Séminaire de philosophie et mathématiques

Jean Dieudonné

La domination universelle de la géométrie

Séminaire de Philosophie et Mathématiques, 1981, fascicule 4
« Domination universelle de la géométrie », , p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1981___4_A1_0>

J. DIEUDONNE - LA DOMINATION UNIVERSELLE DE LA GEOMETRIE

Contrairement à une croyance très répandue, l'idée d'une géométrie "pure", séparée de l'algèbre, est tout à fait récente (début du 19ème siècle) ; elle était complètement étrangère aux Grecs, qui ne connaissaient pas l'algèbre au sens moderne. En revanche, leur géométrie était vraiment une "algèbre-géométrie", un mélange complexe de raisonnements purement géométriques, et de calculs sur des rapports de segments. Par exemple, pour prouver la plupart des propriétés des coniques, Apollonius utilise ce que nous appellerions l'équation cartésienne de la courbe par rapport aux deux axes formés par une tangente à la conique et le diamètre correspondant. D'un autre côté, la solution des équations quadratiques est présentée comme une construction géométrique d'aires. Enfin, la méthode de résolution d'un problème algébrique, qui consiste à rechercher l'intersection de deux courbes, est l'une des plus anciennes pour les mathématiques grecques : la solution donnée par Ménechme au problème de la "duplication du cube" (c'est-à-dire : comment trouver un rapport x/y tel que $(x/y)^3 = a/b$, a/b donné) consistant à trouver l'intersection des deux courbes $xy = ab$, $ay = x^2$, et c'est ce qui introduisit les coniques en mathématiques.

Dès que l'invention des coordonnées eut agrandi énormément le domaine de la géométrie, Descartes et Newton insistèrent sur la possibilité d'utiliser ce nouvel outil pour résoudre des équations beaucoup plus compliquées par l'intersection de courbes. Ainsi, encore une fois, contrairement à ce que pensent la plupart des gens, la méthode des coordonnées s'applique dans les deux sens, unissant algèbre et géométrie plutôt que remplaçant l'une par l'autre.

Cette possibilité d'interpréter les problèmes algébriques en termes géométriques eut un grand attrait pour les mathématiciens dès la fin du dix-septième siècle. Malheureusement elle se limitait aux problèmes à deux ou trois variables indépendantes. Mais, avec le développement de la Mécanique et de l'Astronomie, les problèmes faisant intervenir un nombre quelconque de variables (les "degrés de liberté") devinrent de plus en plus courants ; qui plus est, le passage de n à $n + 1$ variables ne modifiait pas généralement de façon notable le traitement algébrique. La tentation d'utiliser dans des problèmes de ce genre un langage inspiré de la géométrie devint ainsi irrésistible au milieu du 19ème siècle ; après 1870, on admit la possibilité d'utiliser en mathématiques un langage <u>conventionnel</u>, dérivé de la géométrie ordinaire, sans bien sûr continuer de prétendre que cela correspondait à une réalité physique sous-jacente. Au lieu de parler d'un système de n nombres, on dirait qu'il s'agissait d'un "point dans un espace à n dimensions" ; l'ensemble de tels systèmes satisfaisant à une équation linéaire serait appelée "hyperplan" ; etc. Le succès de cette idée a été extraordinaire et a proliféré durant le siècle dernier dans un nombre inattendu de domaines ; dans la suite de cet exposé, j'aimerais insister sur certains des points-clés de cette évolution.

1 - Géométrie élémentaire euclidienne, affine et projective de dimension n .

