J. Cassinet

L'axiome du choix avant l'article de E. Zermelo de 1904

Séminaire de Philosophie et Mathématiques, 1981, fascicule 2
« L'axiome du choix avant l'article de E. Zermelo de 1904 », , p. 1-19
<http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1981___2_A1_0>

L'AXIOME du CHOIX avant l'article de E. Zermelo de 1904

J. CASSINET

En septembre 1904 la revue Matematische Annalen (Tome 59) publie un article du mathématicien allemand Ernst ZERMELO intitulé "Preuve du fait que tout ensemble peut être bien ordonné" . Or cette preuve suppose l'acceptation d'un principe énoncé ainsi par ZERMELO :

> " à toute partie M' de M est associé un élément arbitraire m'_1 appartenant à M' ; m'_1 est appelé élément distingué de M' "

Ce principe qui va très vite prendre le nom d'axiome de M. Zermelo deviendra pous tard l'axiome du choix. Ainsi moyennant l'axiome du choix, l'auteur démontre le théorème du bon ordre qui énonce la possibilité pour tout ensemble d'être bien ordonné, c'est-à-dire tel que toute partie de l'ensemble admette, pour l'ordre en question, un plus petit élément. Cet article déclenche une polémique extrêmement vive, au point que H. Lebesgue pourra parler de "bombe dont Zermelo a allumé la mèche". A cette polémique, dès la fin de 1904 et le début de 1905, les plus grands noms de l'élite mathématique vont participer : E.W. Hobson, G.H. Hardy, Ph. E.B Jourdain, B. Russell, dans une série d'articles parus dans les Proceedings of London Mathematical Society ; R. Baire, E. Borel, H. Lebesgue, J. Hadamard, dans un échange de lettres bien connues et publiées dans le Bulletin de la S.M.F. (n° 33) ; G. Peano dans un article paru aux Rendiconti del circulo Matematico di Palermo, etc. Cette polémique va durer jusqu'en 1908 date à laquelle Zermelo publiera dans le tome 65 de la revue Matematische Annalen deux articles simultanés : - l'un intitulé "Nouvelle preuve du fait que tout ensemble peut être bien ordonné" dans lequel entre cette nouvelle preuve, il va réfuter toutes les critiques de manière fort pertinente et très polémique.

- l'autre, qui va lui permettre d'asseoir son argumentation "Recherche sur les fondements de la théorie des ensembles" dans lequel se trouve la première axiomatique d'une théorie des ensembles, et où l'auteur donnera à son principe le nom d'Axiome du Choix (Auswahl axiom).

L'essentiel de la critique formulée à l'encontre de la démonstration de 1904, est la non effectivité des démonstrations qui reposent sur une infinité de choix arbitraires non déterminés. L'étude de la "pré-histoire" de l'axiome du choix, c'est-à-dire de l'utilisation implicite au nom de ce principe dans les démonstrations avant 1904, va nous permettre d'essayer de répondre à certaines questions :

. l'axiome du choix émerge-t-il naturellement dans le progrès des mathématiques à la fin du XIX^{e} siècle et au début du XX^{e} siècle ?

. la polémique est-elle dûe à la différence de conception des mathématiques qu'ont les mathématiciens de cette époque ? (empiristes et idéalistes pour reprendre la terminologie de P. DU BOIS REYMOND).

Cette étude de la période préhistorique va montrer deux choses :

-1- l'utilisation implicite de l'axiome du choix dans les démonstrations est abondante entre 1872 et 1904, y compris chez les futurs adversaires de cet axiome.

-2- la mise en évidence de l'utilisation de l'axiome du choix a lieu, bien avant 1904, dès 1890 ; 92 ; 96 ; dans l'école mathématique italienne, avec mise en doute de la validité des démonstrations où figure l'utilisation de cet axiome ; cependant ces mises en évidence ne suscitent ni un grand intérêt ni une grande émotion.

On peut donc penser que, plus que le caractère de l'axiome du choix c'est la conséquence qu'en tire Zermelo, à savoir la bonne ordonnabilité de tout ensemble, qui est davantage cause de tout ce tumulte. A l'appui de cet argument, ajoutons que les autres formes équivalentes à l'axiome du choix, dont l'équivalence est évidemment encore cachée, ne posent pas de problème majeur : ainsi la loi de comparabilité des ensembles, l'idemmultiplicité des cardinaux transfinis ($a^2 = a$), par exemple. D'ailleurs D. Hilbert avait mis à l'ordre du jour, le problème de la bonne ordonnabilité du continu au Congrès de Paris en 1900 ; J. König avait, en 1904, au Congrès d'Heidelberg, secoué le monde mathématique en énonçant une "démonstration" de la non bonne ordonnabilité de $\mathbb{R}$; G. Cantor en particulier réclamait que l'on cherche la faille dans cette démonstration qui se révéla plus tard erronée ne serait-ce que par l'utilisation de résultats faux dûs à Bernstein, mais en outre par l'utilisation de l'axiome du choix, implicitement dans la démonstration.

Dès lors il convient d'étudier cette période préhistorique de l'"axiome de Monsieur Zermelo" .

- I -

Utilisations implicites de l'axiome du choix dans les démonstrations de 1872 à 1904.

