A. F. Monna

Évolution des problèmes d'existence en analyse

Séminaire de Philosophie et Mathématiques, 1981, fascicule 6
« Évolution des problèmes d'existence en analyse », , p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1981___6_A1_0>

EVOLUTION DES PROBLEMES D'EXISTENCE EN ANALYSE

par

A.F. Monna (Utrecht)*

Je me propose de considérer la mathématique d'un point de vue situé en dehors de l'édifice de la mathématique pour pouvoir considérer ce qui s'est passé à l'intérieur, en particulier en analyse. J'ai en vue les grandes lignes du développement pendant les dernières décades du 19ème siècle et les premières du 20ème siècle. Cette période a été importante pour la création de ce qu'on appelle la mathématique moderne. En ces années on aperçoit la transformation de la mathématique classique en la mathématique moderne. Mon but est de rechercher quelques aspects qui sont en certaine mesure caractéristiques pour la mathématique contemporaine en la comparant avec la mathématique classique. Pour cela je veux traiter quelques exemples de l'évolution de problèmes d'existence en analyse pure. Evidemment il y a encore d'autres aspects généraux en analyse moderne (p. ex. le rôle de l'algèbre), mais je me limite ici au problème d'existence. En analyse appliquée la situation est peut être différente.

D'abord il faut dire quelque chose sur la mathématique classique. C'est nécessaire pour comprendre la distinction entre classique et moderne. Remarquons tout d'abord que la mathématique classique n'est pas une science morte. Elle est vivante, mais de nouveaux aspects y sont ajoutés et ce sont ces aspects qui caractérisent l'analyse moderne. Chaque mathématicien a quelqu'idée de ce qu'on entend par classique. Dans la période classique l'analyse avait un caractère constructif. La construction et l'approximation de solutions, les théories concrètes prenaient une place dominante. On donnait des exemples et des contre-exemples, parfois des théorèmes d'existence. Par exemple l'existence de solutions à conditions initiales de l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

par Cauchy (1824 ; Moigno 1840). Mais même dans ce cas la théorie était constructive, utilisant des méthodes permettant une approximation

---

* Conférence donnée au séminaire "Philosophie et Mathématiques" de Dieudonné-Loi-Thom à l'Ecole Normale Supérieure, le 6 avril 1981.

(polygones ; approximations successives). A ce point il faut mentionner les démonstrations de Peano et Perron beaucoup plus tard où on considère deux familles de fonctions, respectivement majorante et minorante. C'est une méthode non-constructive ou du moins beaucoup moins constructive. Dans la période classique nous avons une notion d'existence que j'appellerai existence forte ; c'est une existence constructive.

En algèbre on trouve le même aspect. Jusqu'au milieu du 19ème siècle l'algèbre consistait principalement en la théorie des équations algébriques, tout spécial le calcul et les propriétés des racines. Cela changea après Abel et Galois. On commença à s'intéresser au problème de l'existence plutôt qu'à la construction . Notons que ce changement du point de vue commença bien avant les travaux de Cantor.

On peut signaler la même évolution en analyse, mais alors plusieurs années après Cantor. Ce qu'on ne trouve pas en analyse classique ce sont des raisonnements sur des propriétés de collections, de classes de fonctons munies d'une structure d'espace topologique ou d'une structure algébrique.

Un théorème tel que "toute fonction dérivable est continue" est "classique" : on prend une telle fonction quelconque et on démontre la propriété pour cette fonction. Les propriétés de collections étaient réservées pour la période après Cantor. Je pense, par exemple, à des propriétés d'algèbres de fonctions, problèmes de compacité etc.

Les théorèmes d'existence sont fréquents en analyse moderne. Il s'agit de l'existence ou non-existence d'objets possédant telle ou telle propriété, sans besoin d'expliciter la forme de ces objets. Souvent cela est même impossible, tout au moins dans le système axiomatique de Zermelo-Fraenkel auquel je me limite ici. On cherche l'information sur l'ensemble de ces objets. Certaines propriétés, sont-elles normales ou exceptionnelles, pathologiques (E. Borel), y-en-a-t-il beaucoup ?

Souvent le problème de trouver une solution est remplacé par celui de la résolubilité, sans demander une construction effective.

