définition moins anthropocentrique de la dimension : il s'agit de ce qu'on appelle aujourd'hui la dimension topologique dont on trouvera la théorie développée dans l'ouvrage de Hurewicz et Wallman. Voici approximativement cette définition. Un point, ou un ensemble fini de points est O-dimensionnel. Un ensemble est n-dimensionnel s'il est réunion fini d'ensembles dont les frontières sont (n-1)-dimensionnelles. Ainsi, une courbe est unidimensionnelle, une surface est bidimensionnelle et un volume est tridimensionnel.




Considérons alors une courbe qui tend vers l'infini de façon assez régulière, disons une droite D. Soit par ailleurs $S_R$ une sphère de rayon R centrée à l'origine. La longueur de la portion de droite $D_R$ intérieure à $S_R$ est approximativement proportionnelle à R quand R tend vers l'infini :




longueur $D_R \asymp R$

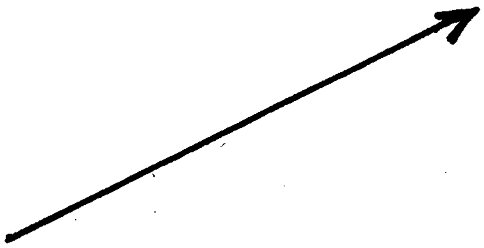
Soit maintenant P un plan et soit $P_R$ la portion de P intérieure à $S_R$ :

aire $P_R \asymp R^2$

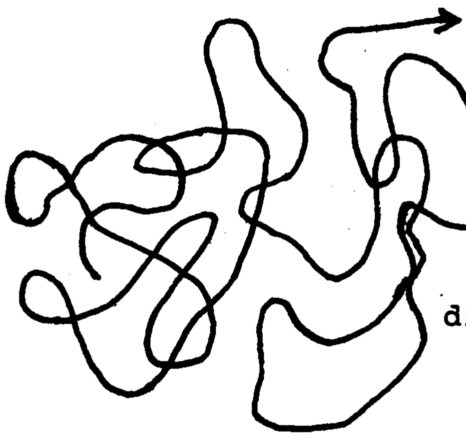
Considérons enfin le volume V au-dessus du plan P. Soit $V_R$ la partie de V intérieure à $S_R$ . Alors

volume $V_R \asymp R^3$ .

Ce qu'il faut retenir, ce sont les exposants 1, 2, 3 des trois dernières formules, exposants qui visiblement sont liés à la dimension (topologique) des trois ensembles D, P et V . Cette observation nous permet de donner une définition précise de la dimension d'une courbe Γ. Cette nouvelle définition diffère de la dimension topologique. En particulier, selon notre définition, une courbe non bornée, très zigzagante et chaotique aura une dimension égale à 2, alors qu'au contraire, une courbe régulière (droite par exemple) aura une dimension 1.



dimension 1



dimension 2

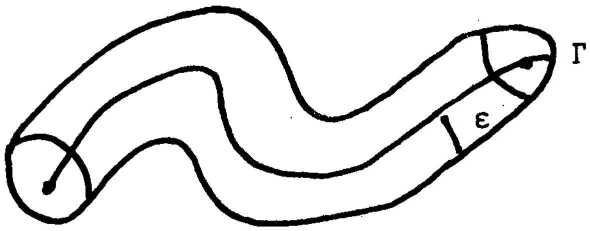
Voici donc notre définition : Soit $\Gamma_R$ la portion de la courbe Γ intérieure à $S_R$ . Si, quand R tend vers l'infini,

longueur $\Gamma_R \asymp R^d$

alors on dit que la dimension de Γ est d . Plus précisément,

$$\dim(\Gamma) = \lim_{R \to \infty} \frac{\log \text{ longueur } \Gamma_R}{\log R}$$

En fait, cette formule est critiquable en ce que cette limite peut dépasser 3, et ceci n'est pas raisonnable étant donné que la courbe $\Gamma$ est supposée dessinée dans l'espace. Nous modifions donc la définition comme suit. Soit $V(\varepsilon)$ le tube circulaire de rayon $\varepsilon > 0$, centré sur $\Gamma$




Soit $V_R(\varepsilon)$ la portion du tube intérieure à $S_R$. Alors, par définition

$$\dim(\Gamma) = \lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{R \to \infty} \frac{\log \text{ volume } V_R(\varepsilon)}{\log R}$$

On montre que

$$1 \leq \dim(\Gamma) \leq 3$$

et que $\dim(\Gamma)$ n'est pas nécessairement un entier. Une courbe de dimension 3 sera sinueuse et complexe, de même qu'une courbe plane de dimension 2. Par contre, une courbe de dimension 1 aura une allure très régulière. Tout ceci est à rapprocher des travaux de Benoît Mandelbrot.

<u>Théorème 3</u> (Mendes France, Tenenbaum). <u>Les polygones obtenus par pliages infinis sont tous de dimension 2</u>.

## § 7 - TROIS MOTS SUR LES NOMBRES TRANSCENDANTS

On rappelle qu'un nombre algébrique est un nombre qui est solution d'une équation polynômiale à coefficients entiers non tous nuls. Les nombres 7, -3, 5/4, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{1+\sqrt{5}}$, ... sont algébriques. Par contre $\Pi$, e, log 2, ... ne le sont pas. On dit qu'ils sont transcendants.