Ces utilisations vont apparaître presqu'à coup sûr au moment où les notions de limite, et d'ensemble dans lequel les limites ont lieu, vont se préciser. Il faut remarquer que chaque fois que les notions de limite vont s'éclairer, l'ambiguïté va cependant apparaître car les définitions seront toujours doubles :

. la continuité d'une fonction en un point, sera définie selon un sens dit de Cauchy (par les ε et les η), mais aussi selon un sens dit "de Heine" (par les suites)

. $\mathbb{R}$ corps des réels sera construit par la méthode dite des "coupures" (Dedekind) mais aussi par les suites "de Cauchy" (G. Cantor)

. les fonctions ponctuellement discontinues sont définies par Hankel, puis par Dini, de façon différente

. les notions de points d'accumulation et de points limites seront souvent confondues, la première étant définie par les voisinages, la seconde à l'aide des suites ; ainsi les ensembles dérivés, ensembles parfaits etc. attachés aux débuts de la topologie reposeront-ils souvent sur une définition ambigüe.

L'analyse et les débuts de la topologie vont donc fournir un terrain propice à l'intervention clandestine de l'axiome du choix.

D'autre part les notions d'ensemble infini reposent sur une dualité avec la définition de Dedekind : ensemble équipotent à une de ses parties propres, et la définition comme ensemble non inductif. Ceci a une influence sur diverses définitions d'opérations sur les cardinaux et c'est un deuxième domaine où va apparaître l'action de l'axiome du choix.

1 - L'axiome du choix en analyse

1.1. La continuité en un point

Il est naturel de rencontrer une des plus précoces utilisations d'infinité de choix aribraires, dans le mémoire que E. Heine publié en 1872 (Die Elemente der functionenlehre) où il démontre que la continuité, tel qu'il la définit, implique la continuité au sens de Cauchy. Pour arriver à ses fins, il nie que f soit continue en x_o au sens de Cauchy, c'est-à-dire :

$(\exists \varepsilon_o)\ (\forall \eta)\ (\exists x)\ (\varepsilon_o > 0$ et $\eta > o$ et $x \in]x_o - \eta, x_o + \eta[$ et $|f(x) - f(x_o)| > \varepsilon_o)$

On peut à η fixé, "choisir" $\eta_1 \in |\eta/2, \eta|$ et poser $x_1 = x_o + \eta_1$ tel que $|f(x_1) - f(x_o)| > \varepsilon_o$. Ensuite on "choisit" $\eta_2 \in |\eta/4, \eta/2|$ et on pose $x_2 = x_o + \eta_2$ etc.

La suite x_1 , x_2 ,..., x_n ,... tend vers x_o ; or pour tout n , $|f(x_n) - f(x_o)|$ étant supérieur à ε_o , la suite $\{f(x_n)\}$ ne tend pas vers $f(x_o)$. La non continuité de f en x_o au sens de Cauchy implique donc la non continuité de f en x_o au sens de Heine, moyennant une infinité de choix arbitraires. Cette démonstration sera reprise un grand nombre de fois dans les ouvrages ultérieurs d'Analyse. Citons : Fondamenti per la turica delle funzioni di variabile reali d'Ulisse DINI (1878) (pp 24-25)

. Introduction à la théorie des fonctions de variable réelle de Jules TANNERY (1886) (pp. 108-109)

. Cours d'Analyse de René Baire (p. 46-47) (imprimé en 1907 mais la partie concernée reprend une rédaction de 1903)

Dans le même ordre d'idées on peut noter : l'utilisation implicite de l'axiome du choix chez :

. U. DINI dans l'ouvrage déjà cité, pour démontrer la condition nécessaire et suffisante d'existence d'une limite à droite pour une fonction en un point (p. 27-28)

. G. DARBOUX, dans on mémoire sur les fonctions discontinues (1874 - Annales de l'Ecole Normale Supérieure , pp. 73-74) pour démontrer un théorème dû à Thomae disant que "si f est une fonction continue sur $[a,b]$, pour tout $\sigma > o$, il existe $\delta > o$, tel que toute subdivision de $[a,b]$ dont les paliers sont tous inférieurs à δ est telle que la fonction f a une oscillation sur ces paliers, inférieure à σ "

. T.J. STIELJES dans un article paru aux Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse en 1894 intitulé "Recherches sur les fractions continues" pour démontrer que toute fonction croissante sur $|a,b|$ admet des points de continuité sur $|a,b|$ (pp. 69-70) .

1.2. Les fonctions ponctuellement discontinues

Elles sont définies par Hankel dans une publication de Tübingen de 1870 (Untersuchungen über die unendliche oft oscillierenen und unstetigen functionen) comme des fonctions dont les points où les sauts sont supérieures à un nombre k > o, (quel que soit k) constituent un ensemble non dense dans [a,b], intervalle de définition de ces fonctions. Ulisse DINI définira dans l'ouvrage de 1878 déjà cité, les fonctions "puntegiatte discontinue" comme ayant un nombre infini de points de discontinuité sur [a,b], mais telles qu'aussi petit soit un sous-intervalle de [a,b] il contienne cependant des points de continuité pour ces fonctions. Ce n'est qu'en 1907, lorsque paraîtra l'ouvrage du mathématicien anglais E.W. Hobson (Theory of Functions of real variable ; pp. 243-244) que sera mise en évidence l'intervention de l'axiome de Zermelo dans la démonstration d'équivalence des deux définitions de la notion de fonction ponctuellement discontinue, au moment où il faut démontrer que la définition au sens de Hankel implique celle de Dini. Comme ce dernier, qui connaissait avant 1878 les travaux de Hankel, démontre dans ses "Fondamenti per una teorica delle funzioni di variabili reali" que les définitions sont équivalentes il ne peut échapper à l'utilisation d'une infinité de choix arbitraires. En outre l'utilisation de sa définition l'amènera à réintroduire le même procédé pour démontrer (p. 246) que toutes les fonctions ponctuellement discontinues sur [a,b] sont intégrables au sens de Riemann sur [a,b].