Je crois que ceci est un aspect important de l'analyse moderne. On a des théorèmes tels que : "Il existe X tel que ...", "Pour tout ...

il existe X ...", "Presque tout ... sont ..." et en exprimant un tel théorème nous ne pensons pas tout d'abord à une construction. D'une part, ces théorèmes nous donnent moins d'information que les théorèmes classiques constructifs. Mais dans une autre direction on obtient plus d'importance information, à savoir lorsqu'il s'agit de la structure des objets dont il s'agit et l'ensemble de tous ces objets. Dans ces théorèmes il s'agit d'une notion d'existence qui diffère de la notion d'existence au sens classique.
Bien entendu, dans certains cas quelques-uns de ces théorèmes furent historiquement précédé par des exemples effectifs (existence forte), mais c'est une toute autre chose de donner tous les objets d'une forme explicite et d'étudier les propriétés de l'ensemble ; on le verra plus tard. J'appellerai théorèmes de ce type des théorèmes d'existence faible ; ils expriment l'existence faible des objets en question. C'est une notion d'existence idéale.

Ce développement n'était possible qu'à la base de la théorie des ensembles. Cette théorie a fourni la possibilité d'étudier des phénomènes d'un caractère collectif, à distinguer des phénomènes d'un caractère particulier. La topologie, liée à la théorie des ensembles, a été aussi fondamentale. Il y a encore l'influence profonde de l'algèbre moderne. Pensons aux espaces vectoriels et l'analyse fonctionnelle.

Je crois que dans la période classique l'existence ne se présentait pas comme un vrai problème. L'existence était liée à la physique et à la mécanique et ainsi c'était une évidence. Il s'agissait d'une construction.

Quant à l'existence faible, y on fait usage de l'axiome du choix, du lemme de Zorn, comme pour le théorème de Hahn-Banach, le théorème de Banach-Steinhaus sur les opérations linéaires etc. Ce sont des choses non constructives. Déjà au début de la création de l'analyse fonctionnelle, dans les années vingt, on donnait des applications à la théorie des fonctions. Je crois qu'on peut même dire que des problèmes dans ce domaine furent une source. Dès le début, ce n'était pas une théorie abstraite sans applications. On peut consulter le livre fondamental de S. Banach de 1932 et de nombreux articles dans le journal Fundamenta Mathematica aux années vingt pour s'en convaincre

Je ne veux pas traiter les problèmes liés aux notions de construction et d'existence dans les fondements de la mathématique. Cela conduirait à des problèmes et théories comme : définition et existence, constructivité, l'intuitionisme (Brouwer), la mathématique constructive (Bishop) etc. Remarquons que, historiquement, la non constructivité, les notions faibles, ne furent pas accepté par chaque mathématicien. Mentionnons L. Kronecker et E. Borel. C'est mon but de donner une description historique de certains aspects de l'évolution.

Je donnerai quelques exemples de théorèmes forts et de théorèmes faibles dans lesquels on peut reconnaître une même ligne d'évolution.

1. Séries divergentes.

On sait que la théorie des séries divergentes a une longue histoire. Peut-on associer une "somme" à une série divergente ? On a, pendant l'histoire, développé plusieurs méthodes pour sommer certaines séries. Par exemple la méthode de Cesaro

$$\lim_{n \to \infty} \frac{S_1 + \ldots + S_n}{n}$$

où (S_i) désigne la suite des sommes partielles. On a des généralisations :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_1 S_1 + \ldots + a_n S_n}{a_1 + \ldots + a_n} ,$$

la méthode de Borel, utilisant les séries entières. E. Borel (1901) posait le problème en toute généralité :
"Faire correspondre à chaque série divergente numérique un nombre tel que la substitution de ce nombre à la série, dans les calculs usuels où elle peut se présenter, donne des résultats exacts ou du moins presque toujours exacts". (Leçons sur les séries divergentes).

Ce problème marque le changement du point de vue. Borel écrivait qu'on ne peut pas espérer que cela soit possible, mais il était déjà content lorsqu'il était possible pour la plupart des séries qu'on rencontre dans les applications.