Il était relativement facile d'étendre à un espace à n dimensions les notions habituelles de géométrie euclidienne : longueur, angle, aire, volume, etc. et beaucoup de théorèmes classiques pouvaient immédiatement être généralisés avec très peu de modifications. Ces généralisations auraient suscité seulement un intérêt modéré s'il s'était agi d'une simple routine ; mais, ce faisant, apparurent des phénomènes complètement inattendus, sans équivalent dans l'espace ordinaire. Le premier des plus remarquables fut la géométrie euclidienne de dimension 4, quand sa mise en rapport avec la théorie des quaternions révéla des théorèmes beaucoup plus intéressants qu'en dimension 3 ; tout aussi intéressante était la possibilité, mise en évidence un peu plus tard par Klein, d'identifier les droites d'un espace de dimension 3 avec les points d'une quadrique d'un espace de dimension 5. Déjà, dans ces cas là, les rapports avec la théorie des groupes étaient évidents ; un autre exemple fut l'identification du groupe "conforme" de Moebius avec le groupe des isométries d'un espace hyperbolique non euclidien de dimension 3. De tels exemples sont maintenant légion ; l'un des plus récents et des plus remarquables est la découverte par Conway d'un nouveau groupe simple d'ordre 4.157.776.806.543.360.000, défini comme un groupe d'automorphismes d'un sous-treillis de Z^{24} dans un espace de dimension 24.

Mais on découvrit rapidement des relations bien plus fondamentales entre la géométrie euclidienne et la théorie des groupes, la plus intéressante étant la classification des groupes de Lie simples. Elle fut d'abord obtenue par des calculs fastidieux de déterminants ; pendant la période 1920-1940, on constata qu'elle équivalait aux merveilleuses propriétés des configurations géométriques connues sous le nom de "chambres de Weyl" dans des espaces euclidiens de dimension n objets extraordinaires qui n'ont pas cessé, 50 ans durant de révéler des caractères quasi-miraculeux, dépassant de loin en élégance et en beauté toutes les configurations classiques de la géométrie élémentaire. Durant les quinze dernières années, c'est à partir de ces configurations que l'on en a découvert d'autres plus remarquables encore, les "immeubles de Tits", avec des applications complètement inattendues dans des domaines des mathématiques très éloignés les uns des autres. Je pense qu'il est extrêmement probable que de tels résultats n'eussent jamais été obtenus sans le soutien de la géométrie.

En géométrie affine, le concept qui est devenu central est celui de la convexité , à la fois pour les "polytopes" (généralisation des polyèdres dans un espace quelconque de dimension n et pour des "corps convexes" plus généraux. Il suffirait de rappeler ici l'idée qu'eut Poincaré de découper un espace à n dimensions en "cellules convexes", qui fut le point de départ de ce qu'on appelait alors la "topologie combinatoire", et qui demeure fondamentale sous son appellation moderne de "topologie algébrique. Et chacun sait que les applications modernes des mathématiques à la programmation linéaire et à la recherche opérationnelle sont fondées sur la considération des ensembles convexes dans des espaces à un grand nombre de dimensions .

2 - Géométrie différentielle et géométrie algébrique

Les Mathématiciens ne mirent pas longtemps à saisir les nouvelles possibilités offertes par l'idée d'espaces de dimension quelconque dans les domaines de la géométrie différentielle et de la géométrie algébrique, surtout limitées, avant 1850, à l'étude des courbes et des surfaces dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. A partir de 1854, Riemann, avec sa profonde intuition créa le concept de variété riemannienne de dimension quelconque, qui devint le centre des recherches ultérieures en géométrie différentielle avec Sophus Lie et Elie Cartan et fut aussi le fondement de la théorie de la relativité générale.

D'autre part quand, après 1870, les géomètres commencèrent l'étude des surfaces algébriques, ils s'aperçurent que pour étendre les travaux de Riemann sur les courbes algébriques, ils avaient affaire à des variétés réelles de dimension 4, dans un espace de dimension 6, ce qu'ils firent en se référant hardiment à l'"intuition géométrique" !

Naturellement, comme dans la géométrie euclidienne élémentaire, le succès de ces incursions dans un territoire inexploré repose principalement sur le fait qu'elles ont révélé des phénomènes complètement nouveaux, tels que la théorie des espaces symétriques et ses rapports avec les groupes de Lie semi-simples et ont donné une bien meilleure compréhension de l'allure générale des structures sous-jacentes par l'introduction de concepts fondamentaux comme les espaces fibres et les connexions.