Dans le même genre il est possible de citer la Thèse de Baire (24 Mars (1899) pp. 58-61) dans laquelle l'auteur démontre que toute fonction ponctuellement discontinue sur un ensemble parfait est limite uniforme d'une série de fonctions représentables en séries de fonctions continues ; la démonstration utilise une infinité de choix arbitraires de fonctions.

1.3. Les théorèmes d'approximation, la représentation des fonctions en série.

Un troisième volet d'utilisation en Analyse sera constitué par l'intervention implicite du principe d'infinité de choix arbitraires dans les démonstrations d'existence de développement d'une fonction en série. Ici donc se situent les travaux de Weierstrass, Dirichlet,etc. Karl WEIERSTRASS publie en 1885 un mémoire "sur la possibilité d'une représentation analytique des fonctions dites arbitraires d'une variable réelle" (traduit en français en 1886 par L. Laugel). Il y montre que toute fonction continue est limite d'une suite de fonctions à partir d'intégrales faisant intervenir, à chaque fois, une fonction arbitraire intégrable sur $\mathbb{R}$. Puisqu'il faut choisir dans une multitude et répéter infiniment ce choix, l'auteur utilise bien le principe de choix. Cependant il se pose la question de la validité de sa démonstration à la fin de la première partie de son article, à propos précisément de l'effectivité des choix opérés (page 113 - trad. de L. Laugel).

> " Cette démonstration du théorème en question est, je crois, complètement rigoureuse et peut suffir s'il s'agit seulement de montrer qu'il existe des fonctions rationnelles entières G(x) qui dans tous les points d'un intervalle donné se rapprochent d'aussi près que l'on voudra d'une fonction f(x) et qu'elles peuvent être effectivement déterminées".

Mais elles ne peuvent être "effectivement déterminées" ... que par choix effectif de fonctions particulières. Or en l'état du texte de 1885 cette effectivité n'existant pas, l'axiome du choix est implicitement présent dansl'article de Weierstrass ; un peut plus tard cependant il lèvera l'ineffectivité en prenant la suite de fonctions $\Psi_n(x) = e^{-x^2/2^n}$, n décrivant N .

La solution du problème de Dirichlet, consistant à définir une fonction ayant certaines propriétés sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^n$ et vérifiant des conditions fixées sur la frontière D^* de D, utilise des méthodes d'approximation ; à ce titre les études qui s'y rattachent engendrent l'action implicite de l'axiome du choix. Citons, sans trop alourdir les exemples de : A. Paraf ("sur le problème de Dirichlet" Annales Fac. Sc. Toulouse, 1892, pages H25 et H26 ; D. Hilbert ("sur le principe de Dirichlet", 1900 Leipzig, traduction de L. Laugel, pp. 338-339).

1.4. L'intégrale au sens de Riemann.

La définition même de l'intégrale au sens de Riemann sous tend, par une suite de choix arbitraires qui tend à devenir infinie, l'introduction implicite de l'axiome du choix. Dans l'ouvrage de Jules TANNERY déjà cité, (1886 - Introduction à la théorie des fonctions), l'auteur utilisera le procédé afin de démontrer un critère d'intégrabilité s'appuyant sur les sommes de Riemann (pp; 271-273). Une situation analogue . se retrouve dans l'article de W.H. Young "On the general theorem of integration" paru aux "Philosophical Transactions" en 1904 (23 avril), ou encore dans les célèbres "Leçons sur l'intégration" de H. Lebesgue (page 21) .

2 - Les puissances d'ensembles, l'arithmétique des cardinaux.

La notion d'infini prend sa dimension moderne avec les premiers travaux de G. Cantor et R. Dedekind. Le transfini cantorien avec sa suite d'ordinaux, les ensembles "reflexifs" de Dedekind, vont soulever une marée de problèmes où l'axiome du choix va sans cesse, subrepticement s'introduire.

2.1. Les deux façons de définir un ensemble infini

Dans son ouvrage "Was sind und was Sollen die Zahlen" (1887) Richard Dedekind définit un ensemble infini comme un ensemble équipotent à une de ses parties propres. La connaissance de la propriété qu'a un ensemble infini d'être équipotent à une de ses parties propres est ancienne ; on peut lire à ce propos la remarquable démonstration faite par Galilée dans les "Discorsi" (1638) au sujet de l'équipotence de N et de l'ensemble des carrés de N . Chez Dedekind la propriété devient la base de la définition. Or l'autre possiblité de définition d'un ensemble infini est de dire qu'il est non fini, en disant qu'un ensemble fini est un ensemble inductif, c'est-à-dire construit à partir d'un singleton et par adjonction d'éléments distincts les uns des autres. Dedekind s'attaquera à la démonstration d'équivalence de ces définitions et lorsque (Théorème 159 de Was Sund and Was Sollen die Zahlen) il voudra démontrer que tout ensemble non inductif est infini (réflexif) il utilisera une infinité de choix arbitraires d'injections afin de définir une injection de N dans l'ensemble en question. Ce point sera signalé par R. Bettazzi dès 1896, comme on verra plus loin ; B. Russell le notera également dans un article de 1906 et Zermelo dans un article paru aux "Acta Mathematica" en 1909 .

2.2. Continu et dénombrable

La distinction de qualité entre ensembles infinis naît du développement de l'Analyse. L'introduction des nombres réels fait vite apparaître une distinction fondamentale entre l'ensemble des nombres rationnels et l'ensemble des nombres réels. Deux idées forces s'y rattachent

. le dénombrable ne peut aboutir au continu sans un saut décisif ; autrement dit toute réunion dénombrable d'ensembles est dénombrable.

. le dénombrable peut s'extraire de tout ensemble infini, autrement dit le dénombrable est le premier type d'infini .

Dans les deux directions l'axiome du choix se rencontrera.