Plus tard, le théorème de Hahn-Banach de l'analyse fonctionnelle fournit une solution pour la classe des séries telles que (S_i) est bornée ; ce n'est pas une restriction grave. La limite généralisée de Banach donne la solution :

A <u>toute</u> suite bornée de nombres réels (ξ_n) on peut faire correspondre un nombre réel, désigné par

$$\operatorname*{Lim}_{n \to \infty} \xi_n \,,$$

vérifiant les propriétés suivantes

$$\operatorname*{Lim}_{n \to \infty} (a\xi_b + b\eta_n) = a \operatorname*{Lim}_{n \to \infty} \eta_n \,, \quad a,b \in R,$$

$$\operatorname*{Lim}_{n \to \infty} \xi_n \geqslant 0 \text{ si } \xi_n \geqslant 0 \text{ pour } n = 1,2,\ldots,$$

$$\operatorname*{Lim}_{n \to \infty} \xi_{n+1} = \operatorname*{Lim}_{n \to \infty} \xi_n \,,$$

$$\operatorname*{Lim}_{n \to \infty} 1 = 1,$$

$$\varliminf_{n \to \infty} \xi_n \leqslant \operatorname*{Lim}_{n \to \infty} \xi_n \leqslant \varlimsup_{n \to \infty} \xi_n \,.$$

Il suffit d'appliquer ce théorème à (S_n). Je fais quelques remarques. On ne peut désigner aucune méthode de sommer d'une façon effective. Puisque ce théorème est une conséquence immédiate du théorème de Hahn-Banach sur le prolongement de fonctionnelles linéaires, on n'a pas l'unicité. Etant donnée une série arbitraire, on ne peut donner aucune information quant à la "somme". Il s'agit d'une existence idéale, une existence faible. Je crois que Borel ne l'a pas accepté comme une vraie solution de son problème à cause de son attitude envers es méthodes ineffectives, Borel étant semi-intuitionniste. Quel est le sens de ce résultat ? Je n'en connais pas des applications essentielles. Cependant, il y a beaucoup d'applications du théorème de Hahn-Banach. Pourquoi pas de $\operatorname*{Lim}_{n \to \infty}$? Est-ce que les ε et δ sont quand même inévitables en analyse ? Pourquoi ? Est-ce qu'il y a des propriétés de lim que Lim ne possède pas ? Une certaine mesure de constructivité, est-elle nécessaire ? (Comparez l'analyse non-standard qui est non-constructive).

<u>2. Des problèmes de la mesure.</u>

Tout d'abord la théorie de la mesure des ensembles était une théorie constructive : la mesure de Cantor, de Jordan, de Borel. On attribuait une mesure à certaines classes d'ensembles. Lebesgue (1905) posait le problème général d'associer à <u>toute</u> fonction bornée une intégrale, vérifiant certaines conditions. Ce problème se traduit en un problème sur la mesure des ensembles. On sait que Lebesgue ne donnait pas la solution. Il se tournait vers une méthode constructive pour une classe d'ensembles, les ensembles L-mesurables. Cependant, le problème admet une solution, c'est-à-dire une solution ineffective, donc au sens d'existence faible. Banach (1923) démontra ceci pour R au moyen des méthodes d'induction transfinie. En 1932 il démontra l'existence au moyen du théorème de Hahn-Banach. Pour R^1 et R^2 il existe d'une façon idéale une <u>mesure universelle</u> vérifiant

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B), \; A \cap B = \emptyset \; ,$$

$$\mu(A) \geqslant 0$$

$$\mu(A) = \mu(B) \text{ si } A \cong B \; .$$

On ne connaît aucun exemple effectif.

C'était le point de départ d'une longue série d'articles : le problème en R^n , additivité restreinte ou additivité totale, sans ou avec invariance par rapport à certaines transformations, groupes à moyenne, problèmes sur des cardinaux mesurables.
Je cite les noms de Banach, Steinhaus, Ulam, von Neumann.
On trouve ainsi la même situation que pour les séries divergentes, à cette différence que, quant à la théorie de la mesure, la théorie s'est développée en une théorie extensive liée à certaines questions profondes.

Pour un autre exemple d'existence faible, je pourrais traiter les solutions discontinues, souvent étudiées, de l'équation fonctionnelle de Cauchy

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \; .$$

Aucune solution discontinue effective n'est connue (bien qu'on puisse donner quelque information sur des ensembles dénombrables). La question se pose alors : qu'est-ce que signifie "existence" dans une telle situation ?
Mais je préfère à traiter quelques exemples d'un autre caractère.