En réalité, sur beaucoup de points, l'étude de ce qui arrive en dimension quelconque a conduit à s'attendre à des difficultés en ce qui concerne les petites dimensions, qui ont tendance à être l'exception.

3 - Analyse globale

Les problèmes d'Analyse qui découlent de la Mécanique ou de l'Astronomie n'utilisaient pas uniquement les espaces $\mathbb{R}^n$; en général, les variables dynamiques n'étaient pas "libres", mais devaient satisfaire certaines relations. En langage géométrique, cela signifiait que l'"espace des phases" n'était pas habituellement l'espace $\mathbb{R}^n$ tout entier, mais ce qui généralise les courbes et les surfaces, qu'on appelle précisément les "variétés" au sens riemannien, et qui pouvaient même présenter des singularités.

Sophus Lie et H. Poincaré furent probablement les premiers mathématiciens à comprendre que l'Analyse mathématique devait être faite, non seulement dans les espaces $\mathbb{R}^n$, mais plus généralement sur les variétés et Poincaré découvrit que le comportement des solutions des systèmes différentiels sur une variété était en rapport avec les propriétés purement topologiques de cette variété. C'est cette interaction de la Topologie, de la Géométrie et de l'Analyse que nous appelons maintenant "Analyse Globale", l'un des domaines les plus actifs de la recherche mathématique moderne ; mentionnons seulement à titre d'exemple les connexions étonnantes récemment découvertes entre les "équations de Yang-Mills" de la Physique quantique et certains fibrés vectoriels holomorphes en géométrie algébrique.

4 - Les conquêtes de la Géométrie

Il peut paraître surprenant qu'un simple changement de langage ait apporté un tel progrès. L'impact psychologique qu'il produit semble venir de ce qu'on pourrait appeler un transfert de l'intuition. S'il est en effet confronté à un problème entièrement nouveau, l'une des principales difficultés rencontrées par un mathématicien est de trouver par où commencer, ou plus précisément quel genre de questions il faut se poser. S'il est possible de formuler le problème dans des termes qui montrent une certaine ressemblance avec un problème de géométrie ordinaire dont la solution est connue, on peut immédiatement se demander si cette solution peut aussi être transposée au nouveau problème ; et même si l'issue se révèle très différente de ce qu'on avait espéré, au moins une voie a-t-elle été ouverte pour la recherche. Pour donner un exemple très trivial, une ligne et un plan ont "en général" un seul point commun ; d'où, dans un espace de dimension n, on s'attendra à ce qu'"en général" l'intersection d'une variété de dimension p avec une variété de dimension n-p soit composée de points isolés.

C'est pourquoi il est aisé de comprendre pourquoi les mathématiciens ont hautement apprécié le langage géométrique, au point qu'ils ont très tôt procédé à sa généralisation à des domaines mathématiques, qui en paraissaient très éloignés. L'un des exemples les plus anciens est celui de l'algèbre linéaire ; en mathématiques classiques, il s'agit de n-uplets de nombres réles ou complexes et de matrices à coefficients réels ou complexes ; en langage géométrique, cela devient des vecteurs et des applications linéaires, ce qui a permis une formulation si simple et si appropriée de tant de Théorèmes qu'on l'étendit bientôt à l'algèbre linéaire au sens moderne, où les "scalaires" ne sont plus des nombres, mais des éléments d'un corps ou d'un anneau quelconque. Il fut alors possible de parler par exemple de "géométrie" dans un "plan" avec seulement un nombre fini de points. Un autre exemple est l'étude des groupes classiques sur un corps fini, qui -dans les travaux de Jordan et de Dickson les pionniers de cette théorie- était alourdie de calculs compliqués de matrices, alors que le langage géométrique permet de traduire leurs idées en des termes très simples et permet de les généraliser beaucoup . En fait, ce langage, avec ses connotations "spatiales", est devenu si fondamental en algèbre moderne que s'en passer dans des développements récents comme l'algèbre homologique serait d'une lourdeur pratiquement intolérable.