Qu'il suffise d'énumérer : Paul Du Bois Reymond dans sa "Théorie générale des fonctions" (1877 - "Des ensembles dénombfables en aussi grand nombre qu'on voudra forment par leur réunion un ensemble dénombrable".

H. LEBESGUE dans ses "Leçons sur l'intégration" (1904) (page 19), reprenant Du Bois Reymond.

G. CANTOR dans un article paru en 1895 dans Mathematische Annalen, traduit en français en 1899 par F. Maratte et intitulé "sur les fondements des nombres transfinis" afin de montrer que "$\aleph$ est le plus petit cardinal transfini" indique (p. 359 de la traduction de Maratte).

"Si on sépare de l'ensemble T par un procédé quelconque un nombre fini d'éléments $t_1, t_2, \ldots, t_{\gamma-1}$ on peut toujours en retirer un de plus t_γ . L'ensemble ..."

S^γ nous retrouverons le procédé dans l'ouvrage d'Emile BOREL (Leçons sur la théorie des fonctions - 1898 pages (12-13), dans l'article de A.N. WHITEHEAD (aidé de B. RUSSEL). "On Cardinal Numbers" (American Journal 1902 p. 380) dans l'ouvrage de B. RUSSELL, "Principles of Mathematics" (1903) pages 122-123.

Dans le même esprit la démonstration par Ph. Jourdain ("On transfinite Cardinal Numbers" Phil. Mag. n° 37 (1903) de la propriété $\aleph_\gamma \aleph_\gamma = \aleph_\gamma$, la démonstration par H. Lebesgue dans ses "Leçons sur l'intégration" , de 1904, (page 107), du fait qu'une réunion dénombrable d'ensembles mesurables est mesurable, font toutes deux intervenir un principe de choix ; pour la dernière citée notons que W.Sierpinski le souligne dans une note à l'Académie des Sciences en 1916.

2.3. Les débuts de la topologie ; densité des ensembles.

La notion d'ensemble dérivé P' d'un ensemble P repose sur la notion de point limite ; si un point limite est limite d'une suite "de Cauchy" de points de P, alors P' est l'ensemble de toutes les limites de suites de Cauchy de points de P. Mais il arrive que nombre de mathématiciens prennent pour définition du point limite l'actuelle définition du point d'accumulation. (α est point d'accumulation de P, si tout voisinage de α a une intersection non vide avec P). Parfois encore le point limite est selon les cas utilisé dans les deux sens, par le même mathématicien ce qui introduit alors l'action implicite de l'axiome du choix puisque celui-ci intervient dans l'équivalence entre les deux définitions du point limite (voir à ce sujet W. Sierpinski dans "L'axiome de Zermelo dans la Theorie des Ensembles et l'Analyse"

Bull. Int. Ac. Sc. Cracovie (1918) pp.97-152) au Oeuvres Complètes Tome II pp. 208-255).

Ce type d'action implicite se rencontre par exemple dans un article de Georg Cantor (Mathem. Annalen - 1884 - tome 23 - pp. 454-455) où l'auteur démontre l'existence d'un point d'accumulation pour toute partie P de $\mathbb{R}^n$, ayant une propriété donnée et bornée par un domaine H de $\mathbb{R}^n$; il procède ainsi : il décompose H en un nombre fini de parties de diamètre d < 1 ; il existe au moins une de ces parties, H_1 par exemple, telle que $H_1 \cap P = P_1$ est non vide ; alors H_1 est décomposé en un nombre fini de parties de diamètre d < 1/2 , et il existe une de ces parties H_2 telle que $H_2 \cap P = P_2$ est non vide etc. ; ainsi par une suite infinie de choix $H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots$ on obtient une suite $P_1 \supset P_2 \supset \ldots \supset P_n \supset \ldots$ d'ensembles ayant la propriété requise ; ceci permet à Cantor d'achever sa démonstration.

René Baire dans sa thèse déjà citée (1899) utilise un procédé analogue pour montrer que l'intersection d'une suite transfinie (indicée par la suite des ordinaux) d'ensembles ayant certaines propriétés, ne contient pas des points isolés (Thèse pp. 51-52).

Le même auteur utilise un procédé analogue dans ses "Leçons sur les fonctions discontinues" (écrites avant l'article de Zermelo puisque la préface est datée du 22 Septembre 1904). Il s'agit de démontrer que le dérivé d'un ensemble est fermé (p. 14). Dans le même ouvrage on rencontre une situation analogue aux pages 60-61 lorsque Baire démontre que tout ensemble parfait, c'est-à-dire qui contient ses points limites, est non dénombrable.

De ces préoccupations de nature topologique se rapproche l'article de W.H. Young : "On non uniform convergence and term by term integration" (Proceding of London Mat. Soc. tome I - 1904) où l'auteur démontre (page 97) la non densité d'un ensemble de points jouissant d'une certaine propriété. Un autre article du même auteur sur les ensembles linéaires de points [Quartely Journal - tome 35 (1904) - pp. 102-116] contient aussi, à propos d'ensemble de points isolés, une démonstration utilisant une infinité de choix arbitraires (paragraphe 6) .

3 - L'arithmétique des cardinaux et les diverses formes de l'axiome chez les mathématiciens britanniques, avant 1904.

Les travaux réalisés par A.N. Whitehead et B. Russell sur les cardinaux vont avoir pour but de préciser les conditions d'extension des propriétés des cardinaux finis aux cardinaux infinis. L'axiome du choix, sous des formes diverses se trouve intimement mêlé à ces théories et le point de vue "logistique" de Russell, en particulier, fera beaucoup pour déceler la présence d'"indémontrés" dans le développement des théories en question. Il est donc assez naturel de rencontrer dans les textes de ces auteurs la mise en évidence d'énoncés qui, pour ne pas être donnés dans la forme zermellienne, n'en sont pas moins équivalentes à l'axiome du choix. Le développement de la théorie des cardinaux s'articule autour des travaux de 1902-1903 d'Alfred North Whitehead et Bertrand Russell.