3. Fonctions continues non-dérivables.

Après une longue période d'incertitude concernant la notion de continuité en relation avec l'existence d'une dérivée, plusieurs exemples concrets de fonctions continues non-dérivables furent données (Weierstrass, Riemann, Lebesgue). Par exemple

$$f : f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \sin(n^2 x) .$$

Dans les années vingt, une nouvelle direction de recherche se présentait. On pose le problème de démontrer l'existence de telles fonctions sans se référer à des exemples effectifs. De telles fonctions sont-elles "normales" ou "exceptionnelles" ? La réponse fut donnée dans le cadre de l'analyse fonctionnelle. On considère l'espace C des fonctions continues dans $[0,1]$ muni de la norme

$$\| f \| = \sup |f(x)| .$$

et le sous-espace $N \subset C$ des fonctions qui ne possèdent pas une dérivée finie (à droite ou à gauche). On démontre alors que N est de seconde catégorie de Baire dans C. Formulé d'une façon non-mathématique cela veut dire : les fonctions continues admettant une dérivée partout finie sont des exceptions.

On a démontré plusieurs théorèmes de ce type, en utilisant des méthodes topologiques ou certains résultats de la théorie des opérations linéaires. Parfois ce sont des démonstrations simples.

Quelle est la philosophie de tels résultats ? On a cherché des exemples et on les a trouvé. Peut-on expliquer pourquoi ce n'était pas en vain et pour quelle raison ? C'est que la théorie moderne nous apprend qu'il y en a de nombreuses. En général on obtient de tels résultats - et il y a plusieurs autres exemples - au moyen d'un outil puissant - en apparence simple mais en réalité profond - , plus puissant que l'analyse classique, à savoir le lemme de Zorn et ses conséquences. Mais il faut payer le prix : on perd l'efficacité.

4. Séries de Fourier.

Pour les séries de Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

on a une situation analogue. Tout d'abord on pensait que pour toute fonction continue f la série de Fourier de f convergeait partout vers f. En 1863 du Bois-Raymond donnait un exemple effectif d'une fonction dont la série de Fourier ne converge pas partout. Elle était de la forme

$$\sum_{p=1}^{\infty} \mu_p \, \rho(\sin px) \cos \psi(\sin px),$$

ou ρ et ψ sont certaines fonctions oscillantes que je n'ai pas besoin d'expliciter. A l'aide de telles fonctions il construisait des exemples de fonctions pour lesquelles l'ensemble des points de divergence était plus compliqué. Alors une évolution commençait. On a donné des exemples plus simples. En 1906 Lebesgue posait le problème s'il existe des fonctions dont la série diverge partout. On généralisa le problème en considérant des fonctions de L^1 et L^2 et la convergence ou divergence presque partout. Dans les années vingt, on démontra au moyen des méthodes de l'analyse fonctionnelle qu'il existe des fonctions dont la série de Fourier ne converge pas partout sans les expliciter ; c'est donc un résultat faible. Plus tard : "L'ensemble des $f \in L^1$ dont la série de Fourier diverge dans L^1 est résiduel dans L^1 " . La notion "résiduel" est liée aux catégories de Baire. C'est un domaine de recherche jusqu'à nos années.

Dans les exemples 3 et 4 on voit deux aspects : des exemples effectifs et des théorèmes sur des collections d'un caractère faible. Dans les exemples 1 et 2 au contraire on ne connaît aucun exemple effectif.

On peut donner plusieurs autres exemples d'une pareille évolution dans les problèmes. Je me limiterai à en mentionner quelques uns.

(i) Exemples de séries $\Sigma\, a_n z^n$ dont le cercle de convergence est une coupure et, d'autre part, théorèmes concernant la totalité de telles séries en analyse complexe.

(ii) Le problème des moments, c'est-à-dire l'existence d'une mesure μ vérifiant une infinité d'équations

$$\int_I x^n \, d\mu(x) = c_n \ , \ n = 1,2,\ldots,$$

c_n étant une des constantes données. D'une part solutions explicites, d'autre part des conditions d'existence (Stieltjes, Hamburger, Banach).