Une transformation bien plus importante eut lieu en géométrie algébrique après 1930. En vue des applications à la théorie des nombres, il devint absolument impératif d'utiliser les variétés algébriques définies sur des corps quelconques. Au départ le langage géométrique nécessaire fut simplement celui de l'algèbre linéaire (sous sa forme "projective"), et la difficulté était d'imaginer des preuves purement algébriques pour des résultats qui dans le cas classique s'obtenaient par l'usage de la théorie des fonctions analytiques de variables complexes. Mais, après 1950, une sorte de géométrie complètement nouvelle émergea, inspirée des notions contemporaines de fibrés vectoriels et de faisceaux en géométrie différentielle et en topologie, qui culmina dans la théorie extraordinaire des schémas, laquelle englobe maintenant toute l'algèbre commutative comme cas particulier.

Enfin, le langage de la géométrie a été généralisé dans une direction complètement différente. Les concepts traditionnels de limite et de continuité dans $\mathbb{R}^3$ s'expriment très simplement en utilisant la distance euclidienne d(x,y) de deux points ; mais on n'utilise en réalité qu'un très petit nombre de propriétés de cette distance, essentiellement l'inégalité triangulaire $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$. En 1906, Fréchet observa que, quand il était possible de définir sur un ensemble <u>quelconque</u> une fonction d(x,y) de deux éléments qui avait les mêmes prorpriétés, alors on pouvait aussitôt tranférer à cet ensemble beaucoup de notions et de théorèmes tirés mot à mot de la théorie élémentaire des limites. C'était la naissance de la théorie des espaces métriques, rapidement étendue à ce que nous appelons maintenant la Topologie générale, et que l'on pourrait définir comme une Géométrie dépouillée de tous les concepts impossibles à exprimer en termes d'ensembles ouverts. Parmi les ensembles où les distances pouvaient être définies naturellement, beaucoup se composaient de fonctions, ce qui ouvrit le chemin à ce qu'on appelle maintenant l'Analyse Fonctionnelle, c'est-à-dire l'étude d'espaces de fonctions munis de topologies variées, étroitement liée aux propriétés algébriques de ces expaces. Dans ce domaine, le double rôle du langage géométrique, pour exprimer à la fois les propriétés algébriques et topologiques, a pourvu les mathématiques du concept important d'espaces de dimension infinie.

Une fois de plus, cela a conduit à des conséquences inattendues. Par exemple, un problème difficile dans la Théorie classique du Potentiel, le problème de Dirichlet, a pu être ramené à la généralisation naturelle, dans un espace fonctionnel convenable de la construction classique de la projection orthogonale d'un point sur une ligne ou un plan. Mais la Topologie n'est pas restée confinée à l'Analyse Fonctionnelle ; elle s'est étendue à toutes les parties des mathématiques, et même à ce que l'on prenait pour le domaine propre des mathématiques <u>discrètes</u>, la Théorie des Nombres. Il est à présent parfaitement légitime de considérer la théorie algébrique des nombres comme un chapitre de la théorie générale des groupes topologiques et on parle maintenant de propriétés "locales", s'il s'agit d'entiers, exactement comme si l'on se référait au voisinage d'un point .

En conclusion, peut-on dire que la Géométrie a perdu son identité ? Au contraire, je pense qu'en éclatant au-delà de ses étroites frontières traditionnelles, elle a révélé ses pouvoirs cachés, sa souplesse et sa faculté d'adaptation extraordinaire, devenant ainsi l'un des outils les plus universels et les plus utiles dans tous les secteurs des mathématiques. Et si quelqu'un parle de la "Mort de la Géométrie", il prouve simplement qu'il est complètement ignorant de 90% de ce que font les mathématiciens aujourd'hui.