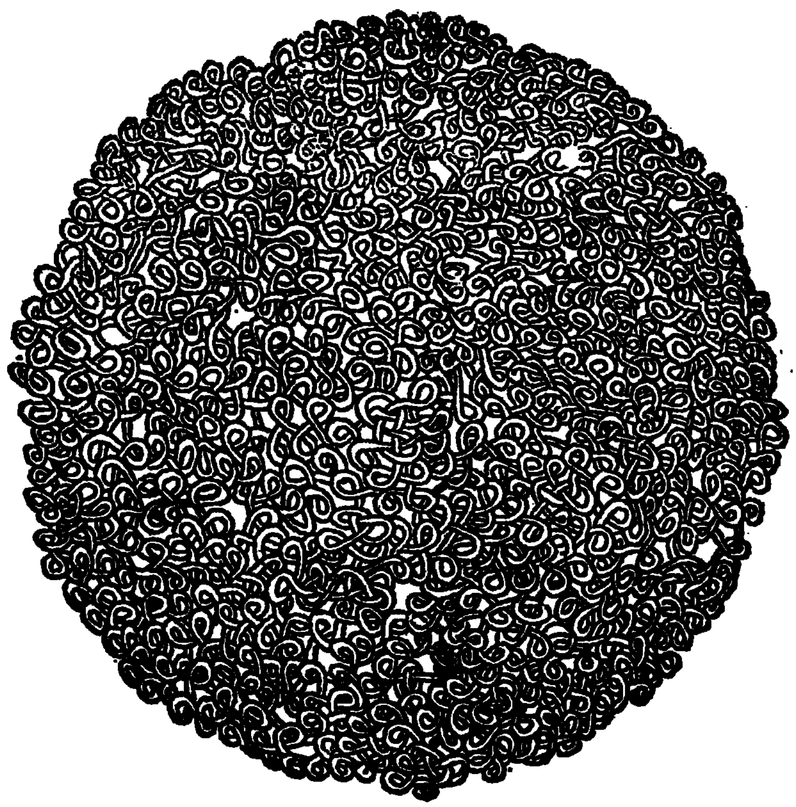
Soit une suite infinie engendrée par pliages. Remplacer V par 0 et $\Lambda$ par 1. Nous obtenons ainsi une suite infinie de 0 et de 1 qu'on pourra considérer comme les décimales binaires d'un nombre réel $\alpha$. Un tel nombre $\alpha$ sera dit engendré par pliage.

<u>Théorème 4</u> (Mendes France, Van der Poorten). <u>Tous les nombres obtenus par pliages sont transcendants</u>.

Il y aurait encore beaucoup à dire sur la symétrie perturbée et la théorie des nombres, en particulier en rapport avec les fractions continues. Mais ce n'est pas le lieu ici de développer cela. (On pourra se reporter à mon article paru au séminaire de théorie des nombres publié chez Birkhauser).

J'espère avoir convaincu l'éventuel lecteur que les structures engendrées par symétries perturbées sont riches. J'aurais aimé cependant sortir du cadre des mathématiques et je souhaiterais qu'un naturaliste ou qu'un biologiste me signale dans la nature des symétries perturbées. N'y aurait-il pas dans le développement d'un arbre des structures analogues, ce qui expliquerait que les branches, toutes linéaires qu'elles soient, forment dans leur ensemble un ensemble tridimensionnel ?

Ce thème est abordé dans le beau livre de P. Stevens et sera développé dans une prochaine publication du Palais de la Découverte : "de l'arbre de Léonard de Vinci à la théorie de la dimension".



dessin de l'auteur simulant le chaos

## REFERENCES

[1] Ch. Davis, D. Knuth. Number representations and dragon curves 1,2 . Journal recreational mathem. 3, 1970, 61-81 et 133-149 .

[2] V. Fritsch. La gauche et la droite, nouvelle bibliothèque scientifique , Flammarion 1967 .

[3] M. Gardner . L'univers ambidextre , Dunod 1967 .

[4] W. Hurewicz, H. Wallman . Dimension theory, Princeton University Press 1948 .

[5] B. Mandelbrot . Fractals, Freemon, San Francisco 1977 .

[6] M. Mendes France . Principe de la symétrie pertrubée, Séminaire Théorie des Nombres de Paris, 1979-80 , Birkhanser 1981 .

[7] M. Mendes France . De l'arbre de Léonard de Vinci à la théorie de la dimension, publication du Palais de la Découverte 1981 .

[8] M. Mendes France, G. Tenenbaum . Dimension des courbes, papiers pliés et suites de Rudin-Shapiro. Bull. soc. math. de France , 109 , 1981 .

[9] M. Mendes France , A. van der Poorten . Arithmetic and analytic properties of paperfolding sequences. Bull. Aust. Math. Soc. à paraître .

[10] L. Michel . Les brisures spontanées de symétrie en physique , Jour de Physique , Colloque C7 , supplément au n°11 , 36 , 1975 C7-41 .

[11] H. Poincaré . La Science et l'Hypothèse , Flammarion, 1968 .

[12] H. Poincaré . La valeur de la Science , Flammarion , 1970 .

[13] H. Poincaré . Dernières pensées , Flammarion , Nouvelle Bibliothèque scientifique , 1913 .

[14] P. Stevens . Les formes dans la nature , Seuil , 1978 .

[15] H. Weyl . Symétrie et mathématique moderne , Nouvelle bibliothèque scientifique , Flammarion , 1964 .