(iii) Fonctions quasi-analytiques en quelque relation avec le problème des moments (Denjoy, Carleman, Borel, Wolff).

(iv) Systèmes infinis d'équations linéaires à une infinité d'inconnues.

(v) Equations intégrales (théories de Fredholm et de Volterra) et théorie des opérateurs (théorie spectrale) dans les espaces de Banach.

(vi) Théorie des équations différentielles (solutions explicites ; propriétés démontrées sans les connaître explicitement).

Bien entendu : la phase des exemples effectifs n'est pas finie : la non-constructivité n'est pas un but en elle-même. Mentionnons le problème de l'existence ou non-existence d'une base pour tout espace de Banach séparable posé par Banach en 1932. En 1973, Enflo donnait une réponse en donnant un exemple effectif d'un espace de Banach sur R, qui n'a pas une base. Mais alors, dans l'évolution un nouveau problème se présente : il s'agit de caractériser par des conditions intrinsèques les espaces de Banach qui possèdent une base et ceux qui ne la possèdent pas. C'est alors un aspect non-constructif qui peut contribuer à mieux comprendre le phénomène.

Je finirai par quelques remarques générales.

1. J'ai voulu indiquer que sous l'influence de la théorie des ensembles et de la topologie le <u>type des problèmes</u> est changé, ou du moins un nouveau type se présentait à côté des problèmes classiques (l'existence faible).

Dans une étude antérieure j'ai étudié l'influence croissante des méthodes et des résultats de l'algèbre moderne en mathématique. Il y a une tendance pour exprimer les résultats dans une forme algébrique (groupes de Lie, algèbres de fonctions, topologie algébrique etc.) On peut à peine se figurer la mathématique moderne sans les conceptions de l'algèbre. C'est l'aspect de <u>l'algébrisation</u>.

Quelles sont les relations historiques entre ces deux aspects ? Quel est le rôle de la théorie des ensembles dans l'algébrisation ?

2. Bien qu'il y ait certaines indications dans les travaux de Gauss, Dirichlet et Riemann, l'introduction de la notion d'existence

faible était surtout un développement post-cantorien (évidemment sans usage de cette dénomination). C'était un développement important, ajoutant à certaines parties de la mathématique un nouveau niveau plus élevé, marquant pour ainsi dire une discontinuité dans l'évolution.

On peut indiquer d'autres notions d'une pareille importance : le rôle des axiomes et l'axiomatisation, la notion de construction en géométrie et en analyse, la notion de groupe abstrait marquent toutes des discontinuités. Je crois que dans l'évolution, les discontinuités jouent un rôle important en ce sens que celles-ci soient les causes du développement. Cela demande une étude historique de conceptions. De quelle façon se développèrent de nouvelles conceptions dans la pensée des mathématiciens ?
S'agit-il de développements graduels préparés en coopération, ou est-ce que de telles évolutions sont surtout liées à une personne ?

3. Une autre question s'y rattache. Jadis les influences externes des sciences de la nature étaient importantes (l'existence forte et la physique). Il y en a encore, mais je crois qu'en nos années le progrès se fait principalement par des influences internes. L'histoire de ce point de vue serait intéressante.

BIBLIOGRAPHIE

1. R. Apery, Mathématique constructive. Collection Philosophie et Mathématique, Séminaire de l'Ecole Normale Supérieure. Irem Paris Nord, Villetaneuse, décembre 1980.
2. S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Warszawa 1932.
3. D. van Dalen, La philosophie intuitionniste et ses conséquences mathématiques. Collection Philosophie et Mathématiques, Séminaire de l'Ecole Normale Supérieure, Irem Paris-Nord, Villetaneuse, octobre 1980.
4. E. Dubinsky, Schwartz spaces, nuclear spaces and tensor products, by Yan-Chueng Wong. Bull. Am. Soc. 3, no. 1 (1980), 762-766.
5. A.F. Monna, Functional analysis in historical perspective, Utrecht-New-York 1973.
6. A.F. Monna, L'algébrisation de la Mathématique, Réflexions historiques. Communications of the Mathematical Institute, Rijksuniversiteit Utrecht 6-1977.
7. A.F. Monna, Evolutions de problèmes d'existences en analyse, essais historiques. Communications of the Mathematical Institut, Rijksuniversiteit Utrecht 9-1979.