En 1902, paraît un important article signe par A.N. Whitehead dans l'American Journal ; cet article s'intitule "On cardinal numbers". Cependant comme Whitehead le précise lui-même, B. Russell a grandement participé à la rédaction de parties essentielles de cet article, notamment les sections III (en entier) IV et V (en partie).

En 1903, B. Russell publie "Principles of mathematics" qui développe les idées devant servir de base aux futurs "Principia Mathematica".

3.2. Les énoncés sur les cardinaux dans l'article de 1902.

Les intentions de l'article, dont le titre est "On cardinal numbers" sont de définir les nombres cardinaux et les opérations sur ces nombres. Dès le début il est noté que certains théorèmes sont non démontrés (p. 368).

"Les théorèmes disant que si α et β sont deux cardinaux, α infini, et $\alpha > \beta$, alors $\alpha + \beta = \alpha$ et $\alpha \times \beta = \alpha$, ne peuvent être déduits de ces prémisses, et autant queje sache, n'ont jamais été prouvés. Russell note que les premiers d'entre eux découlent d'un autre théorème indémontré (4.3)".

L'énoncé ($\alpha + \beta = \alpha$ et $\alpha \times \beta = \alpha$), pour les cardinaux infinis, $\alpha > \beta$, est un énoncé équivalent à l'axiome du choix. En effet, les énoncés suivants " m,n étant des cardinaux infinis, $m < n$, n est l'unique cardinal tel que $m + n = n$ (resp. $mn = n$)" sont équivalents à l'axiome du choix, cela a été démontré par Tarski*; or ces énoncés impliquent de toute évidence l'énoncé ci-dessus de Whitehead.

---

* Il s'agit d'un article intitulé "Sur quelques théorèmes équivalents à l'Axiome du choix" paru dans la revue polonaise "Fundamenta Mathematicae" Tome 5 - pages 147-154 - (1924).

D'autre part : $\alpha + \beta = \alpha$ et $\alpha \times \beta = \alpha$, implique $\alpha + \beta = \alpha \times \beta$, qui pour les cardinaux infinis, $\alpha > \beta$ constitue une proposition équivalente à l'axiome du choix**. L'énoncé

" $\alpha > \beta$, α, β infinis et $\alpha + \beta = \alpha$ et $\alpha \times \beta \quad \alpha$ "

est bien un énoncé équivalent à l'axiome du choix. Quant au théorème (4.3) qui figure dans la citation précédente, il énoncé, sous la plume de Russell puisqu'il s'agit de la section III : (p. 381) que :

"Tout ensemble infini est sujet à partition en ensembles dénombrables" ou, ce qui revient au même : "aleph zéro" divise tout cardinal transfini. Or, Tarski a démontré en 1924 que l'énoncé : "Si $m < n$, m,n étant des cardinaux infinis alors il existe un cardinal p tel que $n = mp$ " est un équivalent de l'axiome du choix. De toute évidence l'énoncé 4.3 découle de cet énoncé.

D'autre part, de l'énoncé 4.3 Russell déduit :

4.37 $[\beta < \gamma \; . \quad . \; \alpha + \beta \leqq \alpha + \gamma]$

et 4.39 $[\beta < \gamma \; . \quad . \; \alpha \, . \, \beta \leqq \alpha \, . \, \gamma]$

Mais 4.37 implique : $\beta < \gamma$ et $\alpha < \delta \; . \supset . \quad \alpha + \beta < \gamma + \delta$

et 4.39 implique : $\beta < \gamma$ et $\alpha < \delta \; . \supset . \quad \alpha\beta < \gamma\delta$

Or, ces énoncés sont tous deux équivalents à avec le théorème du bon ordre démontré par A. Tarski en 1924). Ceci montre bien l'équivalence de l'assertion 4.3 avec l'axiome du choix, énoncé qui est posé comme principe par Russell, et à propos duquel il précise d'ailleurs sa pensée dans une note (pp. 381-382).

"Note : il a été montré que toute classe infinie contient une classe dénombrable. Ainsi si une classe v, dénombrable, contient tous les termes de u, sauf un nombre fini, ces derniers pourront être ajoutés à la classe v ; mais s'il reste une infinité de u, une nouvelle classe dénombrable peut être extraite, et ce processus peut être réitéré sans fin, tant qu'il reste des éléments de u. Il n'est pas impossible qu'un théorème puisse être découvert, prouvant la possibilité de poursuite du procédé. Il est, de toute façon, éminemment souhaitable que la possibilité de complétion soit prouvée ou son contraire.

**On peut consulter l'article de Tarski déjà cité, ou bien le remarquable ouvrage "Equivalents of Axiom of Choice" de J. et H. Rubin (Studies on Logic - North Holland Publ. Comp) - page 52 .

En vue de montrer l'importance de cette recherche, nous poserons ce théorème en hypothèse énoncée comme proposition primitive (4.3), et quelques déductions immédiates en sont données (4.31 à 4.51)".

La question posée par Russell est bien celle de la possibilité d'une infinité arbitraire de choix ; ce passage permet d'affirmer qu'il a aperçu qu'il fallait admettre une telle possibilité pour déduire des propositions telles que 4.3 et les conséquences qui en découlent.

3.2. La classe multiplicative et l'acceptation implicite de l'axiome multiplicatif en 1902 et 1903

Dans l'article de 1902 à la page 383, la classe multiplicative d^* d'une "classe" d est définie au numéro 6.0. . Cette définition est exprimée dans le symbolisme Russellien, mais elle exprime ceci :

$d^\times$ est l'ensemble des m tels que

- m est inclus dans l'union de d
- pour tout p appartenant à d , l'ensemble $p \cap m$ est un singleton.

Une note qui suit la définition nous instruit cependant

" elle (la classe $d^\times$) n'a pas d'existence, selon sa définition à moins que d soit une classe de classes deux à deux disjointes"

Il n'est pas déraisonnable de penser que les auteurs ont entendu par "existence" le fait que la classe multiplicative $d^\times$ est non vide, dès que d est constitué de classes non vides. Or, ceci est la forme même de l'axiome multiplicatif, équivalent de l'axiome du choix, reconnu pour tel dès 1910 par les auteurs de l'article dans les auteurs de l'article dans les Principia Mathematica. Dans les "Principes of Mathematics, parus en 1903, écrits par Bertrand Russell en préparation des fameux "Principia Mathematica" (1910-1913), l'axiome multiplicatif commence à apparaître au moment où il devient nécessaire à la poursuite de la construction Russellienne de la théorie des cardinaux, c'est-à-dire au chapitre XII des "Principes" intitulé "Addition et multiplication" ; il est clair en effet qu'à cet endroit de l'ouvrage l'existence de la classe multiplicative est acceptée, quelle que soit la "taille" des ensembles.

Citons B. Russell ([27] ch.XII p. 119)

"La définition générale de la multiplication est due à M. A.N. Whitehead. Elle est comme suit : soit k une classe de classes, dont aucun couple d'entre elles n'ait d'élément commun. Formons ce qui est appelé la classe multiplicative de k, c'est-à-dire, la classe dont chaque terme est une classe formée en choisissant un et un seul terme dans chacune des classes appartenant à k. Alors le nombre de termes de la classe multiplicative de k est le produit de tous les nombres des diverses classes composant k" . .... Puis..... ".....
la définition ci-dessus ne nécessite pas de décider, concernant les nombres impliqués, s'ils sont finis ou infinis".

Et Russell indique les avantages de cette définition du produit sur la définition de Cantor ; ce dernier définit le produit de deux cardinaux comme cardinal de l'ensemble des couples dont les constituants sont respectivement un élément d'un premier et d'un second ensemble, les cardinaux de ces ensembles étant les cardinaux donnés ; de proche en proche, se définit alors le produit de 3,4,...,n, cardinaux. Russell remarque que l'on peut avoir ainsi le produit d'un nombre fini de cardinaux quelconques ([27], p. 119).

"Mais elles ne peuvent, telles quelles, permettre la définition de la somme ou produit d'un nombre infini de nombres. A ce grave défaut il est rémédié dans les définitions ci-dessus, qui nous rendent capable de poursuivre l'arithmétique comme elle doit l'être, sans introduire la distinction entre fini et infini tant que nous ne souhaitons pas l'étudier".

Il est donc certain que l'utilité de l'existence de la classe multiplicative n'est pas mise en doute, même dans le cas d'une classe constituée par une infinité quelconque de classes infinies.

3.3. Enoncés plus faibles que l'axiome du choix dans l'article de 1902.

Aux pages 392 et 393 de l'article de 1902 les auteurs soulignent qu'un certain nombre de résultats ne nécessitent pas l'adoption de la proposition 4.3., déjà citée (au § 3.1. de cet article), mais que l'énoncé $\alpha+\alpha=\alpha$, pour tout cardinal transfini α, suffit ; en particulier ils montrent que l'énoncé " $\alpha < \beta$ implique $\alpha+\beta=\beta$ " en découle ; mais ils soulignent que l'énoncé $\alpha.\alpha=\alpha$ n'a pu en être déduit. La question est ainsi soulevée du rapport entre des énoncés tels que $\alpha+\alpha=\alpha$, $\alpha.\alpha=\alpha$ pour α cardinal transfini. Or si Tarski démontrera en 1924 que le second est équivalent à l'axiome du choix, il faudra attendre les travaux de G. Sageev en 1975, pour démontrer, à l'aide de la théorie des modèles, que, le premier de ces énoncés ($\alpha+\alpha=\alpha$) est plus faible que l'axiome du choix.

L'approche de l'axiome du choix est donc assez avancée chez les mathématiciens britanniques et particulièrement chez Whitehead et Russell ce qui s'explique par le souci d'établir des fondements logiques aux mathématiques. Mais nous allons voir que cela va aller encore plus loin avec les mathématiciens de l'école italienne.

4. La mise en évidence de l'utilisation d'un principe de choix par les mathématiciens italiens de 1890 à 1902.

Giuseppe Peano avait noté en 1890, à l'occasion de la démonstration d'existence de solutions d'un système d'équations différentielles, la nécessité, lorsqu'une démonstration exige une infinité de choix, de "déterminer" ces choix (de donner une "norme de choix" dira plus tard E.W. HOBSON).

Péano écrivait : (Démonstration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires - Math. Ann. XXXVII (1890) p.210)

"Mais comme on en peut appliquer une infinité de fois une loi arbitraire avec laquelle à une classe a on fait correspondre un individu de cette classe, on a formé ici une loi déterminée avec laquelle à chaque classe a sous des hypothèses convenables, on fait correspondre un individu de cette classe".

Un autre mathématicien de l'école Italienne Rodolfo BETTAZZI a été, à peu près à la même période, encore plus explicite et a énoncé certains théorèmes sous réserve d'existence d'une "loi de choix" (legge di scelta), précurseur en cela de la position que certains mathématiciens adopteront après la bombe de ZERMELO en 1904 (H. Lebesgue, B. Russell, par exemple). Dans un article écrit en 1892 et paru dans les Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, l'auteur traitant des fonctions discontinues, pose préalablement la question de certains principes démonstratifs : (Sui punti di discontinuita delle funzione di variabile reale. (écrit 19 mars 1892) Rendiconti Circ. Mat. Palermo VI (1892) p. 176)

"Pour qu'un ensemble constitué d'un point, quel qu'il soit, dans chacun des sous-ensembles d'une infinité déterminée de sous-ensembles de G, il faudrait avoir résolu la question : quel que soit un ensemble donné, peut-on indiquer une loi qui appliquée à cet ensemble, permet de déterminer un point. Dans l'état actuel de la théorie des ensembles on ne connaît pas de solution générale à ce problème ; si dès lors nous appelons loi de choix une loi à l'aide de laquelle, dans un ensemble, on détermine un point, (du reste quelconque), dans chacun de ses sous-ensembles, on ne peut pas dire que pour chaque ensemble une loi de choix soit connue".

Ce texte remarquable, énonce le problème sous la forme "axiome multiplicatif", qui ne sera énoncé qu'en 1905 par G. HARDY et B. RUSSELL il exprime que cet énoncé est impliqué par un énoncé de la forme "axiome de choix", du type de celui de E. ZERMELO en 1904. Si l'auteur met en doute la vérité universelle de tels énoncés, il n'en a pas moins remarquablement mis en évidence le lien qui existe entre ces énoncés.

Mais là où cet article donne un point de vue original et précoce, c'est dans l'énoncé de théorèmes sous l'hypothèse d'une loi de choix ; il s'agit de théorèmes sur les fonctions discontinues. Il convient de noter la précision de langage de R. BETTAZZI qui distingue, et peut être est-il un des premiers à le faire, les points limites ("limite"), des points d'accumulation ("confine") et en justifiant la "parola nuova" il souligne que cela est nouveau par rapport même à un article de G. PEANO datant également de 1892 (p. 177). Mais voici l'énoncé du théorème dont nous avons parlé :

"Soit y une fonction définie sur un ensemble g ayant un point limite, par exemple à droite de x = a ; il est possible d'extraire de g un sous-ensemble élémentaire à droite de a, tel que les valeurs correspondantes de y ont pour x = a un point adhérent et un seul, qui soit déterminé parmi ceux de l'adhérence de y pour x = a (ou l'unique valeur d'adhérence) - au moins quand il existe un intervalle (a, a + ε) tel que sur son intersection avec g, soit connue une loi de choix". (théorème 7 pp. 181-182, de l'article déjà cité).

Les théorèmes 8 1° (p. 184) et 8 2° (p. 186) sont également énoncés sous le même hypothèse d'existence d'une loi de choix. Cette hypothèse, légitime aux yeux de l'auteur, l'utilisation d'une infinité de choix arbitraires dans la démonstration.

En 1896 et 1897, R. BETTAZZI va produire une série de trois articles dans les Attidella Reals Accademia di Torino sur les ensembles finis ([1] [2] [3]). Ces articles paraissent à la même période que deux articles de C. BURALI-FORTI, sur le même sujet et dans la même revue. Notons que ce dernier avait eu besoin, au cours de ces articles d'introduire une "proposition primitive", autrement dit un axiome, équivalent à l'axiome du choix dans une forme voisine de la loi de trichotomie. Mais alors que BURALI-FORTI adopte la définition dedekindienne des ensembles infinis comme ensembles réflexifs, les ensembles finis étant les non-infinis, donc les non réflexifs, R. BETTAZZI préfère partri des enembles finis définis comme ensembles inductifs, les ensembles infinis étant les non-finis ; il invoque notamment à l'appui de son point de vue des raisons pédagogiques ; la précision de vocabulaire est encore à remarquer, puisqu'il parle d'"ensembles infinis" (non inductifs) et d'"ensembles développables" (réflexifs) ; il démontre alors que tout ensemble "développable" (sviluppabile) est "infini" ([2] § 10 Cor 2 p. 367). Mais il note que la réciproque n'est pas prouvée et le note qui suit cette remarque mérite à coup sûr, la citation : ([2] p. 368).

"Dedekind (Prop. 159)* tente de démontrer la réciproque ; sa démonstration exige que soit établie une injection entre tous les Z possibles d'un ensemble fini quelconque et l'ensemble Σ proposé (de puissance supérieure à celle d'un ensemble fini quelconque) et qu'on construit un ensemble en prenant une injection de tous les Z dans Σ et Dedekind n'en détermine pas une particulière parmi toutes, de sorte qu'il doit en prendre une arbitrairement et ainsi choisir arbitrairement un élément dans chacun des ensembles en nombre infini, ce qui ne semble pas rigoureux ; à moins que l'on ne veuille admettre comme postulat qu'un tel choix puisse se faire, ce qui nous paraît cependant inopportun".

L'analyse qui précéde est remarquable ; elle précéde de douze ans l'analyse analogue faite par E. ZERMELO dans un article paru dans les Acta Mathematica en 1909 ; même si B. RUSSELL et G. HARDY ont sou-

---

[1] R. BETTAZZI Sulla Catena di un ente in un gruppo Atti della R. Acc. Torino XXXI (1896) 304-314

[2] R. BETTAZZI Gruppi finiti e infiniti di enti - Atti d. R.A. Torino XXXI (1896) 362-368

[3] R. BETTAZZI Sulla definizione del gruppo finito - Atti d. R.A. Torino XXXII (1897) 240-243

(*) Il s'agit de la proposition 159 de "Was sind und was Sollen die Zahlen" (1887) .

ligné l'intervention de l'axiome multiplicatif dans l'équivalence entre les deux définitions des ensembles finis ce n'est qu'en 1905, donc huit ans après l'article de BETTAZZI. La tendance qui pousse à analyser les schémas démonstratifs en tant que tels, est à coup sûr le résultat de l'influence de la logistique peanienne ; cette influence est génératrice de la perspicacité à déceler l'intervention de l'axiome du choix dans les démonstrations, clairement et en précurseurs, par les mathématiciens italiens à revenir en partie sur sa position et atténuer la portée de son analyse dans un article ultérieur des "Atti di Torino" [3]. La démonstration par Burali-Forti [4] de l'équivalence des deux définitions des ensembles finis semble enlever à Bettazzi le doute que l'analyse précédente avait fait naître en lui ; c'est, outre l'autorité de son auteur, dû au fait que cette démonstration escamote l'utilisation d'une infinité arbitraire de choix par l'introduction de la proposition primitive P_{pl} (u < U'u) qui comme le soulignera Bertrand Russell dans un article de 1906 est fausse, sauf dans le cas où u est une classe de classes deux à deux disjointes ; or ce n'est pas dans cette situation que le principe en question est appliquée ; il faut donc constater que Burali-Forti appuie sa démonstration sur une proposition non démontrée en fait, la proposition 18 (page 46) qui découle de l'axiome du choix. (Si u est infinie alors U'u est infinie). L'analyse de Bettazzi était supérieure à la pseudo démonstration de Burali-Forti et c'est pourtant le premier qui cède le pas .

Le seul refuge de Bettazzi reste la didactique pour justifier sa préférence pour la définition des ensembles finis comme ensembles inductifs. Il n'en reste pas moins que son analyse, citée plus haut, de la démonstration de Dedekind, où il décèle l'utilisation d'un principe de choix à ses yeux discutable, était digne d'être remarquée. La perspicacité de Bettazzi peut s'expliquer par le fait qu'il se trouve sur la résultante des deux grandes influences de l'école italienne ; celle de Ulisse Dini et celle de Giuseppe Peano. En effet Rodolfo Bettazzi né à Florence le 14 novembre 1861, étudiera de 1878 à 1882 à l'Ecole Normale Supérieure de Pise et suivra les cours de DINI qui a alors publié ses célèbres Fondamenti per la teorica delle funzini di variabili reali" (Pise 1878) ; il devient assistant de Dini, dans la chaire de Calcul Infinitésimal. En 1891, cependant Bettazzi est

[4] C. BURALI-FORTI Le classe finite - Atti di R.A. Torino XXXII (1897) 34-75 .

nommé à Turin où il intègre dans l'équipe de Peano, participant à la rédaction de la section du Formulaire consacré à la notion de limite. Ainsi Bettazzi se trouve à la croisée des chemins de l'Analyse en plein progrès et de la logique mathématique dont l'essor commence ; or c'est dans l'interaction entre l'Analyse et la Logique que se trouve l'émergence de l'axiome du choix, ce qui peut expliquer le rôle de précurseur oublié de Bettazzi dans la découverte de cette émergence.

Nous pourrions encore parler d'un article de Beppo Levi écrit en 1902 intitulé "Intorno alla teoria degli aggregati" (Revue Ist. Lombardo. Sc. e Lettere 35 (1902) pp. 863-868) où l'auteur critique la démonstration que Bernstein donne en 1901 de la puissance des ensembles fermés, notamment en lui reprochant l'utilisation du postulat de bonne ordonnabilité des ensembles sous forme cachée :

"Néanmoins dans cet article, il convient de relever une nouvelle acceptation qui me semble dériver au fond du même postulat d'ordonnabilité, quoique de manière plus cachée, de sorte que cela a pu laisser un moment d'hésitation" puis il dit plus précisément : "du raisonnement de Bernstein on doit retenir - ce qui est immédiat si A est fini - que la puissance de S est au plus égale à celle de A. Admettre cela sans preuve ne me semble pas licite". S est ici un ensemble d'ensembles deux à deux disjoint A est l'union de S. Ce principe est identique à la proposition primitive P_pI, (corrigée) de Burali-Forti. Mais Beppo-Levi poursuit : "L'ensemble A étant bien ordonné, tout ensemble s (qui est une partie de A) aura un élément "a", premier pour l'ordre de A et puisque les s sont disjoints, cet élément n'appartient pas à d'autres s. Entre les s et leurs premiers éléments (ou les éléments de position donnée) on peut donc établir une correspondance biunivoque qui "représente" S sur une partie de A. De là, résulte la proposition" Beppo-Levi montre donc que le bon ordre implique un énoncé qui préfigure celui de l'axiome multiplicatif de Whitehead et Russell. Et d'ailleurs Beppo Levi précise bien sa pensée "On voit alors que la démonstration s'applique sans altération dans tous les cas où dans les s sont bien ordonnés ou plus généralement lorsqu'on peut, dans tout s, distinguer de façon univoque un élément".

Nous sommes donc très près de l'axiome du choix équivalent au bon ordre y compris dans la forme des énoncés.

Conclusion

L'utilisation d'une infinité de choix arbitraires dans les démonstrations est fréquente dans les mathématiques de cette période de 1870 à 1904. Le problème que cela peut poser n'est soulevé que par les mathématiciens italiens de l'école peanienne, sans que pour autantles futurs adversaires de l'axiome du choix ne s'en émeuvent. Il faudra la démonstration de la possibilité du postulat de Zermelo pour que le tollé se déclenche. L'axiome du choix est cependant le produit naturel de l'évolution mathématique en ce début du XXème siècle .